بسمه تعالی

دستگاههای دینامیکی ۱

۹۱/۸/۱۰ — **امتحان میان ترم۱** — وقت : ۲ ساعت

۱. فرض کنید $f \in \mathcal{C}^1$ و به ازای هر x_0 مساله مقدار اولیه $\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$ دارای یک جواب یکتا در بازه ماکزیمال جواب $I_{x_0} = (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$ باشد. نشان دهید اگر مدار مثبت x_0 کراندار باشد آنگاه $\beta_{x_0} = \infty$ و مجموعه ω-حدی مدار x_0 از یک نقطه تعادل تشکیل می شود.

۲. مجموعه انشعاب معادله اسکالر دو پارامتری $\dot{x} = dx + ex^2 + x^4$ را یافته و نمونه های تمام انواع نماهای فاز نامعادل این معادله را در صفحه پارامتری رسم کنید.

۳. فرض کنید x_0 یک نقطه تعادل غیر هذلولوی معادله اسکالر $\dot{x} = f(x, \mu)$ به ازای $\mu = \mu_0$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

$$\text{(الف)}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, \mu_0) \neq 0 \qquad\qquad \text{(ب)}\quad \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$$

نشان دهید که این معادله تحت یک انشعاب گره زینی در $\mu = \mu_0$ می گیرد.

۴. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ و e^{At} جواب ماتریسی دستگاه $\dot{x} = Ax$ باشد. نشان دهید $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$.

۵. دستگاه $\dot{x} = (A + B(t))x$ را در نظر بگیرید که در آن A و B ماتریس های حقیقی $n \times n$ و $B(t)$ نسبت به t پیوسته و ۱-تناوبی است به طوری که به ازای هر t و x، $||B(t)x|| \leq \delta ||x||$ و قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه A منفی هستند. نشان دهید هرگاه δ به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه همه جواب ها به سمت صفر میل می کنند هرگاه $t \to \infty$.
راهنمایی: از لم گرانوال و فرمول تغییر ثابت ها استفاده کنید.

موفق باشید