دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی حمل و نقل

پژوهش عملیاتی

مروری بر برنامه ریزی خطی و عدد صحیح

A review on Linear and Integer Programming

مدرس: محمد تمنایی

پاییز ۱۳۹۴

بهینه سازی (Optimization):

روشی برای دستیابی به بهترین نتیجه (مثلا بیشینه سود یا کمینه هزینه)

مسئله ابعدی

$$Max \quad Z(x) = x^2 + 4$$

Subject to :

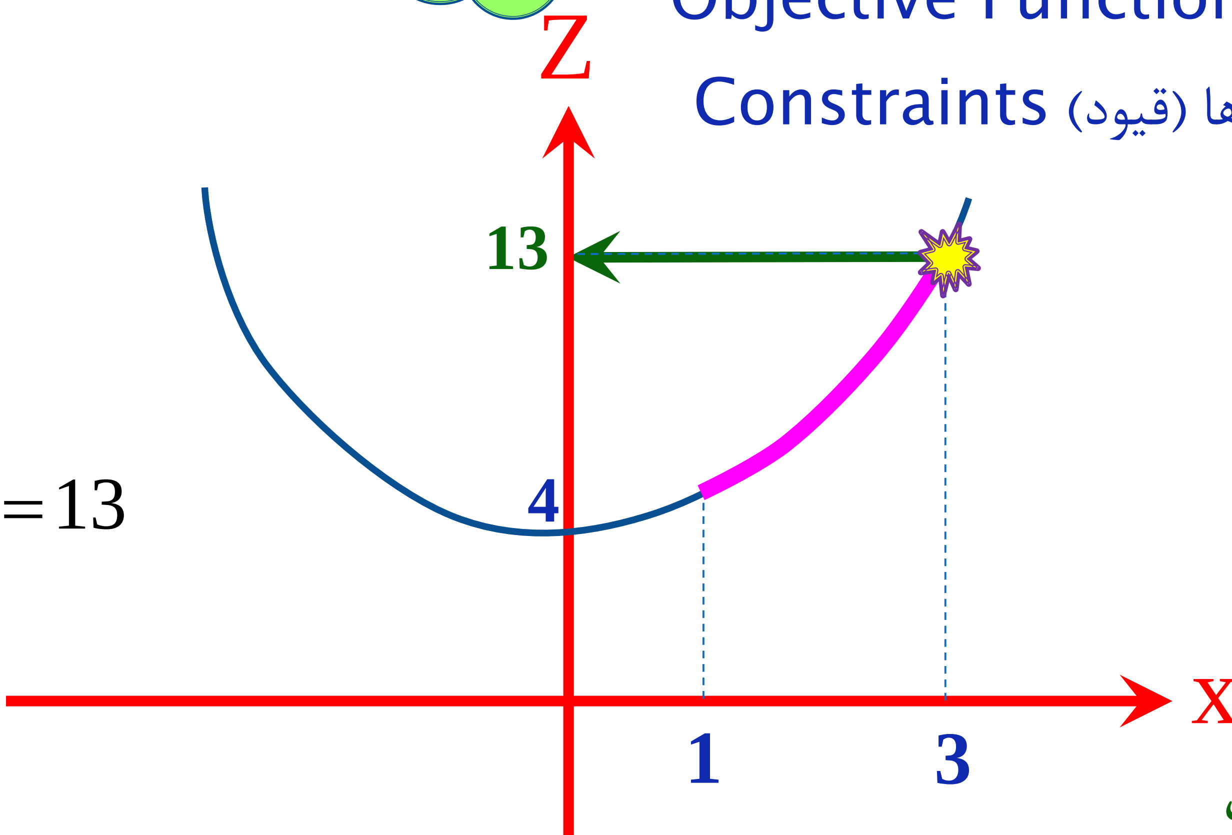
$$1 \le x \le 3$$

$$@x = 3 : Z = 13$$

اجزای یک مسئله بهینه سازی

تابع هدف Objective Function

محدودیت ها (قیود) Constraints



سایر مفاهیم

مقدار هدف Objective Value

مقدار (اسکالر) تابع هدف به ازای یک نقطه مشخص (در فضای R^n)

جواب امکانپذیر Feasible Solution

یک نقطه (در فضای R^n) که هیچیک از محدودیتها را نقض نمی کند

ناحیه امکانپذیر Feasible Region

مجموعه ای (در فضای R^n) که همه نقاط امکانپذیر را در خود جای می دهد

جواب بهینه Optimal Solution

یک جواب امکانپذیر (در فضای R^n) که بهترین مقدار هدف را کسب می کند

مقدار بهینه Optimal Value

بهترین مقدار هدفی که مسئله می تواند داشته باشد (اسکالر)

مسئله غیرممکن Infeasible Problem

مسئله ای که هیچ جواب امکانپذیری ندارد.

یک تابع هدف مسئله کمینه سازی:

$$f(x^*) = Min\{f(x) : x \in X\}$$

$$X \subset \mathbb{R}^n$$

مجموعه امکانپذیر

$$f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

تابع هدف

برنامه ریزی خطی (Linear Programming ، LP):

روشی برای دستیابی به بهترین نتیجه (مثلا بیشینه سود یا کمینه هزینه)

به نحوی که بایسته ها، روابطی خطی باشند.

ویژگی اصلی LP:

تابع هدف خطی $Z = ax + b$

محدودیت ها خطی $cx + d \leq e$

مسئله ابعدی

در حالتی که هیچ محدودیتی در فضای امکانپذیر نداشته باشیم:

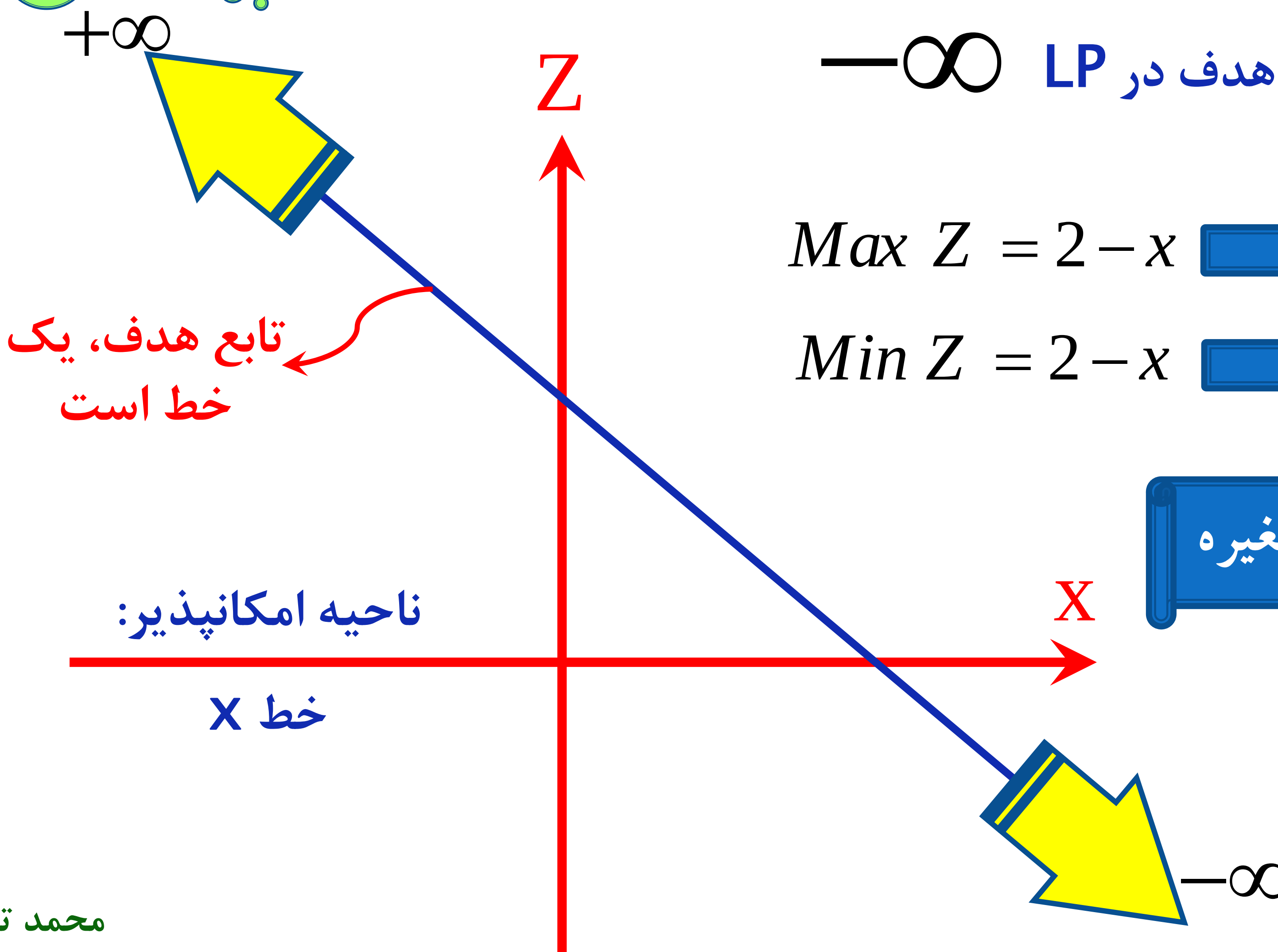
بیشترین مقدار هدف در LP $+\infty$

کمترین مقدار هدف در LP $-\infty$

$$Max\ Z = 2 - x \Rightarrow Z = +\infty$$

$$Min\ Z = 2 - x \Rightarrow Z = -\infty$$

مسئله ۱ متغیره

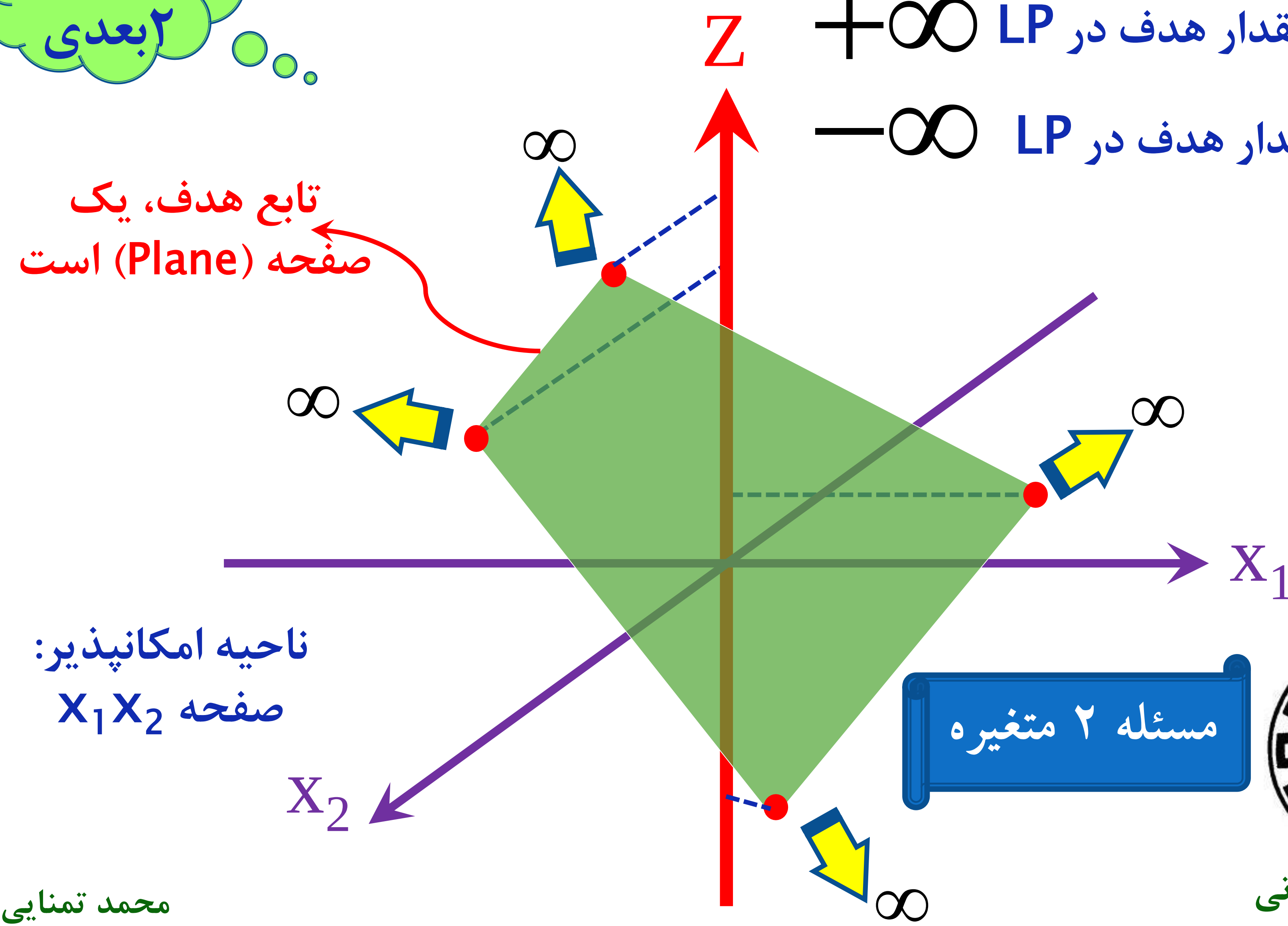


مسئله ۲بعدی

در حالتی که هیچ محدودیتی در فضای امکانپذیر نداشته باشیم:

بیشترین مقدار هدف در LP $+\infty$

کمترین مقدار هدف در LP $-\infty$



ناحیه امکانپذیر:
صفحه X_1X_2

مسئله ۲ متغیره

مسئله
nبعدی

در حالتی که هیچ محدودیتی در فضای امکانپذیر نداشته باشیم:

بیشترین مقدار هدف در LP $+\infty$

کمترین مقدار هدف در LP $-\infty$

مسئله n متغیره

به ازای هر ۱ متغیر ۱ بعد به مسئله اضافه می شود

ناحیه امکانپذیر یک ابرصفحه (Hyper Plane) در n بعد است

مسئله
ابعدی

در مسئله LP

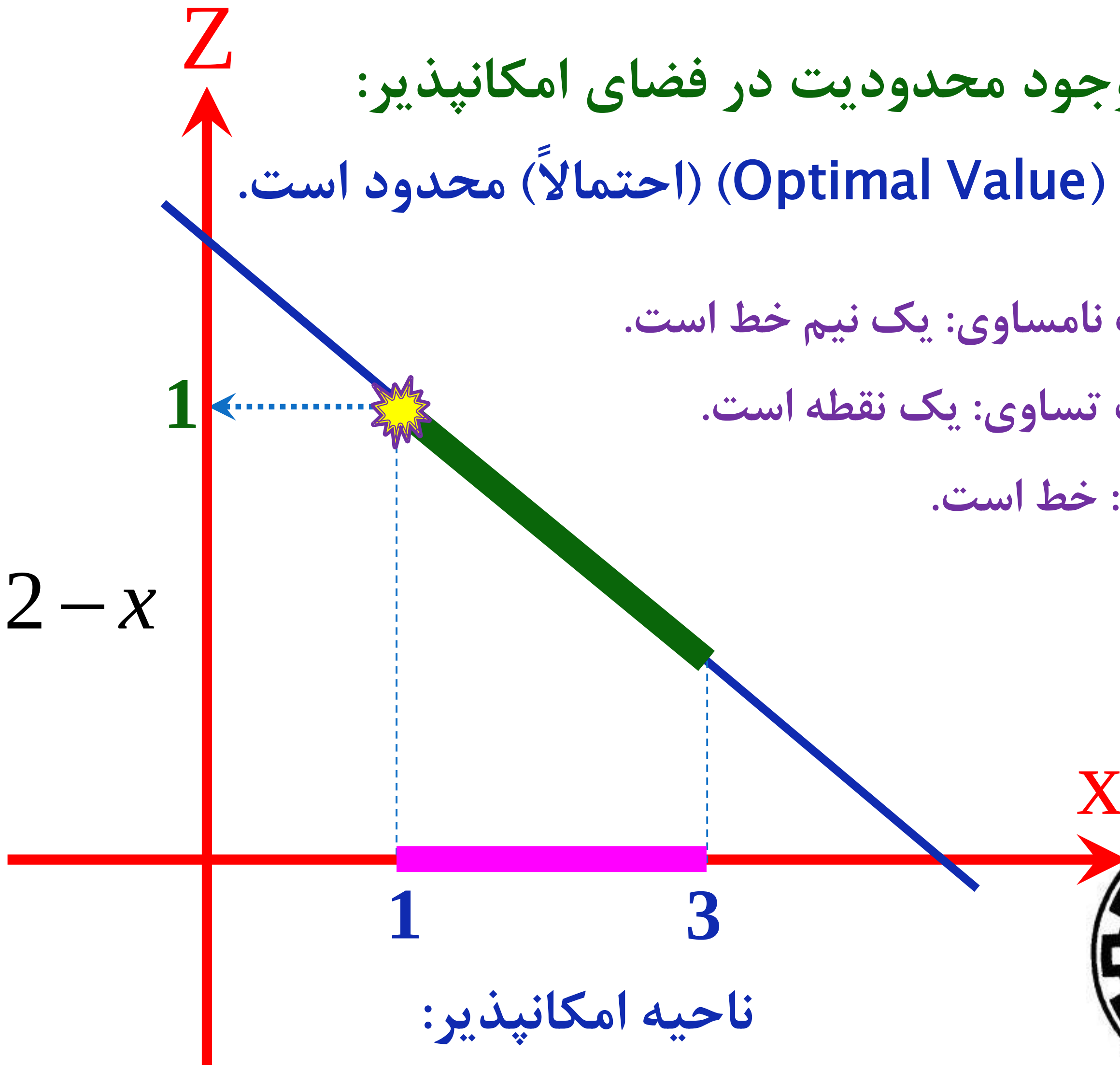
در حالت وجود محدودیت در فضای امکانپذیر:

مقدار بهینه (Optimal Value) (احتمالاً) محدود است.

- ✓ محدودیت نامساوی: یک نیم خط است.
- ✓ محدودیت تساوی: یک نقطه است.
- ✓ تابع هدف: خط است.

$$Max\ Z(x) = 2 - x$$

$$\begin{cases} x \le 3 \\ x \ge 1 \end{cases}$$



ناحیه امکانپذیر:
همه نقاط بین ۱ و ۳

مسئله ۲بعدی

در مسئله LP

در حالت وجود محدودیت در فضای امکانپذیر:

مقدار بهینه (Optimal Value) (احتمالاً) محدود است.

- ✓ محدودیت نامساوی: یک نیم فضا (half space) است.
- ✓ محدودیت تساوی: یک صفحه (Plane) است.

مروری بر برنامه ریزی خطی و عدد صحیح

مسئله ۲بعدی خطی

محدودیت ها

$x_1 \geq 0$ نیم فضا

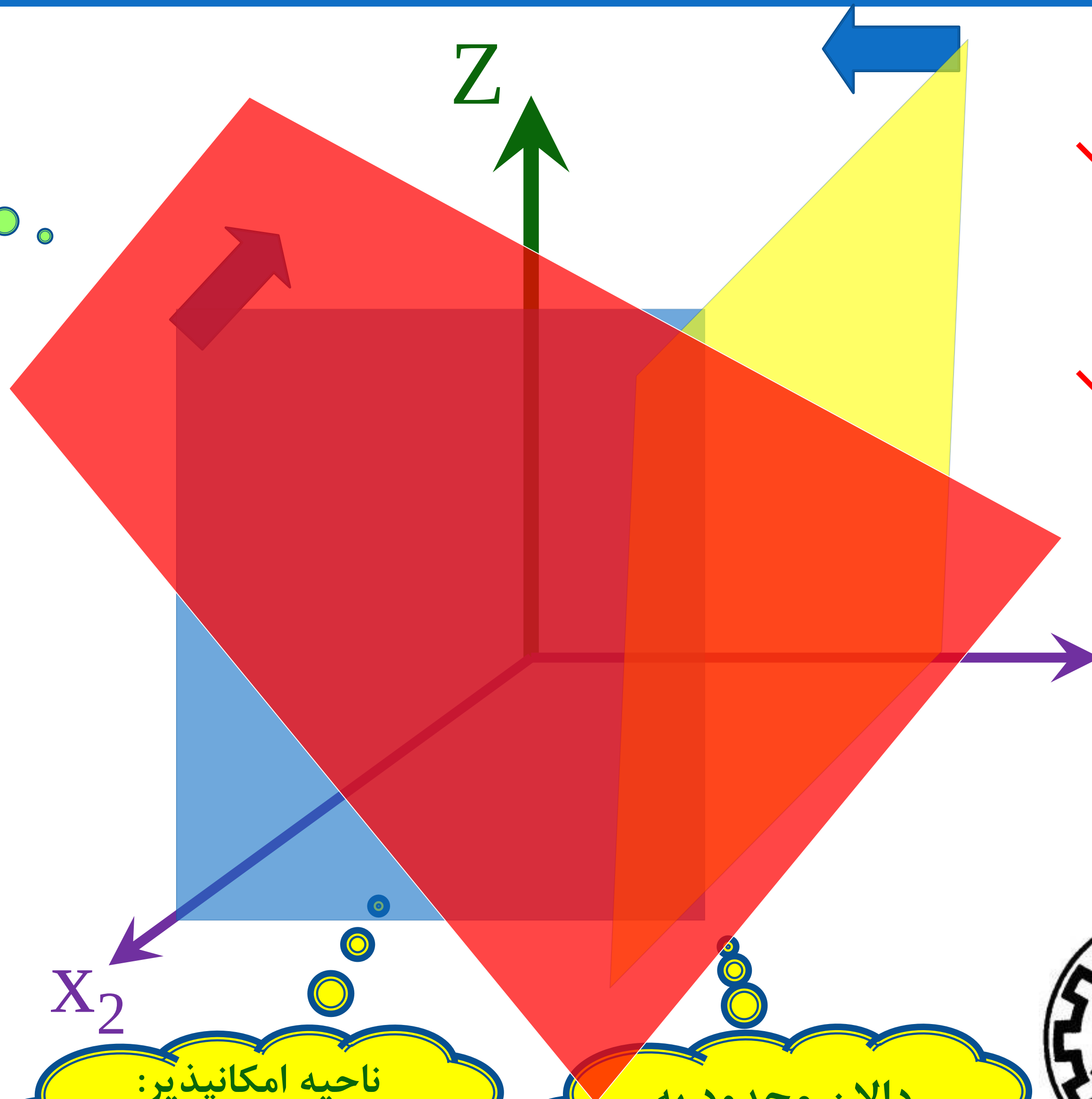
$x_2 \geq 0$ نیم فضا

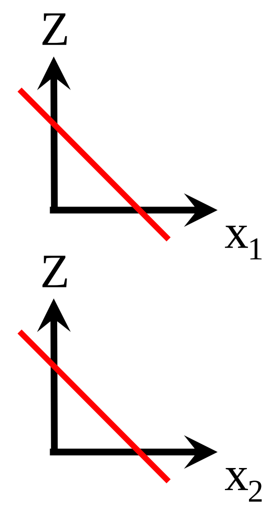
$x_1 \leq 2$ نیم فضا

$x_2 \leq 3$ نیم فضا

تابع هدف

$Max\ \ 5 - x_1 - x_2$
صفحه





ناحیه امکانپذیر:
نقاط صفحه $x_1\ x_2$
محدود به ۴ خط

دالان محدود به
۴ صفحه (Plane)

