مبانی ریاضی و اصول موضوعه مکانیک کوانتمی

احمد شیرزاد

تعریف فضای برداری: مجموعه ای که عمل جمع (+) روی آن تعریف شده و نسبت به این عمل خواص گروه آبلی دارد. (خواص گروه آبلی: ۱- جابه جا یی جمع ۲- شرکت پذیری جمع ۳- وجود عضو خنثی (یکتا) ۴- وجود عضو وارون (یکتا).) همچنین به ازای $|x\rangle\in V$ و $\alpha\in F$ (F یک میدان است) $\alpha|x\rangle\in V$ باشد با این خواص:

۱- $\alpha(\beta|x\rangle)=(\alpha\beta)|x\rangle$ ۲- $1|x\rangle=|x\rangle$

۳- $\alpha(|x\rangle+|y\rangle)=\alpha|x\rangle+\alpha|y\rangle$ ۴- $(\alpha+\beta)|x\rangle=\alpha|x\rangle+\beta|x\rangle$.

(تعریف میدان یا هیأت: مجموعه ای مانند F که با عمل های جمع و ضرب دارای خواص زیر باشد:

۱- F به همراه جمع (+) گروه آبلی است. ۲- ضرب جا به جایی است: $x,y\in F\Rightarrow xy=yx$. ۳- ضرب شرکت پذیر است. ۴- وجود عضو غیر صفر یکتایی که به عنوان عضو خنثی ضرب می باشد. ۵- به ازای هر عضو غیر صفر، عضو یکتا یی از F وارون ضربی آن باشد. ۶- ضرب بر روی جمع پخش پذیر است.)

مثال ۱: مجموعه n تایی های مختلط $|x\rangle=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ با تعریف جمع و ضرب در اسکالر:

$$|x\rangle+|y\rangle=(\xi_1,\ldots,\xi_n)+(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\xi_1+\eta_1,\ldots,\xi_n+\eta_n)$$

به این ترتیب عضو خنثی جمع $0=(0,\ldots,0)$ و عضو معکوس برای $|x\rangle$ ، $-|x\rangle=(-\xi_1,\ldots,-\xi_n)$ می باشد.

مثال ۲: مجموعه اعداد مختلط با تعاریف معمول جمع و ضرب اسکالر.

مثال ۳: چند جمله ای ها.

مثال ۴: مجموعه نگاشت های به صورت $(x)\xrightarrow{f}(y)$ با تعریف:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \text{و} \quad (\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$

مثال ۵: مجموعه توابع مربع انتگرال پذیر (به عنوان حالت خاص از مثال ۴):

$$\int|\Psi|^2\,dx<\infty$$

اولاً $\int |\alpha\Psi|^2 dx = \alpha^2 \int |\Psi|^2 dx$ نشان می دهد که $\alpha\Psi$ هم مربع انتگرال پذیر است. ثانیاً بعد از این (به کمک نامساوی شوارتز) نشان می دهیم که جمع دو تابع مربع انتگرال پذیر نیز مربع انتگرال پذیر است.

تمرین: خواص فضای برداری را برای مثال های فوق بررسی کنید.

تعریف استقلال خطی: مجموعه بردارهای $\{x_i\}$ مستقل خطی اند اگر و فقط اگر:

$$\sum_i \alpha_i |x_i\rangle = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$$

به عبارت دیگر هیچ یک از آن ها ترکیب خطی از دیگر بردارها نباشد.

تعریف پایه: مجموعه بردارهای مستقل خطی $|u_i\rangle$ که هر بردار $|\Psi\rangle \in V$ را بتوان به صورت ترکیب خطی از آن ها نوشت:

$$|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |u_i\rangle$$

مثال ۱: بردارهای $\hat{k}, \hat{j}, \hat{i}$ در فضای سه بعدی.

مثال ۲: بردارهای یکه ی $\hat{e_\phi}, \hat{e}_\theta, \hat{e}_r$ در فضای سه بعدی.

مثال ۳: سینوس و کسینوس در مورد توابع دوره ای (پریودیک).

- مجموعه ای از بردارها که هر برداری را بشود بر حسب آن ها بسط داد، کامل نامیده می شود. یک پایه کامل است امّا اعضای هر مجموعه کامل مستقل خطی نیستند.
- اگر تعداد بردار های پایه محدود باشد فضا دارای بعد متناهی و در غیر این صورت بی نهایت بعدی است.
- تعداد بردارهای پایه در یک فضای دارای بعد محدود ثابت بوده و بُعد فضا نام دارد.

