فصل پنجم – نیروی مرکزی

۵-۱- مسئله دو جسم و اهمیت آن

یکی از دستگاه‌های فیزیکی مهم دستگاهی است که از دو ذره متمایز به جرم‌های m_1 و m_2 تشکیل شده است. به این دستگاه، دستگاه دوجسم گفته می‌شود و تحلیل دینامیکی آن به عنوان "مسئله دوجسم" شناخته می‌شود. تحت شرایط معینی که شرح خواهیم داد مسئله دوجسم را می‌توان به دو مسئله تک جسمی تقلیل داد. این شرایط در اغلب مسایل کاربردی برقرار هستند. به همین دلیل ادعا می‌کنیم که مسئله دوجسم در اغلب موارد مسئله‌ای است که حل دقیق و تحلیلی دارد.

در هر نظریه دینامیکی تعداد مسایلی که حل دقیق دارند محدود و انگشت شمار است. این به معنای ناکارآمدی آن نظریه نیست. در حقیقت اگر تعداد متغیرهای دینامیکی زیاد شود و معادلات حرکت آنها در هم پیچیده و به بیان دقیق‌تر جفتیده باشد، امکان یافتن حل دقیق برای دستگاه به شدت کاهش می‌یابد. در چنین شرایطی یا باید به کمک دستگاه‌های محاسبه‌گر به دنبال حل‌های عددی برای دستگاه گشت و یا در صورت یافتن برخی حل‌های دقیق، اختلال‌های حول آن حل‌ها را بررسی کرد.

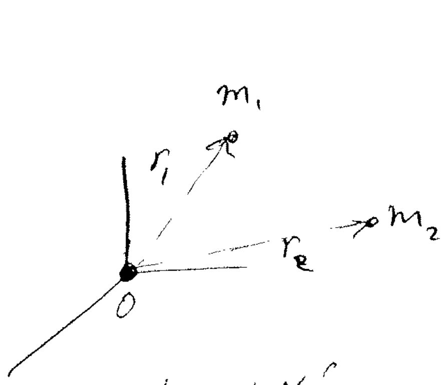
در مکانیک نیوتنی سه مسئله مهم وجود دارد که تحت شرایط معین برای آنها حل‌های دقیق می‌توان ارائه کرد. این سه مسئله عبارتند از مسئله تک جسم، مسئله دوجسم و مسئله جسم صلب. دستگاه اخیر یعنی جسم

صلب دستگاهی است که ~~[illegible]~~ می‌تواند از تعداد بیشماری ذره تشکیل شده باشد، اما به همان نسبت تعداد قیود روی دستگاه هم افزایش می‌یابد، به طوری که تعداد درجات آزادی دستگاه حداکثر ۶ تا است. بررسی ~~[illegible]~~ سینماتیکی و دینامیکی جسم صلب را به فصل‌های آینده موکول می‌کنیم و فعلاً توجه خود را به مسئله دو جسم معطوف می‌کنیم.

مسئله دوجسم علاوه بر جنبهٔ نظری مبتنی بر حل‌پذیری دستگاه، از جنبهٔ عملی و کاربردی نیز اهمیت بسزایی دارد. به عنوان مثال حرکت سیارات به دور خورشید را می‌توان با تقریب خوبی در قالب مسئله دوجسم بررسی کرد. هرچند دستگاه منظومه شمسی یک دستگاه چندجسمی است، اما می‌توان به دلیل کوچکی جرم سیارات نسبت به خورشید، حرکت هر سیاره را در چارچوب مسئله دوجسمی سیاره-خورشید بررسی کرد. البته بعداً این امکان وجود دارد که اثر سایر سیارات را به صورت اختلال‌های کوچک به مسئله دوجسمی اضافه کرد. همچنین دستگاه ماه-زمین را نیز می‌توان یک دستگاه دوجسمی به حساب آورد. در مقیاس کوچکتر نیز می‌توان دستگاه مرکب از یک الکترون و یک هستهٔ باردار، موسوم به اتم رادرفورد، را یک دستگاه دوجسمی کلاسیک به حساب آورد.

۵-۲- صورت‌بندی کلی مسئله دوجسم

دو ذره به جرم‌های m_1 و m_2 در نظر بگیرید که مطابق شکل (۵-۱) به ترتیب در مکان‌های $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ نسبت به مبدأ مقایسه قرار گرفته‌اند.