تصویر بر روی صفحه x_1x_2

مسئله
۲بعدی خطی

محدودیت ها

$x_1 \geq 0$ نیم فضا

$x_2 \geq 0$ نیم فضا

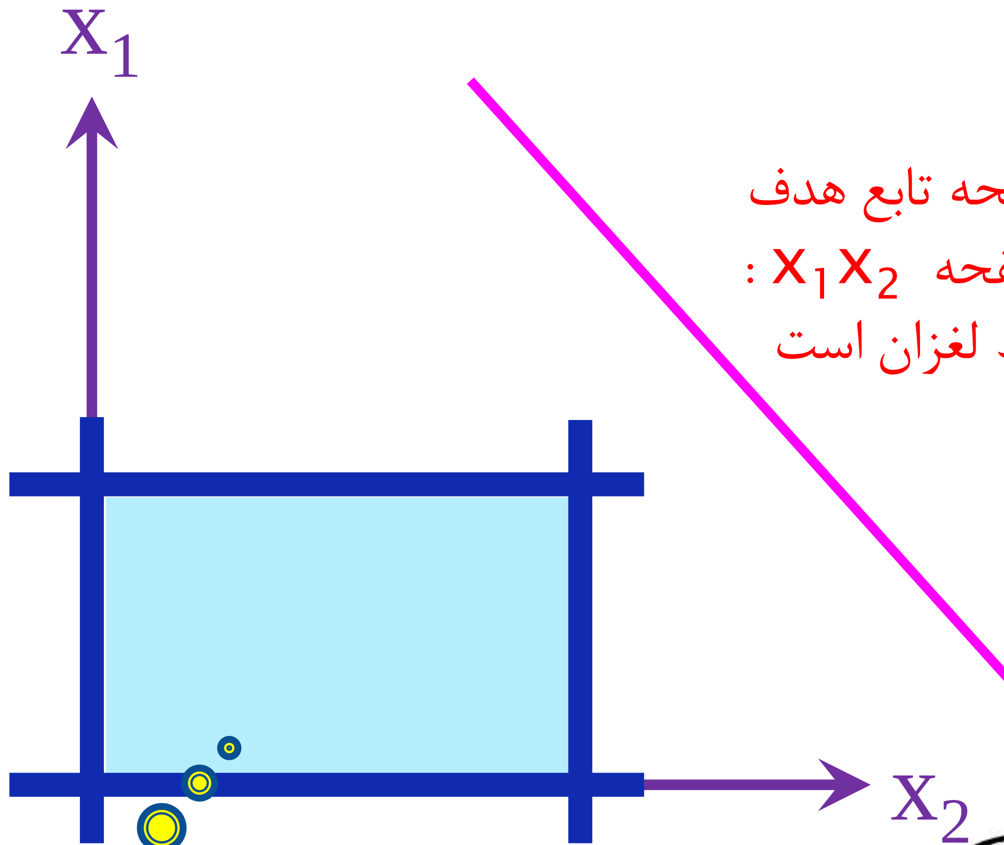
$x_1 \leq 2$ نیم فضا

$x_2 \leq 3$ نیم فضا

تابع هدف

$Max\ \ 5 - x_1 - x_2$

صفحه



تصویر صفحه تابع هدف
بر روی صفحه x_1x_2 :
یک خط لغزان است

ناحیه امکانپذیر:
نقاط صفحه x_1 x_2
محدود به ۴ خط

حین حرکت خط لغزان،
مقدار هدف در حال تغییر است
(مقدار Z در حال افزایش)

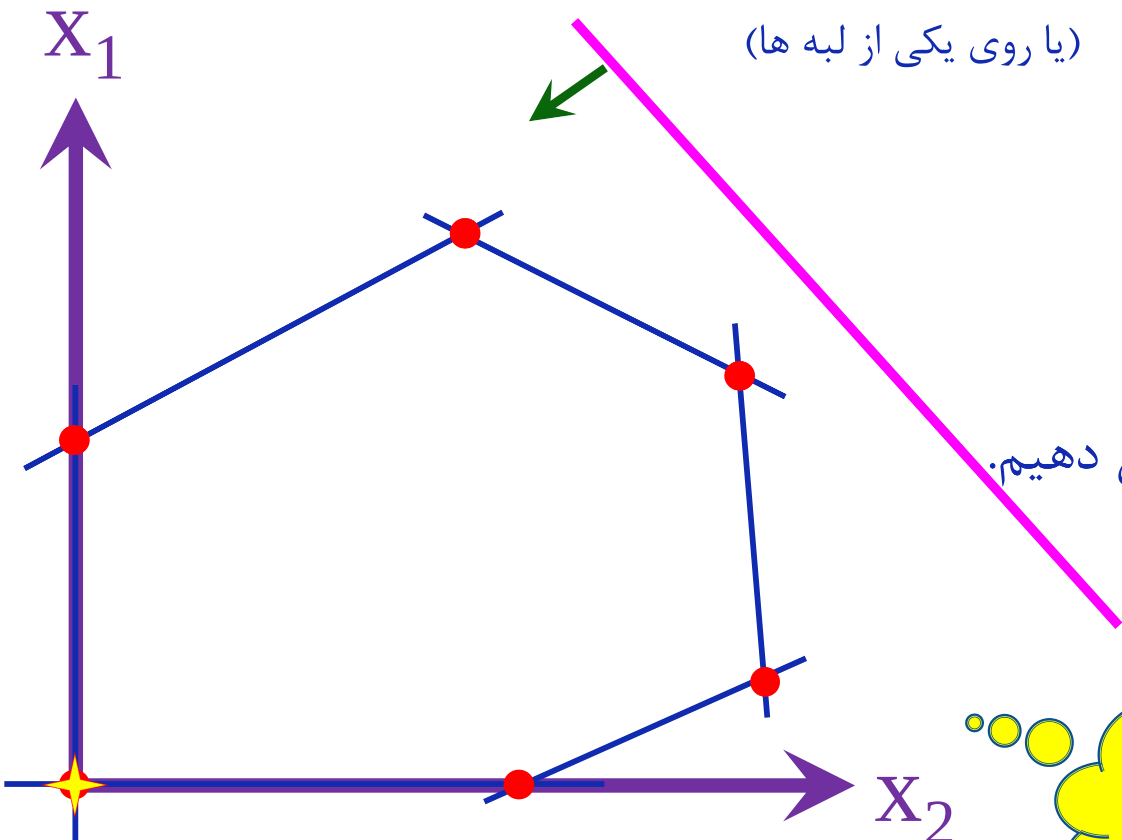
مسئله ۲بعدی خطی

تابع هدف خطی
(یکنوا صعودی یا نزولی)

محدودیتها خطی

جواب بهینه قطعاً روی یکی از گوشه های ناحیه امکانپذیر است

(یا روی یکی از لبه ها)



$$Max\ \ 5 - x_1 - x_2$$

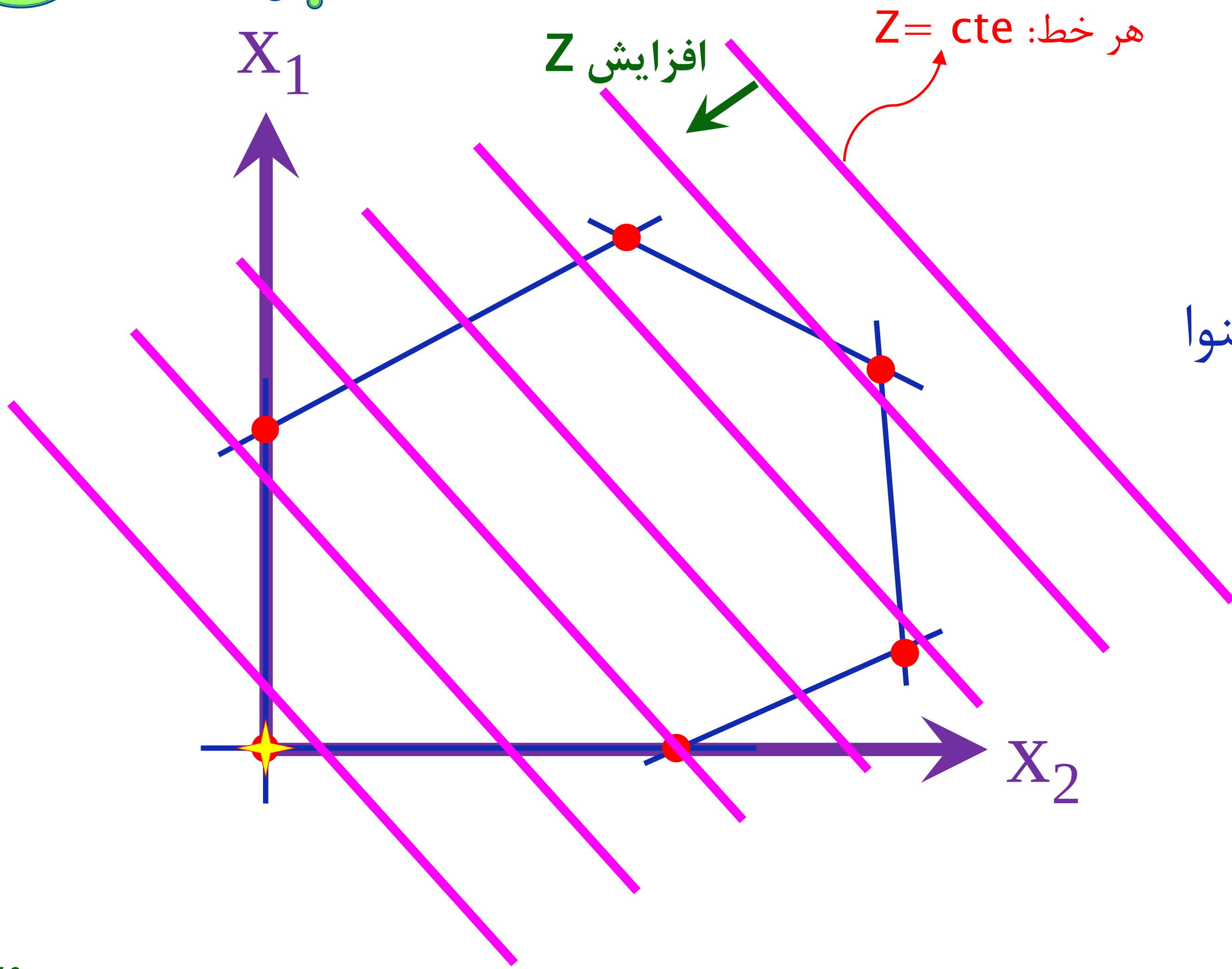
برای یافتن جواب بهینه:

خط (تصویر صفحه تابع هدف)
را بر روی صفحه X_2 X_1 حرکت می دهیم.