تبدیل خطی (عملگر خطی): عملگری که برداری از V را به برداری از همان فضای برداری V تبدیل نماید به طوری که:

$$A: V \rightarrow V\ ,\ A(\alpha|x\rangle + \beta|y\rangle) = \alpha A|x\rangle + \beta A|y\rangle$$

- ضرب دو عملگر خطی:

$$C = AB:\ C|x\rangle = A(B|x\rangle)$$

- جمع دو عملگر خطی:

$$D = A + B:\ D|x\rangle = A|x\rangle + B|x\rangle$$

مثال ۱: اثر ماتریس های $n\times n$ روی فضای برداری n-تایی های (ستونی) مرتب.

مثال ۲: مشتق گیری روی توابع و ضرب یک تابع (در فضای برداری توابع):

$$D\,f(x) = \frac{df(x)}{dx}\ ,\ Cf(x) = (x^2+1)\,f(x)$$

- در حالت کلی اثر دو عملگر خطی $C_1 = AB$ و $C_2 = BA$ روی بردار ها یکسان نبوده، می توان عملگر $C = C_1 - C_2 = [A, B] = AB - BA$ را تعریف کرد:

$$[A, B]|x\rangle = A(B|x\rangle) - B(A|x\rangle)$$

که به آن جا به جا گر A و B می گوییم.

- مجمو عه تبدیلات خطی روی یک فضای برداری خود یک فضای برداری جدید است که علاوه بر خواص فضای برداری روی اعضای آن عمل ضرب ($C = AB$) و عمل جا به جاگر($[A, B]$) نیز تعریف شده است.
- اگر $|u\rangle$ چنان باشد که $A|u\rangle = a|u\rangle$ ، آن گاه $|u\rangle$ بردار ویژه A و a مقدار ویژه A است. مجموعه a ها طیف مقادیر ویژه A و مجمو عه $|u\rangle$ ها حالات خاص A نامیده می شوند.

تعریف ضرب داخلی: تابعی است از $V\times V$ (ضرب دکارتی مجموعه ای در خودش) به میدان F با خواص زیر (اصطلاحاً برا $\langle x|$ و کت $|x\rangle$):

$$\langle x,y\rangle\equiv\langle x|y\rangle$$

i. $\langle x|y\rangle=\langle y|x\rangle^*$

ii. $\alpha,\beta\in F,\ \langle \alpha x+\beta y|z\rangle=\alpha^*\langle x|z\rangle+\beta^*\langle y|z\rangle$

iii. $\langle x|x\rangle\geq 0,\ \langle x|x\rangle=0\Leftrightarrow|x\rangle=|0\rangle$

مثال ۱: در فضای برداری $\mathbb{C}^n$:

$$|x\rangle=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},|y\rangle=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},\ \langle x|y\rangle=(\xi_1^*,\dots,\xi_n^*)\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\eta_i$$

مثال ۲: در فضای $\mathbb{R}^n$ (بردارهای ستونی) و با وجود ماتریس قطری $P=\begin{pmatrix}p_{11}&&\\&\ddots&\\&&p_{nn}\end{pmatrix}$ با عناصر حقیقی و مثبت:

$$\langle x|y\rangle=\tilde{x}\,P\,y=(\xi_1,\dots,\xi_n)\begin{pmatrix}p_{11}&&\\&\ddots&\\&&p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}$$

مثال ۳: در فضای توابع (مربع انتگرال پذیر):

$$\langle\Phi|\Psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\Phi^*(x)\,\Psi(x)$$

و در مورد توابعی که روی فاصله $[a,b]$ تعریف شده اند ($t\in[a,b]$) :

$$\langle f|g\rangle=\int_a^b dt\, f^*(t)\,g(t)$$

- $|x\rangle$ و $|y\rangle$ متعامدند اگر $\langle x|y\rangle=0$.
- مجموعه $|u_i\rangle$ متعامد بهنجار است اگر $\langle u_i|u_j\rangle=\delta_{ij}$.

