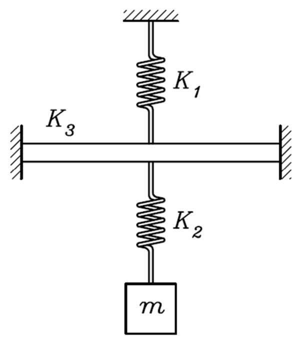
بسمه تعالی

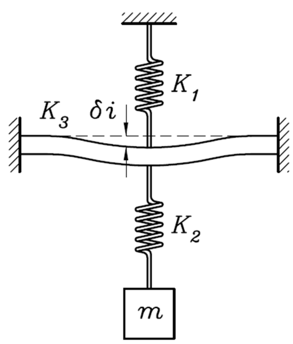
پاسخ تکالیف سری اول

۱) دو فنر k_1 و k_2 مطابق شکل زیر، به وسط یک تیر الاستیک با سختی کل k_3 متصل شده‌اند. سختی معادل سیستم را به دست آورید.

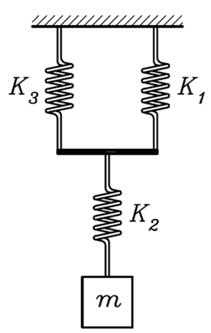


حل:

با توجه به این که تغییر طول فنر k_1 و تیر (با سختی k_3)، در وسط تیر با یکدیگر برابر است (مطابق شکل زیر)، فنرهای k_1 و k_3 را می‌توان موازی فرض کرد.



بنابراین، مطابق شکل روبرو، فنر معادل فنرهای k_1 و k_3 با فنر k_2 به صورت سری قرار خواهد گرفت.

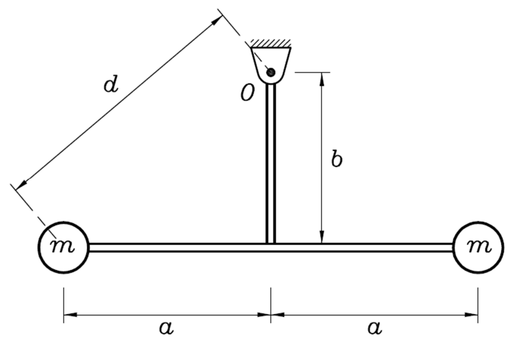


در نتیجه، سختی معادل سیستم برابر خواهد بود با:

$$k_{eq_{1,3}} = k_1 + k_3$$

$$k_{eq} = \frac{k_{eq_{1,3}} k_2}{k_{eq_{1,3}} + k_2} = \frac{(k_1 + k_3) k_2}{k_1 + k_2 + k_3}$$

۲) فرکانس طبیعی سیستم زیر را به دست آورید. جرم میله‌ها را ناچیز فرض کنید.



حل:

ممان اینرسی جرمی حول نقطه O، با صرفنظر کردن از جرم میله‌ها، برابر است با:

$$I_o = 2md^2 = 2m(a^2+b^2)$$

و انرژی سیستم برابر است با:

$$U = 2mgb(1-\cos\theta)$$

$$T = \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2 = m(a^2+b^2)\dot{\theta}^2$$

دقت کنید که برای تعیین انرژی سیستم، دو جرم را به صورت یک جرم واحد $2m$ در وسط فاصله آنها (در انتهای میله عمودی) در نظر گرفته‌ایم.

از روش انرژی، داریم:

$$\frac{d}{dt}(T+U)=0 \quad \rightarrow \quad 2m(a^2+b^2)\ddot{\theta}+2mgb\sin\theta=0$$

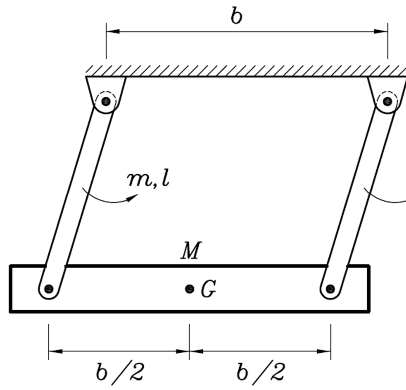
با فرض θ کوچک ، $\sin\theta \approx \theta$ است:

$$(a^2+b^2)\ddot{\theta}+gb\theta=0$$

بنابراین، فرکانس طبیعی سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{gb}{a^2+b^2}}$$

۳) شکل زیر، مدل ساده‌ای از یک تاب بازی است که در آن، دو میله به جرم m و طول l، به فاصله $b/2$ از مرکز جرم قطعه به جرم M متصل شده است. فرکانس طبیعی سیستم را به دست آورید.



