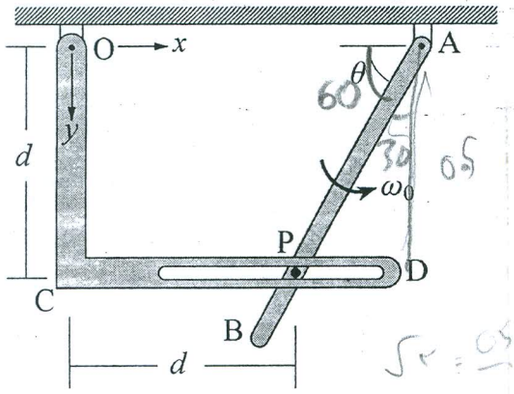
امتحان پایان ترم دینامیک **دی‌ماه 96** **مدت: 2:15 ساعت**

توجه: به همه سوالات پاسخ داده شود. بارم همه سوالات مساوی است. استفاده از موبایل، تبلت و .. به عنوان ماشین حساب حتی در حالت خاموش نیز مجاز نمی باشد

سوال اول: در شکل روبرو، بازوی شیاردار و شکسته‌ی OCD در نقطه‌ی ثابت O و بازوی AB در نقطه‌ی ثابت A لولا شده‌اند. پین P به بازوی AB متصل شده و حرکت آن در شیار بازوی OCD سبب دوران این بازو می‌شود. بازوی AB با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_0 = 3rad/s$ در جهت نشان داده شده دوران می‌کند. در لحظه‌ی نشان داده شده که CD افقی است، فاصله‌ی CP=d =0.5m و θ=60°، مطلوب است محاسبه‌ی:



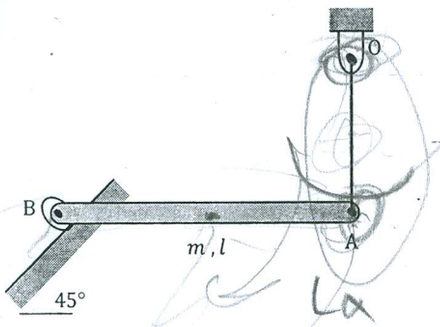
الف- بردار سرعت خطی پین P در دستگاه xy نشان داده شده.

ب- بردار شتاب خطی پین P در دستگاه xy نشان داده شده.

ج- سرعت زاویه‌ای بازوی OCD.

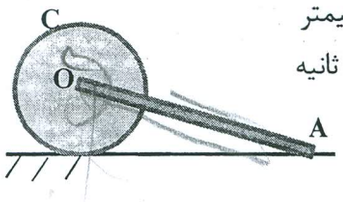
د- شتاب زاویه‌ای بازوی OCD.

سوال دوم: نقطه‌ی A از میله‌ی باریک صلب و یکنواخت AB شکل روبرو به‌وسیله‌ی ریسمانی به‌نقطه‌ی O متصل شده است. نقطه‌ی B از میله نیز به‌وسیله‌ی غلتک کوچک و بدون جرم، روی سطح شیب‌دار نشان داده شده قرار دارد. در لحظه‌ی نشان داده شده میله در وضعیت افقی و راستای ریسمان قائم است. در این لحظه میله از حالت سکون رها می‌شود. شتاب مرکز جرم میله، شتاب زاویه‌ای میله، نیروی واکنش سطح در B و نیروی ریسمان را در لحظه‌ی نخست محاسبه کنید. (از اصطکاک صرف نظر و توجه شود که ریسمان قطع نمی‌شود. بلکه پس از رها شدن میله، هم‌چنان اتصال ریسمان به میله برقرار می‌ماند.) گشتاور اینرسی جرمی میله‌ی صلب باریک و یکنواخت به‌طول l و جرم m حول مرکز جرم آن برابر $I_G = \frac{ml^2}{12}$ است.

