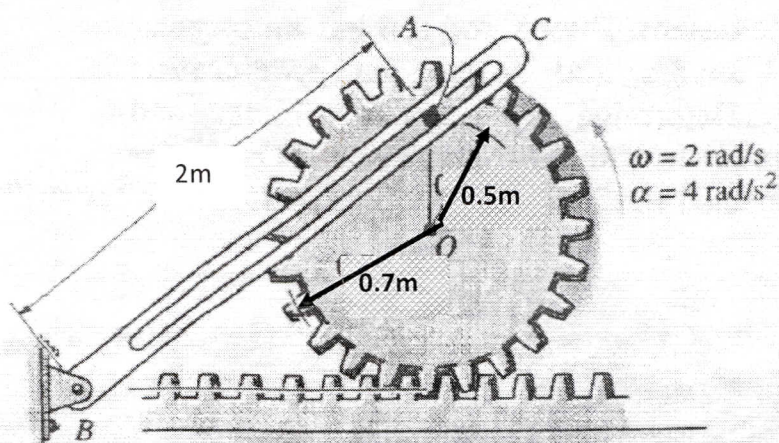


امتحان پایان ترم دینامیک دیماه 94 مدت: 2.5 ساعت

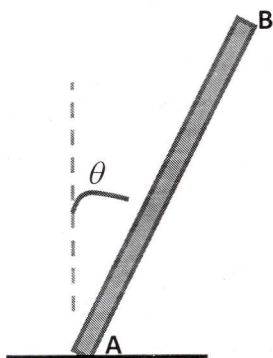
توجه: به همه سوالات پاسخ داده شود. بارم همه سوالات مساوی است. استفاده از موبایل، تبلت و .. به عنوان ماشین حساب حتی در حالت خاموش نیز مجاز نمی باشد.

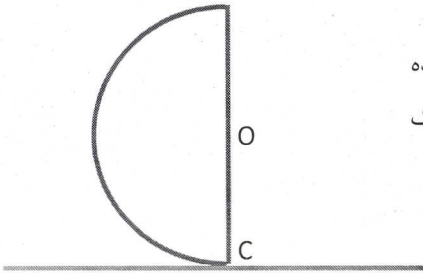
1- بین روی چرخ دنده قرار دارد. چرخ دنده بر روی دنده شانه ای غلتش خالص می نماید. برای لحظه نشان داده شده در شکل مطلوبست سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای میله BC؟



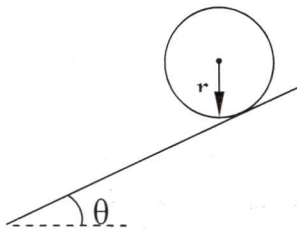
2- میله AB به طول 10m و جرم 30 کیلوگرم از حالت قائم رها می شود. اگر ضریب اصطکاک بین نقطه A و سطح برابر 0.5 باشد در چه زاویه ای میله شروع به لغزش می کند.

(ممان اینرسی میله حول مرکز ثقل آن: $I_G = \frac{1}{12} mL^2$ است)

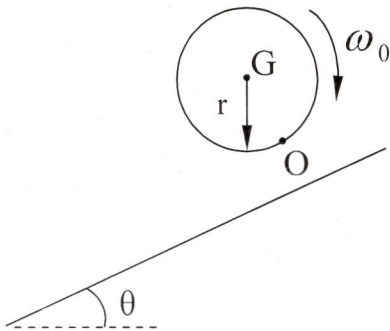




- 3- نیم دایره به شعاع 0.4 متر و جرم 50 کیلوگرم به حالت سکون در موقعیت نشان داده شده قرار گرفته است. جسم از موقعیت نشان داده شده رها می شود، اگر ضریب اصطکاک استاتیک و دینامیک بین جسم و سطح افقی به ترتیب برابر 0.2 و 0.1 باشد.
- الف- مطلوبست محاسبه شتاب زاویه ای و شتاب مرکز ثقل نیم دایره درست پس از رها شدن
- ب- محاسبه نیرو در نقطه C درست پس از رها شدن جسم
- (مرکز ثقل نیم دایره از رابطه $\bar{r} = 4R/3\pi$ بدست می آید و $I_o = mR^2/2$)



- 4- الف) مطابق شکل زیر، دیسکی به جرم m شعاع r و شعاع ژیراسیون $k = r/\sqrt{2}$ بر روی سطح شیب داری با زاویه θ نسبت به افق قرار گرفته است. تعیین کنید بیشینه مقدار زاویه θ که سطح شیب دار می تواند داشته باشد به شرطی که دیسک بر روی آن غلتش محض انجام دهد؟
- $m = 1Kg, r = 1m, \mu_s = 0.7$