حل:

انرژی پتانسیل سیستم برابر است با:

$$U = 2\times mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) + Mgl(1-\cos\theta)$$

عبارت اول، مربوط به تغییر انرژی پتانسیل دو میله عمودی و عبارت دوم هم مربوط به انرژی پتانسیل میله افقی است.

و انرژی جنبشی سیستم برابر است با:

$$T = 2\times\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M(l\dot{\theta})^2$$

در اینجا نیز، عبارت اول مربوط به تغییر انرژی جنبشی دو میله عمودی (ناشی از دوران حول لولاها) و عبارت دوم مربوط به تغییر انرژی جنبشی میله افقی که تنها حرکت انتقالی دارد، می‌باشد.

از این رو، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \quad \rightarrow \quad (\frac{2}{3}m + M)l^2\ddot{\theta} + (m+M)gl\sin\theta = 0$$

فرکانس طبیعی سیستم، برابر است با:

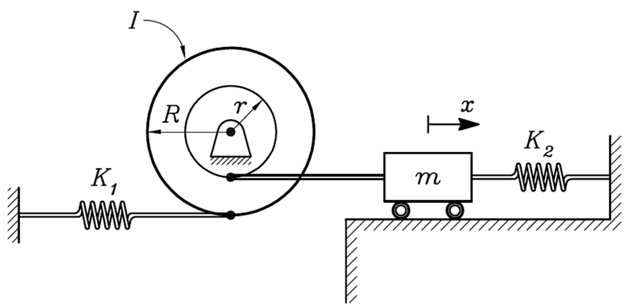
$$\omega_n = \sqrt{\frac{(m+M)g}{(\frac{2}{3}m+M)l}}$$

۴)   برای سیستم زیر، مطلوب است:

الف) سختی معادل سیستم در مکان جرم m؛

ب) جرم معادل در این نقطه؛

ج) فرکانس طبیعی سیستم.



حل:

الف) با استفاده از روش سیستم معادل، با برابر قرار دادن انرژی پتانسیل سیستم اصلی با سیستم معادل، می‌توان سختی معادل را به دست آورد:

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}k_1\left(\frac{R}{r}x\right)^2 + \frac{1}{2}k_2x^2 \\ U_{eq} &= \frac{1}{2}k_{eq}x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_{eq} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 k_1 + k_2$$

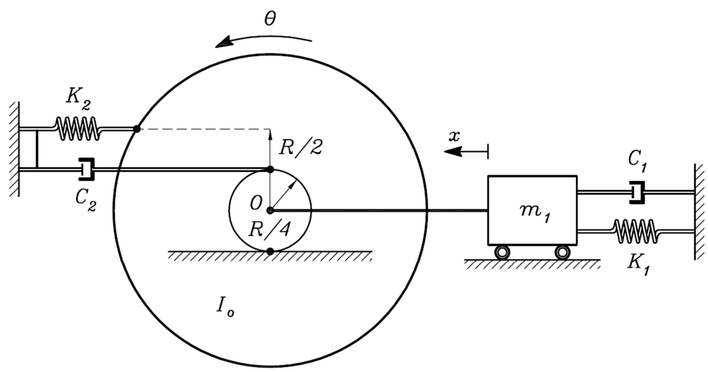
ب) با مساوی قرار دادن انرژی جنبشی سیستم اصلی با سیستم معادل نیز می‌توان جرم معادل را به دست آورد:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ T_{eq} &= \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_{eq} = \frac{I}{r^2} + m$$

ج) فرکانس طبیعی سیستم نیز برابر خواهد بود با:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{(R/r)^2 k_1 + k_2}{I/r^2 + m}}$$

۵) برای سیستم نشان داده شده در شکل زیر، معادله حرکت سیستم را به دست آورید. همچنین، به ازای $m_1 = m_2 = m$ ، $I_o = 1/2\ mR^2$ ، $k_1 = k_2 = k$ و $c_1 = c_2 = c$ ، فرکانس طبیعی، استهلاک بحرانی و ضریب استهلاک را به دست آورید.



