

۱. [۳۰ نمره]. دستگاه (*) $\dot{X} = F(X)$ را در نظر بگیرید که در آن $X = (x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ ، $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))^t$ و P و Q چندجمله‌ایهایی از مرتبه سوم نسبت به x و y هستند. فرض کنید $F(0) = 0$ و $DF(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. علاوه بر این فرض کنید $F(-x, -y) = -F(x, y)$. نشان دهید دستگاه (*) را می‌توان به فرم نرمال زیر ساده کرد:

$$\dot{x} = y + O(|x, y|^5), \quad \dot{y} = ax^3 + bx^2y + O(|x, y|^5).$$

راهنمایی: ابتدا با استفاده از تقارن موجود معادله (*) را ساده کرده و سپس فرم نرمال آن را بدست آورید.

۲. [۴۵ نمره]. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \mu_1 x + \mu_2 y - x^3 - x^2 y,$$

(الف) تمامی نقاط تعادل و نوع پایداری آنها را تعیین کنید.

(ب) با استفاده از منیفلد مرکزی نشان دهید به ازای $\mu_1 = 0$ ، $\mu_2 \neq 0$ یک انشعاب چنگال از نقاط تعادل حول مبدأ رخ می‌دهد.

(ج) نشان دهید حول یک جفت از نقاط تعادل در طول نیم خط $\mu_1 = \mu_2$ ، $\mu_1 > 0$ ، انشعاب هاپف رخ می‌دهد.

(د) نشان دهید به ازای $\mu_2 < 0$ دستگاه فوق دارای مدار تناوبی نیست

راهنمایی: فرمول محاسبه ضریب جمله r^3 در فرم نرمال دستگاه

$$\dot{x} = \mu x - \omega y + f(x, y), \quad \dot{y} = \omega x + \mu y + g(x, y)$$

از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$16b = (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{1}{\omega} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy} - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy})) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$$

۳. [۳۰ نمره]. نمای فاز دستگاه زیر را به ازای تمام مقادیر پارامتر λ رسم کنید.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^2(x_1 - 1) + \lambda x_2(3x_1^2 - 4x_1^3 + 6x_1^4)$$

مجموعه‌های حدی ممکن کدامند؟

راهنمایی: ابتدا نشان دهید که دستگاه فوق به ازای $\lambda = 0$ نیوتونی است و سپس با استفاده از تابع هامیلتونی بدست آمده در این حالت و اصل پایایی مساله را بررسی کنید.

۴. [۲۵ نمره]. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -4y + x(1 - x^2/4 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2/4 - y^2), \\ \dot{z} &= z, \end{aligned}$$

(الف) نشان دهید $\gamma(t) = (2 \cos 2t, \sin 2t, 0)$ یک جواب تناوبی دستگاه فوق با دوره تناوب $T = \pi$ است.

(ب) با استفاده از صفحه برش $\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^3 : \theta = \theta_0, r > 0, z \in \mathbb{R}\}$ در مختصات استوانه‌ای نگاشت پوانکاره $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$ و ضرایب فلوکه مدار $\gamma(t)$ را بیابید

(ج) منیفلد پایدار و ناپایدار $\gamma(t)$ را تعیین کرده، مدار تناوبی $\gamma(t)$ و چند مدار روی منیفلدهای پایدار و ناپایدار آن را رسم کنید.

موفق باشید