شکل (۵-۱)
شکل کلی مسئله دوجسم

معادله حرکت نیوتن برای این دو ذره را در کلی‌ترین حالت به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$m_1\ddot{\vec r}_1 = \vec F_{1ext}(r_1) + \vec F_{21}(r_1, r_2)$$
$$m_2\ddot{\vec r}_2 = \vec F_{2ext}(r_2) + \vec F_{12}(r_1, r_2) \qquad (۵-۱)$$

که در آن $\vec F_{21}$ نیروی وارد به ذره ۱ از طرف ذره ۲ و $\vec F_{12}$ نیروی وارد به ذره ۲ از طرف ذره ۱ است. بنا به قانون سوم نیوتن $\vec F_{12} = -\vec F_{21}$. در روابط فوق $\vec F_{1ext}$ و $\vec F_{2ext}$ به ترتیب نیروی خارجی وارد به ذره ۱ و ذره ۲ از طرف عوامل محیطی هستند. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن دستگاه دو ذره منزوی است و نیروهای خارجی صفر هستند. در این صورت معادلات حرکت (۵-۱) به صورت ساده‌تر زیر در می‌آید.

$$m_1\ddot{\vec r}_1 = F_{21}(r_1, r_2)$$
$$m_2\ddot{\vec r}_2 = +F_{12}(r_1, r_2) = -F_{21}(r_1, r_2) \qquad (۵-۲)$$

~~با جمع کردن معادلات فوق داریم~~

$$\cancel{m_1\ddot{\vec r}_1 + m_2\ddot{\vec r}_2 = 0 \qquad (۵-۳)}$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل (۵-۲) در حالت کلی یک دستگاه جفتیده است که در آن باید شش معادله دیفرانسیل مرتبه دو (دو معادله برداری) را برای شش متغیر $\vec r_1$ و $\vec r_2$ همزمان با هم حل کرد. تلاش می‌کنیم این دستگاه معادلات را واجفتیده کنیم. برای این کار طبیعتاً باید متغیرهای جدیدی به جای $\vec r_1$ و $\vec r_2$ معرفی کرد. به این منظور معادلات (۵-۲) را یک بار با هم جمع می‌کنیم و یک بار هم اولی را در m_2 و دومی را در m_1 ضرب می‌کنیم و حاصل را از هم کم می‌کنیم. نتیجه چنین است

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec r}_1 + m_2\ddot{\vec r}_2 = 0 \\ m_1 m_2(\ddot{\vec r}_1 - \ddot{\vec r}_2) = (m_1+m_2)\vec F_{21} \end{cases} \qquad (۵-۳)$$

اکنون متغیرهای جدید $\vec R$ و $\vec r$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$
\begin{cases}
\vec{R} = \dfrac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right) \\
\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2
\end{cases}
\qquad (۵-۴)
$$

که در آن $M=m_1+m_2$ جرم کل دستگاه است. بردار $\vec{R}$ بردار مکان مرکز جرم دستگاه دوجسمی نام دارد و $\vec{r}$ مختصه نسبی است. در واقع اگر از مبدأ منطبق بر جرم m_2 به جرم m_1 نگاه کنیم آن را در محل $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ خواهیم دید. با استفاده از تغییر متغیر (۵-۴) معادلات (۵-۳) به صورت ساده‌تر زیر در می‌آید

$$
\begin{cases}
M\ddot{\vec{R}} = 0 \\
\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}(r_1, r_2)
\end{cases}
\qquad (۵-۵)
$$

که در آن

$$
\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \qquad (۵-۶)
$$

μ جرم کاهیده دستگاه نام دارد که از هر دوی m_1 و m_2 کوچکتر است. معادله اول از دستگاه معادلات (۵-۵) که معادله حرکت مرکز جرم نام دارد از معادله دوم واجفتیده است و مستقلاً حاکی از آن است که مرکز جرم دستگاه دارای شتاب صفر است و با سرعت ثابت حرکت می‌کند. این سرعت به شرایط اولیه دستگاه و ناظری که دستگاه را توصیف می‌کند بستگی دارد. اما معادله دوم از دستگاه معادلات (۵-۵) به اندکی دقت نیاز دارد. در واقع بنا به یک ملاحظه تقارنی مهم نیروی $\vec{F}_{21}$ تابع دلخواهی از $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ نیست، بلکه تابع $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ است. اگر غیر از این باشد به این معناست که برهم‌کنش بین دو جسم m_1 و m_2 تابعی از محل قرار گرفتن دستگاه دو جسم در فضاست. به بیان دیگر انتظار داریم که تحت تبدیل

$$\vec{r}_1 \to \vec{r}_1 + \vec{a}$$
$$\vec{r}_2 \to \vec{r}_2 + \vec{a} \qquad (۵-۷)$$

یعنی انتقال یکسان هر دو جسم، برهم‌کنش بین آنها تفاوت نکند. تنها ترکیبی از $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ که تحت تبدیل انتقال (۵-۷) ناوردا است (یعنی مقدار آن تغییر نمی‌کند)، $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ است. بنابراین نیروی برهم‌کنش بین دو جسم بنابر ملاحظات کلی فیزیکی تابعی از $\vec{r}$ است. به این ترتیب معادلهٔ دوم در روابط (۵-۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \qquad (۵-۸)$$

