سری اول تمرینات مکانیک تحلیلی ۲

۱. به روش جبری ثابت کنید که اگر $|A + B| = |A - B|$ ، آنگاه A عمود است بر B .

۲. اگر C بردار مجهولی باشدکه در روابط زیرین با داشتن بردارهای معلوم A و B و اسکالر φ صدق کند

$$\begin{cases} A \times C = B \\ A \cdot C = \varphi \end{cases}$$

آن را بر حسب A و B و φ و اندازه ی A بیابید.

۳. فرض کنید A برداری اختیاری و e برداری یکه در راستایی ثابت باشد. نشان دهید:

$$A = e(A \cdot e) + e \times (A \times e)$$

مفهوم هندسی هر یک از جملات عبارت بالا چیست؟

۴. اگر $\vec{r}$ برداری باشد از مبدا به نقطه ی متغییر $Q(x, y, z)$ و $\vec{A}$ برداری باشد از مبدا به نقطه ی ثابت P، نشان دهیدکه

الف) $\vec{A} \cdot \vec{r} = |\vec{A}|^2$ معادله ی صفحه ای است گذرنده از نقطه ی P و عمود بر بردار A .

ب) $\vec{A} \cdot \vec{r} = |\vec{r}|^2$ معادله ی کره ای است به مرکز P و شعاع r.

۵. به کمک اتحاد $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$ ، اتحاد ژاکوبی را ثابت کنید .

$$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0$$

۶. مسئله ی گرام-اشمیت. می خواهیم با داشتن ۳ بردار مستقل خطی u_1 و u_2 و u_3 در فضای $\boldsymbol{R}^3$ ، مجموعه ی بردار های پایه ی متعامد این فضا را e_1 و e_2 و e_3 بیابیم. مراحل زیر را دنبال کنید:

الف) ابتدا قرار دهید $e_1 = u_1$.

ب) سپس قرار دهید $e_2 = u_2 + a_{21}e_1$ و اسکالر a_{21} را به گونه ای بیابید که $u_2 \perp u_1$.

ج) در آخر قرار دهید $e_3 = u_3 + a_{31}e_1 + a_{32}e_2$ و اسکالر های a_{31} و a_{32} را به گونه ای بیابید که $u_3 \perp u_1$ و $u_3 \perp u_2$

د) هر سه بردار e_1 و e_2 و e_3 را در نهایت به بر حسب اسکالر ها بنویسید و مفهوم هندسی این اسکالر ها را بیان کنید.

ه) بردار های پایه ی متعامد را برای سه بردار $u_1 = (0,1,2)$ و $u_2 = (1,1,2)$ و $u_3 = (1,0,1)$ به روش بالا به دست آورید.