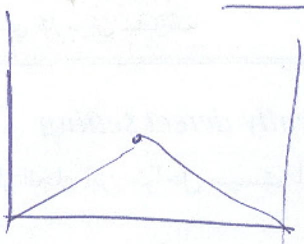
حل و بارم آزمون میان دوره درس

۲۰ نمره



$\boxed{8}$ ‎-۱

$$\Delta E = \frac{2}{L}\int_0^L V(x)\sin^2\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{L}\times 2\times\int_0^{L/2}\frac{2V_0}{L}x\sin^2\frac{n\pi x}{L}$$

به دلیل تقارن

$$= \frac{4V_0}{L^2}\int_0^{L/2}x\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{L}\right)dx$$

فرمول اصلی و قدم اول ۲ نمره

$$= \frac{4V_0}{L^2}\left[\frac{L^2}{8} - \int_0^{L/2}x\cos\frac{2n\pi x}{L}\,dx\right]$$

$$= \frac{V_0}{2} + \frac{4V_0}{L^2}\frac{L}{2n\pi}\int x\,d\left(\sin\frac{2n\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{nL\pi}\left[x\sin\frac{2n\pi x}{L}\Big|_0^{L/2} - \int_0^{L/2}\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx\right]$$

$$= \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{n\pi L}\left[0 + \frac{L}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{L}\Big|_0^{L/2}\right]$$

$$= \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases}\frac{V_0}{2} & n \text{ زوج} \\ \frac{V_0}{2}\left(1-\frac{4}{n^2\pi^2}\right) & n \text{ فرد}\end{cases}$$

$\boxed{10}$ ‎-۲

$$\lambda H_1 = e\mathcal{E}z \quad , \quad h_{ij} = e\mathcal{E}\langle 3l'm'|z|3lm\rangle$$

$$h_{ij} = \int\psi^*_{3l'm'}\,z\,\psi_{3lm}\,d^3r$$

(۲) چون z تابع فرد است باید l و l' یکی فرق داشته باشند

(۲) چون $[z, L_z]=0$ باید m و m' یکی باشند.

بنابراین تنها عناصر ماتریسی غیرصفر اینها هستند:

$$e\mathcal{E}\int\psi^*_{300}\,z\,\psi_{310} = a = e\mathcal{E}\int\psi^*_{310}\,z\,\psi_{300}$$

$$e\mathcal{E}\int\psi^*_{310}\,z\,\psi_{320} = b = \text{برعکس}$$

(۴)

$$e\mathcal{E}\int\psi_{31\pm1}\,z\,\psi_{32\pm1} = C$$

حالتهای ψ_{322} و ψ_{32-2} دست نخورده باقی می‌مانند

و تغییر انرژی های زیر را داریم

$$\begin{array}{c} \psi_{311} \\ \psi_{321} \end{array}\begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{قطری کردن}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{31\pm1} + \psi_{32\pm1}\right) \rightarrow +C$$

$$\begin{array}{c} \psi_{32-1} \\ \psi_{31-1} \end{array}\begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{31\pm1} - \psi_{32\pm1}\right) \rightarrow -C$$

تغییر انرژی

۲

برای سه حالت با $m=0$ باید ماتریس زیر قطری شود

امتیاز فضلی

$$\begin{array}{c} \psi_{300} \\ \psi_{310} \\ \psi_{320} \end{array}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{قطری کردن}} \begin{vmatrix} -\lambda & a & 0 \\ a & -\lambda & b \\ 0 & b & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda(\lambda^2 - b^2) - a(-a\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - b^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{a^2+b^2} & a & 0 \\ a & \pm\sqrt{\ } & b \\ 0 & b & \pm\sqrt{\ } \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = \pm\sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha_3 = b \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\begin{pmatrix} a \\ \pm\sqrt{a^2+b^2} \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 a + \alpha_3 b = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}|\psi_{300}\rangle - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}|\psi_{320}\rangle \longrightarrow$$ بدون تغییر انرژی

$$\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\left[a|\psi_{300}\rangle \pm \sqrt{a^2+b^2}\,|\psi_{310}\rangle + b|\psi_{320}\rangle\right]$$

تغییر انرژی $\pm\sqrt{a^2+b^2}$

۳- الف

$\boxed{13}$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{6}\Big[|\varphi\rangle|\chi\rangle|\psi\rangle - |\chi\rangle|\varphi\rangle|\psi\rangle - |\psi\rangle|\chi\rangle|\varphi\rangle - |\varphi\rangle|\psi\rangle|\chi\rangle + |\chi\rangle|\psi\rangle|\varphi\rangle + |\psi\rangle|\varphi\rangle|\chi\rangle \Big]$$ ۵