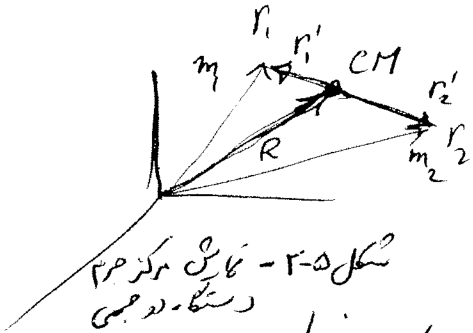
که در آن $\vec{F}(r)$ همان $\vec{F}_{21}(\vec{r})$ است. این رابطه که شکلی شبیه قانون دوم نیوتن دارد بیانگر آن است که می‌توان حرکت جسم m_1 را از دید ناظری که مبدأ آن بر جسم m_2 منطبق است با همان قانون دوم نیوتن مورد بررسی قرار داد مشروط بر آنکه به جای جرم m_1 جرم کاهیدهٔ μ را قرار دهیم. توجه کنید که ناظر ذکر شده ممکن است ناظر لخت نباشد، چرا که جرم m_2 در حالت کلی ممکن است حرکتی شتابدار داشته باشد. همچنین لازم به ذکر است که رابطه (۵-۸) با فرض ~~...~~ منزوی بودن دستگاه به دست آمده است.

به این ترتیب معادلات حرکت دستگاه دو جسمی منزوی به معادله حرکت مرکز جرم (که با سرعت ثابت حرکت می‌کند) و معادله حرکت نسبی، رابطه (۵-۸)، واجفتیده شد. فرض کنید $R(t)$ و $r(t)$ از حل معادلات ذکرشده به دست آمده باشد. با معکوس کردن روابط تبدیل (۵-۴) می‌توان $\vec{r}_1(t)$ و $\vec{r}_2(t)$ را به صورت زیر به دست آورد

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r},$$
$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}. \qquad (۵-۹)$$

خوب است که حرکت دستگاه را از دید ناظر مرکز جرم، یعنی ناظری که مبدأ مختصات آن در مرکز جرم قرار دارد، نیز نگاه کنیم. اگر $r_1' = r_1 - R$ و $r_2' = r_2 - R$ بردارهای مکان جرم های ۱ و ۲ از دید ناظر مرکز جرم باشند، با توجه به روابط (۵-۹) داریم

$$r_1' = \frac{m_2}{M}\vec{r} \qquad (۵-۱۰)$$
$$r_2' = -\frac{m_1}{M}\vec{r}$$



شکل ۵-۲ - نمایش مرکز جرم دستگاه دو جسمی

شکل (۵-۲) بردارهای یاد شده را نشان می دهد، که در آن CM نشانگر مرکز جرم دستگاه است.

از روابط (۵-۱۰) می توان دید که هر دو بردار r_1' و r_2' با بردار مکان نسبی $\vec{r}$ متناسب هستند. این در صورتی ممکن است که مرکز جرم روی خط واصل بین دو ذره باشد. علاوه بر این روابط فوق نشان می دهد که

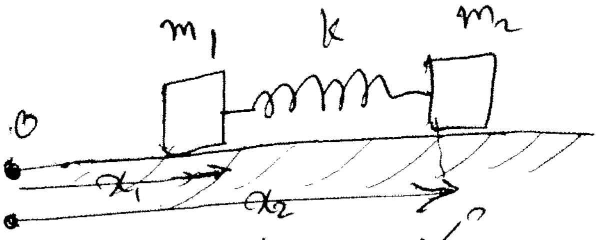
$$\frac{|r_1'|}{|r_2'|} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (۵-۱۱)$$

یعنی نسبت فواصل مرکز جرم از دو ذره به نسبت عکس جرم هاست و مرکز جرم به جسم سنگین تر نزدیک تر است. از روابط (۵-۱۰) همچنین می توان مشاهده کرد که

$$\begin{cases} r_1' - r_2' = r \,, \quad \cancel{m_1 r_1' + m_2 r_2'} \\ m_1 r_1' + m_2 r_2' = 0 \end{cases} \qquad (۵-۱۲)$$

روابط اخیر تکرار روابط (۵-۴) هستند وقتی که مبدأ مختصات بر مرکز جرم منطبق باشد.

