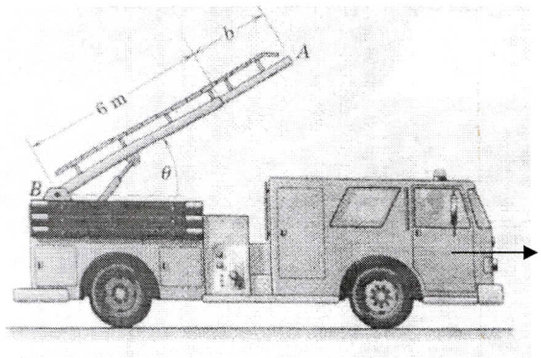
امتحان پایان ترم دینامیک **خرداد ماه ۹۵** **مدت: ۲:۱۵ ساعت**

توجه: به همه سوالات پاسخ داده شود. بارم همه سوالات مساوی است. استفاده از موبایل، تبلت و .. به عنوان ماشین حساب حتی در حالت خاموش نیز مجاز نمی باشد.

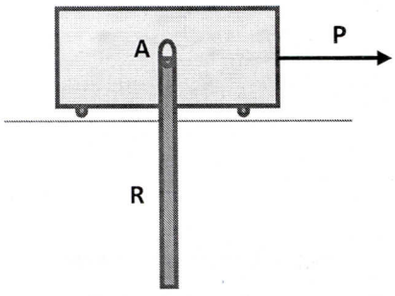
۱- ماشین اتش نشانی نشان داده شده در شکل زیر با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه و شتاب ۲- متر بر مجذور ثانیه به سمت راست در حال حرکت است. در حال حرکت نردبان کامیون می چرخد و طول ان نیز زیاد می شود. اگر در لحظه مورد نظر زاویه نردبان با افق برابر $\theta = 30^\circ$ و سرعت زاویه ای نردبان برابر $\omega = 2rad/s$ و شتاب ان $\alpha = 2.5rad/s^2$ باشد و در همین لحظه $b = 1.2m$, $\dot{b} = 1.5m/s$, $\ddot{b} = -0.4m/s^2$ باشد مطلوبست محاسبه سرعت و شتاب مطلق نقطه انتهای نردبان یعنی نقطه A نسبت به زمین



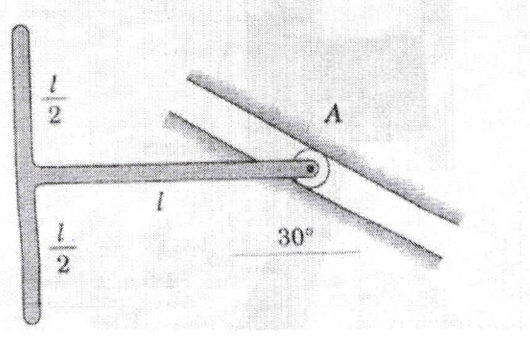
۲- نیروی افقی P=100N به صورت ناگهانی مطابق شکل به ارابه و میله در حال سکون وارد می گردد. میله یکنواخت R توسط پین بدون اصطکاک A به ارابه متصل است. الف- شتاب زاویه ای اولیه میله را حساب کنید؟

ب- نیروی اولیه در پین چه اندازه است؟

جرم ارابه برابر ۵۰ کیلوگرم، جرم میله ۱۰ کیلوگرم و طول میله برابر ۱ متر است.