ب- در بالاترین حالت داریم

$$|3/2, 3/2\rangle = |+\rangle|+\rangle|+\rangle$$

عملگر پایین آورنده $S_- = S_{1-} + S_{2-} + S_{3-}$ تحت جابجایی هر دو تا از شاخص‌ها متقارن است بنابراین اثر آن روی حالت متقارن $|+\rangle|+\rangle|+\rangle$ و بعدی‌ها همه متقارن خواهد بود. به طور صریح نیز داریم

$$|3/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[|-\rangle|+\rangle|+\rangle + |+\rangle|-\rangle|+\rangle + |+\rangle|+\rangle|-\rangle \Big]$$

$$|3/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[|-\rangle|-\rangle|+\rangle + |-\rangle|+\rangle|-\rangle + |+\rangle|-\rangle|-\rangle \Big]$$ ۳

$$|3/2, -3/2\rangle = |-\rangle|-\rangle|-\rangle$$

که همگی تحت جابجایی هر کدام با یکدیگر زوج است

ج- حالتهای برانگیخته ^4L نمی‌توانند به صورت $(1s)^1(2s)^1(2p)^1$ باشند، چون دو الکترون در حالت $l=0$ لزوماً هر دو در $m=0$ هستند و تابع موج فضایی را نمی‌توان پادمتقارن کرد، چون صفر می‌شود. ۵

پس یک الکترون در $(2s)$ و دو الکترون در $(2p)$ یعنی $l=1$ را بگیرید. باید ترکیبی پادمتقارن از دو تا $l=1$ داشته باشیم. نمایش $L=2$ حاصل از این دو تا متقارن است (مشابه استدلال ب) اما نمایش $L=1$ پادمتقارن است. نمایش $L=0$ هم متقارن. پس دو الکترون $(2P)$ نمایش $L=1$ درست می‌کند. جمع آن با الکترون سوم $l=0$ کل $L=1$ است. اما از جمع $L=1$ با $S=\frac{3}{2}$ می‌توان $J=5/2$ ، $J=3/2$ و $J=1/2$ بدست آورد.

پس جواب اینهاست: $^4P_{5/2}$ ، $^4P_{3/2}$ و $^4P_{1/2}$

۴- الف-

۱۲

$$Y_{1,\pm1} = \mp\alpha \sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{10} = \alpha\sqrt{2}\cos\theta$$

ابتدا جمع دو $l=1$ به یک $l=2$ را بررسی کنیم

$$|2,2\rangle = |1,1\rangle|1,1\rangle \quad , \quad |2,-2\rangle = |1,-1\rangle|1,-1\rangle$$

۳

$$|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt2}|1,0\rangle|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt2}|1,1\rangle|1,0\rangle \quad , \quad |2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt2}|1,-1\rangle|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt2}|1,0\rangle|1,-1\rangle$$

$$|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt6}\Big[|1,-1\rangle|1,1\rangle + 2|1,0\rangle|1,0\rangle + |1,1\rangle|1,-1\rangle\Big]$$

با جایگذاری

$$Y_{2,2} = \beta \sin^2\theta\, e^{+2i\varphi} \quad , \quad Y_{2,-2} = \beta\sin^2\theta\, e^{-2i\varphi}$$

$$Y_{2,1} = \frac{\beta}{\sqrt2}\Big[\sqrt2\cos\theta(-\sin\theta e^{i\varphi})\times 2\Big] \Rightarrow Y_{2,1} = -2\beta\sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi}$$

$$Y_{2,-1} = \frac{\beta}{\sqrt2}\Big[\sqrt2\cos\theta(\sin\theta e^{-i\varphi})\times 2\Big] \Rightarrow Y_{2,-1} = 2\beta\sin\theta\cos\theta\, e^{-i\varphi}$$

۴

$$Y_{2,0} = \frac{\beta}{\sqrt6}\Big[(-\sin\theta e^{i\varphi})(\sin\theta e^{-i\varphi})\times 2 + 2(\sqrt2\cos\theta)^2\Big]$$

$$= \frac{2}{\sqrt6}\beta\,(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \frac{\sqrt6}{3}\beta(3\cos^2\theta - 1)$$

در صورت مسئله باید $(-U_x \mp iU_y)$ قرار داده شود

۵

ب-

$$|2,2\rangle = \beta(-U_x - iU_y)(-V_x - iV_y) = U_xV_x - U_yV_y + i(U_xV_y + U_yV_x)$$

$$|2,-2\rangle = \beta(-U_x + iU_y)(-V_x + iV_y) = U_xV_x - U_yV_y - i(U_xV_y + U_yV_x)$$

$$|2,1\rangle = \frac{\beta}{\sqrt2}\Big[\sqrt2 U_z(-V_x - iV_y) + (-U_x - iU_y)\sqrt2 V_z\Big] = -\beta\Big[U_zV_x + U_xV_z + i(U_zV_y + U_yV_z)\Big]$$

$$|2,-1\rangle = \frac{\beta}{\sqrt2}\Big[\sqrt2 U_z(-V_x + iV_y) + (-U_x + iU_y)\sqrt2 V_z\Big] = \beta\Big[\quad " \quad -i \quad " \quad\Big]$$

$$|2,0\rangle = \frac{\beta}{\sqrt6}\Big[(-U_x + iU_y)(-V_x - iV_y) + (-U_x - iU_y)(-V_x + iV_y) + 2(\sqrt2 U_z)(\sqrt2 V_z)\Big]$$

$$= \frac{2\beta}{\sqrt6}\Big[U_xV_x + U_yV_y + 2U_zV_z + \frac{i}{2}(\cancel{U_xV_y} - \cancel{U_yV_x} - \cancel{U_xV_y} + \cancel{U_yV_x})\Big]$$

$$= \frac{2}{\sqrt6}\beta\,(U_xV_x + U_yV_y + 2U_zV_z)$$