مثال - دستگاه دو جسم و یک فنر -



شکل (۵-۳)

دستگاه شکل (۵-۳) جرم های m_1 و m_2 را نشان می دهد که روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارند و با فنری به ضریب k با یکدیگر برهم کنش دارند. تنها مختصه افقی دو جسم x_1 و x_2 است که به ترتیب مکان های دو جسم روی محور x را نسبت به مبدأ ثابت O نشان می دهند. چون هیچ برهم کنش خارجی در کار نیست معادلات حرکت دو جسم چنین است

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k(x_2-x_1-a) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2-x_1-a) \end{cases} \qquad (۱۲-۵)$$

که در آن a طول فنر در حالت عادی است. همان طور که انتظار می رفت نیروی فنر تنها به فاصله (x_2-x_1) بستگی دارد و مقدار مطلق کمیتهای x_1 و x_2 جداگانه در آن تأثیر ندارد. روابط تبدیل (۵-۴) در این حالت یک بعدی به صورت زیر در می آیند

$$\begin{cases} X = \frac{m_1}{M}x_1 + \frac{m_2}{M}x_2 \\ x = x_1 - x_2 \end{cases} \qquad (۱۴-۵)$$

و معادلات حرکت نیز با انجام عملیات ذکر شده در متن (قبل از رابطه ۵-۳) به صورت زیر در می آیند

$$\begin{cases} M\ddot{X} = 0 \\ \mu\ddot{x} - kx = -ka \end{cases} \qquad (۱۵-۵)$$

با توجه به روشهایی که در فصل های قبل برای حل معادلات حرکت آموخته ایم جواب معادلات (۵-۱۵) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} X = Vt + X_0 \\ x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + a \end{cases} \qquad (۱۶-۵)$$

که در آن $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ و A ، φ ، V و X_0 ثابت های اولیه هستند. با توجه به روابط تبدیل معکوس (۵-۹) برای x_1 و x_2 به دست می آید:

$$x_1 = Vt + X_0 + \frac{m_2}{M}\left[A\cos(\omega_0 t + \varphi) + a\right] \qquad (۱۷-۵)$$

$$x_2 = Vt + X_0 - \frac{m_1}{M}\left[A\cos(\omega_0 t + \varphi) + a\right]$$

مقدار ثابت های اولیه را می توان با داشتن مقادیر $x_1(0)$ ، $x_2(0)$ ، $\dot{x}_1(0)$ و $\dot{x}_2(0)$ به دست آورد. به عنوان مثال فرض کنید $m_1 = m_2$ و در لحظهٔ شروع جرم m_1 در مبدأ و فنر در حالت عادی باشد. اگر در این لحظه ضربه‌ای ناگهانی، به جرم m_1 سرعت اولیه v_0 بدهد (در حالی که جرم m_2 ساکن است) با اعمال شرایط اولیه داریم

$$\begin{cases} x_1 = \frac{v_0}{2}t + \frac{1}{2}\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ x_2 = \frac{v_0 t}{2} - \frac{1}{2}\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + a \end{cases} \qquad (۱۸-۵)$$

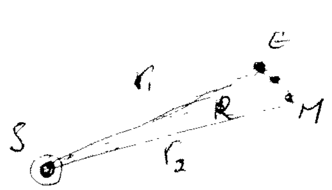
در لحظهٔ شروع، همان طور که فرض شد $v_1 = v_0$ و $v_2 = 0$ ، بعد از گذشت زمان $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$ وضع برعکس می شود یعنی $v_1 = 0$ و $v_2 = v_0$. مجدداً بعد از زمان $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ جرم اول سرعت v_0 خواهد داشت و جرم دوم ساکن می شود. حرکت منظرهٔ دستگاه جالبی شبیه حرکت کرم ابریشم دارد.

حال یک بار دیگر به معادلات حرکت کلی (۵-۲) برای دستگاه دوجسم برگردیم و ببینیم آیا امکان دیگری برای واجفتیده شدن معادلات حرکت وجود دارد یا نه. اگر عملیاتی که منجر به معادلات (۵-۳) شدند را یک بار دیگر در حضور نیروهای خارجی روی معادلات (۵-۲) انجام دهیم، یعنی یک بار آنها را باهم جمع

کنیم و یک بار هم اولی را در m_2 و دومی را در m_1 ضرب و از هم کم کنیم، حاصل چنین خواهد شد:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec r}_1 + m_2\ddot{\vec r}_2 = \vec F_{1ext}+\vec F_{2ext} \equiv F_{ext} \\ m_1 m_2(\ddot{\vec r}_1-\ddot{\vec r}_2) = (m_1+m_2)F_{21} + (m_2\vec F_{1ext} - m_1\vec F_{2ext}) \end{cases} \qquad (۱۹-۵)$$

برای آنکه معادلات حرکت واجفتیده شوند ضروری است به نحوی جملهٔ $(m_2F_{1ext}-m_1F_{2ext})$ در معادلهٔ دوم (۱۹-۵) صفر شود. تنها امکان برای این امر آن است که $\vec F_{1ext}=m_1\vec g$ و $\vec F_{2ex}=m_2\vec g$، یعنی نیروهای خارجی برابر با جرم هر ذره در بردار ثابتی باشند. طبیعتاً این بردار ثابت فقط شتاب گرانش می‌تواند باشد. البته می‌توان شرط ضعیف‌تری را هم در نظر گرفت که در آن $\vec g$ ثابت نباشد اما تقریباً برای هر دو ذره یکسان باشد. چنین چیزی وقتی اتفاق می‌افتد که فاصلهٔ دو ذره از هم در مقایسه با فاصلهٔ آنها از چشمهٔ نیروی گرانش بسیار کمتر باشد؛ به طوری که دو جسم تقریباً شتاب گرانشی یکسانی را در هر لحظه احساس کنند، اگر چه در طی حرکت دراز مدت خود ممکن است تغییرات شتاب گرانش را درک کنند.