- ب) دیسک مسئله قبل را در نظر بگیرید که با سرعت زاویه ای ساعت گرد ω_0 و بدون سرعت خطی بر روی سطح شیب دار رها می گردد. با توجه به مقادیر زیر مطلوب است. شتاب مرکز جرم و شتاب زاویه ای دیسک بلافاصله بعد از رها شدن بر روی سطح؟ سرعت مرکز جرم و سرعت زاویه ای دیسک پس از $t = 2sec$ مسافتی که مرکز جرم دیسک در مدت $t = 2sec$ طی می کند؟ سرعت و شتاب نقطه O (محل تماس دیسک با سطح شیب دار) در امتداد سطح شیب دار پس از دو ثانیه چقدر است؟

$$m = 1Kg, r = 1m, \omega_0 = 10rad/s, \mu_s = 0.7, \mu_k = 0.6, \theta = 70^\circ$$

روابط مورد نیاز:

سرعت نسبی بین دو نقطه از یک جسم صلب

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} + \vec{V}_{rel}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}) + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

روابط نیوتن برای جسم صلب:

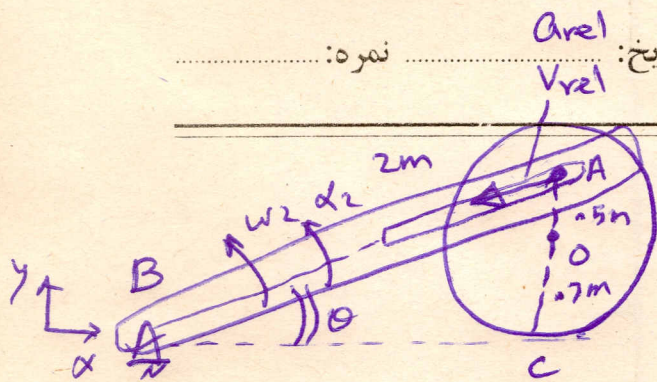
در مختصات t-n

$$\begin{cases} \sum F_t = ma_t^G \\ \sum F_n = ma_n^G \\ \sum M_G = I_G \alpha \end{cases}$$

در مختصات x-y

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x^G \\ \sum F_y = ma_y^G \\ \sum M_G = I_G \alpha \end{cases}$$

حل مسئله ۱



$$\sin \theta = \frac{1.2}{2} = 0.6$$

$$\cos \theta = 0.8$$

روی چرخ: $\vec{V}_A = (0.7 + 0.5) \times 2 (-\vec{i}) = -2.4 \vec{i}$ (۵٪)

روی میله AB: $\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega}_2 \times \vec{BA} + \vec{V}_{rel}$

$$\vec{V}_B = 0 \quad \vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{k} \quad \vec{BA} = 2 \cos \theta \vec{i} + 2 \sin \theta \vec{j} = 1.6 \vec{i} + 1.2 \vec{j}$$

$$\vec{V}_{rel} = -V_{rel} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = -0.8 V_{rel} \vec{i} - 0.6 V_{rel} \vec{j}$$
 (۱٪)

$$-2.4 \vec{i} = 0 + \omega_2 \vec{k} \times (1.6 \vec{i} + 1.2 \vec{j}) - 0.8 V_{rel} \vec{i} - 0.6 V_{rel} \vec{j}$$

$$1) \left\{ \begin{aligned} -2.4 &= -1.2 \omega_2 - 0.8 V_{rel} \\ 0 &= +1.6 \omega_2 - 0.6 V_{rel} \end{aligned} \right. \rightarrow V_{rel} = 2.66 \omega_2$$

$$1) \rightarrow -2.4 = -1.2 \omega_2 - 0.8 (2.66 \omega_2) \rightarrow \omega_2 = 0.72 \text{ rad/s}, V_{rel} = 1.92$$

$$\vec{V}_{rel} = -1.54 \vec{i} - 1.15 \vec{j}$$
 (۵٪)

روی چرخ: $\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{A/O} = -0.7 \alpha_1 \vec{i} - 0.5 \alpha_1 \vec{i} - 0.5 (2)^2 \vec{j} = -4.8 \vec{i} - 2 \vec{j}$ (۱٪)