حل:

با استفاده از روش نیوتن و با توجه به دیاگرام آزاد می‌توان نوشت:

$$\sum M_A = I_A \alpha$$

$$\rightarrow \quad -k_2 \frac{3R}{4}\theta \times \frac{3R}{4} - c_2 \frac{R}{2}\dot{\theta} \times \frac{R}{2} - T \times \frac{R}{4} = \left[I_o + m_2 \left(\frac{R}{4} \right)^2 \right] \ddot{\theta} \qquad (۱)$$

$$\sum F_x = m_1 \ddot{x} \quad \rightarrow \quad -c_1 \dot{x} - k_1 x + T = m_1 \ddot{x} \qquad (۲)$$

که در آن، θ دوران دیسک حول نقطه A (مرکز آنی دوران) و T کشش میله صلب بین دو جسم است.

از طرفی، داریم $x = \frac{R}{4}\theta$ ؛ بنابراین، خواهیم داشت:

$$-\frac{9R^2}{16} k_2 \theta - \frac{R^2}{4} c_2 \dot{\theta} - \frac{R}{4} T = \left[I_o + \frac{R^2}{16} m_2 \right] \ddot{\theta} \qquad (۳)$$

$$-\frac{R}{4} c_1 \dot{\theta} - \frac{R}{4} k_1 \theta + T = \frac{m_1 R}{4} \ddot{\theta} \qquad (۴)$$

با حذف T از روابط (۳) و (۴):

$$\left[I_o + \frac{R^2}{16}(m_1 + m_2) \right] \ddot{\theta} + \left[\frac{R^2}{16}(4c_2 + c_1) \right] \dot{\theta} + \left[\frac{R^2}{16}(9k_2 + k_1) \right] \theta = 0 \qquad (۵)$$

با جایگذاری مقادیر داده شده و ساده کردن آن، خواهیم داشت:

$$I_{eq} = \frac{5}{8} mR^2, \quad c_{eq} = \frac{5R^2}{16} c, \quad k_{eq} = \frac{5R^2}{8} k$$

با توجه به مقادیر بالا، استهلاک بحرانی سیستم برابر است با:

$$c_{cr} = 2\sqrt{k_{eq} I_{eq}} = 2\sqrt{(\frac{5R^2}{8}k)(\frac{5}{6}mR^2)} = 0/625R^2\sqrt{km}$$

و نسبت استهلاک برابر خواهد بود با:

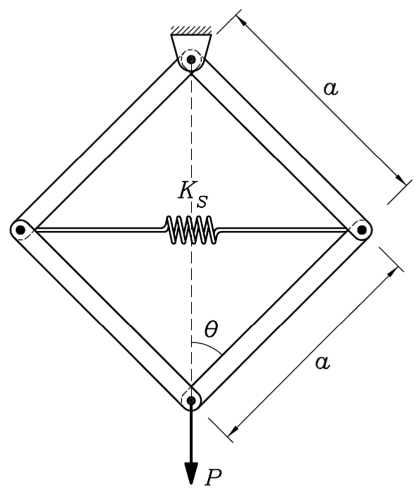
$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{5R^2 c/16}{0/625R^2\sqrt{km}} = 0/5\frac{c}{\sqrt{km}}$$

و فرکانس مستهلک‌شده نیز برابر است با:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_{eq}} - \left(\frac{c_{eq}}{2I_{eq}}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{m^2}}$$

---

۶) چهار میله صلب مشابه، به طول a، سطح مقطع A و مدول کشسانی E، مطابق شکل، به وسیله فنری با سختی k، به منظور شکل دادن برای حمل بار عمودی P به یکدیگر متصل و نگه داشته شده‌اند. سختی معادل سیستم را درنقطه اعمال نیروی P به دست آورید. از جرم میله‌ها و اصطکاک بین آنها، صرفنظر کنید.