شکل (۵-۶) دستگاه ماه - زمین - خورشید

به عنوان مثال حرکت دستگاه ماه - زمین را در نظر بگیرید. در حالی که این دستگاه به دور خورشید نیز در حرکت انتقالی است. فاصلهٔ ماه - زمین در مقایسه با فواصل زمین - خورشید و ماه - خورشید بسیار ناچیز است، به طوری که می‌توان در محاسبهٔ شتاب گرانشی خورشید در محل ماه و زمین (شکل ۵-۶ را ببینید) عملاً

$$\vec g(r_1) \simeq \vec g(r_2) \simeq \vec g(R) \qquad (۲۰-۵)$$

فرض کرد؛ یعنی شتاب گرانش روی هر دو جسم را با شتاب گرانش در مرکز جرم آنها یکسان

گرفت. به این ترتیب صفر شدن جمله اضافه در معادله دوم از دستگاه (۵-۱۹) تضمین می‌شود. تقریب (۵-۲۰) نتیجه شایان توجه دیگری هم دارد. اگر رابطه اول (۵-۱۹) را نیز در نظر بگیریم، با توجه به تعریف بردار مکان مرکز جرم از رابطه اول (۵-۴) داریم

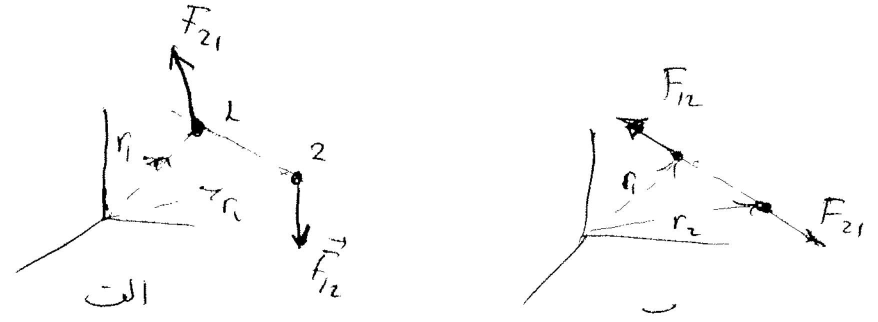
$$M\frac{d^2R}{dt^2}=M\vec{g}(\vec{R}) \qquad (۵\text{-}۲۱)$$

یعنی معادله حرکت مرکز جرم نیز در این حالت واجفتیده است. به این ترتیب برای دستگاه ماه-زمین باید دو مسئله متفاوت را برای بردارهای $\vec{R}$ و $\vec{r}$ حل کرد و سپس از روابط (۵-۹) بردار مکان ماه و زمین را به دست آورد.

نخست برای محاسبه $\vec{R}$ باید مسئله سقوط آزاد دستگاه ماه-زمین در میدان گرانشی خورشید را بررسی و حل کرد (توجه داشته باشید که اصطلاح سقوط آزاد شامل هر نوع حرکت تحت اثر میدان گرانشی خالص است که شامل حرکت مداری اجسام نیز می‌شود.) سپس برای تعیین $\vec{r}$ باید حرکت ماه را از دید ناظری که مبدأ آن بر مرکز زمین منطبق است بررسی کرد، با این شرط که به ماه جرم کاهیده μ را نسبت دهیم. البته لازم به ذکر است که در عمل به دلیل کوچکی جرم ماه در مقایسه با جرم زمین اولاً جرم کاهیده آن بسیار به جرم اصلی نزدیک است (رابطه ۵-۶ را ببینید) و ثانیاً مرکز جرم ماه و زمین بسیار به مرکز زمین نزدیک است، به طوری که برای بررسی سقوط آزاد (مرکز جرم) دستگاه ماه-زمین حول خورشید عملاً می‌توان ماه را نادیده انگاشت و حرکت زمین به دور خورشید را به حساب حرکت مرکز جرم ماه-زمین به دور خورشید گذاشت.