روی میله: $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \alpha_2 \times \vec{BA} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{BA}) + 2 \vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel}$

$$\vec{a}_A = 0 + \alpha_2 \vec{k} \times (1.6 \vec{i} + 1.2 \vec{j}) + 0.72 \vec{k} \times (0.72 \vec{k} \times (1.6 \vec{i} + 1.2 \vec{j})) + 2 \times 0.72 \vec{k} \times (-1.54 \vec{i} - 1.15 \vec{j}) + (-0.8 a_{rel} \vec{i} - 0.6 a_{rel} \vec{j})$$
 (۱٪)

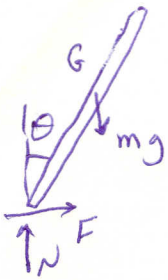
$$-4.8 \vec{i} - 2 \vec{j} = 1.6 \alpha_2 \vec{j} - 1.2 \alpha_2 \vec{i} - 0.83 \vec{i} - 0.622 \vec{j} - 2.217 \vec{j} + 1.656 \vec{i} - 0.8 a_{rel} \vec{i} - 0.6 a_{rel} \vec{j}$$

$$\left\{ \begin{aligned} -4.8 &= 1.6 \alpha_2 - 0.83 + 1.656 - 0.8 a_{rel} \\ -2 &= 1.2 \alpha_2 - 0.622 - 2.217 - 0.6 a_{rel} \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} 1.2 \alpha_2 + 0.8 a_{rel} &= 5.626 \\ 1.6 \alpha_2 - 0.6 a_{rel} &= 0.839 \end{aligned} \right.$$

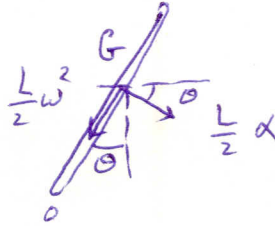
$$\alpha_2 = 2.023 \text{ rad/s}^2 \quad a_{rel} = 4 \text{ m/s}^2$$
 (۵٪)

دانشگاه صنعتی اصفهان

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: نام درس:
 گروه درس: نام استاد: تاریخ: نمره:



$L = 10 \text{ m}$
 $m = 30 \text{ kg}$
 $\mu = 0.5$
 $I_G = \frac{1}{12} mL^2$



مسئله 2

$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{a}_{G/O}$

$\vec{a}_G = \frac{L}{2} \alpha (\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}) + \frac{L}{2} \omega^2 (-\sin\theta \vec{i} - \cos\theta \vec{j})$

$a_G^x = \frac{L}{2} \alpha \cos\theta - \frac{L}{2} \omega^2 \sin\theta$

$a_G^y = -\frac{L}{2} \alpha \sin\theta - \frac{L}{2} \omega^2 \cos\theta$

1) $\sum F_x = ma_G^x \rightarrow F = m \frac{L}{2} (\alpha \cos\theta - \omega^2 \sin\theta)$

2) $\sum F_y = ma_G^y \rightarrow N - mg = -\frac{mL}{2} (\alpha \sin\theta + \omega^2 \cos\theta)$

3) $\sum M_O = I_O \alpha \rightarrow mg \frac{L}{2} \sin\theta = \frac{1}{3} mL^2 \alpha$

3) $\rightarrow \alpha = \frac{3g \sin\theta}{2L} \Rightarrow \int_0^\theta \alpha d\theta = \int_0^\omega \omega d\omega \rightarrow \frac{1}{2} \omega^2 = \frac{3g}{2L} (1 - \cos\theta) \rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{L} (1 - \cos\theta)$

1) $F = \frac{3mg}{2} \left[\frac{3}{2} \sin\theta \cos\theta - \sin\theta \right]$

2) $N = mg \left[1 + \frac{3}{2} \cos\theta + \frac{9}{4} \cos^2\theta \right]$

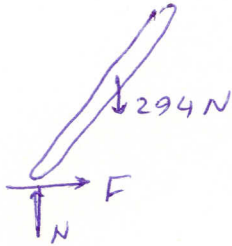
$F = \mu N \Rightarrow \frac{3mg}{2} \left[\frac{3}{2} \sin\theta \cos\theta - \sin\theta \right] = \mu mg \left[1 + \frac{3}{2} \cos\theta + \frac{9}{4} \cos^2\theta \right]$

$9 \sin\theta \cos\theta - 12 \sin\theta = \mu [1 + 9 \cos^2\theta - 6 \sin\theta]$

$9 \sin\theta \cos\theta - 12 \sin\theta - \mu - 9 \mu \cos^2\theta - 6 \mu \sin\theta = 0$

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: نام درس:

گروه درس: نام استاد: تاریخ: نمره:



$m = 30 \text{ kg}$
 $L = 10 \text{ m}$
 $\mu = 0.5$
 $mg = 294 \text{ N}$

مسئله 2

$$a_G = 5\alpha (\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}) + 5\omega^2 (-\sin\theta \vec{i} - \cos\theta \vec{j})$$

$$a_G^x = 5\alpha \cos\theta - 5\omega^2 \sin\theta \quad (۷۵)$$

$$a_G^y = -5\alpha \sin\theta - 5\omega^2 \cos\theta \quad (۷۵)$$

$$1) \rightarrow \sum F_x = ma_G^x \rightarrow F = 150 (\alpha \cos\theta - \omega^2 \sin\theta) \quad (۷۵)$$

$$2) \rightarrow \sum F_y = ma_G^y \rightarrow N - 294 = -150 (\alpha \sin\theta + \omega^2 \cos\theta) \quad (۷۵)$$

$$3) \rightarrow \sum M_O = I_O \alpha \rightarrow mg \frac{L}{2} \sin\theta = \frac{1}{3} mL^2 \alpha \rightarrow \alpha = 1.47 \sin\theta \quad (۷۵)$$

$$\alpha d\theta = \omega d\omega \rightarrow \int_0^\theta \alpha d\theta = \int_0^\omega \omega d\omega \rightarrow \omega^2 = 2.94 (1 - \cos\theta) \quad (۱)$$

$$1) \rightarrow F = 441 \left[\frac{3}{2} \sin\theta \cos\theta - \sin\theta \right]$$

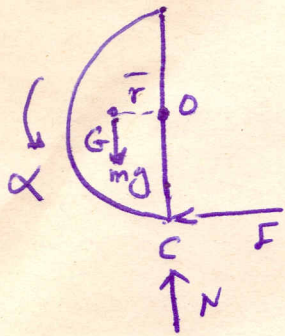
$$2) \rightarrow N = 294 \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \cos\theta + \frac{9}{4} \cos^2\theta \right]$$

$$F = \mu N \Rightarrow 441 \left[\frac{3}{2} \sin\theta \cos\theta - \sin\theta \right] = 0.5 \times 294 \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \cos\theta + \frac{9}{4} \cos^2\theta \right]$$

$$9 \sin\theta \cos\theta - 12 \sin\theta = 0.5 + 4.5 \cos^2\theta - 3 \sin\theta$$

$$9 \sin\theta \cos\theta - 12 \sin\theta - 4.5 \cos^2\theta - 3 \sin\theta - 0.5 = 0 \quad (۱)$$

حل مسئله



$R = 0.4 \text{ m}$
 $m = 50 \text{ kg}$
 $I_O = \frac{1}{2} m R^2$
 $I_G = I_O - m \bar{r}^2 = \frac{1}{2} (50) (0.4)^2 - 50 (0.1698)^2 = 2.5584 \text{ kgm}^2$

$\bar{r} = \frac{4R}{3\pi} = 0.1698 \text{ m}$

الف - فرض کنیم لغزش رخ من بعد از آن خالص داریم:

$\vec{a}_O = \vec{a}_C + \vec{a}_{C/O} = 0 - 0.4\alpha \vec{i}$
 $\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{a}_{G/O} = -0.4\alpha \vec{i} - 0.1698\alpha \vec{j}$
 $a_G^x = -0.4\alpha$ $a_G^y = -0.1698\alpha$

$\left\{ \begin{aligned} \sum F_x = m a_G^x &\rightarrow -F = -m(0.4\alpha) \rightarrow F = 20\alpha \\ \sum F_y = m a_G^y &\rightarrow N - mg = -0.1698m\alpha \rightarrow N = 490 - 8.49\alpha \\ \sum M_G = I_G \alpha &\rightarrow N \times \bar{r} - F \times R = I_G \alpha \rightarrow 0.1698N - 0.4F = 2.5584\alpha \end{aligned} \right.$

①, ② → ③ ⇒ $0.1698(490 - 8.49\alpha) - 0.4(20\alpha) = 2.5584\alpha \rightarrow \alpha = 6.94 \text{ rad/s}^2$

$F = 20\alpha \rightarrow F = 138.8 \text{ N}$

$N = 490 - 8.49\alpha \rightarrow N = 431.1 \text{ N}$

$F_{\max} = \mu_s N = 0.2 \times 431.1 = 86.22 < F = 138.8$

ب - لغزش رخ داده در آن صورت $F = \mu_k N$ فقط در آن نقطه مدار است و فرض کنید آن است