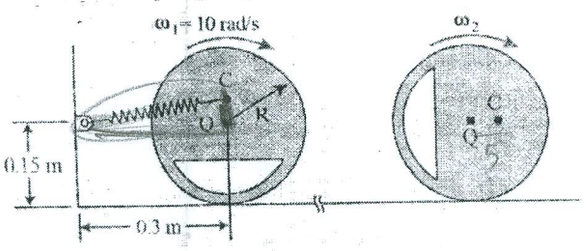


سوال سوم: استوانه ای C به جرم 45 کیلوگرم و شعاع 30 سانتیمتر در حال غلتش بر روی سطح صاف مطابق شکل می باشد. میله OA به جرم 4.5 کیلوگرم و طول 90 سانتیمتر در نقطه O مرکز استوانه به ان لولا شده است. اگر مرکز استوانه با سرعت اولیه 3 متر بر ثانیه به سمت چپ در حرکت باشد و ضریب اصطکاک جنبشی بین استوانه و میله با سطح زمین برابر 0.4 باشد. چه مدت طول می‌کشد تا سیستم از حرکت باز ایستد؟

(گشتاور اینرسی جرمی استوانه حول مرکز جرم ان $I_G = \frac{MR^2}{2}$)



سوال چهارم: مرکز جرم دیسک غلتان شکل زیر در نقطه C و به فاصله 5 سانتیمتر از مرکز هندسی ان یعنی نقطه Q قرار دارد. جرم دیسک 2 کیلوگرم و شعاع ان R برابر 15 سانتیمتر است. به نقطه C یک فنر متصل شده است که در وضعیت دوم نشان داده نشده است. طول ازاد فنر 30 سانتیمتر و سختی ان برابر 3N/m است. شعاع ژیراسیون دیسک غلتان حول مرکز هندسی ان $R_Q = 0.103m$ است. اگر سرعت زاویه ای اولیه دیسک برابر 10 رادیان بر ثانیه باشد، مطلوبست محاسبه سرعت زاویه ای دیسک در حالت دوم یعنی وقتی مطابق شکل سمت راست به اندازه یک چهارم دور چرخیده است؟



روابط مورد نیاز:

سرعت نسبی بین دو نقطه از یک جسم صلب

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{V_{rel}}$$

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right) + 2\vec{\omega} \times \overrightarrow{V_{rel}} + \overrightarrow{a_{rel}}$$

روابط نیوتن برای جسم صلب:

در مختصات x-y

$$\begin{cases} \sum F_X = ma_X^G \\ \sum F_Y = ma_Y^G \\ \sum M_G = I_G\alpha \end{cases}$$

در مختصات t-n

$$\begin{cases} \sum F_t = ma_t^G \\ \sum F_n = ma_n^G \\ \sum M_G = I_G\alpha \end{cases}$$

روابط شتاب در مختصات t-n

$$a_t = r\alpha \ , \ a_n = r\omega^2$$

سوال اول

الف.

$|AP| = \frac{d}{\sin 60} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{\omega}_0 \times \vec{AP}$

$\vec{V}_P = 0 + (-\omega_0 \vec{k}) \times \left(d\frac{\cos 60}{\sin 60}(-\vec{i}) + d\vec{j}\right)$

$\vec{V}_P = \omega_0 d\vec{i} + \omega_0 d\cos 60\,\vec{j} \rightarrow \vec{V}_P = 3\times\frac{1}{2}\vec{i} + 3\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}$

$\vec{V}_P = 1.5\vec{i} + 0.866\vec{j} \rightarrow |\vec{V}_P| = \sqrt{1.5^2 + .866^2} = 1.732\ m/s$ (۱ نمره)

ب -

$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_0 \times \vec{AP} + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{AP})$

$\vec{a}_P = 0 + 0 + (-\omega_0 \vec{k}) \times \left((-\omega_0 \vec{k}) \times (d\cos 60(-i) + d\vec{j})\right)$

$\vec{a}_P = \omega_0^2 d\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} - \omega_0^2 d\vec{j} \Rightarrow \vec{a}_P = (3)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2}\vec{i} - 3^2 \times \frac{1}{2}\vec{j}$

