بسمه تعالی

دستگاههای دینامیکی ۱

امتحان پایان ترم ۱۵/۱۰/۸۶ وقت :$۳\frac{۱}{۲}$ ساعت

[۱۵ نمره] ۱) صورت قضایا و تعریف مفاهیم زیر را به دقت بیان کنید:
قضیه منیفلد مرکزی، قضیه منیفلد پایدار و ناپایدار برای مدارهای تناوبی، قضیه پوانکاره بندیکسون تعمیم یافته مجموعه رباینده، یک رباینده، سیکل حدی پایدار و نیمه پایدار، یک گرافیک

[۲۰ نمره] ۲- دستگاه $\dot{X} = F(X) \quad (*)$ را درنظر بگیرید که در آن $X = (x,y)^t \in \mathbb{R}^۲$، $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))^t$ و P و Q چندجمله ایهایی از مرتبه سوم نسبت به x و y هستند. فرض کنید $F(۰) = ۰$ و $DF(۰) = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$. علاوه بر این فرض کنید $F(-x,-y) = -F(x,y)$.

الف) نشان دهید دستگاه $(*)$ را می توان به فرم نرمال زیر ساده کرد:

$$\dot{x} = y + O(|x,y|^۵), \quad \dot{y} = ax^۳ + bx^۲y + O(|x,y|^۵).$$

راهنمایی: ابتدا با استفاده از تقارن موجود معادله $(*)$ راساده کرده و سپس فرم نرمال آن رابدست آورید.

[۴۵ نمره] (۳) دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \mu_۱ x + \mu_۲ y - x^۳ - x^۲ y,$$

الف) تمامی نقاط تعادل و نوع پایداری آنها را تعیین کنید.
ب) با استفاده از منیفلد مرکزی نشان دهید به ازای $\mu_۱ = ۰$ یک انشعاب چنگال از نقاط تعادل رخ می دهد.
ج) نشان دهیدحول یکی از نقاط تعادل به ازای $\mu_۱ = \mu_۲,\ \mu_۱ > ۰$ انشعاب هاپف رخ می دهد.
د) نشان دهید به ازای $\mu_۲ < ۰$ دستگاه فوق دارای مدار تناوبی نیست.
راهنمایی :فرمول محاسبه ضریب جمله $r^۳$ در فرم نرمال دستگاه

$$\dot{x} = \mu x - \omega y + f(x,y), \quad \dot{y} = \omega x + g(x,y)$$

از رابطه زیر محاسبه می شود

$$۱۶b = (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{۱}{\omega}[f_{xy}(f_{xx} + f_{yy} - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$$

[۲۵ نمره] ۴- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -۴y + x(۱ - x^۲/۴ - y^۲), \\ \dot{y} &= x + y(۱ - x^۲/۴ - y^۲), \\ \dot{z} &= z, \end{aligned} \qquad (۱)$$

الف) با استفاده از تغییر مختصات $x = ۲r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z$ دستگاه (۲) را در مختصات (r, θ, z) باز نویسی کرده و جواب $\phi_t(r_۰, \theta_۰, z_۰)$ را بدست آورید.
ب) نشان دهید $\gamma(t) = (۲\cos ۲t, \sin ۲t, ۰)$ یک جواب تناوبی دستگاه (۲) با دوره تناوب $T = \pi$ است.
ج) با استفاده از صفحه‌برش $\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^۳ : \theta = \theta_۰,\ r > ۰, z \in \mathbb{R}\}$ نگاشت پوانکاره $P : \Sigma \to \Sigma$ وضرایب فلوکه مدار $\gamma(t)$ را بیابید.
د) منیفلد پایدار و ناپایدار $\gamma(t)$ را تعیین کرده، مدارتناوبی $\gamma(t)$ و چند مدار روی منیفلدهای پایدار و ناپایدار آن را رسم کنید.

[۱۵ نمره] ۵- با استفاده از قضیه پوانکاره بندیکسون نشان دهید دستگاه مسطح

$$\dot{x} = x - y - x^۳,\ \ \dot{y} = x + y - y^۳,$$

دارای یک مدار تناوبی در حلقه $A = \{X \in \mathbb{R}^۲ : ۱ < ||x|| < |\sqrt{۲}\}$ است.
راهنمایی: با استفاده از مختصات قطبی نشان دهید به ازای هر $\varepsilon > ۰$، $\dot{r} < ۰$ روی دایره $r = \sqrt{۲} + \varepsilon$ و $\dot{r} > ۰$ روی دایره $r = ۱ - \varepsilon$. سپس نشان دهید $\bar{A} = \{X \in \mathbb{R}^۲ : ۱ \le ||x|| \le \sqrt{۲}\}$ تحت جریان دستگاه فوق به طور مثبت پایاست و همچنین یک سیکل حدی این دستگاه دارای نقطه مشترک با $r = ۱$ و $r = \sqrt{۲}$ نیست.
موفق باشید