$\vec{a}_G = -a_O \vec{i} - 0.4\alpha \vec{i} - 0.1698\alpha \vec{j} \rightarrow \vec{a}_G = -(a_C + 0.4\alpha) \vec{i} - 0.1698\alpha \vec{j}$

$\left\{ \begin{aligned} F = 0.1N \\ -F = +m(-a_C - 0.4\alpha) &\rightarrow F = 50(a_C + 0.4\alpha) \\ N - mg = m(-0.1698\alpha) &\rightarrow N = 490 - 8.49\alpha \\ 0.1698N - 0.4F = 2.5584\alpha &\rightarrow 0.1698N - 0.4F = 2.5584\alpha \end{aligned} \right.$

⇒ $\alpha = 17.38 \text{ rad/s}^2$

$N = 342.47 \text{ N}$

$F = 34.247 \text{ N}$

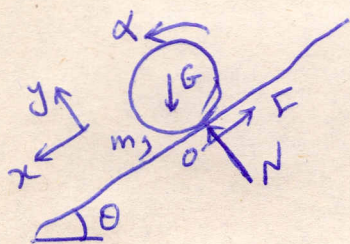
$a_O = 0.6849 \text{ m/s}^2 \rightarrow a_C + 0.4\alpha = 0.6849 \text{ m/s}^2$

$a_C = -6.267 \text{ m/s}^2$

دانشگاه صنعتی اصفهان

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: نام درس:
 گروه درس: نام استاد: تاریخ: نمره:

حل مسئله ۴



$$\begin{cases} N - mg \cos \theta = a \\ -F + mg \sin \theta = ma_x^G \\ mgr \sin \theta = I_c \alpha \end{cases}$$

$$I_c = mr^2 + mk^2 = mr^2 + m\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

$$a_x^G = r\alpha \quad \text{رابطه شیب}$$

$$\begin{cases} N = mg \cos \theta \\ -F + mg \sin \theta = m\alpha r \rightarrow F = mg \sin \theta / 3 \\ mgr \sin \theta = \frac{3}{2}mr^2 \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2g \sin \theta}{3r} = 6.533 \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$

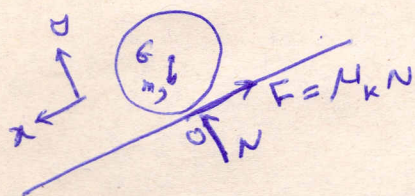
$$\Rightarrow F = 6533 \text{ N}$$

$$F < F_{\max} = \mu_s N \Rightarrow mg \sin \theta / 3 \leq 0.7 mg \cos \theta$$

$$\tan \theta \leq 2.1 \rightarrow \theta \leq 64.5^\circ$$

در صورتی که زاویه از 64.5° بیشتر باشد لغزش همراه غلتش خواهد بود

ب- چون $\theta = 70^\circ$ است لغزش خواهیم داشت



$$\begin{cases} N - mg \cos \theta = 0 \rightarrow N = mg \cos \theta \\ mg \sin \theta - \mu_k N = ma_x^G \rightarrow a_x^G = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \\ \mu_k N r = mk^2 \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2\mu_k g \cos \theta}{r} \end{cases}$$

$$a_x^G = 9.8(\sin 70^\circ - 0.6 \cos 70^\circ) \rightarrow a_x^G = 7.2 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha = \frac{2 \times 0.6 \times 9.8 \cos 70^\circ}{r} \rightarrow \alpha = 4.02 \text{ rad/s}^2$$

$$v_x^G = a_x^G t + v_0 \rightarrow v^G = 7.2t \rightarrow v^G(t=2) = 14.4 \text{ m/s}$$

$$x^G = \frac{1}{2} a_x^G t^2 + v_0 t \rightarrow x^G = 3.6t^2 \rightarrow x^G(t=2) = 14.4 \text{ m}$$

$$\vec{v}_0^* = \vec{v}_G + \vec{v}_0/G \rightarrow v_0^* = at + r\omega = 7.2t + \omega$$

$$\omega = \omega_0 - \alpha t = 10 - 4.02t \rightarrow \omega(t=2) = 1.96 \text{ rad/s}$$

اهمیت
 سرعت شیب لغزشی که غلتش نداشته
 و همراه غلتش به همراه لغزش داریم

$$v_0(t=2^{\text{sec}}) = 16.36 \text{ m/s}$$

$$a_0 = a \cdot r = 7.2 \cdot r$$