



دانشگاه صنعتی اصفهان

ماتریس‌ها و اعمال جبری روی آن‌ها (جبر خطی کاربردی)

بیژن طائری

دانشکده علوم ریاضی

ترم دوم ۱۴۰۴

فهرست مطالب

۱ ماتریس‌ها

۲ ماتریس‌ها: تعاریف اولیه

۳ اعمال جبری روی ماتریس‌ها

۴ ماتریس‌های بلوکی

۵ ضرب تانسوری

میدان (Field)

تعریف: مجموعه‌ی ناتهی F به همراه دو عمل جمع $(+)$ و ضرب $(\cdot)$ یک میدان است هرگاه به ازای هر $a, b, c \in F$:

شرایط جمع:

❶ بسته بودن: $a + b \in F$

❷ شرکت‌پذیری: $(a + b) + c = a + (b + c)$

❸ وجود عضو خنثی: $a + 0 = 0 + a = a$

❹ عضو قرینه: $\exists -a, a + (-a) = 0$

❺ جابجایی: $a + b = b + a$

شرایط ضرب:

❶ بسته بودن: $a \cdot b \in F$

❷ شرکت‌پذیری: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

❸ وجود عضو همانی: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

❹ معکوس ضربی:
if $a \neq 0, \exists a^{-1}, a \cdot a^{-1} = 1$

❺ جابجایی: $a \cdot b = b \cdot a$

یعنی $(F, +)$ یک گروه آبلی است

یعنی $(F, \cdot)$ یک گروه آبلی است

توزیع پذیری:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

تعریف میدان

یک میدان مجموعه‌ای ناتهی F به همراه دو عمل دوتایی جمع $(+)$ و ضرب $(\cdot)$ است که در شرایط زیر صدق کنند:

- ❶ نسبت به جمع یک گروه آبلی با عضو خنثی 0 است.
- ❷ $F - \{0\}$ نسبت به ضرب یک گروه آبلی با عضو همانی 1 است.
- ❸ ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر است: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

مثال

$\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) و $\mathbb{C}$ (اعداد مختلط) با اعمال متعارف، میدان هستند.

میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$

◀ مجموعه تمام اعداد حقیقی با اعمال جمع و ضرب متعارف

◀ عضو خنثی جمع: 0

◀ عضو خنثی ضرب: 1

◀ وارون جمع هر عدد a : $-a$

◀ وارون ضرب هر عدد ناصفر a : $a^{-1} = \frac{1}{a}$

میدان $\mathbb{R}$ متشکل از اعداد گویا و اصم است

$$\dots, -\pi, -1, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, e, 3.14, \dots$$

میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

جمع: ▶

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

ضرب: ▶

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

مزدوج مختلط: ▶

$$0 + 0i$$

عضو خنثی جمع: ▶

$$1 + 0i$$

عضو خنثی ضرب: ▶

مثال

$$(2 + 3i) + (1 - 4i) = 3 - i$$

$$(2 + 3i)(1 - 4i) = 2 - 8i + 3i - 12i^2 = 14 - 5i$$

میدان‌های دیگر

میدان‌های متناهی

میدان $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ با اعمال:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

در این میدان: $1 + 1 = 0$.

میدان اعداد گویا

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ نیز یک میدان است.

در این درس همواره میدان F را برابر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم.

میدان‌های دیگر

ایده تشکیل $\mathbb{C}$ از $\mathbb{R}$ را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:
چندجمله‌ای درجه دو $f(x) = x^2 + 1$ در $\mathbb{R}$ ریشه‌ای ندارد (تحویل ناپذیر است). یک نماد i به عنوان ریشه‌ای این چندجمله‌ای در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم
 $\mathbb{R}(i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. جمع و ضرب را به صورت نمادین تعریف می‌کنیم و به جای i^2 ، -1 قرار می‌دهیم. در این صورت میدان اعداد مختلط $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ به دست می‌آید.

مثال

چندجمله‌ای $f(x) = x^2 - 2$ در $\mathbb{Q}$ ریشه‌ای ندارد. یک نماد t به عنوان ریشه‌ای این چندجمله‌ای در نظر می‌گیریم (در واقع $t = \sqrt{2}$) و قرار می‌دهیم

$$\mathbb{Q}(t) = \{a + tb \mid a, b \in \mathbb{Q}, t^2 = 2\}$$

جمع و ضرب را به صورت نمادین تعریف می‌کنیم و به جای t^2 ، 2 قرار می‌دهیم. در این صورت میدان $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ به دست می‌آید.

