



دانشگاه صنعتی اصفهان

دترمینان

بیژن طائری

دانشکده علوم ریاضی

ترم دوم ۱۴۰۴

فهرست مطالب

- ۱ مفهوم دترمینان و بسط لاپلاس
- ۲ ماتریس الحاقی
- ۳ خواص اساسی دترمینان
- ۴ نقش ماتریس‌های مقدماتی در اثبات خواص
- ۵ مثال‌هایی از محاسبه دترمینان با عملیات سطری/ستونی
- ۶ روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی
- ۷ تعریف دترمینان بر اساس جایگشت‌ها
- ۸ دترمینان ماتریس‌های بلوکی

تعریف دترمینان

دترمینان یک تابع اسکالر است که به هر ماتریس مربعی A یک عدد حقیقی یا مختلط نسبت می‌دهد. نماد: $\det(A)$ یا $|A|$.

◀ **تعریف بازگشتی (بسط لاپلاس):** برای ماتریس $A \in M_n(F)$ ، بسط نسبت به سطر i -ام:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

که در آن A_{ij} زیرماتریس حاصل از حذف سطر i و ستون j است.

◀ بسط نسبت به ستون نیز مشابه است. $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

اگر $a = [a] \in M_1(F)$ یک اسکالر باشد، آنگاه

$$\det([a]) = a$$

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(F)$ ، آنگاه

$$\det(A) = (-1)^{1+1}a \det([d]) + (-1)^{1+2}c \det([b]) = ad - bc$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

مثال: بسط لاپلاس

ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از بسط لاپلاس بر حسب سطر اول داریم

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) \\ &= -3 + 12 - 9 = 0 \end{aligned}$$

ماتریس A را در نظر می‌گیریم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

با استفاده از بسط لاپلاس بر حسب سطر اول داریم

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

ماتریس همسازه و الحاقی

ماتریس همسازه‌ی A (Cofactor) را با

$$\text{cof}(A) = [(-1)^{i+j} \det A_{ij}]$$

و ماتریس الحاقی (Adjugate یا Adjoint) A را با

$$\text{adj}(A) = [(-1)^{i+j} \det A_{ij}]^T \quad (= \text{cof}(A)^T)$$

تعریف می‌کنیم.

توجه: واژه “Adjoint” در اینجا با عملگر (ماتریس) الحاقی متفاوت است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

ابتدا $\det A_{ij}$ ها را می‌یابیم

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18, \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2, \quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 11, \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14, \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8.$$

بنابراین ماتریس‌های همسازه و الحاقی عبارتند از

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{bmatrix}, \quad \text{adj } A = \text{cof}(A)^T = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A(\text{adj } A) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{توجه کنید} \\ &= \begin{bmatrix} -46 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & 0 \\ 0 & 0 & -46 \end{bmatrix} \\ &= -46I \end{aligned}$$

در ادامه نشان می‌دهیم $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)I$. بنابراین فرمولی برای A^{-1} داریم.

$$A^{-1} = -\frac{1}{46} \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

قضیه (فرمول وارون با ماتریس الحاقی)

اگر $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ ، آنگاه

$$A(\text{adj } A) = (\det A)I = (\text{adj } A)A.$$

به ویژه اگر $\det A \neq 0$ ، آنگاه

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A.$$

اثبات باید ثابت کنیم $[A(\text{adj } A)]_{ij} = \delta_{ij} \det A$:

$$[A(\text{adj } A)]_{ii} = \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [\text{adj } A]_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{k+i} \det A_{ik} = \det A.$$

برای $i \neq j$ فرض می‌کنیم $B = [b_{ij}]$ همان ماتریس A باشد جز این که به جای سطر j ام A سطر i ام A را قرار داده باشیم. در این صورت $\det B = 0$. پس به ازای هر k داریم $b_{jk} = a_{ik}$ و هم‌چنین $\det B_{jk} = \det A_{jk}$. اکنون بسط $\det B$ را بر حسب سطر j ام می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
 0 = \det B &= \sum_{k=1}^n b_{jk} (-1)^{j+k} \det B_{jk} \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \det A_{jk} \\
 &= \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [\text{adj } A]_{kj} \\
 &= [A(\text{adj } A)]_{ij}
 \end{aligned}$$