۱ جواب بهینه داریم

مسئله ۲بعدی خطی

$$Max\ \ 5 - x_1 - x_2$$



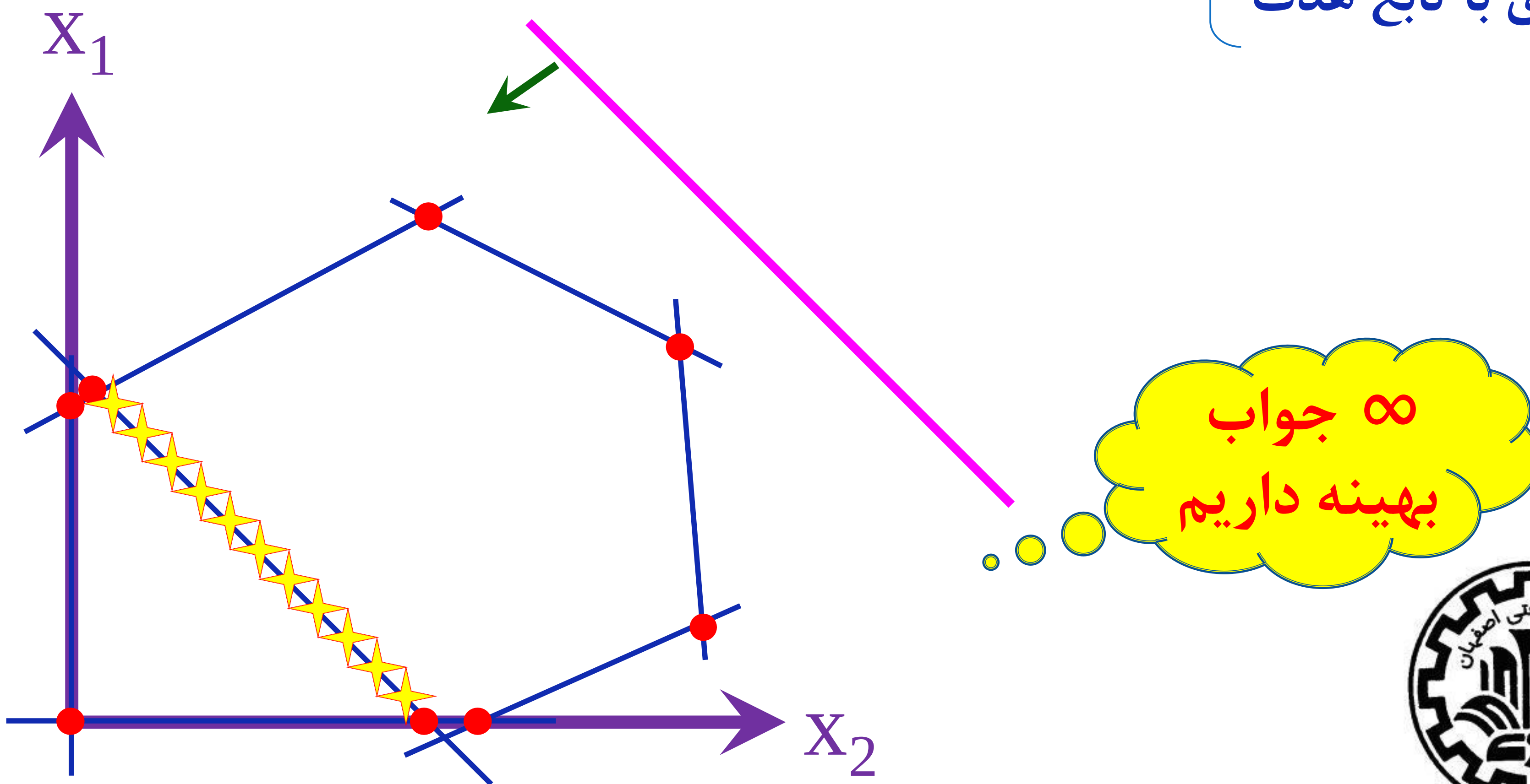
تابع هدف یکنوا

مروری بر برنامه ریزی خطی و عدد صحیح

مسئله
۲بعدی خطی

یکی از محدودیتها
در صفحه X_1 X_2
موازی با تابع هدف

بینهایت جواب بهینه داریم

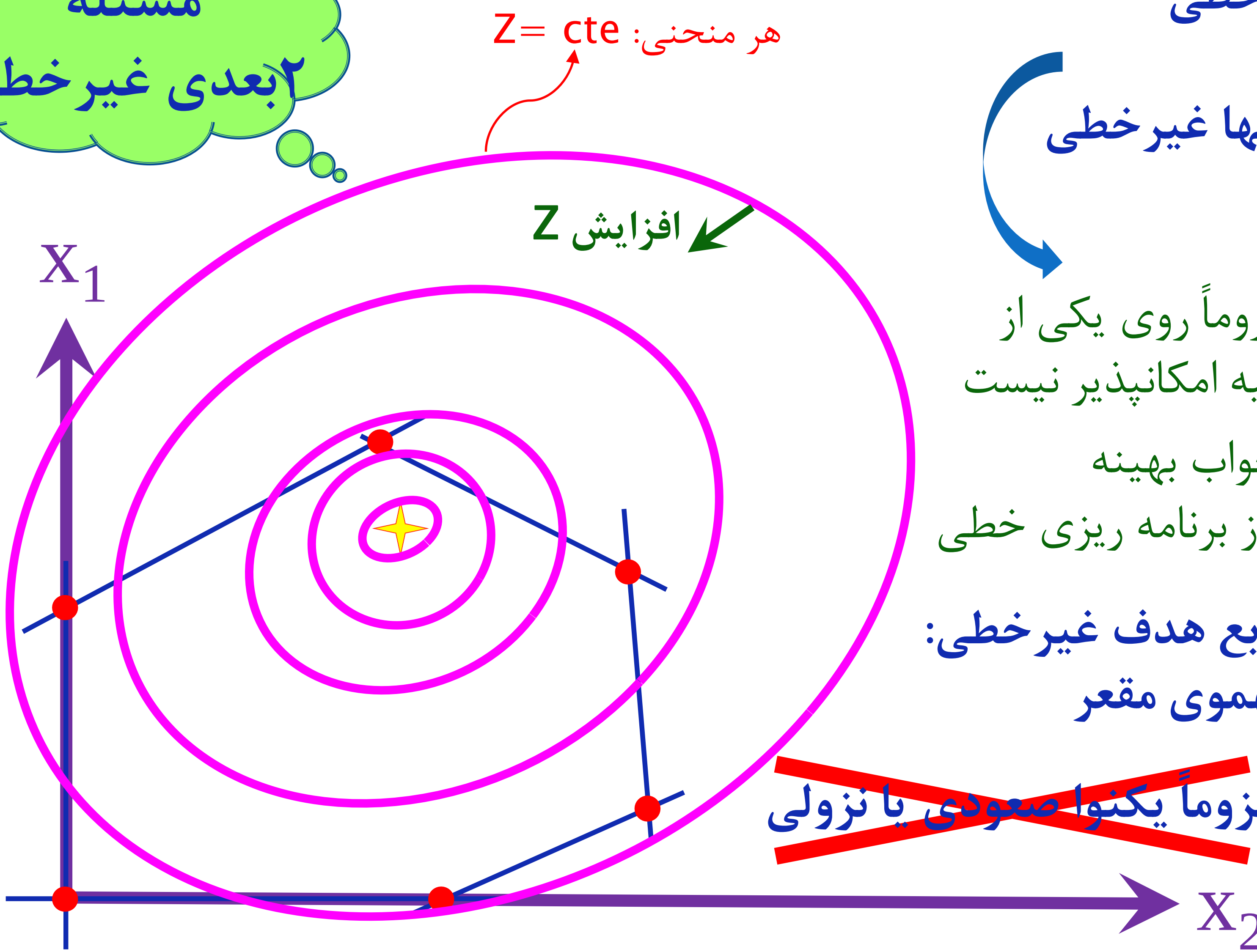


مسئله ۲بعدی غیرخطی

تابع هدف غیرخطی

یا

برخی محدودیتها غیرخطی



جواب بهینه لزوماً روی یکی از
گوشه های ناحیه امکانپذیر نیست

یافتن جواب بهینه
بسیار مشکل تر از برنامه ریزی خطی

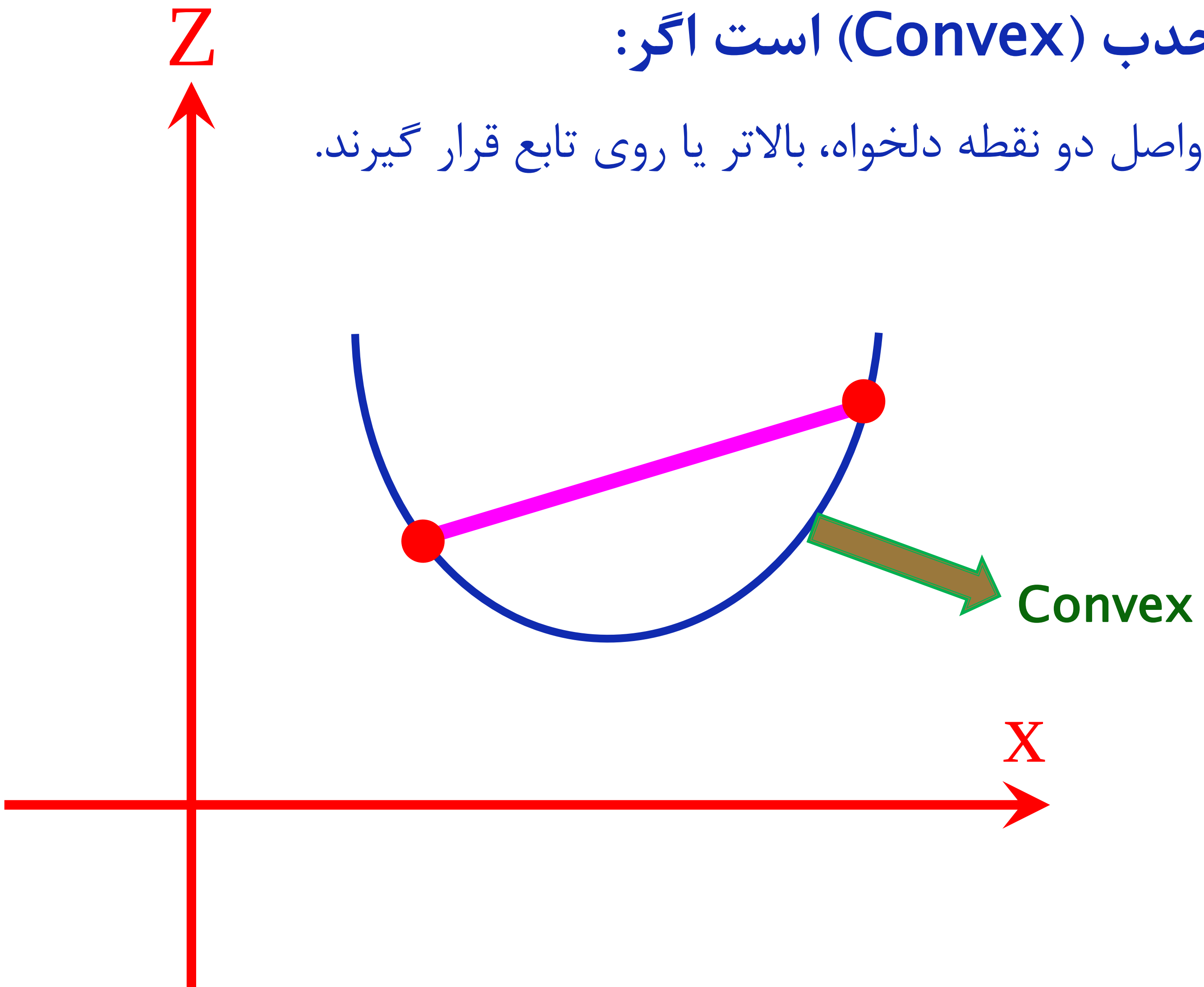
مثال) تابع هدف غیرخطی:
رویه سهموی مقعر

~~لزوماً یکنوا صعودی یا نزولی~~

تحدب (Convexity)