قضیه: یک مجموعه از بردارهای متعامد بهنجار مستقل خطی اند:

$$\sum_i \alpha_i |u_i\rangle = 0 \Rightarrow \langle u_j | \sum_i \alpha_i |u_i\rangle = 0 \Rightarrow \sum_i \alpha_i \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \quad .$$

- اگر مجموعه $|u_i\rangle$ کامل هم باشد یک پایه متعامد بهنجار خواهد بود.
- **عملگر تصویر:** اگر $|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |u_i\rangle$ در این صورت طبق تعریف:

$$T_j |\Psi\rangle = |u_j\rangle\langle u_j|\Psi\rangle = |u_j\rangle\langle u_j|(\sum_i \alpha_i |u_i\rangle) = |u_j\rangle \sum_i \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j |u_j\rangle$$

بدین ترتیب T_j عملگر تصویر $|\Psi\rangle$ در راستای $|u_j\rangle$ است. خاصیت مهم عملگر تصویر این است که $T_j^2 = T_j$ زیرا:

$$T_j^2 |\Psi\rangle = T_j(\alpha_j |u_j\rangle) = |u_j\rangle\langle u_j|(\alpha_j |u_j\rangle) = |u_j\rangle(\alpha_j) = T_j |\Psi\rangle$$

اثر $\sum_{j=1}^{N} T_j$ معادل اثر عملگر واحد است:

$$\sum_{j=1}^{N} T_j |\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j |u_j\rangle = |\Psi\rangle \Rightarrow 1 = \sum_{j=1}^{N} |u_j\rangle\langle u_j|$$

بنابراین در ضرب داخلی می توان از آن استفاده کرد. مثلاً اگر $|\Psi\rangle = \sum \alpha_i |u_i\rangle$ و $|\Phi\rangle = \sum \beta_i |u_i\rangle$:

$$\langle \Phi|\Psi\rangle = \langle \Phi| \underbrace{\sum_j |u_j\rangle\langle u_j|}_{1} \Psi\rangle = \langle \Phi| \sum_j \alpha_j |u_j\rangle = \sum_j \alpha_j \langle \Phi|u_j\rangle = \sum_j \alpha_j \sum_i \beta_i^* \langle u_i|u_j\rangle$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_j \beta_i^* \delta_{ij} = \sum_i \beta_i^* \alpha_i$$

و یا:

$$\langle \Phi|\Psi\rangle = \langle \Phi| \sum_j |u_j\rangle\langle u_j|\Psi\rangle = \sum_j \underbrace{\langle \Phi|u_j\rangle}_{\beta_j^*} \underbrace{\langle u_j|\Psi\rangle}_{\alpha_j} = \sum_j \beta_j^* \alpha_j$$

- تعریف نرم یک بردار:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

نامساوی شوارتز:

$$|\langle \Phi|\Psi \rangle|^2 \le \langle \Phi|\Phi \rangle \langle \Psi|\Psi \rangle$$

اثبات: از خاصیت سوم ضرب داخلی داریم:

$$\langle \Phi+\lambda\Psi|\Phi+\lambda\Psi \rangle \ge 0 \Rightarrow \langle \Phi|\Phi \rangle + |\lambda|^2 \langle \Psi|\Psi \rangle + \lambda^* \langle \Psi|\Phi \rangle + \lambda \langle \Phi|\Psi \rangle \ge 0$$

$$\lambda = -\frac{\langle \Psi|\Phi \rangle}{\langle \Psi|\Psi \rangle} \Rightarrow \langle \Phi|\Phi \rangle + \frac{|\langle \Psi|\Phi \rangle|^2}{\langle \Psi|\Psi \rangle^2} \langle \Psi|\Psi \rangle - \frac{\langle \Phi|\Psi \rangle}{\langle \Psi|\Psi \rangle} \langle \Psi|\Phi \rangle - \frac{\langle \Psi|\Phi \rangle}{\langle \Psi|\Psi \rangle} \langle \Phi|\Psi \rangle \ge 0$$

$$\Rightarrow \langle \Phi|\Phi \rangle - \frac{|\langle \Psi|\Phi \rangle|^2}{\langle \Psi|\Psi \rangle} \ge 0 \Rightarrow |\langle \Psi|\Phi \rangle|^2 \le \langle \Phi|\Phi \rangle \langle \Psi|\Psi \rangle$$

کاربردها:

- در مورد بردارهای معمولی در فضای سه بعدی: $\cos\theta \le 1$ (θ زاویه بین دو بردار).
- برای هر دسته از اعداد مختلط (α_i) و (β_i) داریم:

$$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \beta_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 . \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2$$

