بسمه تعالی

میان ترم

۳۰آبان ۱۳۹۲ — **معادلات دیفرانسیل نظریه مقدماتی** — وقت ۱۸۰ دقیقه

۱. (۸نمره) الف) مفاهیم زیر را به دقت تعریف کنید:
نقطه تعادل مجانبی پایدار، مجموعه ω-حدی مدار نقطه $x_\circ$، انتگرال اول یک دستگاه معادلات دیفرانسیل در صفحه، تابع لیاپانف قوی، یک مجموعه به طور مثبت پایا،
ب) صورت قضایای اصل پایایی لاسال، چتائف و هارتمن گرابمن را به دقت بیان کنید:

۲. (۱۰نمره) فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$ تابعی از رده $\mathcal{C}^۱$، $\bar{x}$ یک نقطه تعادل دستگاه $\dot{x}=f(x)$ و قسمت حقیقی همه مقادیر ماتریس ژاکوبی $Df(\bar{x})$ منفی باشد. نشان دهید نقطه تعادل $\bar{x}$ مجانبی پایدار است(صورت قضایا و لم های مورد استفاده را به دقت بیان کنید).

۳. (۱۶نمره) معادله مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\ddot{x}+a\dot{x}+x+x^۵=\circ$$

الف) تمامی نقاط تعادل و نوع پایداری آن ها را تعیین کنید.
ب) نمای فاز این سیستم را به ازای $a=\circ$ رسم کنید.
ج) دوره تناوب مدار تناوبی دستگاه فوق گذرا از نقاط $(a,\circ)$ و $(b,\circ)(a<\circ<b)$ را به صورت یک انتگرال معین بیان کنید.
د) با استفاده از اصل پایایی لاسال دامنه جذب مبدا را به ازای $a>\circ$ تعیین کنید.

۴. (۶نمره) با استفاده از یک تابع درجه دوم نوع پایداری مبدا در سیستم زیر را تعیین کنید:

$$\dot{x}_۱=-x_۱^۳+x_۱x_۲^۲,\quad \dot{x}_۲=-۲x_۱^۲x_۲-x_۲^۳$$

۵. (۸نمره) گزاره های زیر را ثابت کنید و یا با یک مثال نقض آن را رد کنید.
الف) هرگاه A و B دو ماتریس حقیقی ۲×۲ باشند آنگاه $e^{A+B}=e^A\cdot e^B$
ب) فرض کنید مبدا یک نقطه پایدار دستگاه $\dot{x}=f(x),\ x\in\mathbb{R}^n$ باشد که مجانبی پایدار نیست. آنگاه این نقطه نمی تواند یک نقطه زینی معادله خطی شده حول مبدا باشد.

۶. (۱۲نمره) جریان سیستم گرادیانی زیر را به ازای $b>۱$ بررسی کرده نمای فاز آن را رسم کنید (با استدلال و جزییات کامل):

$$\dot{x}_۱=-x_۱^۳-bx_۱x_۲^۲+x_۱,\quad \dot{x}_۲=-x_۲^۳-bx_۱^۲x_۲+x_۲$$

موفق باشید