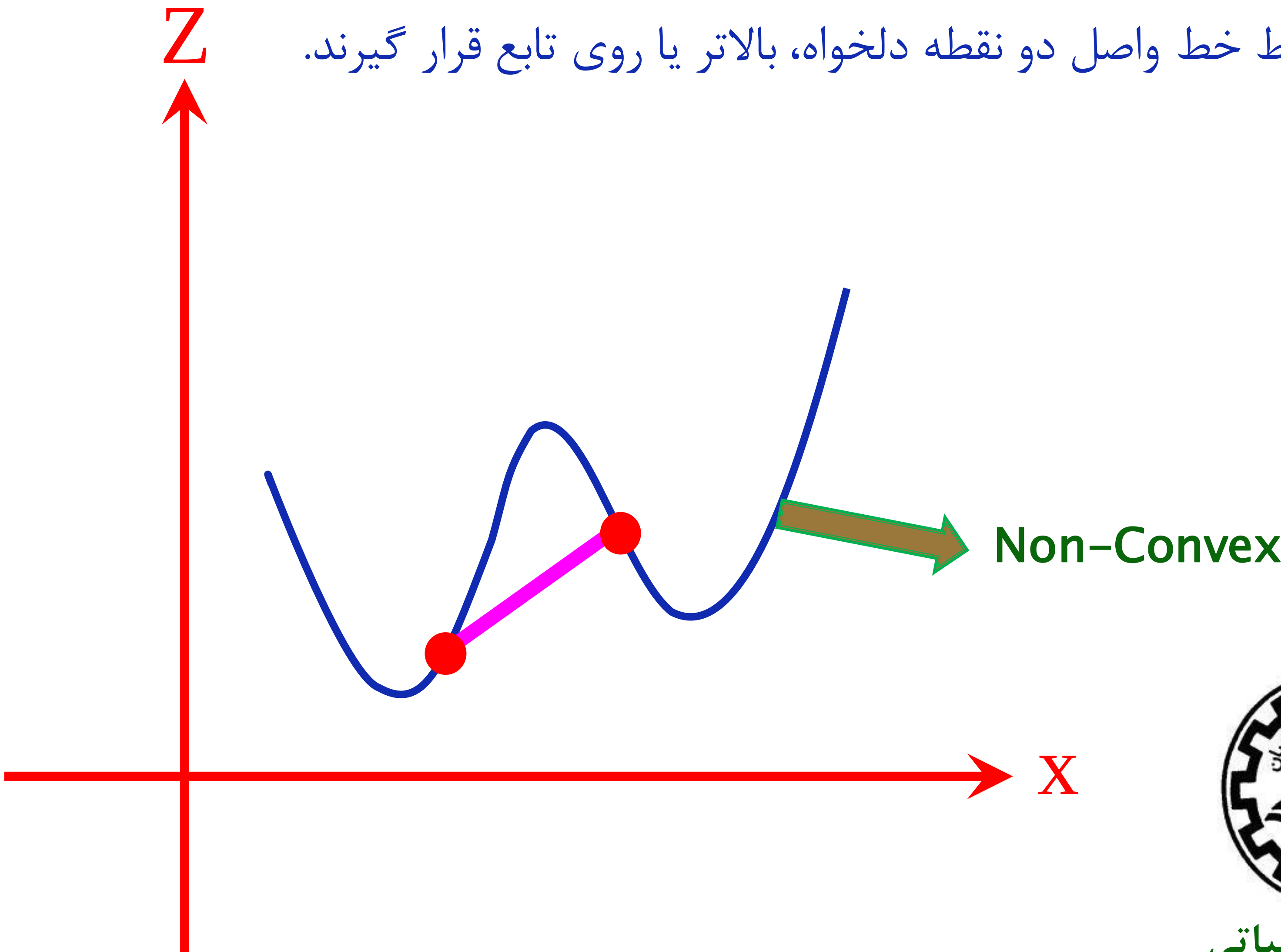
یک تابع، محدب (Convex) است اگر:

تمام نقاط خط واصل دو نقطه دلخواه، بالاتر یا روی تابع قرار گیرند.



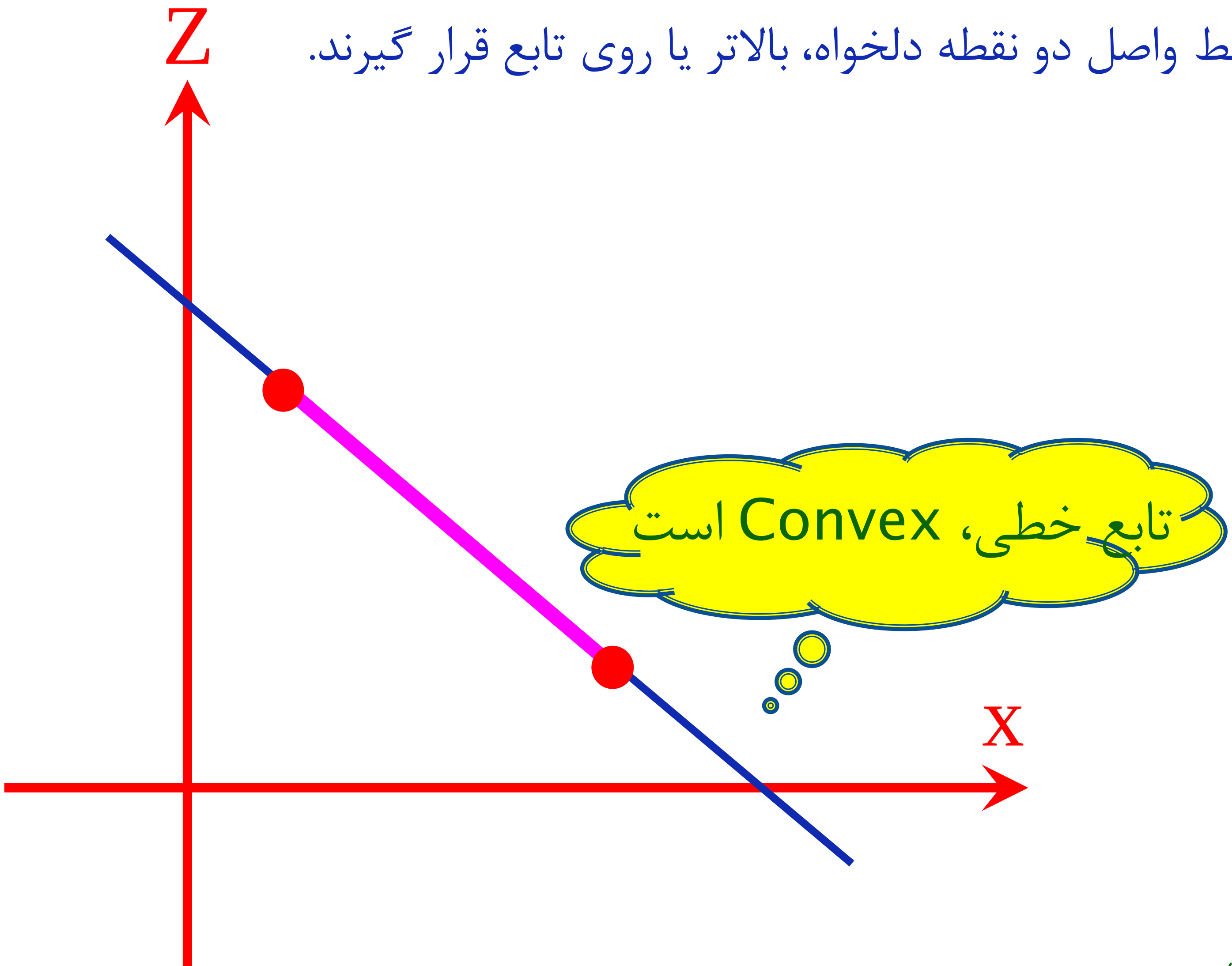
یک تابع محدب (Convex) است اگر:

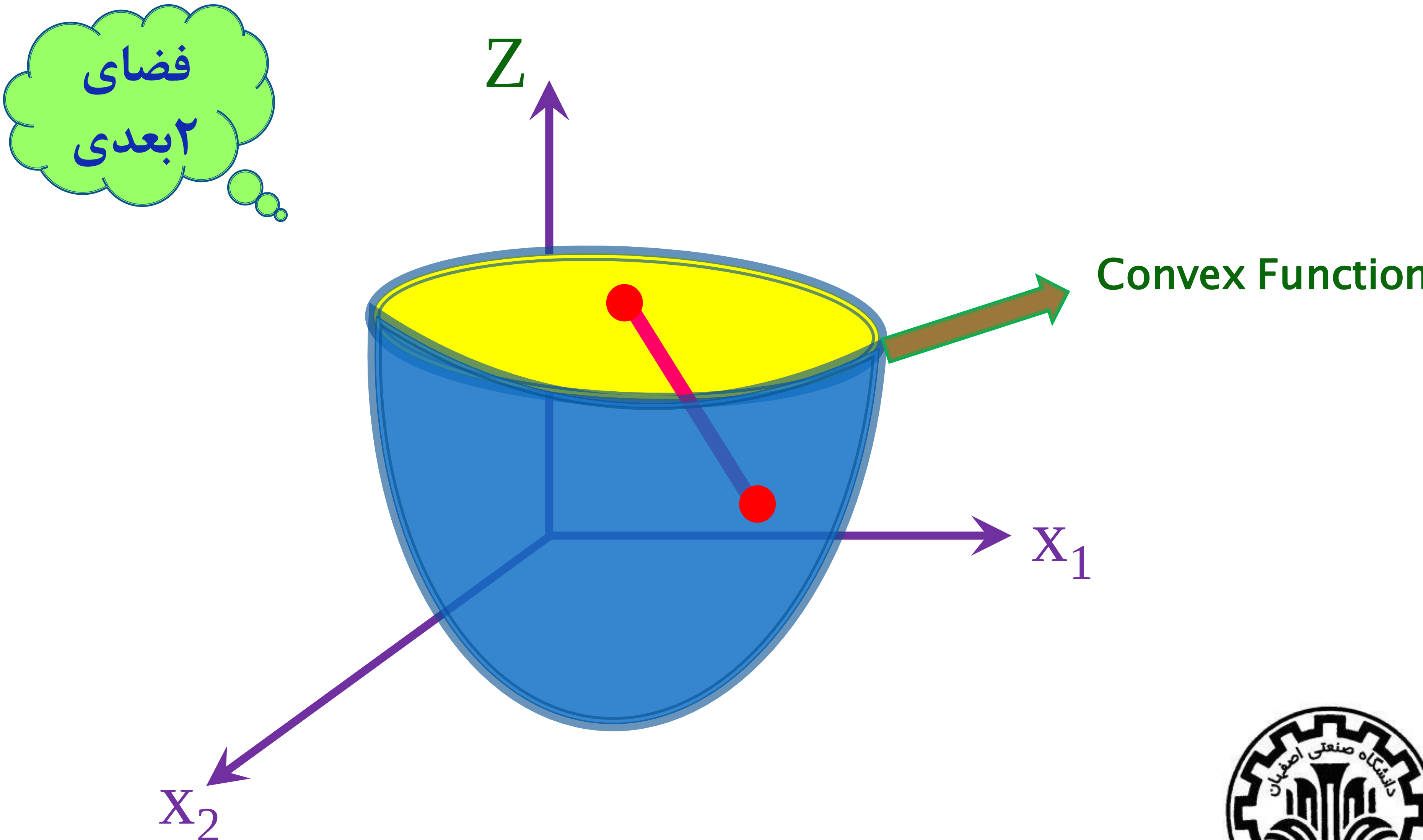
تمام نقاط خط واصل دو نقطه دلخواه، بالاتر یا روی تابع قرار گیرند.



