سری اول و دوم تمرینات مکانیک تحلیلی

۱. آرایه های $a=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_N\end{pmatrix}$ و $b=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_N\end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید و گزاره‌های فضای برداری را در مورد آن‌ها ثابت کنید.

۲. ثابت کنید ضرایب بسط بردار دلخواه a بر حسب پایه $u_1....u_n$ یکتاست.

۳. ثابت کنید در یک فضای محدود بعد، تعداد بردارهای همه پایه‌ها یکسان است.

۴. در فضای ۵ تاییهای مرتب، آرایه $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_5\end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید. ضرایب بسط این بردار را بر حسب پایه‌های زیر به‌دست آورید.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$$

۵. برای دو بردار a و b که زاویه میانشان θ است، نشان دهید که خاصیت شرکت پذیری برای ضرب داخلی برقرار است
$(a+b).c=a.c+b.c$

۶. ثابت کنید هر مجموعه از بردارهای متعامد، مستقل خطی هستند.

۷. مجموعه N بردار مستقل خطی u_i را در نظر بگیرید. از این مجموعه N بردار متعامد بهنجار بسازید.

راهنمایی

قدم اول: بردار زیر را بسازید

$$e_1=\frac{u_1}{|u_1|}$$

به این ترتیب، یک بردار بهنجار ساخته‌ایم.

قدم دوم: تصویر u_2 در امتداد e_1 برابر است با $e_1(u_2.e_1)$، در این صورت بردار زیر را بسازید

$$u_2-e_1(u_2.e_1)=\tilde{u}_2$$

این مراحل را ادامه هید. این روش به نام "متعامدسازی گرام-اشمیت" شناخته می‌شود.

۸. خواص زیر را در مورد عملگرهای تصویر ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{N}P_i=1$$

$$P_i\,P_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ p_i & i=j\end{cases}$$

۹. ثابت کنید مجموعه توابع مجذور انتگرال‌پذیر یک فضای برداری است.

۱۰. نامساوی شوارتز به شکل زیر است

$$a.b\le\sqrt{(a.a)\,(b.b)}\Rightarrow(a.b)^2\le(a.a)\,(b.b)$$

آن را اثبات کنید.

راهنمایی: اگر تعریف کنیم $c=a-\lambda b$، برای هر λ داریم $c.c\ge 0$. حال λ را طوری انتخاب کنید که منجر به نامساوی شوارتز شود.

۱۱. ثابت کنید مجموعه توابع $u_n(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n\theta)$ و $v_n(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n\theta)$ و $v_0(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ یک مجموعه بردار متعامد بهنجار هستند.

۱۲. ثابت کنید مجموعه ماتریس‌های $n\times m$ تحت عمل جمع و ضرب در عدد، فضای برداری هستند.

۱۳. توابع $f(\theta)=\sin^5\theta$ و $g(\theta)=\sin^2\theta\cos^3\theta$ را بر حسب پایه $\sin(n\theta)$ ها و $\cos(n\theta)$ ها بسط دهید (راهنمایی: از اتحادهای مثلثاتی استفاده کنید).

۱۴. با توجه به مولفه‌های $C=A\times B$ ثابت کنید که

$$C^2=|A|^2|B|^2-(A.B)^2$$

۱۵. ثابت کنید $A.\,B\times C=A\times B.\,C$

۱۶. اتحاد زیر را اثبات کنید

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$$

راهنمایی: امکان‌های مختلف برای ۴ اندیس آزاد را در نظر بگیرید و دو طرف را مقایسه کنید.

۱۷. الف: اتحاد جاکوبی را اثبات کنید

$$A\times(B\times C)+B\times(C\times A)+C\times(A\times B)=0$$

ب: عبارات زیر را با استفاده از تعریف بر حسب ε به‌دست آورید.

$$(A\times B).(C\times D)=?$$
$$(A\times B)\times(C\times D)=?$$