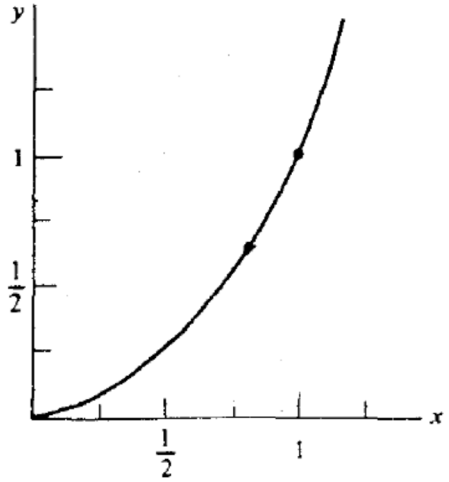
۱. با استفاده از رابطه کرل یک میدان برداری در مختصات دکارتی ثابت کنید که هر نیروی مرکزی پایستار است. از رابطه $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ استفاده کنید.

۲. مولفه‌های یک نیروی تابع مکان در مختصات دکارتی چنین است

$$F_x = 2a_1xyz + b_1xy^2z + c_1xyz^2,$$
$$F_y = a_2x^2z + 2b_2xyz + c_2xz^2,$$
$$F_z = a_3x^2y + b_3xy^2 + 2c_3xyz$$

الف: ضرایب $c_3, c_2, c_1, b_3, b_2, b_1, a_3, a_2, a_1$ چگونه باشند تا نیروی فوق پایستار باشد.
ب: انرژی پتانسیل متناظر با این نیرو را به‌دست آورید.

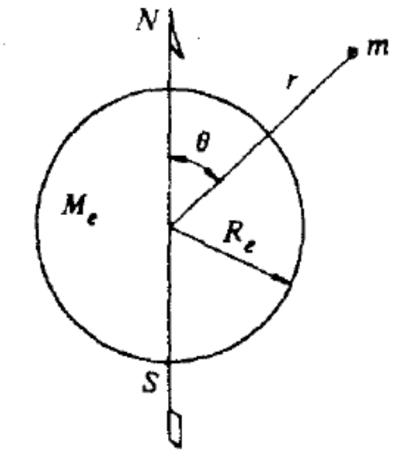
۳. ذره‌ای به جرم m در صفحه افقی روی سهمی $y = x^2$ مطابق شکل حرکت می‌کند. این ذره در لحظه‌ی $t = 0$ در نقطه‌ی $(1,1)$ است و در جهت نشان داده شده با سرعت v_0 حرکت می‌کند. غیر از نیرویی که آن را روی مسیر حفظ می‌کند، نیروهای خارجی زیر بر آن وارد می‌شوند: یک نیروی شعاعی به صورت $F_a = -Ar^3\hat{r}$ و نیروی مفروضی به صورت $F_b = B(y^2\hat{i} - x^2\hat{j})$ که در آن‌ها A, B ثابت هستند. الف) آیا نیروها پایستار هستند؟ ب) سرعت ذره v_f هنگام رسیدن به مبدا چیست؟



۴. وقتی تخت شدگی کره زمین در قطبین به حساب بیاید، انرژی پتانسیل گرانشی جرم m که به فاصله r از مرکز زمین قرار دارد به طور تقریبی چنین می‌شود

$$U = -\frac{GM_em}{r}\left[1 - 5.4\times10^{-4}(\frac{R_e}{r})^2(3\cos^2\theta - 1)\right]$$

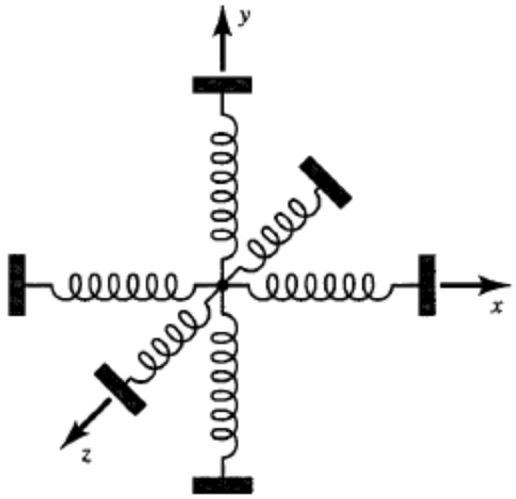
که در آن θ از قطب اندازه‌گیری می‌شود. نشان دهید جز در مواردی که جسم بر فراز قطب یا استوا قرار می‌گیرد، نیروی گرانشی مماسی کوچکی بر m وارد می‌شود. نسبت این نیرو را به $\frac{GM_em}{r^2}$ برای زاویه $\theta = 45^\circ$ و $r = R_e$ پیدا کنید.



۵. گلوله سربی کوچکی به جرم m مطابق شکل به وسیله شش فنر سبک آویزان شده است. ثابت‌های سفتی به نسبت $1:4:9$ هستند به طوری‌که تابع انرژی پتانسیل را می‌توان به شکل زیر بیان کرد

$$V=\frac{k}{2}(x^2+4y^2+9z^2)$$

در لحظه‌ی $t=0$ گلوله را در جهت $(1,1,1)$ چنان هل می‌دهیم که تندی آن در مبدا v_0 باشد. اگر $k=\pi^2 m$ باشد، مقدار عددی x,y,z را به صورت توابعی از زمان بیابید. آیا گلوله مسیر خود را طی می‌کند؟ اگر چنین است به ازای چه مقدار از t برای اولین بار با همان سرعت که در $t=0$ داشت به مبدا برمی‌گردد؟



۶. اتمی در شبکه بلوری مکعبی ساده قرار دارد. اگر انرژی پتانسیل برهم‌کنش بین هر دو اتم به صورت $cr^{-\alpha}$ باشد، که c,α ثابت‌اند و r فاصله‌ی بین دو اتم است نشان دهید که انرژی کل برهم‌کنش یک اتم معین با شش همسایه نزدیکش تقریبا برابر انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ سه بعدی

$$V\approx A+B\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

است که A, B ثابت اند. [توجه: فرض کنید که شش اتم همسایه ثابت هستند و در نقاط $(\pm d,0,0)$، $(0,\pm d,0)$ و $(0,0,\pm d)$ واقع‌اند. همین طور فرض کنید که جابجایی (x, y, z) اتم ذکر شده از نقطه تعادل $(0,0,0)$ در مقایسه با d کوچک است. در این صورت $V = \sum cr_i^{-\alpha}$ که در آن

$$r_1 = \left[(d-x)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

و عبارت‌هایی مشابه برای $r_2, r_3, \ldots r_6$ وجود دارند.]