میدان‌های دیگر

مثال

چندجمله‌ای $f(x) = x^2 + x + 1$ در $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ ریشه‌ای ندارد. یک نماد t به عنوان ریشه‌ای این چندجمله‌ای در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$\mathbb{F}_2(t) = \{a + tb \mid a, b \in \mathbb{F}_2, t^2 = 1 + t\} = \{0, 1, t, 1 + t \mid t^2 = 1 + t\}$$

جمع و ضرب را به صورت نمادین تعریف می‌کنیم و به جای t^2 ، $1 + t$ قرار می‌دهیم. در این صورت یک میدان 4 عضوی داریم.

+	0	1	t	$1 + t$	.	0	1	t	$1 + t$
0	0	1	t	$1 + t$	0	0	0	0	0
1	1	0	$1 + t$	t	1	0	1	t	$1 + t$
t	t	$1 + t$	0	1	t	0	t	$1 + t$	1
$1 + t$	$1 + t$	t	1	0	$1 + t$	0	$1 + t$	1	t

تعریف ماتریس

تعریف

یک ماتریس $m \times n$ با درایه‌های در میدان F (که در آن $F = \mathbb{R}$ یا $F = \mathbb{C}$) آرایه‌ای مستطیلی از عناصر F است با m سطر و n ستون:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(F)$$

اسکالر a_{ij} را درایه ij یا (i, j) ماتریس $A = [a_{ij}]$ گوئیم و گاهی با $[A]_{ij}$ یا A_{ij} نشان می‌دهیم.

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} i & 1-i \\ 0 & 2+3i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{C})$$

برای ماتریس

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(F)$$

سطر i ام A عبارت است از

$$A_{i*} = R_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

و ستون j ام A عبارت است از

$$A_{*j} = C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

مثال

ماتریس 2×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

را در نظر بگیرید. سطرهای A ، عبارتند از

$$R_1 = (1, -1, 3), \quad R_2 = (0, 2, -4)$$

هم‌چنین ستون‌های A عبارتند از

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

مجموعه ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های در F را با $M_{m,n}(F)$ نشان می‌دهیم.

مجموعه ماتریس‌های مربع $n \times n$ با درایه‌های در F را با $M_n(F)$ نشان می‌دهیم.

مجموعه ماتریس‌های $M_{m,1}(F)$ را با F^m نشان می‌دهیم هر عضو از $F^m = M_{m,1}(F)$ را یک بردار ستونی گوئیم.

مجموعه ماتریس‌های $M_{1,n}(F)$ را با F^n نشان می‌دهیم هر عضو از $F^n = M_{1,n}(F)$ را یک بردار سطری گوئیم.

وقتی از نماد F^k استفاده می‌کنیم، باید سطری بودن یا ستونی بودن بردارها را مشخص کنیم.

برای $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ ، درایه‌ی a_{ii} را درایه‌ی i ام از قطر اصلی، و $(a_{11}, \dots, a_{nn})$ را قطر اصلی گوئیم. اگر $i > j$ ، درایه‌ی a_{ij} زیر قطر اصلی است و اگر $i < j$ ، درایه‌ی a_{ij} بالای قطر اصلی است.

تعریف

یک ماتریس $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ را **قطری** می‌نامیم اگر $a_{ij} = 0$ برای هر $j \neq i$. یعنی:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

مثال

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ماتریس همانی:

$$I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n\text{-times}}) = [\delta_{ij}]$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{دلتای کرونکر})$$

تعریف

یک ماتریس $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ را **پایین مثلثی** می‌نامیم اگر $a_{ij} = 0$ برای هر $i < j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ترانهاد ماتریس

تعریف

ترانهاد ماتریس $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(F)$ ، ماتریس $A^T = [a_{ji}] \in M_{n,m}(F)$ است که سطرها و ستون‌های A در آن جابجا شده‌اند:

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} i & 1-i \\ 0 & 2+3i \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 1-i & 2+3i \end{bmatrix}$$

مزدوج مختلط و الحاقی

برای ماتریس $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

مزدوج مختلط: $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ ◀

الحاقی (مزدوج ترانهاده): $A^* = \bar{A}^T = [\bar{a}_{ji}]$ ◀

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i \\ 3 & 4-5i \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & -2i \\ 3 & 4+5i \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 3 \\ -2i & 4+5i \end{bmatrix}$$

تعریف

ماتریس $A \in M_n(F)$ را متقارن گوئیم، هرگاه $A^T = A$.
ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$ را هرمیتی یا خودالحاق گوئیم، هرگاه $A^* = A$.