خواص مهم دترمینان

قضیه

فرض کنید $A \in M_n(F)$. در این صورت

(۱) اگر جای دو سطر A عوض شود مقدار دترمینان در -1 ضرب می‌شود، یعنی

$$\det E_{ij} A = -\det A \quad \text{به ویژه } \det E_{ij} = -1.$$

(۲) اگر یک سطر A در اسکالر ناصفر λ ضرب شود مقدار دترمینان در λ ضرب می‌شود، یعنی

$$\det E_i(\lambda) A = \lambda \det A \quad \text{به ویژه } \det E_i(\lambda) = \lambda.$$

(۳) اگر مضربی از یک سطر A به سطر دیگر اضافه شود مقدار دترمینان تغییری نمی‌کند، یعنی

$$\det E_{ij}(\lambda) A = \det A \quad \text{به ویژه } \det E_{ij}(\lambda) = 1.$$

نتیجه

فرض کنید $A \in M_n(F)$.

اگر یک سطر تمام صفر باشد، آنگاه $\det(A) = 0$

اگر دو سطر مضرب هم باشند، آنگاه $\det(A) = 0$

$$\det(E_{ij}A) = -\det A = \det E_{ij} \det A$$

$$\det(E_i(\lambda)A) = \lambda \det A = \det E_i(\lambda) \det A$$

$$\det E_{ij}(\lambda)A = \det A = \det E_{ij}(\lambda) \det A$$

اکنون اگر E_1 و E_2 ماتریس‌های مقدماتی باشند، آنگاه طبق بحث بالا داریم

$$\det(E_2 E_1 A) = \det E_2 \det(E_1 A) = \det E_2 \det E_1 \det A$$

قضیه

اگر $A \in M_n(F)$ و $P = E_1 \cdots E_k$ حاصل ضرب ماتریس‌های مقدماتی باشد، آنگاه

$$\det P = \det(E_k \cdots E_1) = \det E_k \cdots \det E_1, \quad \det(PA) = \det P \det A.$$

به ویژه $\det P \neq 0$.

قضیه: وارون‌پذیری و دترمینان

ماتریس $A \in M_n(F)$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$.

اثبات

فرض کنید R فرم تحویل‌یافته پلکانی A باشد. در این صورت ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد که $PA = R$. طبق قضیه قبل

$$\det R = \det(PA) = \det P \det A.$$

چون $\det P \neq 0$ ، A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $R = I$ ، حکم ثابت است.

قضیه: دترمینان حاصلضرب

اگر $A, B \in M_n(F)$ ، آنگاه $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

اثبات

اگر A وارون‌پذیر نباشد، آنگاه AB نیز وارون‌پذیر نیست. پس $\det(AB) = 0 = \det A$ ،
یعنی $\det(AB) = 0 = \det A \det B$.

اگر A وارون‌پذیر باشد، آنگاه A حاصل ضرب ماتریس‌های مقدماتی است و بنابراین
 $\det(AB) = \det A \det B$.

ادامه اثبات‌ها با ماتریس مقدماتی

قضیه

اگر $A \in M_n(F)$ ، آنگاه $\det A^\top = \det A$.

$$E_{ij}^\top = E_{ij} \quad E_i(\lambda)^\top = E_i(\lambda) \quad E_{ij}(\lambda)^\top = E_{ji}(\lambda),$$

پس به ازای هر ماتریس مقدماتی داریم $\det E^\top = \det E$.

اگر A وارون‌پذیر نباشد، آنگاه $A^\top$ نیز وارون‌پذیر نیست و در نتیجه $\det A = 0 = \det A^\top$.
اگر A وارون‌پذیر باشد، آنگاه ماتریس‌های مقدماتی $E_1, \dots, E_k$ وجود دارند به طوری که
 $A = E_k \cdots E_2 E_1$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \det A^\top &= \det(E_1^\top \cdots E_k^\top) = \det E_1^\top \cdots \det E_k^\top \\ &= \det E_1 \cdots \det E_k = \det E_k \cdots \det E_1 \\ &= \det(E_k \cdots E_1) = \det A. \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} -3R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \\ -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad -2R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) = -2$$

قضیه (روش کرامر)

فرض کنید $A \in M_n(F)$ ، $\det A \neq 0$ ، و $B \in F^n$. در این صورت جواب‌های دستگاه $AX = B$ عبارتند از

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

که در آن A_j ماتریس حاصل از جایگزین کردن بردار ستونی B با ستون j ام A است.