حل:

انرژی پتانسیل سیستم برابر با مجموع انرژی پتانسیل فنر و انرژی پتانسیل میله‌هاست:

$U = U_s + U_b$

نیروی اعمال‌شده به هر یک از میله‌ها برابر است با:

$$F_b = \frac{P}{2\cos\theta} = \frac{Pa}{2\sqrt{a^2 - b^2/4}}$$

که در آن، b طول آزاد فنر می‌باشد.

همچنین، نیروی اعمال‌شده در امتداد فنر برابر است با:

$$F_s = 2F_b \sin\theta \quad \rightarrow \quad F_s = P\tan\theta = \frac{Pb}{2\sqrt{a^2 - b^2/4}}$$

بدین ترتیب، انرژی پتانسیل فنر برابر خواهد بود با:

$$U_s = \frac{1}{2} F_s . \frac{F_s}{k_s} = \frac{1}{2} \frac{F_s^2}{k_s} = \frac{P^2 b^2}{2k(4a^2 - b^2)}$$

از طرف دیگر، انرژی پتانسیل میله‌ها برابر است با:

$$U_b = 4 \times \frac{1}{2} (\frac{F_b}{k_b})^2$$

که در آن،

$$k_b = \frac{AE}{l}$$

در نتیجه، خواهیم داشت:

$$U_b = \frac{1}{2} \frac{P^2 a^3}{AE(a^2 - b^2/4)}$$

بدین ترتیب، انرژی پتانسیل سیستم معادل برابر خواهد بود با:

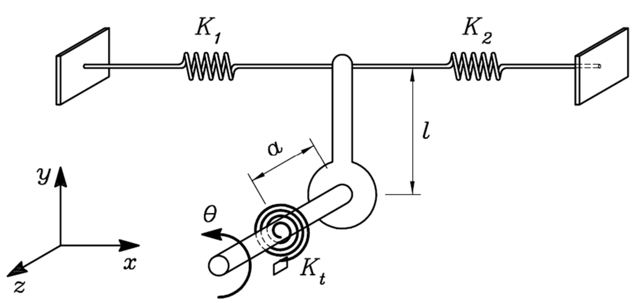
$$U_{eq} = \frac{1}{2} k_{eq} (\Delta h)^2 = \frac{1}{2} (\frac{P^2}{k_{eq}})$$

با مساوی قرار دادن انرژی پتانسیل سیستم معادل با سیستم کل خواهیم داشت:

$$U_{eq} = U_s + U_b \quad \rightarrow \quad k_{eq} = \frac{(4a^2 - b^2) EAk}{EAb^2 + 4a^3 k}$$

---

۷) سختی معادل سیستم زیر را در راستای θ به دست آورید.



حل:

با توجه به موازی بودن فنرهای کششی k_1 و k_2 ، سختی معادل آنها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$k_{eq_{1,2}} = k_1 + k_2$$

بنابراین، با استفاده از انرژی پتانسیل کل سیستم، سختی معادل به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} k_{eq_{1,2}} x^2 + \frac{1}{2} k_t \theta^2 = \frac{1}{2} k_{eq_{1,2}} (l\theta)^2 + \frac{1}{2} k_t \theta^2 = \frac{1}{2} (k_{eq_{1,2}} l^2 + k_t) \theta^2$$

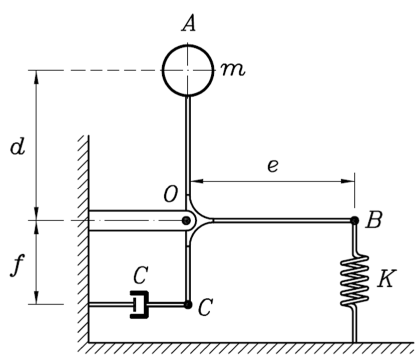
که با توجه به انرژی پتانسیل سیستم معادل، خواهیم داشت:

$$U = \frac{1}{2} k_{eq} \theta^2 \quad \rightarrow \quad k_{eq} = (k_1 + k_2) l^2 + k_t$$