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T = A$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & 4+i \\ 2-i & 6 & i \\ 4+i & i & 3 \end{bmatrix} \quad A^T = A, \quad A^* \neq A$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2+3i & 4-5i \\ 2-3i & 5 & 6+2i \\ 4+5i & 6-2i & -7 \end{bmatrix} \quad A^* = A$$

جمع دو ماتریس و ضرب اسکالر

جمع ماتریس‌ها

برای $A, B \in M_{m,n}(F)$ ، جمع $C = A + B$ به صورت $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ تعریف می‌شود.

ضرب اسکالر در ماتریس

برای $\lambda \in F$ و $A \in M_{m,n}(F)$ ، λA به صورت $[\lambda A]_{ij} = \lambda a_{ij}$ تعریف می‌شود.

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \quad 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

خواص جمع ماتریس و ضرب اسکالر

برای هر $A, B \in M_{m,n}(F)$ و برای هر اسکالر $\lambda, \mu \in F$ داریم

۱. بسته بودن: $A + B \in M_{m,n}(F)$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + B = B + A$$

$$0_{m \times n}$$

$$A + (-A) = 0$$

$$\lambda A \in M_{m,n}(F)$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

$$1A = A$$

۲. شرکت پذیری:

۳. جابجایی:

۴. عضو خنثی: ماتریس صفر

۵. عضو معکوس: $-A$ که

۶.

۷.

۸.

۹.

۱۰.

پس $M_{m,n}(F)$ یک فضای برداری روی میدان F است (یک گروه آبدی (شرایط ۱ تا ۵) که در شرایط ۶ تا ۱۰ صدق می‌کند).

ضرب دو ماتریس

تعریف

برای $A \in M_{m,p}(F)$ و $B \in M_{p,n}(F)$ ، ضرب $C = AB \in M_{m,n}(F)$ به صورت زیر تعریف می‌شود: (شرط: تعداد ستون‌های A = تعداد سطرهای B)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

برای یافتن درایه‌ی i,j ام ماتریس AB ، یعنی $[AB]_{ij}$ ، باید سطر i ام ماتریس A را در ستون j ام ماتریس B به صورت زیر ضرب کنیم

$$c_{ij} = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}.$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [-1 \ -2 \ 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & [-1 \ -2 \ 3] \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} & [-1 \ -2 \ 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [-1 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & [-1 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} & [-1 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -14 & 7 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

فرض کنید

$$A = [1 \ 2 \ 3] \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

دو ماتریس حقیقی باشند. در این صورت چون A ماتریس 1×3 و B ماتریس 3×1 هستند، AB و BA هر دو تعریف شده‌اند و داریم

$$AB = [1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$$

و ہم چنین داریم

$$BA = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3] = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}.$$

مثال

اگر $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ و $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$ دو بردار ستونی در F^n باشند:

$$X^\top Y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

و

$$XY^\top = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} (y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{bmatrix} = [x_i y_j]$$

خواص ضرب ماتریس‌ها (برای ماتریس‌ها با ابعاد مناسب)

- ◀ شرکت‌پذیری: $A(BC) = (AB)C$
- ◀ توزیع‌پذیری: $A(B + C) = AB + AC$
- ◀ توزیع‌پذیری: $(A + B)C = AC + BC$
- ◀ عنصر خنثی: $I_n A = A I_n = A$ (ماتریس همانی I_n)
- ◀ ضرب در اسکالر: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

توجه

برای ضرب ماتریس‌ها، ترتیب مهم است. حتی اگر AB تعریف شده باشد، BA ممکن است تعریف نشده یا متفاوت باشد. در حالت کلی $AB \neq BA$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

تعریف وارون ماتریس

ماتریس مربعی $A \in M_n(F)$ را وارون‌پذیر می‌نامیم اگر ماتریس مربعی $B \in M_n(F)$ وجود داشته باشد به طوری که $AB = BA = I_n$. در این صورت B یکتا است و آن را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

مثال

اگر $ad - bc \neq 0$ ، آنگاه

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

توجه

بعدا ثابت می‌کنیم که اگر $A, B \in M_n(F)$ و $AB = I$ ، آنگاه $BA = I$ و بنابراین $A = B^{-1}$ و $B = A^{-1}$.