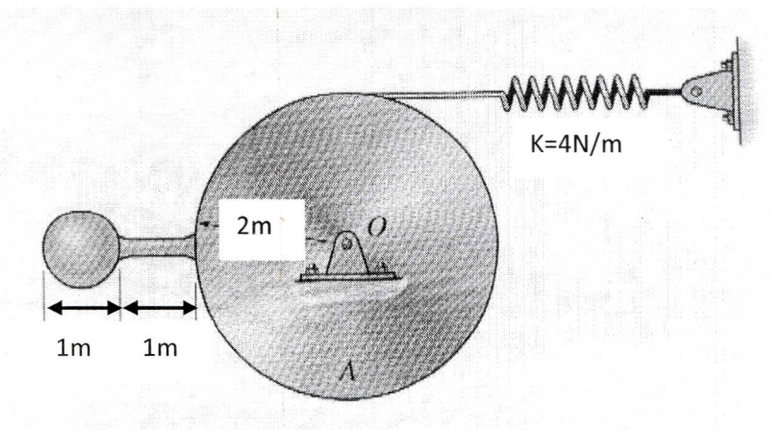


۳- جسم صلب نشان داده شده در شکل زیر از دو میله یکنواخت که به هم جوش خورده اند تشکیل شده است. طول هر کدام از میله ها $\ell = 2m$ و جرم هر یک از میله ها $m = 5Kg$ است. میله T شکل از حالت سکون و در وضعیت نشان داده شده در صفحه قائم رها می شود. نقطه A به غلتک بدون حرمی متصل است و می تواند بدون اصطکاک در شیار نشان داده شده حرکت کند. الف- مطلوبست محاسبه شتاب نقطه A درست پس از رها شدن سیستم ب- محاسبه نیروی وارد به غلتک از طرف سطح درست پس از رها شدن سیستم(ممان اینرسی میله حول مرکز ثقل آن: $I_G = \frac{1}{12}mL^2$ است)



۴-دیسک A به جرم ۱۵ کیلوگرم , و شعاع ۲ متردر نقطه O مفصل شده و ازادانه و بدون اصطکاک حول ان در صفحه قائم دوران می کند. میله ای به طول ۱ متر و به جرم ۲ کیلوگرم و کره ای به قطر ۱متر و جرم ۱۰ کیلوگرم مطابق شکل به دیسک جوش شده اند. در لحظه اول میله و کره در وضعیت نشان داده شده قرار دارند و فنر به اندازه ۱متر کشیدگی دارد. الف- سرعت زاویه ای دیسک را وقتی به اندازه ۳۰ درجه در خلاف جهت عقر به های ساعت چرخیده حساب کنید. ب- سرعت زاویه ای دیسک را وقتی به اندازه ۹۰ درجه در خلاف جهت عقر به های ساعت چرخیده حساب کنید

(ممان اینرسی دیسک حول مرکز ثقل آن: $I_G = \frac{1}{2}mR^2$ و ممان اینرسی کره حول مرکز ثقل خود $I_G = \frac{2}{5}mr^2$ است)



روابط مورد نیاز:

سرعت نسبي بين دو نقطه از يک جسم صلب

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times A\vec{B} + \vec{V}_{rel}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times A\vec{B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times A\vec{B}) + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

روابط نيوتن براي جسم صلب:

در مختصات x-y

$$\begin{cases} \sum F_X = ma_X^G \\ \sum F_Y = ma_Y^G \\ \sum M_G = I_G\alpha \end{cases}$$

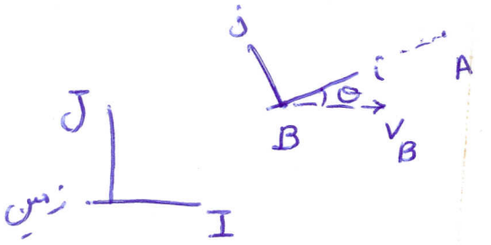
در مختصات t-n

$$\begin{cases} \sum F_t = ma_t^G \\ \sum F_n = ma_n^G \\ \sum M_G = I_G\alpha \end{cases}$$

روابط شتاب در مختصات t-n

$$a_t = r\alpha \quad , \quad a_n = r\omega^2$$

سوال ۱



جواب برای کنفت نازنین بوار

$$\vec{V_A} = \vec{V_B} + \vec{\omega} \times \vec{BA} + \vec{V_{rel}}$$

$$V_B = 20\cos\theta\,\vec{i} - 20\sin\theta\,\vec{j} = 17.32\vec{i} - 10\vec{j} \quad (1/5)$$

$$\vec{\omega} = 2\vec{k}$$

$$\vec{BA} = (6+1.2)\vec{i}$$

$$\vec{V_{rel}} = 1.5\vec{i}$$

$$\vec{V_A} = 20\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - 20\times\frac{1}{2}\vec{j} + 2\vec{k}\times(7.2)\vec{i} + 1.5\vec{i}$$

$$\vec{V_A} = 18.82\vec{i} + 4.4\vec{j} \rightarrow |V_A| = 19.328\ m/s \quad (1)$$

$$\vec{a_A} = \vec{a_B} + \alpha\times\vec{BA} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{BA}) + 2\vec{\omega}\times\vec{V_{rel}} + \vec{a_{rel}}$$