$\vec{a}_P = 2.598\vec{i} - 4.5\vec{j} \rightarrow |\vec{a}_P| = \sqrt{2.598^2 + 4.5^2} \rightarrow a_P = 5.196\ m/s$ (۱ نمره)

ج:

$\vec{V}_P = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OP} + \vec{V}_{rel}$

$1.5\vec{i} + 0.866\vec{j} = 0 + \omega\vec{k} \times \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) + V_{rel}\vec{i}$

$1.5\vec{i} + 0.866\vec{j} = -\frac{1}{2}\omega\vec{i} + \frac{1}{2}\omega\vec{j} + V_{rel}\vec{i}$

$\begin{cases} 1.5 = -\frac{1}{2}\omega + V_{rel} \rightarrow V_{rel} = 2.366\ m/s \\ 0.866 = \frac{1}{2}\omega \rightarrow \omega = 1.732\ rad/s \end{cases}$ (۲ نمره)

$\vec{a}_P = \vec{a}_0 + \vec{\alpha} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP}) + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel}$:د

$2.598\vec{i} - 4.5\vec{j} = 0 + \alpha\vec{k} \times \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) + \omega\vec{k} \times \left(\omega\vec{k} \times \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)\right) +$

$2\omega\vec{k} \times 2.366\vec{i} + a_{rel}\vec{i}$

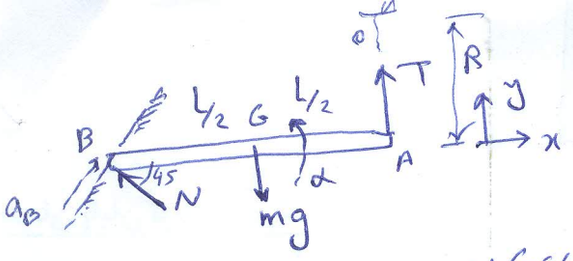
$2.598\vec{i} - 4.5\vec{j} = \frac{\alpha}{2}\vec{j} - \frac{\alpha}{2}\vec{i} - \omega^2/2\,\vec{i} - \omega^2/2\,\vec{j} + 2\omega \times 2.366\vec{j} + a_{rel}\vec{i}$

$2.598 = \frac{-\alpha}{2} - \frac{(1.732)^2}{2} + a_{rel}$

$-4.5 = \frac{\alpha}{2} - \frac{(1.732)^2}{2} + 2 \times 1.732 \times 2.366$

$\alpha = -22.391\ rad/s^2$

$a_{rel} = -7.1\ m/s^2$ (۲ نمره)



۴ مسئله

$$\begin{cases} \sum F_x = m a_x^G \rightarrow -N\cos 45 = m a_x^G \\ \sum F_y = m a_y^G \rightarrow T - mg + N\sin 45 = m a_y^G \\ \sum M_G = I_G \alpha \rightarrow T\frac{l}{2} - N\sin 45 \frac{l}{2} = I_G \alpha \end{cases}$$ (۰٫۵) (۰٫۵) (۰٫۵)

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \times \vec{AG}^{+0} = R\alpha_1 \vec{i} + R\omega_1^2 \vec{j} + \alpha \vec{k} \times \left(-\frac{l}{2}\vec{i}\right)$$

$$\vec{a}_G = R\alpha_1 \vec{i} - \frac{l}{2}\alpha \vec{j} \quad (1)$$ (۱)

α_1 شتاب زاویه‌ای OA است

α شتاب زاویه‌ای میله AB

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{BG} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{BG})$$

$$\vec{a}_G = a_B\cos 45 \vec{i} + a_B \sin 45 \vec{j} + \alpha \vec{k} \times \left(\frac{l}{2}\vec{i}\right)$$ (۱)

$$\vec{a}_G = \frac{\sqrt{2}}{2} a_B \vec{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a_B + \alpha \frac{l}{2}\right)\vec{j} \quad (2)$$

