

۱. [۲۰ نمره] نمای فاز دستگاه

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - 2x_1^3 + \lambda(x_1^4 - x_1^2 + x_2^2)$$

را به ازای تمام مقادیر λ رسم کنید. مجموعه های حدی ممکن این دستگاه را با استفاده از تابع هامیلتونی آن به ازای $\lambda = 0$ و اصل پایایی با استدلال کامل مشخص کنید.

۲. [۲۰ نمره] دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu_1 x - y - x^3 - x^2 y, \end{aligned}$$

(الف) تمامی نقاط تعادل و نوع پایداری آنها را تعیین کنید.

(ب) با استفاده از منیفولد مرکزی نشان دهید به ازای $\mu_1 = 0$ یک انشعاب چنگال از نقاط تعادل رخ می دهد.

۳. [۲۰ نمره] فرض کنید f تابعی تحلیلی، $f(0) = 0$ و $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ نشان دهید فرم

نرمال دستگاه $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= arx_3 + \mathcal{O}(|r, x_3|^3) \\ \dot{\theta} &= \omega + dx_3 + \mathcal{O}(|r, x_3|^3), \\ \dot{x}_3 &= br^2 + cx_3^2 + \mathcal{O}(|r, x_3|^3) \end{aligned}$$

راهنمایی: قرار دهید $z = x_1 + ix_2$ و سپس فرم نرمال را در مختصات $(z, \bar{z}, x_3)^t$ بدست آورید.

۴. [۲۰ نمره] نشان دهید در دستگاه معادلات زیر یک انشعاب هاپف به ازای برخی مقادیر α رخ می دهد. دیاگرام انشعاب را رسم کنید.

$$\dot{x} = A - (\alpha + 1)x + x^2 y, \quad \dot{y} = \alpha x - x^2 y,$$

راهنمایی: ضریب جمله r^3 در مختصات قطبی فرم نرمال دستگاه

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - \omega y + f(x, y), \\ \dot{y} &= \omega x + \mu y + g(x, y) \end{aligned}$$

از رابطه زیر محاسبه می شود

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{16\omega} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}] \\ &+ \frac{1}{16} (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xyx} + g_{yyy}) \end{aligned}$$

۵. [۲۰ نمره] دستگاه

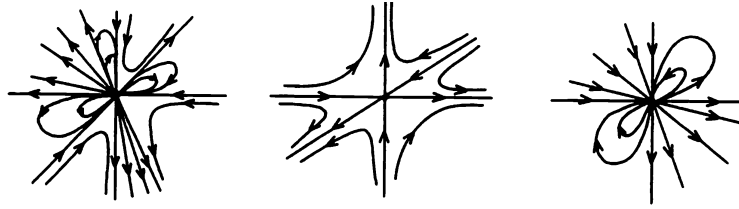
$$\dot{x} = x - \frac{y}{4} - 4x^2, \quad \dot{y} = 4x + y - \frac{y^2}{4},$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید این دستگاه دارای یک سیکل حدی یکتا در حلقه زیر است.

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < 4x^2 + \frac{y^2}{4} < 2 \right\}.$$

راهنمایی: ابتدا قرار دهید $x = 2u, y = \frac{v}{2}$.

۶. [۲۰ نمره] (الف) اندیس نقاط بحرانی تباهیده دستگاه های مسطح که نمای فاز آنها در شکل زیر آمده است را تعیین کنید.



(ب) دستگاه معادلات

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید این دستگاه در ناحیه پارامتری $D = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 < 0\}$ دارای سیکل حدی نیست

موفق باشید