$$a_B = -2(\cos\theta)\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j} = -\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{\omega} = 2\vec{k}\ ,\ \alpha = 2.5\vec{k}$$

$$\vec{BA} = 7.2\vec{i}\ ,\ V_{rel} = 1.5\vec{i}\ \ a_{rel} = -.4\vec{i}$$

$$\vec{a_A} = -\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j} + 2.5\vec{k}\times 7.2\vec{i} + (2\vec{k})\times(2\vec{k}\times 7.2\vec{i}) + 2\vec{k}\times 1.5\vec{i} + (-.4\vec{i}) \quad (1/5)$$

$$\vec{a_A} = -\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j} + 18\vec{j} + (-28.8\vec{i}) + 6\vec{j} - .4\vec{i}$$

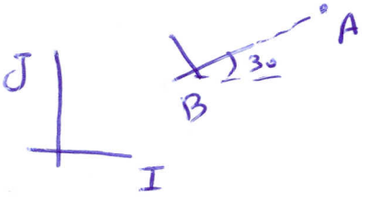
$$\vec{a_A} = (-\sqrt{3} - 28.8 - .4)\vec{i} + (1 + 18 + 6)\vec{j}$$

$$\vec{a_A} = -30.9321\vec{i} + 25\vec{j} \quad (1)$$

$$|\vec{a_A}| = 39.77\ m/s^2$$

سوال ۱

در راستای $\vec{I}$ و $\vec{J}$ ثابت



$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{BA} + \vec{V}_{rel}$$

$$\vec{V}_A = 20\vec{I} + 2\vec{K} \times (7.2\cos\theta\,\vec{I} + 7.2\sin\theta\,\vec{J}) + (1.5\cos\theta\,\vec{I} + 1.5\sin\theta\,\vec{J}) \quad (1/0)$$

$$\vec{V}_A = 20\vec{I} + 7.2\sqrt{3}\,\vec{J} - 7.2\vec{I} + .75\sqrt{3}\,\vec{I} + .75\vec{J}$$

$$\vec{V}_A = (20 - 7.2 + .75\sqrt{3})\vec{I} + (7.2\sqrt{3} + .75)\vec{J}$$

$$\vec{V}_A = 14.1\vec{I} + 13.32\vec{J} \rightarrow V_A = 19.328\ m/s \quad (1)$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{BA}) + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

$$\vec{a}_A = -2\vec{I} + 2.5\vec{K} \times (7.2\sqrt{3}/2\,\vec{I} + 7.2 \times \tfrac{1}{2}\vec{J}) + 2\vec{K} \times (2\vec{K} \times (3.6\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\vec{I} + 3.6\vec{J}) + 2 \times 2\vec{K} \times (.75\sqrt{3}\,\vec{I} + .75\vec{J}) + (-.4)(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{I} + \tfrac{1}{2}\vec{J}) \quad (1/5)$$

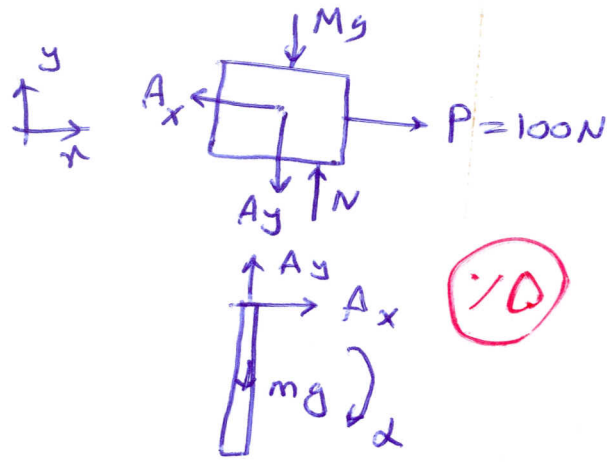
$I \to J \to K$

$$\vec{a}_A = -2\vec{I} + 15.588\vec{J} - 9\vec{I} - 24.9415\vec{I} - 14.4\vec{J} + 5.1962\vec{J} - 3\vec{I} - .3464\vec{I} - .2\vec{J}$$

$$\vec{a}_A = (-2 - 9 - 24.9415 - 3 - .3464)\vec{I} + (15.588 - 14.4 + 5.1962 - .2)\vec{J} = -39.1879\vec{I} + 6.1842\vec{J} \quad (1)$$