---

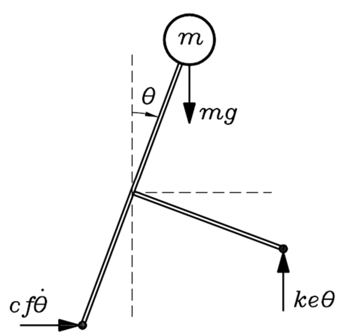
۸) شکل زیر، سیستمی را نشان می‌دهد که در آن، جرم m حول نقطه O لولا شده و حرکت آن از طریق فنر k در نقطه B و مستهلک‌کننده c در نقطه C کنترل می‌گردد. در صورتی که میله‌ها را بدون جرم و صلب در نظر بگیریم، معادله ارتعاش سیستم را برای نوسانات کوچک و فرکانس طبیعی را برای حالت بدون استهلاک و با استهلاک را به دست آورید. استهلاک بحرانی سیستم را نیز پیدا کنید.

همچنین اگر نقطه B به اندازه 10 میلیمتر به سمت بالا حرکت داده شده و سپس رها گردد، تغییر مکان افقی نقطه A را بر حسب زمان، برای حالتی که مستهلک‌کننده وجود ندارد، به دست آورید.



$$m = 100 gr, \;\; k = 100 N/m, \;\; c = 1 N.s/m, \; e = 30 cm, \; d = 40 cm, \;\; f = 10 cm$$

حل:



با رسم دیاگرام آزاد سیستم، می‌توان معادلات اویلر را به صورت زیر نوشت:

$$\sum M_o = I_o \ddot{\theta}$$

$$\rightarrow \qquad mgd\theta - (ke\theta)e - (cf\dot{\theta})f = md^2\ddot{\theta}$$

دقت داشته باشید که چون نوسانات، کوچک است، $\sin\theta \approx \theta$ می‌باشد.

بنابراین، معادله ارتعاش سیستم، به صورت زیر، به دست خواهد آمد:

$$md^2\ddot{\theta} + cf^2\dot{\theta} + (ke^2 - mgd)\theta = 0$$

که با جایگذاری کمیت‌های داده‌شده، خواهیم داشت:

$$0/1 \times 0/4^2 \ddot{\theta} + 1/0 \times 0/1^2 \dot{\theta} + (100 \times 0/3^2 - 0/1 \times 10 \times 0/4)\theta = 0$$

یا به طور ساده‌تر:

$$0/016\ddot{\theta} + 0/01\dot{\theta} + 8/6\theta = 0$$

بنابراین، با توجه به این معادله، فرکانس طبیعی سیستم نیز به دست خواهد آمد:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8/6}{0/016}} = 23/18\, rad/s \quad \rightarrow \quad f_n = 3/69\, Hz$$

و همچنین، استهلاک بحرانی برابر است با:

$$c_c = 2\sqrt{km} = 0/7418\, N.s/m$$

در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{0/01}{0/7418} = 0/01347$$

و در نهایت، فرکانس سیستم با وجود استهلاک، به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad \rightarrow \quad \omega_d = 23/15\, rad/s$$

اما در حالتی که دمپ در سیستم وجود نداشته باشد، معادله حرکت سیستم به صورت زیر در می‌آید:

$$0/016\ddot{\theta} + 8/6\theta = 0$$

یا به صورت ساده‌تر:

$$\ddot{\theta} + 537/5\theta = 0$$

که پاسخ این معادله، به صورت زیر می‌باشد:

$$\theta(t) = A\sin(23/18t) + B\cos(23/18t)$$

دقت کنید که چون مستهلک‌کننده در سیستم وجود ندارد، سیستم با فرکانس طبیعی خود ارتعاش می‌کند.
مقدار جابجایی زاویه‌ای که متناظر با جابجایی اولیه نقطه B به اندازه 10 میلیمتر به وجود می‌آید، برابر است با:

$$e\theta = -0/010 \rightarrow \quad \theta(0) = -0/0333$$

و همچنین داریم:

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

با اعمال این شرایط مرزی، پاسخ سیستم به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\theta(t) = -0/0333\cos(23/18t)$$

در نتیجه، جابجایی افقی نقطه A بدین صورت به دست خواهد آمد:

$$x_A(t) = d\,\theta(t) \quad \rightarrow \quad x_A(t) = -0/01332\cos(23/18t)$$