حالت قابل توجه دیگری که در آن معادلات دستگاه دو جسم واجفتیده شوند

قابل ذکر نیست. به این ترتیب مسئله حرکت مرکز جرم دستگاه دو جسمی عملاً یا حرکت با سرعت ثابت است و یا سقوط آزاد در یک میدان گرانشی.
حرکت با سرعت ثابت که کاملاً آشناست. اما سقوط آزاد در میدان گرانشی حالت خاصی از حرکت تحت تأثیر نیروی مرکزی است که در ادامهٔ این فصل به تفصیل به آن خواهیم پرداخت. بنابراین فعلاً معادلهٔ حرکت مرکز جرم را کنار می‌گذاریم و توجه خود را به معادلهٔ مربوط به حرکت نسبی دو جسم، یعنی معادله (۵ – ۸) معطوف می‌کنیم.
خوشبختانه هنوز قدم های دیگری برای ساده سازی مسئله می‌توان برداشت.
سمت راست رابطه (۵ – ۸) نیروی برهم کنش جسم ۲ روی جسم ۱ قرار دارد. بنا به



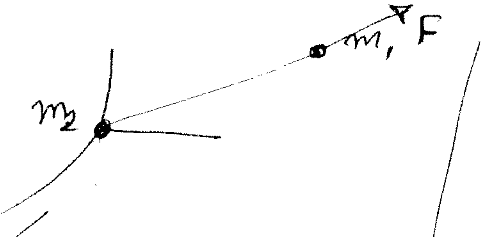
شکل ۵ – ۵ – نیروهای عمل و عکس العمل بنام قانون سوم نیوتن الف) در بیان ضعیف و ب) در بیان قوی

قانون سوم نیوتن فقط می‌دانیم که $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{21}$ مساوی و مختلف الجهت هستند. چنین چیزی می‌تواند مطابق وضعیت (الف) یا وضعیت (ب)

از شکل (۵ – ۵) اتفاق بیفتد. در وضعیت (ب) نیروها نه فقط مساوی و مختلف الجهت هستند، بلکه درامتداد خط واصل بین دو ذره نیز هستند؛ درحالی که در وضعیت (الف) امتداد نیروها با خط واصل بین دو ذره زاویه دارد. شکل نیروهای عمل و عکس العمل در وضعیت (الف) را مطابق "بیان ضعیف قانون سوم نیوتن" و در وضعیت (ب) را منطبق بر "بیان قوی قانون سوم نیوتن" می نامیم.
دو نیروی مهم طبیعت یعنی نیروی گرانش و نیروی الکتریکی بین بارهای ساکن

از بیان قوی قانون سوم نیوتن تبعیت می‌کنند. البته برای بارهای در حال حرکت که با یکدیگر برهم‌کنش مغناطیسی هم دارند قانون سوم نیوتن هم در شکل ضعیف (نقطه‌ای) و هم در شکل قوی خدشه‌دار می‌شوند. در این حالت می‌توان جایگزین‌های بهتری برای قانون سوم نیوتن ارائه کرد که اعتبار خود را برای بارهای متحرک حفظ می‌کنند. بحث در این مورد را به فصول آینده موکول می‌کنیم. برای ذرات باردار متحرک که سرعت آنها در مقایسه با سرعت نور بسیار کوچک است کماکان می‌توان اعتبار قانون سوم نیوتن در بیان قوی آن را برای نیروهای الکتریکی محفوظ داشت. فعلاً اجازه دهید فرض کنیم معادلهٔ حرکت نسبی (۵-۱۸) را برای شرایطی که قانون سوم نیوتن در بیان قوی آن برقرار است در نظر بگیریم.

در این حال اگر بردار مکان نسبی $\vec{r}$ را در مختصات قطبی در نظر بگیریم



شکل (۵-۶) نیروی برهم‌کنش در مختصات نسبی

مطابق شکل (۵-۶) نیروی برهم‌کنش جسم ۲ روی جسم ۱ نیرویی است که فقط مؤلفهٔ شعاعی دارد. بنابراین تا اینجا معادله حرکت نسبی به صورت ساده‌تر زیر در می‌آید

$$\mu \ddot{\vec{r}} = F(r,\theta,\varphi)\, \hat{e}_r \qquad (۵-۲۲)$$

که در آن (r,θ,φ) مختصات کروی بردار مکان نسبی $\vec{r}$ است.

حال به یک ملاحظهٔ فیزیکی بسیار مهم دیگر می‌پردازیم. در شکل (۵-۶) برای نمایش بردار مکان نسبی مبدأ مختصات را روی جرم m_2 گذاشته‌ایم، اما در مورد انتخاب امتداد محورهای مختصات هیچ فرض خاصی نکرده‌ایم.

در واقع انتظار داریم اندازه نیروی برهم‌کنش دو ذره به نحوهٔ جهت‌گیری بردار $\vec{r}$ نسبت محورهای مختصات معین بستگی نداشته باشد. به بیان دیگر نیروی برهم‌کنش آن نمی‌تواند به زوایای قطبی θ ، φ بستگی داشته باشد.