- برای هر دو تابع مربع انتگرال پذیر Φ و Ψ :

$$|\int \Phi^*(x)\Psi(x)dx| \le \sqrt{\int |\Psi(x)|^2 dx} \sqrt{\int |\Phi(x)|^2 dx} < \infty$$

در نتیجه برای جمع دو تابع مربع انتگرال پذیر داریم:

$$\int |\Phi(x)+\Psi(x)|^2 dx = \int |\Phi(x)|^2 dx + \int |\Psi(x)|^2 dx + 2\Re \int \Phi^*(x)\Psi(x)dx < \infty$$

تعریف مزدوج هرمیتی یک عملگر:

$$\langle \Phi|A\Psi \rangle = \langle A^\dagger \Phi|\Psi \rangle$$

ضمناً:

$$\langle \Phi | A | \Psi \rangle \equiv \langle \Phi | A \Psi \rangle \equiv \langle \Phi , A \Psi \rangle$$

مثال: مزدوج هرمیتی $\frac{d}{dx}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(x) \frac{d}{dx} \Psi(x)\, dx = \underbrace{\Phi^*(x)\Psi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Phi^*(x)}{dx} \Psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-d}{dx}\Phi(x)\right)^* \Psi(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger = \frac{-d}{dx}$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که $\left(\frac{d^2}{dx^2} - a\, e^{ix}\right)^\dagger = \left(\frac{d^2}{dx^2} + a^* e^{-ix}\right)$.

خواص مزدوج هرمیتی عملگر ها:

- مزدوج هرمیتی یک عدد مختلط:

$$\langle \Phi | a \Psi \rangle = \langle a^* \Phi | \Psi \rangle \Rightarrow a^\dagger = a^*$$

- ضرب دو عملگر و مزدوج هرمیتی آن:

$$\langle \Phi | AB\, \Psi \rangle = \langle A^\dagger\, \Phi | B\, \Psi \rangle = \langle B^\dagger A^\dagger \Phi | \Psi \rangle \Rightarrow (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

واضح است که این خاصیت را می توان بدین صورت تعمیم داد: $(AB \ldots M)^\dagger = M^\dagger \ldots B^\dagger A^\dagger$.

- $(A^\dagger)^\dagger = A$ زیرا:

$$\langle \Phi | A^\dagger\, \Psi \rangle = \langle A^\dagger\, \Psi | \Phi \rangle^* = \langle \Psi | A\, \Phi \rangle^* = \langle A\, \Phi | \Psi \rangle$$

- مزدوج هرمیتی جمع دو عملگر:

$$\langle \Phi | (A+B) | \Psi \rangle = \langle \Phi | A | \Psi \rangle + \langle \Phi | B | \Psi \rangle = \langle A^\dagger \Phi | \Psi \rangle + \langle B^\dagger \Phi | \Psi \rangle = \langle (A^\dagger + B^\dagger) \Phi | \Psi \rangle$$
$$\Rightarrow (A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

- مزدوج هرمیتی جا به جا گر دو عملگر:

$$[A, B]^{\dagger}=(AB)^{\dagger}-(BA)^{\dagger}=B^{\dagger}A^{\dagger}-A^{\dagger}B^{\dagger}=[B^{\dagger}, A^{\dagger}]$$

تعریف عملگر هرمیتی: عملگر A هرمیتی است اگر $A^{\dagger}=A$.

مثال: عملگرهای $(B+B^{\dagger})$ ، $i(B-B^{\dagger})$ و $BB^{\dagger}$ برای هر عملگر دلخواه B هرمیتی هستند.

- اگر A و B هرمیتی باشند، $i[A,B]$ نیز هرمیتی است زیرا:

$$(i[A,B])^{\dagger}=-i[A,B]^{\dagger}=-i[B^{\dagger},A^{\dagger}]=-i[B,A]=i[A,B]$$

- اگر دو عملگر A و B هرمیتی باشند و جا به جاگر آن ها صفر باشد (جا به جاپذیر باشند)، AB هرمیتی است:

$$(AB)^{\dagger}=B^{\dagger}A^{\dagger}=BA=AB+[A,B]$$

تعریف مقدار انتظاری A در حالت $|\Psi\rangle$:

$$\langle A\rangle=\langle\Psi|A|\Psi\rangle\equiv\langle\Psi|A\Psi\rangle$$

قضیه: مقدار انتظاری هر عملگر هرمیتی حقیقی است:

$$\langle\Phi|A\Phi\rangle^{*}=\langle A\,\Phi|\Phi\rangle=\langle\Phi|A^{\dagger}\Phi\rangle=\langle\Phi|A\,\Phi\rangle$$