حاصل ضرب ماتریس‌های وارون‌پذیر، وارون‌پذیر است

اگر $A, B \in M_n(F)$ وارن‌پذیر باشند، آنگاه AB وارون‌پذیر است و
 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

زیرا

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = AB B^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

مثال

اگر $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ، آنگاه $(AB)^* = B^*A^*$. (برای ترانهاده هم درست است)
زیرا برای هر $1 \leq i, j \leq n$ داریم

$$\begin{aligned} [(AB)^*]_{ij} &= \overline{[AB]_{ji}} = \overline{\sum_{k=1}^n [A]_{jk}[B]_{ki}} = \sum_{k=1}^n \overline{[A]_{jk}[B]_{ki}} \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{[A]_{jk}} \overline{[B]_{ki}} = \sum_{k=1}^n [B^*]_{ik} [A^*]_{kj} = [B^*A^*]_{ij} \end{aligned}$$

مثال

اگر $A \in M_n(\mathbb{C})$ وارن‌پذیر باشد، آنگاه A^* وارون‌پذیر است و $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. (برای ترانهاده هم درست است)

$$A^{-1}A = I \implies (A^{-1}A)^* = I^* \implies A^*(A^{-1})^* = I$$

مثال

اگر $A \in M_n(\mathbb{C})$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ ، آنگاه

$$((\lambda A)^T = \bar{\lambda} A^T \text{ (الف) } (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^* \text{ (هم چنین)})$$

$$((A^T)^T = A \text{ (ب) } (A^*)^* = A \text{ (هم چنین)})$$

$$[(\lambda A)^*]_{ij} = \overline{[\lambda A]_{ji}} = \bar{\lambda} \overline{[A]_{ji}} = \bar{\lambda} [A^*]_{ij}$$

$$\forall 1 \leq i, j \leq n \quad [(A^*)^*]_{ij} = [A^*]_{ji} = [A]_{ij}$$

خواص ترانهاد

اگر $A, B \in M_n(F)$ و $\lambda \in F$

$$(A^T)^T = A \quad \text{①}$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad \text{②}$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T \quad \text{③}$$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \text{④}$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \quad \text{⑤}$$

وارون‌پذیر باشد

خواص الحاقی

اگر $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ و $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(A^*)^* = A \quad \text{⑥}$$

$$(A + B)^* = A^* + B^* \quad \text{⑦}$$

$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^* \quad \text{⑧}$$

$$(AB)^* = B^* A^* \quad \text{⑨}$$

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} \quad \text{⑩}$$

وارون‌پذیر باشد

تعریف

برای $k \in \mathbb{N}$ و $A, B \in M_n(F)$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ بار}}$$

و $A^0 = I_n$ (ماتریس همانی).

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ بنابراین به استقرا داریم:}$$

اثر یک ماتریس

تعریف

برای ماتریس مربعی $A \in M_n(F)$ ، اثر (trace) جمع درایه‌های روی قطر اصلی است:

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

مثال

$$\text{trace} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15$$

$$\text{trace} \begin{bmatrix} i & 1-i \\ 2+3i & 4 \end{bmatrix} = i + 4$$

برای هر $A, B \in M_n(F)$ و هر $\lambda \in F$ داریم

$$\text{trace}(A + B) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B) \quad \blacktriangleleft$$

$$\text{trace}(\lambda A) = \lambda \text{trace}(A) \quad \blacktriangleleft$$

$$\text{trace}(A^\top) = \text{trace}(A) \quad \blacktriangleleft$$

$$\text{trace}(A^*) = \overline{\text{trace}(A)} \quad (F = \mathbb{C} \text{ اگر}) \quad \blacktriangleleft$$

$$\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA) \quad \blacktriangleleft$$

$$(AB \neq BA \text{ حتی اگر } B \in M_{n,m}(F), A \in M_{m,n}(F))$$

قضیه

برای هر $A \in M_{m,n}(F)$ و $B \in M_{n,m}(F)$ داریم $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$

$$\begin{aligned}\text{trace}(AB) &= \sum_{i=1}^m [AB]_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [B]_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m [B]_{ki} [A]_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^n [BA]_{kk} \\ &= \text{trace}(BA)\end{aligned}$$

