

دستگاههای دینامیکی ۱

وقت : ۳ ساعت

امتحان میان ترم

۷/۹/۸۶

[۱۵ نمره] ۱- الف) مفاهیم زیر را به دقت تعریف کنید: نقطه تعادل به طور یکنواخت مجانبی پایدار، دو دستگاه به طور توپولوژیک معادل، مجموعه α -حدی و ω -حدی (ب) صورت قضایای زیر را به دقت بیان کنید:

قضیه هارتمن گرابمن، قضیه منیفلد پایدار و نا پایدار، قضیه فلوکه، لم گرانوال، قضیه وجود و یکتایی

[۲۵ نمره] ۲- گزاره های زیر را اثبات و یا با یک مثال نقض رد کنید:

الف) هرگاه A و B دو ماتریس حقیقی $n \times n$ باشند آنگاه $e^{(A+B)} = e^A \cdot e^B$.

ب) در دستگاه $\dot{x} = A(t)x$ هرگاه $A \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ و قسمت حقیقی مقادیر ویژه A منفی باشد آنگاه مبدا به طور یکنواخت مجانبی پایدار است.

ج) فرض کنید در دستگاه مسطح (*) $\dot{x} = f(x)$ ، $f \in C^1$ ، $f(0) = 0$ و $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ آنگاه (*)

به طور توپولوژیک و در همسایگی مبدا با $\dot{x} = Ax$ معادل است.

د) معادله $\dot{x} = -x^5$ ، $x \in [-1, 1]$ به طور ساختاری پایدار است.

ه) معادله $\dot{x} = \sqrt{x}$ ، $x(0) = 0$ دارای جواب یکتاست.

و) نقطه بحرانی عام \bar{x} یک نقطه تعادل کانون دستگاه گرادیانی مسطح و تحلیلی $\dot{x} = f(x)$ است.

ز) دو دستگاه $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ به طور توپولوژیک معادلند.

[۱۰ نمره] ۳- قضیه زیر را ثابت کنید:

فرض کنید $A \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ و فرض کنید $X(t)$ یک جواب ماتریسی اساسی دستگاه $\dot{x} = A(t)x$ است و ثابتهای $K, \alpha > 0$ موجودند که $\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$ هرگاه $\beta \leq s \leq t < \infty$. همچنین فرض کنید $g \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ به طوری که $g(t, x) = o(|x|)$ هرگاه $t \rightarrow 0$ ، $x \rightarrow 0$. آنگاه $x = 0$ یک نقطه تعادل به طور یکنواخت مجانبی پایدار دستگاه $\dot{x} = A(t)x + g(t, x)$ است.

[۲۰ نمره] ۴- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -x - ay + x^5, \quad a > 0,$$

الف) نقاط تعادل و نوع پایداری آنها را تعیین کرده منیفلد پایدار $(1, 0)$ را تا $O(|x|^3)$ تخمین بزنید.

ب) نمای فاز ای دستگاه را با ذکر جزئیات و دلایل کامل رسم کنید.

[۱۰ نمره] ۵- معادله لورنز را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \sigma(y - x),$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz \quad \sigma, \beta > 0, \quad 0 < \rho < 1,$$

$$\dot{z} = xy - \beta z,$$

با استفاده از تابع $V(x, y, z) = \rho x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$ نشان دهید مبدا به طور مجانبی و سراسری پایدار است.

موفق باشید