قضیه: مقادیر ویژه هر عملگر هرمیتی حقیقی است:

اگر طرفین $A|u\rangle=a|u\rangle$ را در $\langle u|$ ضرب کنیم داریم $\langle u|A|u\rangle=\langle u|a\,u\rangle=a\langle u|u\rangle$ که در اینجا $\langle u|u\rangle$ و $\langle u|A|u\rangle$ هر دو حقیقی هستند، پس a حقیقی است.

قضیه: توابع ویژه یک عملگر هرمیتی مربوط به دو مقدار ویژه مختلف متعامدند:

$$A|u\rangle=a_1|u\rangle\ (۱)\quad \text{و}\quad A|v\rangle=a_2|v\rangle\ (۲)$$

طرفین رابطه (۱) را در $\langle v|$ و طرفین رابطه (۲) را در $\langle u|$ ضرب می کنیم:

$$\langle v|Au\rangle=a_1\langle v|u\rangle\ (۳)$$
$$\langle u|Av\rangle=a_2\langle u|v\rangle\overset{*}{\Rightarrow}\langle Av|u\rangle=a_2\langle v|u\rangle\Rightarrow\langle v|Au\rangle=a_2\langle v|u\rangle\ (۴)$$

اگر روابط (۴) و (۳) را از هم کم کنیم:

$$(a_1-a_2)\langle v|u\rangle=0 \overset{a_1\neq a_2}{\Rightarrow} \langle v|u\rangle=0$$

و اما اگر دو بردار ویژه که مستقل خطی اند مربوط به یک مقدار ویژه باشند:

$$A|u_1\rangle=a|u_1\rangle \quad \text{و} \quad A|u_2\rangle=a|u_2\rangle$$

هر ترکیب خطی از این دو بردار، بردار ویژه مربوط به همان مقدار ویژه خواهد بود:

$$A(\alpha|u_1\rangle+\beta|u_2\rangle)=\alpha\, a|u_1\rangle+\beta\, a|u_2\rangle=a(\alpha|u_1\rangle+\beta|u_2\rangle)$$

بنابراین می توان دو ترکیب خطی متعامد از آن دو ساخت که بردار ویژه A با مقدار ویژه a باشد.
این روش را می توان به حالتی که چندگانگی بیش از دو نیز وجود داشته باشد تعمیم داد. به این ترتیب می توان از بردارهای ویژه یک عملگر هرمیتی یک مجموعه متعامد بهنجار ساخت.

قضیه (بدون اثبات): مجموعه بردارهای ویژه یک عملگر هرمیتی کامل است.
به این ترتیب می توان از بردارهای ویژه یک عملگر هرمیتی یک پایه متعامد بهنجار درست نمود.

قضیه: شرط لازم و کافی برای این که دو عملگر هرمیتی بردارهای ویژه مشترک داشته باشند، جا به جا پذیر بودن آن هاست.

اثبات شرط لازم: فرض کنید مجموعه بردارهای کامل $|u_a\rangle$ بردارهای ویژه مشترک A و B باشند:

$$\begin{matrix} A|u_i\rangle=a|u_i\rangle \\ B|u_i\rangle=b|u_i\rangle \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} BA|u_i\rangle=a\,B|u_i\rangle=ab|u_i\rangle \\ AB|u_i\rangle=b\,A|u_i\rangle=ba|u_i\rangle \end{matrix} \Rightarrow (AB-BA)|u_i\rangle=0$$

برای هر بردار دلخواه $|\Psi\rangle$ داریم:

$$|\Psi\rangle=\sum_i \alpha_i|u_i\rangle \Rightarrow (AB-BA)|\Psi\rangle=\sum_i \alpha_i(AB-BA)|u_i\rangle=0$$

اثر $[A,B]$ روی هر بردار دلخواه صفر است، پس $[A,B]=0$.