$$|a_A| = 39.77\ m/s^2$$

سؤال دوم



(10)

$$\begin{cases} P - A_x = M a_A \\ N - A_y - Mg = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = m a_x^G \\ A_y - mg = m a_y^G \\ A_x \times \frac{1}{2} = I_{\perp} \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100 - A_x = 50 a_A & /3 \\ A_x = 10 a_x^G & \\ A_y - 98 = 10 a_y^G & /3 \\ .5 A_x = \frac{1}{12}(10)(1)^2 \alpha & /3 \end{cases}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AG} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AG}) \quad (\vec{\omega} = 0)$$

$$\vec{a}_G = a_A \vec{i} + (-\alpha \vec{k}) \times (-.5 \vec{j})$$

$$a_G^x = a_A - .5\alpha$$

$$\vec{a}_G = a_A \vec{i} - .5\alpha \vec{i} = (a_A - .5\alpha)\vec{i} \quad (a_G^y = 0)$$

(1)

1) $100 - A_x = 50 a_A$
2) $A_x = 10(a_A - .5\alpha)$
3) $A_y - 98 = 0$
4) $.5 A_x = \frac{10}{12}\alpha \rightarrow A_x = \frac{5}{3}\alpha$

$$2) \rightarrow \frac{5}{3}\alpha = 10 a_A - 5\alpha \rightarrow 10 a_A = (5 + \frac{5}{3})\alpha = \frac{20}{3}\alpha$$

$$\boxed{a_A = \frac{2}{3}\alpha}$$

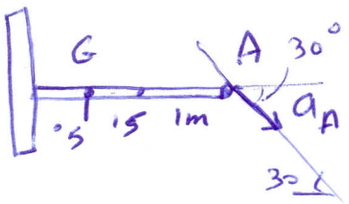
~~$2) \rightarrow \frac{5}{3}\alpha = 2 \times 10 \times \frac{2}{3}\alpha - 5\alpha$~~

$$1) \rightarrow 100 - \frac{5}{3}\alpha = 50 \times \frac{2}{3}\alpha \rightarrow 100 = (\frac{100}{3} + \frac{5}{3})\alpha$$

$$\boxed{\alpha = 2.8571 \text{ rad/s}^2} \quad (/2)$$

$$\boxed{a_A = 1.9048 \text{ m/s}^2} \quad (/2)$$

$$\boxed{A_x = 4.7617 \text{ N}} \quad \boxed{A_y = 98 \text{ N}} \rightarrow \boxed{A = 98.1156 \text{ N}} \quad (/2)$$

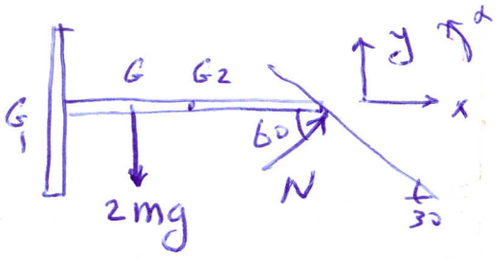


$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AG} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AG})$$

$$\vec{a}_G = a_A \cos 30\, \vec{i} - a_A \sin 30\, \vec{j} + \alpha \vec{k} \times (-1.5\vec{i})$$

$$\vec{a}_G = \frac{a_A\sqrt{3}}{2}\vec{i} + (-\tfrac{1}{2}a_A - 1.5\alpha)\vec{j}$$

$$a_G^x = \frac{\sqrt{3}}{2}a_A \quad (\text{٠٫٥}) \qquad a_G^y = -\tfrac{1}{2}a_A - 1.5\alpha \quad (\text{٠٫٧٥})$$



(٠٫٥)

$$\begin{cases} N\cos 60 = 2m a_x^G & (\text{٠٫٥}) \\ N\sin 60 - 2mg = 2m a_y^G & (\text{٠٫٨}) \\ N\sin 60 \times 1.5 = I_{G/\alpha} & (\text{٠٫٥}) \end{cases} \qquad \begin{cases} N \times \frac{1}{2} = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a_A\right) \\ N\frac{\sqrt{3}}{2} - 98 = 10\left(-\frac{1}{2}a_A - 1.5\alpha\right) \\ N \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1.5 = I_{G/\alpha} \end{cases}$$

$$I_{G'} = \underbrace{\left(\frac{1}{12}5(2)^2 + 5(.5)^2\right)}_{G_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{12}(5)(2)^2 + 5(.5)^2\right)}_{G_2} = \frac{35}{6}\ \text{kgm}^2 \quad (\text{٠٫٥})$$