یک تابع محدب (Convex) است اگر:

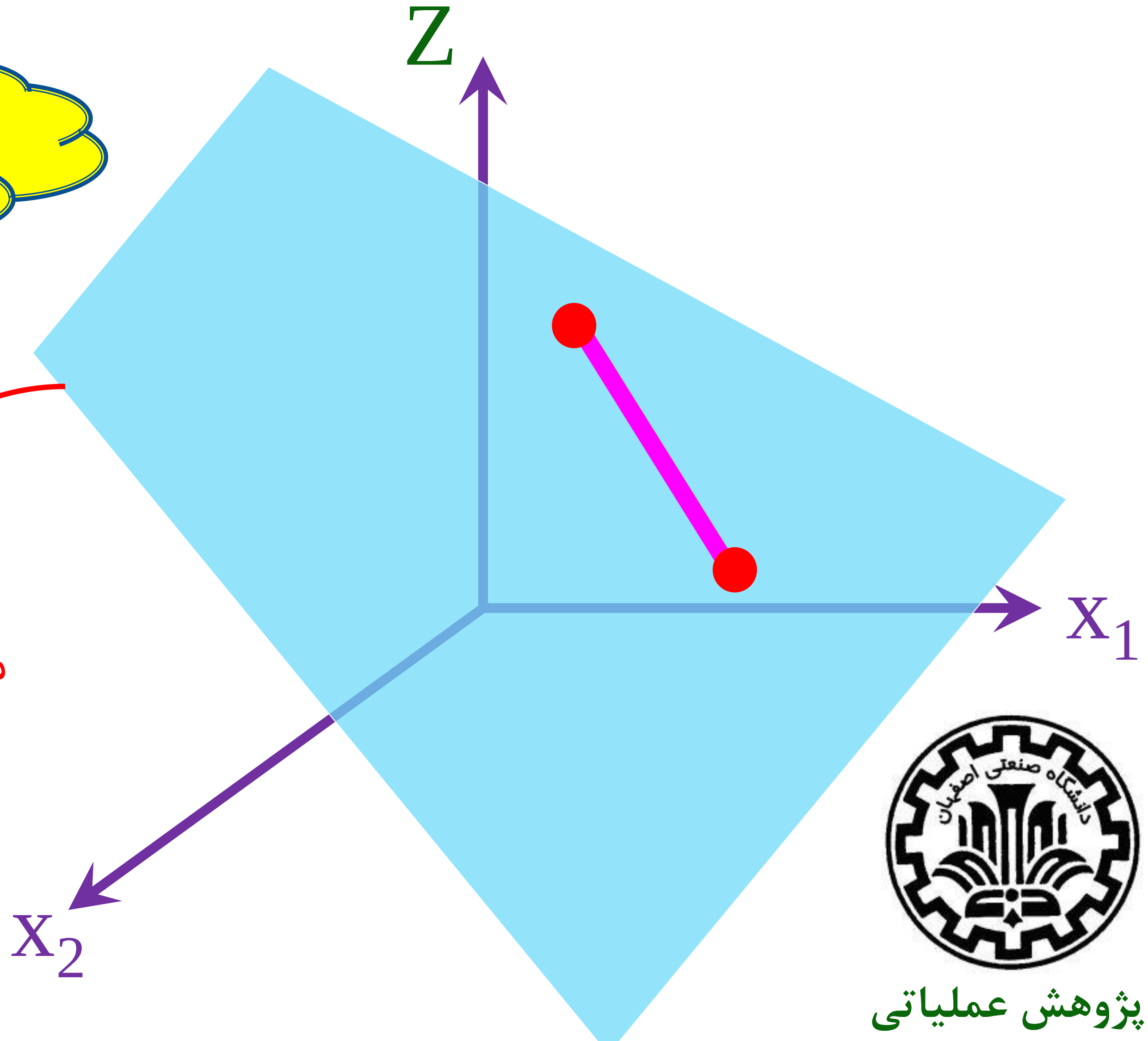
تمام نقاط خط واصل دو نقطه دلخواه، بالاتر یا روی تابع قرار گیرند.




فضای
۲بعدی
Z
Convex Function
x_1
x_2

$$f(x_1, x_2) = 5 - x_1 - x_2$$

تابع، Convex است



یک تابع هدف نسبت به متغیرهای خود، خطی باشد

تابع هدف، محدب است

یک ناحیه (Region)، محدب (Convex) است اگر:

تمام نقاط خط واصل دو نقطه دلخواه ناحیه، داخل ناحیه قرار گیرند.

مثال:

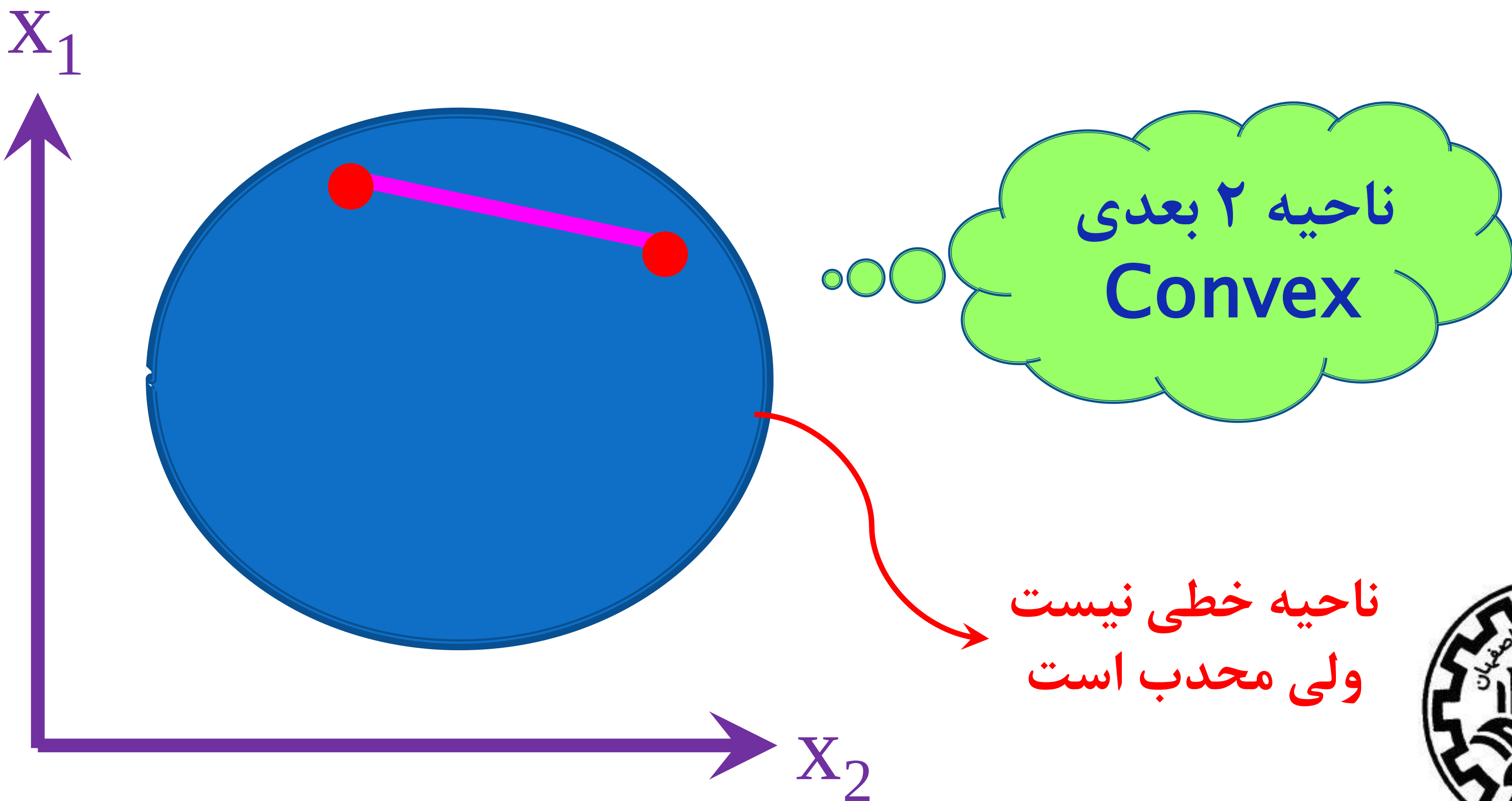
$$1 \le x \le 3$$

ناحیه متشکل از محدودیتهای خطی

ناحیه ۱ بعدی
Convex

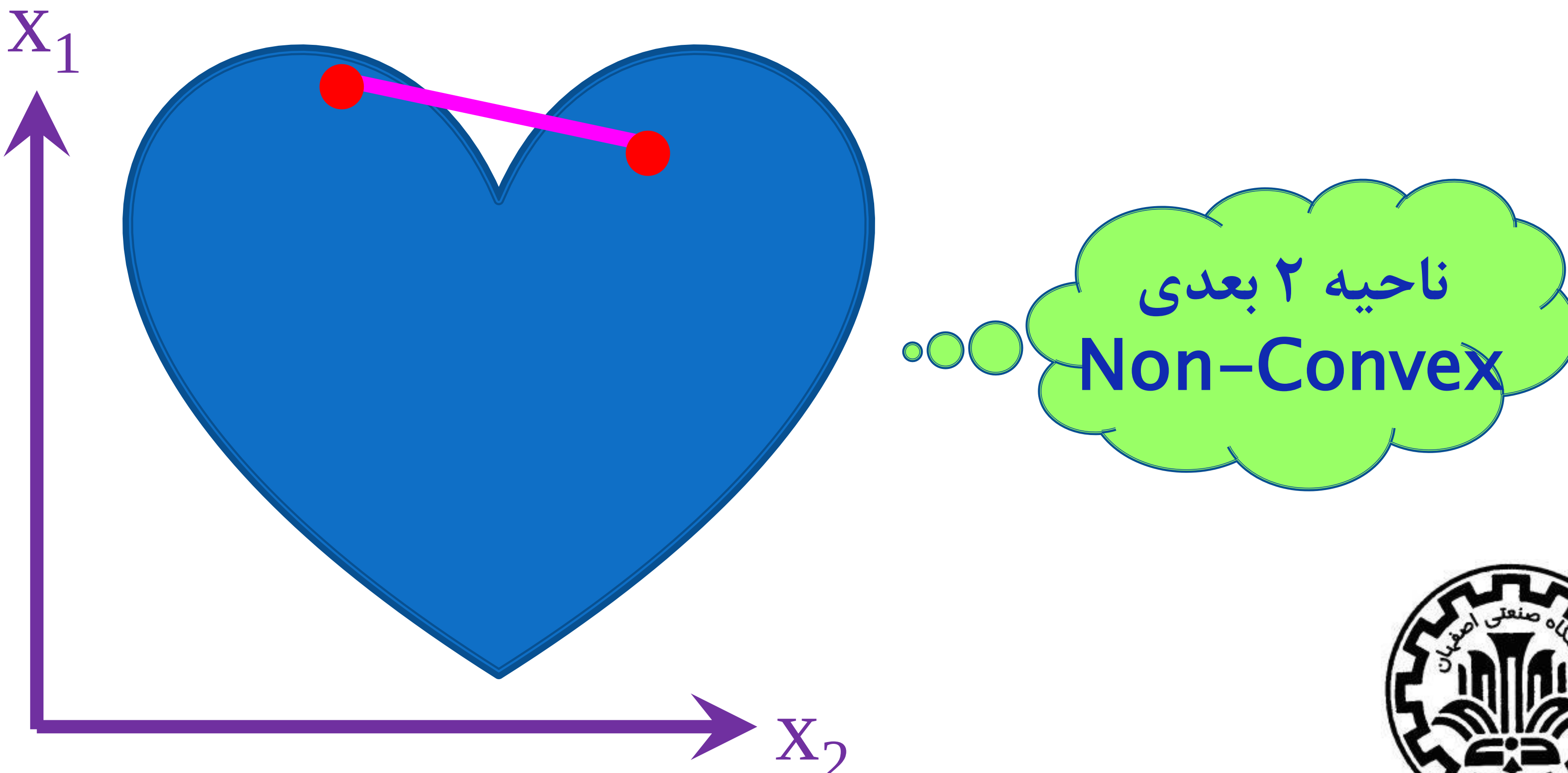
یک ناحیه (Region)، محدب (Convex) است اگر:

تمام نقاط خط واصل دو نقطه دلخواه ناحیه، داخل ناحیه قرار گیرند.



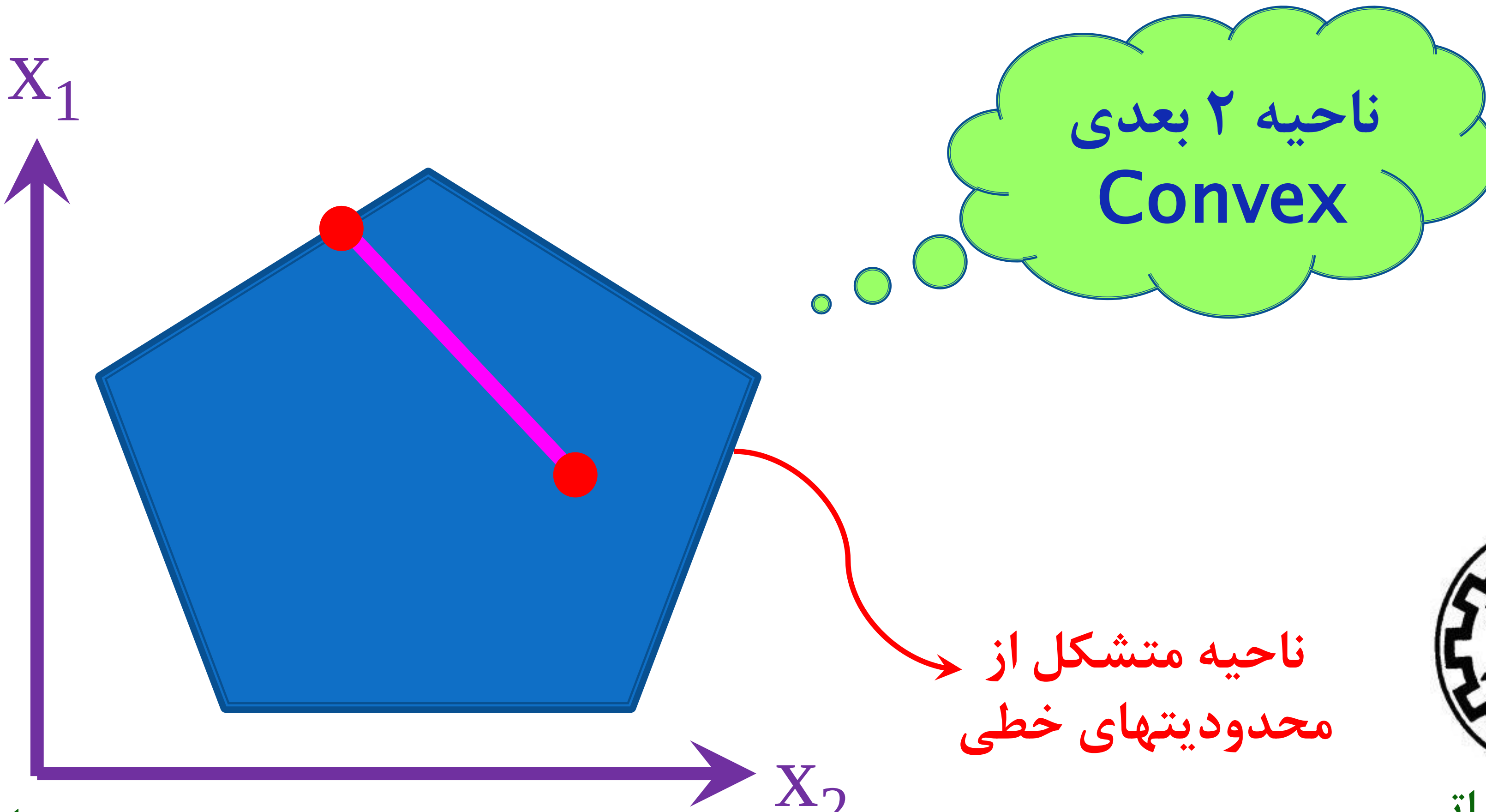
یک ناحیه (Region)، محدب (Convex) است اگر:

تمام نقاط خط واصل دو نقطه دلخواه ناحیه، داخل ناحیه قرار گیرند.



یک ناحیه (Region)، محدب (Convex) است اگر:

تمام نقاط خط واصل دو نقطه دلخواه ناحیه، داخل ناحیه قرار گیرند.



اگر همه قیود خطی باشند، ناحیه امکانپذیر الزاماً محدب است.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$$

- ✓ هر نامساوی خطی: توصیف یک نیم فضا (Half Space)
- ✓ اشتراک نیم فضاهای موصوف توسط نامساویهای خطی: محدب
- ✓ هر تساوی خطی: توصیف یک صفحه (در حالت کلی Hyper Plane) در فضا (محدب)

$$X \subset \mathbb{R}^n$$

- ✓ هر ناحیه متشکل از محدودیتهای خطی، لزوماً محدب است.
- ✓ هر ناحیه محدب، لزوماً متشکل از محدودیتهای خطی نیست.

$$f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

- ✓ هر تابع خطی (نسبت به متغیرهایش)، لزوماً محدب است.
- ✓ هر تابع محدب، لزوماً خطی (نسبت به متغیرهایش) نیست.

تحدب در LP

تابع هدف خطی ⟸ محدب

محدودیتها خطی ⟸ محدب

مسئله LP یک بهینه سازی محدب است

Convex Optimization

تحدب چه ارزشی دارد؟

❖ در مسائل بهینه سازی محدب:

به کمک روشهای تحلیلی همچون استفاده از مشتق دوم (Hessian) می توان بسرعت به همگرایی رسید و جواب بهینه را یافت.

❖ در مسائل بهینه سازی غیرمحدب:

یافتن جواب بهینه بسیار دشوارتر است.

روش تحلیلی جهت یافتن بهینه وجود ندارد.

معمولا باید به روشهای Search متوسل شد.

برنامه ریزی خطی عدد صحیح (ILP)

Integer Linear Programming

LP

همه متغیرها: پیوسته (Continuous)

تابع هدف: خطی و محدب

محدودیتها: خطی و محدب

ILP

متغیرها: غیرپیوسته (عدد صحیح Integer یا دودویی Binary)

تابع هدف: خطی و محدب

محدودیتهای معرف متغیرهای غیرپیوسته: غیرخطی و غیرمحدب

سایر محدودیتها: خطی و محدب

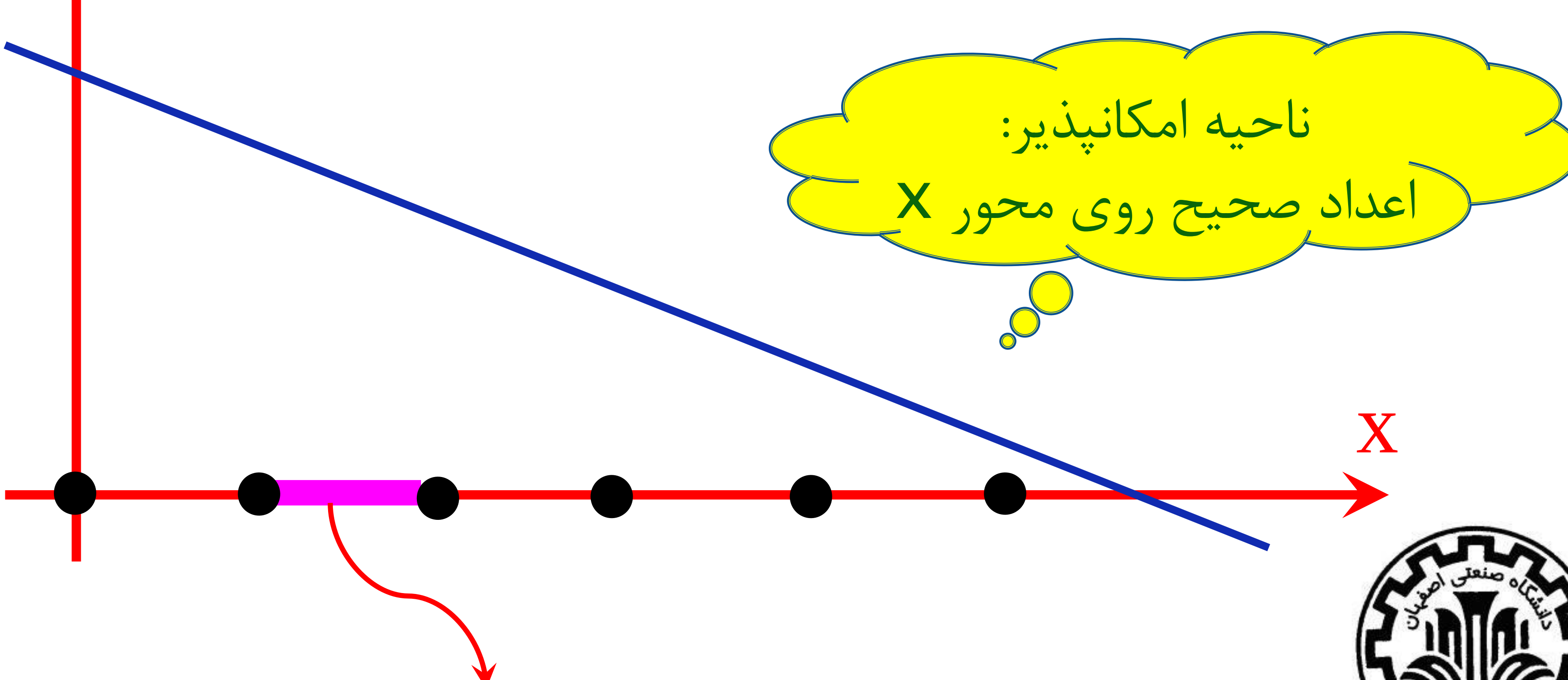
<u>باینری بودن حتی یک متغیر (مثلا $X\in\{0,1\}$):</u>

مسئله LP را به ILP تبدیل می کند.