اثبات شرط کافی: فرض می کنیم $[A,B]=0$ و $|u\rangle$ بردار ویژه A باشد:

$$A|u\rangle=a|u\rangle \Rightarrow BA|u\rangle=a\,B|u\rangle \overset{[A,B]=0}{\Rightarrow} A(B|u\rangle)=a(B|u\rangle)$$

پس $B|u\rangle$ نیز بردار ویژه A با همان مقدار ویژه a است. اگر $|u\rangle$ تبهگنی نداشته باشد باید $B|u\rangle$ نیز متناسب با $|u\rangle$ باشد، یعنی $B|u\rangle=b|u\rangle$ و در نتیجه $|u\rangle$ بردار ویژه B نیز هست. اما اگر مقدار ویژه a به عنوان مثال دوگانه باشد:

$$A|u_1\rangle=a|u_1\rangle$$
$$A|u_2\rangle=a|u_2\rangle$$

باید $B|u_1\rangle$ و $B|u_2\rangle$ ترکیبی از $|u_1\rangle$ و $|u_2\rangle$ باشند:

$$B|u_1\rangle=b_{11}|u_1\rangle+b_{12}|u_2\rangle$$
$$B|u_2\rangle=b_{21}|u_1\rangle+b_{22}|u_2\rangle$$

حال می توان ترکیبی از $|u_1\rangle$ و $|u_2\rangle$ پیدا کرد که بردار ویژه B نیز باشد. مثلاً اگر معادله پایینی را در λ ضرب کنیم و با بالایی جمع کنیم:

$$B(|u_1\rangle+\lambda|u_2\rangle)=(b_{11}+\lambda b_{21})|u_1\rangle+(b_{12}+\lambda b_{22})|u_2\rangle=b(|u_1\rangle+\lambda|u_2\rangle)$$

این در صورتی صحیح است (در صورتی می توانیم نتیجه بگیریم $B(|u_1\rangle+\lambda|u_2\rangle)=b(|u_1\rangle+\lambda|u_2\rangle)$) که داشته باشیم:

$$\frac{b_{12}+\lambda b_{22}}{b_{11}+\lambda b_{21}}=\lambda \quad (۵)$$

معادله (۵) دو جواب دارد. در نتیجه دو ترکیب خطی مختلف به دست می آید که بردار ویژه B نیز هستند هر کدام با مقدار ویژه b_1 و b_2 (مثلاً دو بردار به نام های $|v_1\rangle$ و $|v_2\rangle$). بنابراین:

$$A|v_1\rangle=a|v_1\rangle \qquad B|v_1\rangle=b_1|v_1\rangle$$
$$A|v_2\rangle=a|v_2\rangle \quad \text{و} \quad B|v_2\rangle=b_2|v_2\rangle$$

به این ترتیب عملگر B می تواند دوگانگی مربوط به مقدار ویژه a (مقدار ویژه عملگر A) را تشخیص دهد. این عمل را می توان به حالتی که چندگانگی (حالت بیش از دوگانگی) باشد تعمیم داد.

همچنین به طور کلی می توان گفت: شرط لازم و کافی برای آن که عملگرهای هرمیتی $M,\ldots,B,A$ (مجموعه) بردار ویژه مشترک داشته باشند این است که جا به جا پذیر باشند.

اصول موضوعه مکانیک کوانتومی:

اصل اوّل: حالات ممکنه یک دستگاه فیزیکی یک فضای برداری است. فضای برداری مذکور فضای حالات نام دارد.

اصل دوم: به هر کمیت فیزیکی (مشاهده پذیر) یک عملگر هرمیتی نسبت می دهیم که روی بردارهای فضای حالات اثر می کند.

اصل سوم: مقدار هر مشاهده پذیردر حالات خاص عملگر مربوطه مشخص است. هر آزمایش برای اندازه گیری A فقط می تواند به یکی از مقادیر خاص A منجر شود. تکرار پذیری آزمایش ایجاب می کند که پس از آزمایش دستگاه در آن حالت خاص باقی بماند.