تساوی (۱) و (۲)

$$\begin{cases} R\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_B \\ -\frac{l}{2}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} a_B + \alpha \frac{l}{2} \rightarrow a_B = -\sqrt{2} l \alpha \end{cases}$$

$$\vec{a}_G = +\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2} l \alpha)\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2} l \alpha) + \frac{l\alpha}{2}\right)\vec{j}$$

$$\vec{a}_G = -l\alpha \vec{i} - \frac{l\alpha}{2}\vec{j} \rightarrow \begin{matrix} a_G^x = -l\alpha \\ a_G^y = -\frac{l\alpha}{2} \end{matrix}$$ (۰٫۵)

$$\begin{cases} -N\frac{\sqrt{2}}{2} = m(-l\alpha) \\ T - mg + N\frac{\sqrt{2}}{2} = m\left(-\frac{l\alpha}{2}\right) \\ T\frac{l}{2} - N\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{2} = \frac{ml^2}{12}\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = \sqrt{2} ml\alpha \\ T - mg + \sqrt{2} ml\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{ml\alpha}{2} \rightarrow T = -\frac{3lm\alpha}{2} + mg \\ T - N\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ml}{6}\alpha \rightarrow T = \frac{ml\alpha}{6} + \sqrt{2} ml\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7ml\alpha}{6} \end{cases}$$

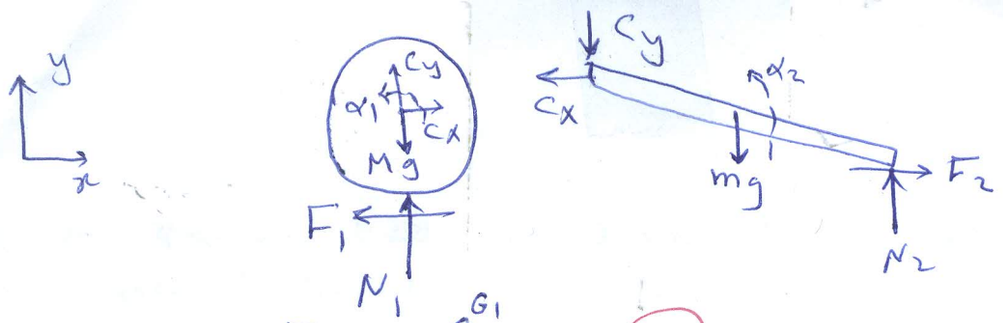
$$\alpha = \frac{3g}{8l} \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3g}{8l}}$$ (۰٫۲۵)

$$\vec{a}_G = -\frac{3}{8}g\vec{i} - \frac{3}{16}g\vec{j}$$ (۰٫۵)

$$\vec{a}_G = -\frac{3}{8}g\left(\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

$$N = \frac{3\sqrt{2}}{8}mg$$ (۰٫۵) $$T = \frac{7mg}{16}$$ (۰٫۵)

سوال ۳

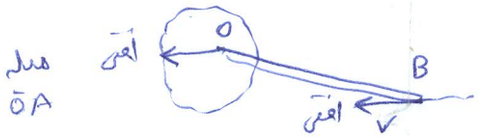


جسم صلب استوانه

$$\begin{cases} C_x - F_1 = M a_x^{G_1} \\ C_y + N_1 - Mg = 0 \\ -F_1 R = I_{G_1} \alpha_1 \end{cases}$$ (۱٫۲۵)

جسم صلب میله

$$\begin{cases} -C_x + F_2 = m a_x^{G_2} \\ -C_y - mg + N_2 = m a_y^{G_2} \\ N_2 \frac{l}{2} \cos\theta - F_2 \frac{l}{2} \sin\theta + C_y \frac{l}{2} \cos\theta + C_x \frac{l}{2} \sin\theta = I_{G_2} \alpha_2 \end{cases}$$ (۱٫۲۵)



$\rightarrow \alpha_2 = 0$
$\omega_2 = 0$

$V_0 = 3 m/s \rightarrow V_B = 3 m/s \rightarrow \vec{V_0} = \vec{V_B} = -3\vec{i}$

$\vec{a_0} = -R\alpha_1 \vec{i} \Rightarrow \vec{a}_{G_2} = -R\alpha_1 \vec{i}$ (۰٫۵)