فرض کنید $A = [C_1, \dots, C_n]$ ، ستون j ام A ، C_j ، دستگاه $AX = B$ را به صورت $x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = B$ می‌نویسیم.

مثال

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

دترمینان ماتریس ضرایب A و دترمینان A_j ‌ها را محاسبه می‌کنیم

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5.$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 10.$$

مثال

(ادامه)

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -5.$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

بنابراین

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = 2, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = -1, \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} = 0.$$

فرض کنید $A \in M_n(F)$ یک ماتریس با درایه‌های در میدان F باشد. در این صورت داریم

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

- ◀ S_n : مجموعه تمام جایگشت‌های $\{1, 2, \dots, n\}$
- ◀ $\operatorname{sgn}(\sigma)$: علامت جایگشت σ ($+1$ برای جایگشت زوج، -1 برای جایگشت فرد)
- ◀ این تعریف با تعاریف قبلی (بسط لاپلاس) معادل است.

مثال : تعریف جایگشتی برای $n = 2$

برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ، دارای دو جایگشت:

◀ $\sigma_1 : (1, 2)$ (جایگشت همانی)، $\text{sgn}(\sigma_1) = +1$ ، جمله: $a_{11}a_{22}$

◀ $\sigma_2 : (2, 1)$ (تعویض)، $\text{sgn}(\sigma_2) = -1$ ، جمله: $a_{12}a_{21}$

در نتیجه

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

قضیه (ماتریس بلوکی مثلثی)

فرض کنید A و B ماتریس‌های مربع باشند (نه الزاماً هم‌اندازه). در این صورت

$$\det \begin{bmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B), \quad \det \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B).$$

مثال

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\det(M) = \det(A) \det(D) = 5 \times 18 = 90$$

اعمال سطری-مقدماتی و ستونی- مقدماتی را می‌توان به ماتریس‌های بلوکی تعمیم داد:

(۱) تعویض جای دو بلوک سطری (ستونی)

(۲) ضرب یک بلوک سطری (بلوک ستونی) از سمت چپ (از سمت راست) در یک ماتریس

وارون‌پذیر با اندازه مناسب

(۳) ضرب یک بلوک سطری (بلوک ستونی) از سمت چپ (از سمت راست) در یک ماتریس و

جمع آن با یک بلوک سطری (بلوک ستونی) دیگر

با انجام عمل نوع (۳) مقدار درمینان تغییری نمی‌کند

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C + XA & D + XB \end{vmatrix},$$

که در آن $A \in M_m(F)$ ، $D \in M_n(F)$ و $X \in M_{n \times m}(F)$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B + AY \\ C & D + CY \end{vmatrix},$$

که در $Y \in M_{m,n}(F)$

قضیه

اگر $X, Y \in F^n$ بردارهای ستونی باشند، آنگاه

$$\det(I + XY^T) = 1 + Y^T X$$

$$\begin{aligned} \det(I + XY^T) &= \begin{vmatrix} I + XY^T & X \\ \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} I + XY^T & X \\ Y^T + Y^T(XY^T) & 1 + Y^T X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} I & X \\ \mathbf{0} & 1 + Y^T X \end{vmatrix} \\ &= \det(1 + Y^T X). \end{aligned}$$

نتیجه

فرض کنید $A \in M_n(F)$ وارون‌پذیر باشد. اگر $X, Y \in F^n$ بردارهای ستونی باشند، آنگاه

$$\det(A + XY^T) = \det(A)(1 + Y^T A^{-1}X).$$

$$\begin{aligned} \det(A + XY^T) &= \det(A(I + (A^{-1}X)Y^T)) \\ &= \det(A) \det((I + (A^{-1}X)Y^T)) \\ &= \det(A) (1 + Y^T (A^{-1}X)) \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + \lambda_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 + \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= D + XX^\top$$