خط واصل بین m_1 و m_2 هر سمت‌گیری که نسبت به محورهای یک دستگاه خاص داشته باشد برهم‌کنش بین آنها تفاوتی نخواهد داشت. چنین فرضی را «همسانگردی فضا» نسبت به دستگاه دو جسمی می‌نامیم، بدین معنی که تمام جهات فضا برای دستگاه دو جسم با یکدیگر معادل‌اند. پیش از این نیز دیدیم که برهم‌کنش بین دو جسم تحت تبدیل انتقال (۵-۷) تفاوت نمی‌کند. به چنین تفاوتی نیز «همگنی فضا» می‌گوییم. یعنی دستگاه دو ذره بین محل‌های مختلف قرار گرفتن تمیز قایل نمی‌شوند و همه جای فضا برای آنها یکسان است. به این ترتیب رابطه (۵-۲۲) یک گام دیگر به سمت ساده شدن پیش می‌رود و به نتیجه نهایی زیر منجر می‌شود

$$\mu \ddot{\vec{r}} = F(r)\,\hat{e}_r \qquad (۵-۲۴)$$

این نوع نیرو در فصل (۳) برای ما آشناست و به آن نیروی مرکزی می‌گوییم، یعنی نیرویی که فقط در راستای شعاع است و مقدار آن نیز فقط به مختصه شعاعی بستگی دارد. در آنجا حالت ایده‌آلی را داشتیم که یک منبع ثابت نیرو در فضا نیروی مرکزی به یک ذره وارد می‌کرد. چنین فرضی ایده‌آل‌گرایانه به نظر می‌رسد. در این فصل حالت واقعیت را برای نیروی برهم‌کنش دو ذره که در فضا آزادانه حرکت می‌کنند و با یکدیگر برهم‌کنشی که از بیان قوی قانون سوم نیوتن تبعیت می‌کند، دارند در مختصات نسبی دو جسم دیدیم که بسیار طبیعی‌تر به نظر می‌رسد.

۵-۳ـ تفکیک حرکت مرکز جرم و حرکت نسبی

در این بخش سه کمیت تکانه خطی، تکانه زاویه‌ای و انرژی جنبشی دستگاه دو جسمی را بررسی می‌کنیم. تکانه خطی دستگاه دو جسم

جمع برداری تکانه‌ی خطی دو جسم است، که با توجه به تعریف مرکز جرم از رابطه (۵-۴) به صورت زیر است

$$\underline{P} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = M\dot{\vec{R}} \qquad (۵-۲۴)$$

که شبیه تکانه خطی ذره‌ای است که جرم آن جرم کل دستگاه است و سرعت آن سرعت مرکز جرم دستگاه است.

برای محاسبه تکانه زاویه‌ای ابتدا از روابط (۵-۹) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم تا روابط زیر بین سرعتهای دو جسم و سرعت نسبی v و سرعت مرکز جرم V به دست آید

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \frac{m_2}{M}\vec{v}$$
$$v_2 = \vec{V} - \frac{m_1}{M}\vec{v} \qquad (۵-۲۵)$$

حال با استفاده از روابط (۵-۹) و (۵-۲۵) تکانه زاویه ای کل دستگاه که جمع تکانه زاویه‌ای دو ذره است را حساب می‌کنیم:

$$\vec{L} = m_1 r_1 \times v_1 + m_2\, r_2 \times v_2$$
$$= m_1\left(R + \frac{m_2}{M}r\right)\times\left(V + \frac{m_2}{M}\vec{v}\right)$$
$$+ m_2\left(R - \frac{m_1}{M}r\right)\times\left(V - \frac{m_1}{M}\vec{r}\right)$$
$$= M\, R\times V + \mu\,\vec{r}\times\vec{v} \qquad (۵-۲۶)$$

در محاسبه فوق جملات ضربدری به شکل $R\times v$ و $r\times V$ حذف شده‌اند و جملات باقی مانده نیز مطابق نتیجه نهایی فاکتورگیری شده‌اند. نتیجه نهایی را به این شکل می‌توان توجیه کرد: اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه دو جسمی عبارت است از مجموع اندازه حرکت زاویه‌ای مرکز جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای نسبی؛ به بیان دیگر مجموع اندازه حرکت زاویه‌ای ذره‌ای فرضی به جرم M، مکان $\vec{R}$ و سرعت $\vec{V}$ و ذره دیگری به جرم μ، مکان $\vec{r}$ و سرعت $\vec{v}$. جمله‌ی دوم رابطه (۵-۲۶) را به

صورت دیگری نیز می‌توان بیان کرد. اگر تکانهٔ زاویه‌ای دو جسم را از نگاه ناظری که مبدأ آن مرکز جرم است حساب کنیم با توجه به رابطه‌های (۵-۱۰) و مشتقات زمانی آنها داریم

$$L' = m_1 r_1' \times v_1' + m_2 r_2' \times v_2'$$
$$= m_1 \left(\frac{m_2}{M}\vec{r}\right) \times \left(\frac{m_2}{M}\vec{v}\right) + m_2 \left(-\frac{m_1}{M}\vec{r}\right) \times \left(-\frac{m_1}{M}\vec{v}\right)$$
$$= \mu \vec{r} \times \vec{v} \qquad (۵-۲۷)$$