$I_{G'} = 5.83\ \text{kgm}^2$

$$\text{1)}\ \frac{N}{2} = 5\sqrt{3}\,a_A$$

$$\text{2)}\ N\frac{\sqrt{3}}{2} - 98 = 10\left(-\tfrac{1}{2}a_A - 1.5\alpha\right)$$

$$\text{3)}\ N \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1.5 = \frac{35}{6}\alpha$$

3) $\rightarrow N = 4.4905\alpha$

1) $\rightarrow a_A = .2593\alpha$

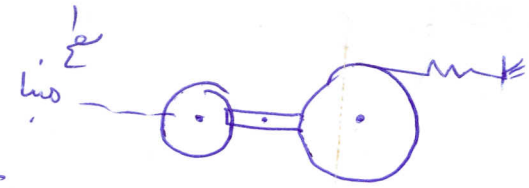
2) $\rightarrow (4.4905\alpha)\frac{\sqrt{3}}{2} - 98 = 10\left(-\tfrac{1}{2} \times .2593\alpha - 1.5\alpha\right)$

$\alpha = 4.855\ \text{rad/s}^2$

$a_A = 1.2589\ \text{m/s}^2$ (٠٫٥)

$N = 21.8014\ \text{N}$ (٠٫٥)

سوال ۴



$T_1 = 0$

$U_{g1} = 0$

$U_{e1} = \frac{1}{2}(k)(x)^2 = \frac{1}{2}(4)(1)^2 = 2\,J$ (۱/۵)

الف -

$T_2 = \frac{1}{2} I_o^{دیسک} \omega^2 + \left(\frac{1}{2} m_{میله} V_{میله}^{G\,2} + \frac{1}{2} I_{میله}^{G} \omega^2 \right) + \left(\frac{1}{2} m_{کره} V_{کره}^{G\,2} + \frac{1}{2} I_{کره}^{G} \omega^2 \right)$

چون به هم جوش شده اند G هر کدام ثابت است داریم.

$V_{میله}^{G} = 2.5\omega$ (۱/۵) $\quad I_{میله}^{G} = \frac{1}{2} m_{میله} L^2$

$V_{کره}^{G} = 3.5\omega \quad I_{کره}^{G} = \frac{2}{5} m_{کره} r_{کره}^2$

$T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 15 \times 2^2 \right)\omega^2 + \left[\frac{1}{2} \times 2 \times (2.5\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} \times 2 \times 1^2 \right)\omega^2 \right] + \left[\frac{1}{2} \times 10 \times (3.5\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} \times 10 \times .5^2 \right)\omega^2 \right]$ (۱)

$T_2 = 15\omega^2 + 6.25\omega^2 + \frac{1}{12}\omega^2 + 61.25\omega^2 + \frac{1}{2}\omega^2 = 83.083\omega^2$

$U_{g2} = -m_{میله} g h_{میله} - m_{کره} g h_{کره} = -2 \times 9.8 \times 2.5 \sin 30 - 10 \times 9.8 \times 3.5 \sin 30 = -24.5 - 171.5 = -196\,J$ (۱/۵)

$U_{e2} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times (1 + 2 \times \pi/6)^2 = 8.3820\,J$ (۱/۵)

$0 + 0 + 2 = 83.083\omega^2 - 196 + 8.3820 \rightarrow \omega = 1.5107\ rad/s$ (۱/۵)

ب -

$T_1 = 0$

$U_{g1} = 0$

$U_{e1} = 2\,J$

$T_2 = 83.08\omega^2$

$U_{g2} = -2 \times 9.8 \times 2.5 - 10 \times 9.8 \times 3.5 = -392\,J$ (۱/۵)

$U_{e2} = \frac{1}{2} 4 (1 + \pi)^2 = 34.3056\,J$ (۱/۵)

$0 + 0 + 2 = 83.08\omega^2 - 392 + 34.3056$

$\omega = 2.0807\ rad/s$ (۱/۵)