در مسئله ILP

محدودیتهای معرف متغیرهای Integer یا Binary: خطی و محدب نیستند

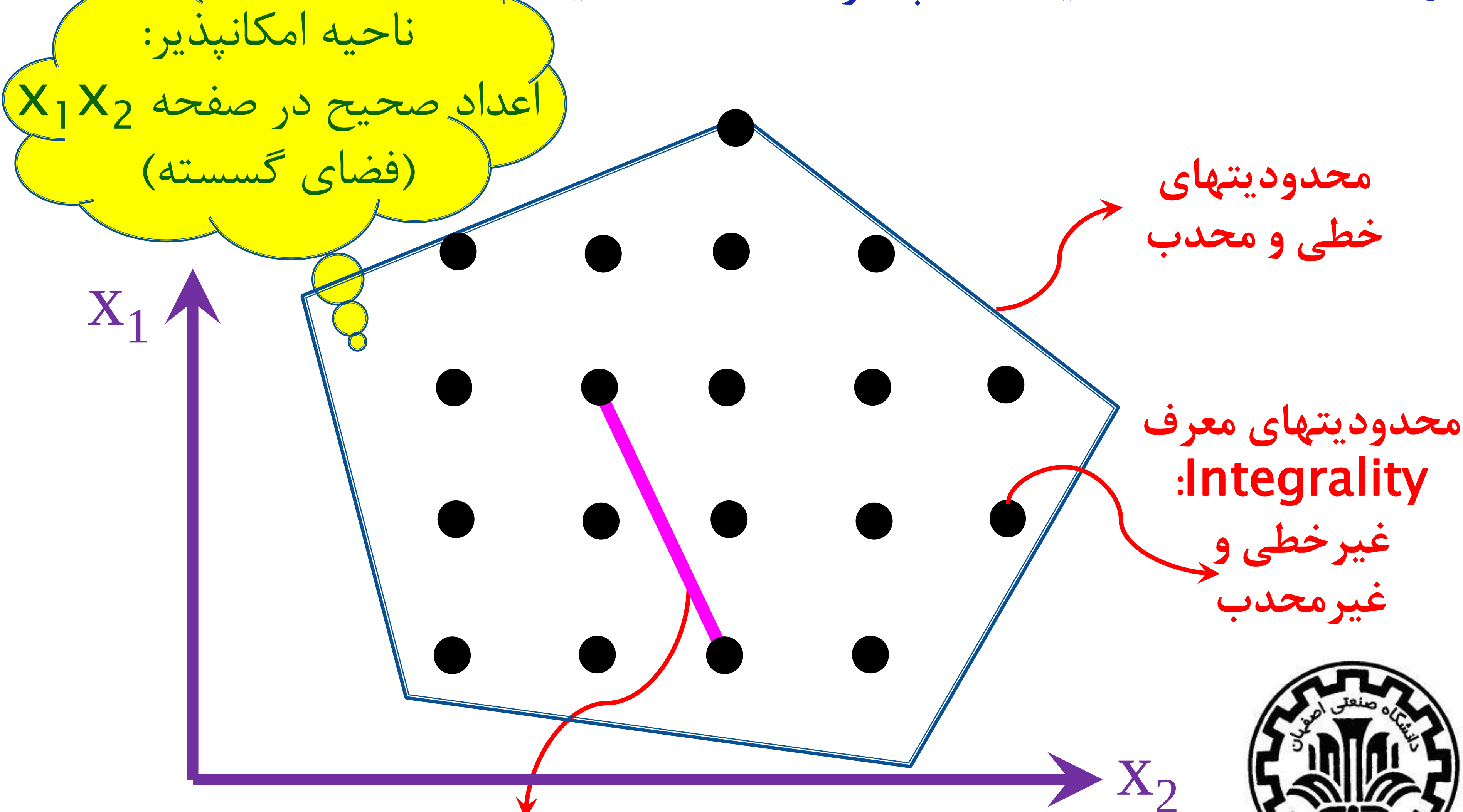
ناحیه امکانپذیر، محدب نیست



تمام نقاط خط واصل دو نقطه دلخواه ناحیه، داخل ناحیه قرار نمی گیرند.

مروری بر برنامه ریزی خطی و عدد صحیح

در مسئله ILP ناحیه امکانپذیر Convex نیست



تمام نقاط خط واصل دو نقطه دلخواه ناحیه، داخل ناحیه قرار نمی گیرند.

مسئله LP محدب است

مسئله ILP غیرمحدب است

حل مسئله ILP به مراتب دشوارتر از حل مسئله LP است

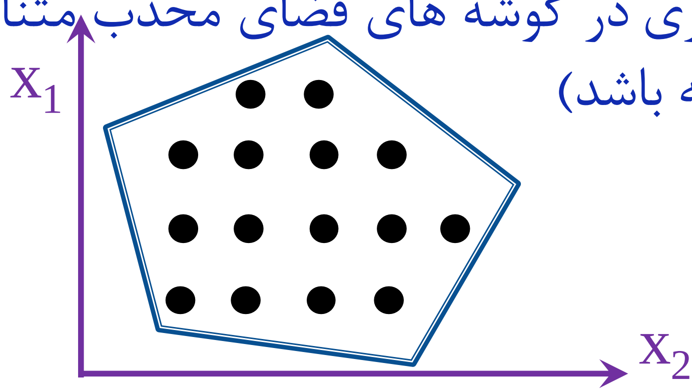
یکی از روشهای متداول حل ILP:

آزادسازی (Relax کردن) مسئله ILP از متغیرهای گسسته (تبدیل به پیوسته)

⇐ فضای گسسته غیر محدب مسئله ILP، داخل فضای محدب متناظر با نسخه relax شده واقع می شود.

- بهینه مسئله آزادشده (LP) قطعاً روی یکی از گوشه های ناحیه امکانپذیر محدب واقع میشود.
- بهینه مسئله اولیه (ILP) معلوم نیست کجا واقع میشود؟

(ممکن است هیچ جواب امکانپذیری در گوشه های فضای محدب متناظر با نسخه relax شده وجود نداشته باشد)

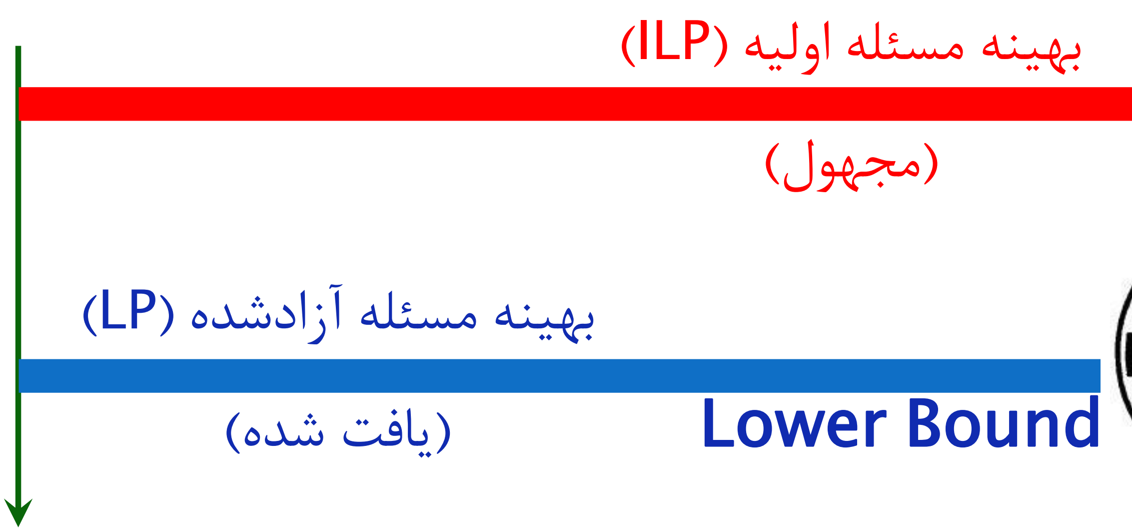


آزادسازی مسئله ILP:

جواب مسئله آزادشده (LP) نسبت به جواب مسئله اولیه (ILP)
قطعا بهتر (یا برابر) است (چرا؟)

- اگر بهینه مسئله آزادشده (LP) (واقع در روی گوشه فضای محدب): (اتفاقاً) عدد صحیح شود
  ⇐ بهینه مسئله آزادشده = بهینه مسئله اولیه
- در غیر اینصورت
  ⇐ بهینه مسئله آزادشده (LP) یک کران (Bound) برای بهینه مسئله اولیه است.

مثال
Minimization Problems



کوچک کردن ناحیه امکانپذیر:

چگونه؟

افزودن محدودیت (مثلاً افزودن یک ابرصفحه یا تغییر نوع متغیرها به عددصحیح)

کیفیت جواب؟

قطعاً بهتر نمی شود (کمینه سازی: ممکن است مقدار بهینه افزایش یابد)

پیچیدگی حل (زمان حل)؟

لزوماً کمتر نمی شود (به نحوه کوچک سازی ناحیه امکانپذیر بستگی دارد)

مسائل مهارنشدنی Interactable:

مسائلی که در زمان چندجمله ای (Polynomial) قادر به یافتن جواب بهینه نیستند.

با افزایش ابعاد مسئله (تعداد متغیرها) زمان حل ممکن است به صورت نمایی افزایش یابد.

- مسائل LP جزو دسته مسائل Intractable نیستند.
- **کلیه** مسائل ILP، IP، MILP و MIP جزو دسته مسائل Intractable هستند.

مسائل مهارنشدنی Interactable

مسائل NP-Complete

مسائل مهارنشدنی تعیین Decision بهینه: آری / خیر
مثال: آیا می توان شبکه اتوبوسرانی اصفهان را
با ۱۰۰۰ دستگاه اتوبوس زمانبندی نمود (با شرط ارضای تقاضا)؟

مسائل NP-Hard

مسائل مهارنشدنی تعیین جواب بهینه
مثال: زمانبندی بهینه و تعداد ناوگان بهینه شبکه اتوبوسرانی اصفهان
جهت ارضای تقاضا؟

مثالهایی از مسائل NP-Hard:

- انواع مسائل طراحی شبکه های حمل و نقل (NDP)
- انواع مسائل زمانبندی در حمل و نقل (Scheduling)
- مسائل مکان یابی
- مسائل مسیریابی
- . . .