یک ماتریس بلوکی ماتریسی است که به صورت بلوک‌های کوچک‌تر تقسیم شده است:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}$$

که در آن هر A_{ij} خود یک ماتریس است.

مثال

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

قاعده ضرب بلوکی

اگر بلوک‌های ماتریس‌ها از نظر ابعاد سازگار باشند، ضرب به صورت بلوکی انجام می‌شود:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

مثال

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 \cdot 1 + (2,3) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} & 1 \cdot 2 + (2,3) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} 2 + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

فرض کنید

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} C & I \\ I & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ C & C \end{bmatrix}.$$

در این صورت داریم

$$AB = \begin{bmatrix} C & I \\ I & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ C & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C & C \\ I & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

فرض کنید $A \in M_{m,n}(F)$. اگر $C_1, \dots, C_n$ ستون‌های A و $R_1, \dots, R_m$ سطرهای A

باشند و $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in F^n$ یک بردار ستونی باشد، آنگاه با استفاده از ضرب بلوکی

ماتریس‌ها داریم

$$AX = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} [X] = \begin{bmatrix} R_1 X \\ R_2 X \\ \vdots \\ R_n X \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

برای ماتریس داده شده A فرض کنید A_{i*} نشان دهنده‌ی سطر i ام A و A_{*j} نشان دهنده‌ی ستون j ام A باشد. فرض کنید $A \in M_{m,p}(F)$ و $B \in M_{p,n}$ ، با ضرب بلوکی ماتریس‌ها داریم

$$(A_{i*} \in M_{1,p}(F), \quad A_{*j} \in M_{m,1}(F), \quad B_{i*} \in M_{1,n}(F), \quad B_{*j} \in M_{p,1}(F))$$

$$(1) \quad AB = [A_{*1} \ A_{*2} \ \cdots \ A_{*p}] \begin{bmatrix} B_{1*} \\ B_{2*} \\ \vdots \\ B_{p*} \end{bmatrix} = A_{*1}B_{1*} + A_{*2}B_{2*} + \cdots + A_{*p}B_{p*}$$

و

$$(2) \quad AB = \begin{bmatrix} A_{1*} \\ A_{2*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_{1*}B \\ A_{2*}B \\ \vdots \\ A_{m*}B \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad AB = \begin{bmatrix} A_{1*} \\ A_{2*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{bmatrix} [B_{*1} \ B_{*2} \ \cdots \ B_{*p}] = \begin{bmatrix} A_{1*}B_{*1} & A_{1*}B_{*2} & \cdots & A_{1*}B_{*p} \\ A_{2*}B_{*1} & A_{2*}B_{*2} & \cdots & A_{2*}B_{*p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m*}B_{*1} & A_{m*}B_{*2} & \cdots & A_{m*}B_{*p} \end{bmatrix}$$

$$= [A_{i*}B_{*j}]$$

و

$$(4) \quad AB = A [B_{*1} \ B_{*2} \ \cdots \ B_{*n}] = [AB_{*1} \ AB_{*2} \ \cdots \ AB_{*n}]$$

تعریف

برای $A \in M_{m,n}(F)$ و $B \in M_{p,q}(F)$ ، ضرب تانسوری (کرونکر)
 $A \otimes B \in M_{mp,nq}(F)$ به صورت زیر است:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}$$

خواص اساسی ضرب تانسوری

برای ماتریس‌های متناسب با اعمال زیر، داریم:

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$$

◀ توزیع‌پذیری:

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

◀ شرکت‌پذیری:

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

◀ ترانهاد:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

◀ ضرب:

$$\text{trace}(A \otimes B) = \text{trace}(A) \cdot \text{trace}(B)$$

◀ اثر: (برای ماتریس‌های مربعی)