$a_{G_2}^x = -0.3\alpha_1$ (۰٫۵) $\quad a_{G_2}^y = 0$ (۰٫۵)

$\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\theta = 1/3$

$$\begin{cases} ① \; C_x - F_1 = 45 \times (-0.3\alpha_1) \\ ② \; C_y + N_1 = 45 \times 9.8 \\ ③ \; -F_1 \times 0.3 = \left(\frac{1}{2} \times 45 \times 0.3^2\right) \alpha_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ④ \; -C_x + F_2 = 4.5(-0.3\alpha_1) \\ ⑤ \; -C_y + N_2 - 4.5 \times 9.81 = 0 \\ ⑥ \; N_2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} - F_2 \times \frac{1}{3} + C_y \frac{2\sqrt{2}}{3} + C_x \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

③ $\rightarrow F_1 = -22.5 \times 0.3\alpha_1$

① $\rightarrow C_x = -67.5 \times 0.3\alpha_1$

④ $\rightarrow F_2 = -72 \times 0.3\alpha_1$

$F_2 = \mu N_2 \rightarrow N_2 = \frac{F_2}{\mu} \rightarrow N_2 = -180 \times 0.3\alpha_1$

⑤ $\rightarrow C_y = -180 \times 0.3\alpha_1 - 4.5 \times 9.81$

⑥ $\rightarrow \alpha_1 = -0.40695 \; rad/s^2$ (۰٫۵)

(۰٫۵)

$\omega_1 = \alpha_1 t + \omega_0 \rightarrow 0 = -0.40695 t + 10 \rightarrow t = 24.57 \; sec$

$F_1 < \mu N_1 \rightarrow 2.7469 < 0.4 \times 66.31$ عملش برقرار است (۰٫۵) چند تا عملش

سوال ٤

$$T_1 = \frac{1}{2} m V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_1^2$$

$m = 2\,kg$

$I_Q = m R_Q^2 = 2 \times .103^2 = 0.02122\ kgm^2$

$I_Q = I_C + m(\bar{CQ})^2 \rightarrow .02122 = I_C + 2(.05)^2$

$I_C = 0.0162\ kgm^2$ (٠٫٥)

$\omega_1 = 10\ rad/s$

$V_{C_1} = \bar{PC} \cdot \omega_1 = (.20) \times 10 = 2\ m/s$ (٠٫٥)

$$T_1 = \frac{1}{2}(2)(2)^2 + \frac{1}{2}(.0162)(10)^2 = 4.81\ J$$ (٠٫٥)

في Q

$V_{g_1} = mgh = 2 \times 9.81 \times .05 = 0.981\ J$ (٠٫٥)

$V_{K_1} = \frac{1}{2} K \Delta x^2 = \frac{1}{2} \times 3 \left(\sqrt{.3^2 + .05^2} - .3 \right)^2 = 0.0000256\ J$ (٠٫٥)

$$T_2 = \frac{1}{2} m V_{C_2}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_2^2$$

$V_{C_2} = \sqrt{0.15^2 + 0.05^2}\, \omega_2 = 0.1581\, \omega_2$ (٠٫٥)

$$T_2 = \frac{1}{2} \times 2 (.1581\omega_2)^2 + \frac{1}{2}(.0162)\omega_2^2 \Rightarrow T_2 = 0.0331\, \omega_2^2$$ (٠٫٥)

$V_{g_2} = 0$

$V_{K_2} = \frac{1}{2} \times K \Delta x_2^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times \left((.3 + R\frac{2\pi}{4} + .05) - .3 \right)^2$

$V_{K_2} = 0.12226\ J$ (٠٫٥)

$$\Rightarrow T_1 + V_{g_1} + V_{K_1} = T_2 + V_{g_2} + V_{K_2}$$

$$4.81 + 0.981 + .0000256 = .0331\, \omega_2^2 + 0 + .12226$$

$\omega_2^2 = 171.3135 \rightarrow \omega_2 = 13.086\ rad/s$ (١)