

بسمه تعالی

دستگاههای دینامیکی ۱

وقت ۴: ساعت

امتحان پایان ترم

۱۴/۱۰/۸۷

۱- دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر وابسته به دو پارامتر حقیقی μ_1 و μ_2 را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 - xy$$

الف) تمامی نقاط تعادل و نوع پایداری آنها را تعیین کنید [۵ نمره].

ب) نشان دهید در ناحیه $\mu_1 > 0$ دستگاه فوق دارای سیکل حدی نیست [۵ نمره].

ج) با استفاده از منیفولد مرکزی نشان دهید که یک انشعاب گره زینی به ازای $\{\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0\}$ رخ می دهد.

دیاگرام انشعاب را رسم کنید [۱۵ نمره].

د) نشان دهید در این دستگاه به ازای $\{\mu_2 = -\sqrt{-\mu_1}, \mu_1 < 0\}$ یک انشعاب هاپف رخ می دهد. دیاگرام

انشعاب را رسم کنید. [۱۵ نمره]

راهنمایی: ضریب جمله r^3 در فرم نرمال دستگاه $\dot{x} = \mu x - \omega y + f(x, y), \dot{y} = \omega x \mu y + g(x, y)$ از رابطه زیر

محاسبه می شود

$$16b = (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{1}{\omega} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$$

۲- فرم نرمال دستگاه معادلات زیر را تا مرتبه ۳ بدست آورید [۲۰ نمره].

$$\dot{x} = y - x^3 + xy^2 - y^3, \quad \dot{y} = x^2 + 3x^2 + x^2 y$$

راهنمایی: این دستگاه تا مرتبه ۲ در فرم نرمال است.

۳- نگاشت لجستیک $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید یک انشعاب مضاعف سازی دوره

تناوب به ازای $\mu = 3$ رخ می دهد. دیاگرام انشعاب را رسم کنید. [۱۵ نمره]

۴- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{y}{4} + x(1 - 4x^2 - \frac{y^2}{4}), \\ \dot{y} &= 8x + y(1 - 4x^2 - \frac{y^2}{4}), \\ \dot{z} &= \alpha z, \end{aligned} \quad (1)$$

الف) نشان دهید $(0, 2 \sin 2t, \cos 2t)$ یک جواب تناوبی دستگاه (۱) با دوره تناوب $T = \pi$ است [۵ نمره].

ب) ضرایب فلوکه مدار $\gamma(t)$ را بیابید [۱۰ نمره].

راهنمایی: با استفاده از یک تغییر متغیر خطی مناسب دستگاه فوق را در مختصات استوانه ای بازنویسی کرده

نگاشت پوانکاره وابسته به مدار $\gamma(t)$ را بدست آورید.

ج) با بحث روی مقدار α منبسط پایدار، ناپایدار و مرکزی $\gamma(t)$ را تعیین کرده، مدارتناوبی $\gamma(t)$ و چند مدار روی منبسطهای پایدار و ناپایدار آن رابه ازای $\alpha < 0$ رسم کنید [۱۰ نمره].

۵- الف) نمای فاز دستگاه مسطحی را رسم کنید که دارای یک مدار Γ باشد به طوری که $\omega(\gamma)$ شامل ۴ مدار حدی و دو نقطه تعادل باشد [۵ نمره].

ب) مثالی از یک دستگاه مسطح ارائه دهید که نشان دهد هر مجموعه پایا تحت جریان آن سیستم لزوماً مجموعه α -حدی و یا ω -حدی آن نیست [۵ نمره].

ج) مثالی از یک دستگاه مسطح ارائه دهید که نشان دهد هر مدار در مجموعه رباینده A از این سیستم لزوماً مجموعه ω -حدی یک مدار در همسایگی A نیست [۵ نمره].

د) اندیس نقاط بحرانی تباهیده سیستمهای مسطح که نمای فاز آنها در شکل زیر آمده است را تعیین کنید [۵ نمره].

موفق باشید