مثال

$$\text{trace} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \right) = \text{trace} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \text{trace} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = 35$$

مثال

اگر $X = (x_1, \dots, x_m) \in F^m$ و $Y = (y_1, \dots, y_n) \in F^n$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} X \otimes Y &= (x_1 Y, x_2 Y, \dots, x_m Y) \\ &= (x_1 y_1, x_1 y_2, \dots, x_1 y_n, \dots, x_m y_1, x_m y_2, \dots, x_m y_n) \in F^{mn} \end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned} X \otimes Y^\top &= [x_1 Y, x_2 Y, \dots, x_m Y] \\ &= \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_1 & \cdots & x_m y_1 \\ x_1 y_2 & x_2 y_2 & \cdots & x_m y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 y_m & x_2 y_m & \cdots & x_m y_m \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(F). \end{aligned}$$

قضیه

فرض کنید $A \in M_{m,n}(F)$, $B \in M_{r,s}(F)$, $C \in M_{n,p}(F)$ و $D \in M_{s,t}(F)$. در این صورت داریم

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

داریم $A \otimes B = [a_{ij}B] \in M_{mr,ns}(F)$ و $C \otimes D = [c_{ij}D] \in M_{ns,pt}(F)$. پس سمت چپ رابطه‌ی بالا معنی دارد. بلوک (i, j) ماتریس سمت چپ عبارت است از

$$\begin{aligned} [(A \otimes B)(C \otimes D)]_{(i,j)} &= \sum_{k=1}^n [A \otimes B]_{(i,k)} [C \otimes D]_{(k,j)} \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{ik}B)(c_{kj}D) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj}BD \\ &= [AC \otimes BD]_{(i,j)} \end{aligned}$$

که همان بلوک (i, j) ماتریس سمت راست است. (توضیح بیشتر در اسلاید بعد)

توجه کنید در قضیه قبل ضرب بلوکی ماتریس‌های زیر انجام شده:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}D & c_{12}D & \cdots & c_{1p}D \\ c_{21}D & c_{22}D & \cdots & c_{2p}D \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}D & c_{n2}D & \cdots & c_{np}D \end{bmatrix}$$

نتیجه

فرض کنید A و B دو ماتریس مربع وارون‌پذیر باشند. در این صورت داریم

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

طبق قضیه‌ی قبل داریم

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1} \otimes BB^{-1}) = I_n \otimes I_m$$

و بنابراین حکم ثابت است.

قضیه

به ازای هر دو ماتریس A و B داریم $(A \otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$. به ویژه اگر A و B متقارن باشند، $A \otimes B$ آن‌گاه نیز متقارن است. اگر A و B ماتریس‌های مختلط باشند، $A \otimes B$ آن‌گاه نیز هرمیتی است. $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$. به ویژه اگر A و B هرمیتی باشند، $A \otimes B$ نیز هرمیتی است.

بلوک (i, j) ماتریس $(A \otimes B)^\top$ عبارت است از

$$\begin{aligned} [(A \otimes B)^\top]_{(i,j)} &= (a_{ij} B)^\top \\ &= a_{ji} B^\top \\ &= [A^\top \otimes B^\top]_{(i,j)} \end{aligned}$$

که همان بلوک (i, j) ماتریس $A^\top \otimes B^\top$ است.

قضیه

فرض کنید $A, B \in M_{m \times n}(F)$ و $C \in M_{p \times q}(F)$. در این صورت

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C \quad \text{و} \quad C \otimes (A + B) = C \otimes A + C \otimes B.$$

بلوک (i, j) ماتریس $(A + B) \otimes C$ عبارت است از

$$\begin{aligned} [(A + B) \otimes C]_{(i,j)} &= (a_{ij} + b_{ij})C \\ &= a_{ij}C + b_{ij}C \\ &= [A \otimes C]_{(i,j)} + [B \otimes C]_{(i,j)} \\ &= [A \otimes C + B \otimes C]_{(i,j)} \end{aligned}$$

که همان بلوک (i, j) از ماتریس $A \otimes C + B \otimes C$ است. رابطه‌ی بعد به طریق مشابه ثابت می‌شود.