اصل چهارم: هر حالت دلخواه دستگاه را می توان به صورت ترکیبی از حالات خاص یک مشاهده پذیر بسط داد:

$$|\Psi\rangle=\sum_i \alpha_i|u_i\rangle \quad \text{و} \quad A|u_i\rangle=a_i|u_i\rangle$$

در این صورت $|\alpha_i|^2$ احتمال آن است که دستگاه در حالت $|u_i\rangle$ بوده و مقدار ویژه a_i را داشته باشد. حال می توان کمیت $\langle A\rangle_\Psi=\sum_i |\alpha_i|^2 a_i$ را به عنوان مقدار انتظاری عملگر A در حالت $|\Psi\rangle$ تعریف کرد. واضح است که:

$$\langle A\rangle_\Psi=\langle\Psi|A|\Psi\rangle \quad .$$

اصل پنجم: تمام مشاهده پذیرها همزمان قابل اندازه گیری نیستند. مجموعه مشاهده پذیرهای جا به جا پذیر دارای ویژه بردار مشترک هستند و هم زمان قابل اندازه گیری اند. به این مجموعه یک «مجموعه کامل مشاهده پذیرهای جا به جا پذیر» گوییم. بردارهای پایه فضای هیلبرت را بردارهای ویژه مشترک این مجموعه می توان انتخاب نمود و با مجموعه مقدار ویژه های مربوط به هر مشاهده پذیر آن ها را نام گذاری کرد. مثلاً:

$$\begin{aligned}
A|a,b,\dots,m\rangle&=a|a,b,\dots,m\rangle\\
B|a,b,\dots,m\rangle&=b|a,b,\dots,m\rangle\\
&\vdots\\
M|a,b,\dots,m\rangle&=m|a,b,\dots,m\rangle
\end{aligned}$$

اصل ششم: اگردو مشاهده پذیر همزمان قابل اندازه گیری نباشند بین «عدم قطعیت» یا «پراکندگی» (dispersion) آن ها که با رابطه $(\Delta A)^2=\langle (A-\langle A\rangle)^2\rangle=\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2$ تعریف می شود، رابطه عدم قطعیت زیر برقرار است:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}\langle i[A,B]\rangle \quad (۶)$$

(اثبات رابطه ۶ بعد از اصل هشتم آمده است). در یک حالت خاص A ، ΔA صفر است و ΔB کاملاً نامطمئن.

اصل هفتم: با گذشت زمان بردار مربوط به حالت ذره تحول می یابد و تحول آن از معادله شرودینگر به دست می آید:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle=H|\Psi\rangle$$

اصل هشتم: با استفاده از اصل هفتم تغییرات زمانی مقادیر انتظاری را می توان به دست آورد:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_t=\frac{d}{dt}\langle\Psi|A|\Psi\rangle=\langle\frac{\partial\Psi}{\partial t}|A|\Psi\rangle+\langle\Psi|A|\frac{\partial\Psi}{\partial t}\rangle+\langle\Psi|\frac{\partial A}{\partial t}|\Psi\rangle=\frac{1}{-i\hbar}\langle\Psi|HA|\Psi\rangle$$
$$+\frac{1}{i\hbar}\langle\Psi|AH|\Psi\rangle+\langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle=\frac{i}{\hbar}\langle[H,A]\rangle+\langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle$$

بنابراین اگر کمیتی تابع صریح زمان نباشد و با همیلتونی جا به جا پذیر باشد، ثابت حرکت است.

اثبات رابطه (۶) رابطه عدم قطعیت: می دانیم اگر A و B هرمیتی باشند (که هستند) و $[A,B]\neq 0$ ، در این صورت $i[A,B]$ نیز هرمیتی است. همچنین $U=A-\langle A\rangle$ و $V=B-\langle B\rangle$ نیز هرمیتی هستند. بنا به تعریف:

$$(\Delta A)^2=\langle U^2\rangle \quad \text{و} \quad (\Delta B)^2=\langle V^2\rangle$$

با استفاده از نا مساوی شوارتز:

$$|\langle U\Psi|V\Psi\rangle|^2\leq\langle U\Psi|U\Psi\rangle\langle V\Psi|V\Psi\rangle\Rightarrow|\langle UV\rangle|\leq\sqrt{\langle U^2\rangle\langle V^2\rangle}=\Delta A.\Delta B$$

از طرف دیگر داریم:

$$\langle U\Psi|V\Psi\rangle^{*}=\langle V\Psi|U\Psi\rangle=\langle\Psi|VU|\Psi\rangle$$
$$\langle\Psi|[U,V]|\Psi\rangle=\langle UV\rangle-\langle VU\rangle=\langle UV\rangle-\langle UV\rangle^{*}=2i\,\Im\langle UV\rangle$$
$$\Rightarrow\langle\frac{-i}{2}[U,V]\rangle=\Im\langle UV\rangle\overset{(\text{۷})}{\leq}|\langle UV\rangle|\leq\Delta A\Delta B$$