که در آن $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ و $X = (1, 1, \dots, 1)^\top$

$$\begin{aligned} \det A &= \det(D + XX^\top) = \det(D)(1 + X^\top D^{-1}X) \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \left(1 + X^\top \text{diag} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right) X \right) \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \left(1 + [1 \ 1 \ \cdots \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix} \right) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \left(1 + \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} \right). \end{aligned}$$

قضیه (Schur complement)

اگر $A \in M_m(F)$, $D \in M_n(F)$, $C \in M_{n \times m}(F)$ و $B \in M_{m \times n}(F)$, آنگاه

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{cases} \det(A) \det(D - CA^{-1}B) & A \text{ وارون‌پذیر} \\ \det(D) \det(A - BD^{-1}C) & D \text{ وارون‌پذیر.} \end{cases}$$

ماتریس $CA^{-1}B$ را مکمل Schur نامیم.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B).$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & \mathbf{0} \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A - BD^{-1}C) \det(D).$$

مثال

فرض کنید $B \in M_{m \times n}(F)$ و $C \in M_{n \times m}(F)$. نشان دهید به ازای هر $\lambda \in F$ ،
 $\lambda^m \det(\lambda I_n - CB) = \lambda^n \det(\lambda I_m - BC)$.

اگر $\lambda = 0$ ، حکم واضح است. فرض کنید $\lambda \neq 0$. چون λI_m وارون‌پذیر است داریم

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \lambda I_m & \lambda B \\ C & \lambda I_n \end{array} \right| &= \det(\lambda I_m) \det(\lambda I_n - C(\lambda I_m)^{-1}(\lambda B)) \\ &= \lambda^m \det(\lambda I_n - C\lambda^{-1}I_m\lambda B) \\ &= \lambda^m \det(\lambda I_n - CB) \end{aligned}$$

به همین ترتیب چون λI_n وارون‌پذیر است داریم

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \lambda I_m & \lambda B \\ C & \lambda I_n \end{array} \right| &= \det(\lambda I_n) \det(\lambda I_m - (\lambda B)(\lambda I_n)^{-1}C) \\ &= \lambda^n \det(\lambda I_m - \lambda B\lambda^{-1}I_nC) \\ &= \lambda^n \det(\lambda I_m - BC) \end{aligned}$$

مثال

نشان دهید که اگر $A \in M_n(F)$ وارون‌پذیر باشد، و $C, D \in M_{n \times k}(F)$ ، آنگاه

$$\det(A + CD^\top) = \det(A) \det(I_k + D^\top A^{-1}C).$$

داریم

$$\begin{aligned} \det(A + CD^\top) &= \det \begin{pmatrix} A & -C \\ D^\top & I_k \end{pmatrix} \\ &= \det(A) \det(I_k - D^\top A^{-1}(-C)) \\ &= \det(A) \det(I_k + D^\top A^{-1}C) \end{aligned}$$

قضیه

فرض کنید $A, B, C, D \in M_n(F)$ ، $\det(A) \neq 0$ و $AC = CA$. در این صورت

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB).$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \det(A) \det(D - CA^{-1}B) \\ &= \det \left(A(D - CA^{-1}B) \right) \\ &= \det(AD - ACA^{-1}B) \\ &= \det(AD - CAA^{-1}B) \\ &= \det(AD - CB). \end{aligned}$$

قضیه

فرض کنید $A, B, C, D \in M_n(F)$ و $AC = CA$. در این صورت

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB).$$

چون چندجمله‌ای $\det(-xI_n + A)$ بر حسب x تعداد متناهی ریشه دارد، پس $\delta > 0$ وجود دارد، به طوری که برای $0 < x < \delta$ داریم $\det(-xI_n + A) \neq 0$. اکنون

$$\forall x \in (0, \delta), \quad \det(-xI_n + A) \neq 0 \quad \text{و} \quad (-xI_n + A)C = C(-xI_n + A),$$

پس

$$\det \begin{bmatrix} -xI_n + A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \left((-xI_n + A)D - CB \right).$$

بنابراین اگر $x \rightarrow 0^+$ حکم قضیه را به دست می‌آوریم.