بسمه تعالی

# دستگاههای دینامیکی ۱

۸/۹/۸۸ **امتحان میان ترم** وقت : ۳ ساعت

[ ۱۰ نمره] ۱ـالف) مفاهیم زیر را به دقت تعریف کنید: نقطه تعادل به طور یکنواخت مجانبی پایدار، دو دستگاه به طور توپولوژیک معادل، مجموعه $\alpha$ـحدی و $\omega$ـحدی

( ب) صورت قضایای زیر را به دقت بیان کنید:

قضیه هارتمن گرابمن، قضیه منیفلد مرکزی ، قضیه فلوکه، لم گرانوال، قضیه وجود و یکتایی

[۲۴ نمره] ۲ـ گزاره های زیر را اثبات و یا با یک مثال نقض رد کنید:

الف)معادله $\dot{x} = x^{\frac{1}{3}},\ x(0) = 0$ دارای جواب یکتاست.

ب)هرگاه $A$ و $B$ دو ماتریس حقیقی $n \times n$ باشند آنگاه $e^{(A+B)} = e^A \cdot e^B$.

ج ) در دستگاه $\dot{x} = A(t)x$ هرگاه $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ و قسمت حقیقی مقادیر ویژه $A$ منفی باشد آنگاه مبدا به طور یکنواخت مجانبی پایدار است.

د) فرض کنید $\gamma(t)$یک مدار تناوبی دستگاه $\dot{x} = f(x)$ باشد و $\nabla \circ f(\gamma(t)) > 0$. آن‌گاه $\gamma(t)$ پایدار است.

ه) اگر $J = \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : 0 < detA < 1\}$. آن گاه$J$ در$\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ باز و چگال است.

و ) نقطه تعادل عام یک دستگاه گرادیانی مسطح و تحلیلی $\dot{x} = f(x)$، یک نقطه تعادل گره، زینی و یا کانون است.

[ ۱۰ نمره] ۳ـ قضیه زیر را ثابت کنید:

فرض کنید $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$. اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس $Df(\bar{x})$ منفی باشند، آن‌گاه نقطه تعادل $\bar{x}$ دستگاه $\dot{x} = f(x)$ مجانبی پایدار است.

[ ۸ نمره] ۴ـ نوع پایداری نقطه تعادل مبدا رادر دستگاه زیر مشخص کرده نمای فاز موضعی آن را در نزدیکی مبدا رسم کنید

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -x_2 - x_1^2 \end{aligned}$$

[ ۸ نمره] ۵ـ دستگاه معادله‌دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = y - F(x),\ \ \dot{y} = -g(x)$$

فرض کنید$F$ و $g$ توابعی تحلیلی، $G(x) = \int_0^x g(s)ds$، $F(0) = 0$ و در یک همسایگی محذوف مبدا $G(x) > 0$ و $g(x)F(x) > 0$. نشان دهید مبدا مجانبی پایدار است.

**موفق باشید**