اما می دانیم که $[U,V]=[A,B]$. همچنین اگر ترتیب A و B را عوض می کردیم نتیجه فرقی نمی کرد. بنابراین $\Delta A\Delta B$ از قدر مطلق مقدار انتظاری $\frac{i}{2}[A,B]$ که یک عدد حقیقی است بزرگ تر است و یا به بیان صحیح تر:

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2\geq\frac{1}{4}\langle i[A,B]\rangle^2$$

به عنوان مثال برای $[X,P]=i\hbar$:

$$(\Delta X)^2(\Delta P)^2\geq\frac{\hbar^2}{4}\ .$$

بنابراین نظریه مکانیک کوانتومی حداقل عدم قطعیت در مکان ضربدر عدم قطعیت در تکانه را $\frac{\hbar}{2}$ پیش بینی می کند. ببینیم این حداقل مربوط به چه حالتی است؟ اولاً در نامساوی شوارتز تساوی وقتی رخ می دهد که $|U\Psi\rangle=K|V\Psi\rangle$. ثانیاً در نامساوی (۷) تساوی وقتی رخ می دهد که $\langle UV\rangle$ کاملاً موهومی باشد. یعنی داشته باشیم $\langle UV\rangle=-\langle UV\rangle^{*}$. بنابراین:

$$\langle U\Psi|V\Psi\rangle=-\langle U\Psi|V\Psi\rangle^{*}\Rightarrow K=-K^{*}\Rightarrow K=-i\beta$$

که β حقیقی است. بنابراین (اگر در مورد مکان و تکانه از تغییر متغیر $X-\langle X\rangle\rightarrow X$ و $P-\langle P\rangle\rightarrow P$ استفاده کنیم) خواهیم داشت:

$$P\Psi+i\beta X\Psi=0\Rightarrow\frac{\hbar}{i}\frac{d\Psi}{dx}+i\beta x\Psi=0\Rightarrow\frac{d\Psi}{dx}-\frac{\beta}{\hbar}x\Psi=0\Rightarrow\Psi(x)=Ce^{\frac{-\beta x^2}{2\hbar}}$$

بنابراین کمترین عدم قطعیت مربوط به حالت پایه نوسانگر هارمونیک است.

معادله حرکت $\langle X\rangle$ و $\langle P\rangle$:

$$\frac{d}{dt}\langle X\rangle=\frac{i}{\hbar}\langle[H,X]\rangle=\frac{i}{\hbar}\langle[\frac{P^2}{2m}+V(X),X]\rangle \quad \text{و}$$
$$[V(X),X]=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\langle X\rangle=\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}\langle[P^2,X]\rangle$$
$$[P^2,X]=P[P,X]+[P,X]P=\frac{2\hbar}{i}P\Rightarrow\frac{d}{dt}\langle X\rangle=\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}\frac{2\hbar}{i}\langle P\rangle\Rightarrow\frac{d}{dt}\langle X\rangle=\langle\frac{P}{m}\rangle \quad (۸)$$

$$\frac{d}{dt}\langle P\rangle=\frac{i}{\hbar}\langle[\frac{P^2}{2m}+V(X),P]\rangle=-\frac{i}{\hbar}\langle[P,V(X)]\rangle$$
$$\text{و} \quad [P,V(X)]\Psi(x)=\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}(V(x)\Psi(x))-V(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d\Psi}{dx}=\frac{\hbar}{i}\frac{dV}{dx}\Psi(x)\Rightarrow[P,V(x)]=\frac{\hbar}{i}\frac{dV}{dx}$$

اثبات $[P,V(x)]=\frac{\hbar}{i}\frac{dV}{dx}$ بدون نمایش مکان نیز امکان پذیر است.

با استفاده از (۸) و (۹) داریم:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle X\rangle=-\langle\frac{dV}{dx}\rangle$$

که خیلی شبیه معادله حرکت نیوتن است.

لازم به تذکر است که تعداد اصول موضوعه مکانیک کوانتومی در کتب مختلف، متفاوت است. در برخی که تعداد کمتری معرفی می شود، تعدادی اصل و تعدادی نتیجه حاصل از اصول معرفی می گردد.