به این ترتیب رابطهٔ (۵-۲۶) را به صورت زیر می‌توان جمع‌بندی کرد

$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}' \qquad (۵-۲۸)$$

که $\vec{L}_{cm}$ را اصطلاحاً تکانهٔ زاویه‌ای مرکز جرم و L' را تکانهٔ زاویه‌ای از دید مرکز جرم می‌نامیم. در بخش بعد ضمن بررسی اندازه حرکت زاویه‌ای در حرکت نسبی تنها به جمله L' در رابطهٔ (۵-۲۷) توجه خواهیم داشت.

برای محاسبه انرژی جنبشی دستگاه دو جسمی نیز با توجه به روابط (۵-۲۵) داریم

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$
$$= \frac{1}{2} m_1 \left(V + \frac{m_2}{M} v\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(V - \frac{m_1}{M} v\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \mu v^2$$
$$= T_{cM} + T' \qquad (۵-۲۹)$$

چنانکه ملاحظه می‌شود در این حالت نیز انرژی جنبشی کل دستگاه شامل انرژی جنبشی مرکز جرم و انرژی جنبشی ~~دستگاه از مرکز جرم~~ حرکت نسبی است. انرژی جنبشی حرکت نسبی در واقع همان انرژی جنبشی مرکز جرم است. با استفاده از مشتق زمانی روابط (۵-۱۰) داریم

برای اثبات

$$T' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{M} \vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(-\frac{m_1}{M} v\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \mu v^2 \qquad (۵-۳۰)$$

۵-۲- ثابت های حرکت

چنانکه در بخش قبل دیدیم حرکت دستگاه دوجسمی تحت شرایط معینی به دو بخش حرکت مرکز جرم و حرکت نسبی تجزیه می شود. بخش مربوط به حرکت مرکز جرم برای حالتی که نیروی خارجی صفر است بدیهی و ساده است. برای حالت خاص نظیر دستگاه ماه-زمین-خورشید نیز حل مسئله حرکت مرکز جرم از نوع یک مسئله نیروی مرکزی است که موضوع این بخش است.

چنانکه نهایتاً در رابطهٔ (۵-۲۴) مشاهده کردیم بخش مربوط به معادله حرکت حرکت نسبی دستگاه دوجسمی به صورت

$$\mu \ddot{\vec{r}} = F(r)\, \hat{e}_r$$

است، که نشان دهندهٔ حرکت ذره‌ای به جرم μ (جرم کاهش یافته) و بردار مکان $\vec{r}$ (مکان نسبی) تحت اثر نیروی مرکزی $F(r)$ است.

چنانکه در بخش (۳-) دیدیم برای یک نیروی مرکزی گشتاور نیرو صفر و بردار اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت است. به بیان دیگر داریم

$$\vec{\ell} = \mu \vec{r} \times \vec{v} = \text{ثابت} \qquad (۵-۳۲)$$

توجه کنید که بردار $\vec{\ell}$ تمام تکانه زاویه‌ای دستگاه نیست، بلکه با توجه

به رابطه (۵-۲۶) اندازه حرکت زاویه‌ای کل دستگاه دو جسمی شامل جمله دیگری به صورت $\vec{L}_{cm}=M\vec{R}\times\vec{V}$ نیز هست. برای حالتی که نیروی خارجی صفر است و مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، این بخش از ~~اندازه حرکت~~ تکانه زاویه‌ای نیز ثابت است. برای حالت دیگری نظیر دستگاه ماه - ~~خورشید~~ زمین - خورشید که نیروی خارجی ناشی از میدان گرانشی تقریباً مؤثر بر مرکز جرم است (به رابطه ۵-۲۱ نگاه کنید) باز هم می‌توان نیروی خارجی مؤثر را یک نیروی مرکزی، البته در راستای بردار $\vec{R}$ در نظر گرفت که گشتاور آن صفر است. در نتیجه در این حالت نیز سهم $\vec{L}_{cm}$ از تکانه زاویه‌ای دستگاه، ثابت است.

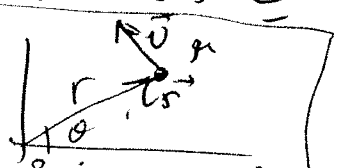
به این ترتیب در مسایلی که عملاً تفکیک مسئله به دو بخش حرکت مرکز جرم و حرکت نسبی امکان پذیر است، هر دو بخش اندازه حرکت زاویه‌ای ~~[illegible]~~ یعنی هم $\vec{l}$ و هم $\vec{L}_{cm}$ ثابت هستند. از آنجا که فعلاً می‌خواهیم توجه خود را به بخش حرکت نسبی معطوف کنیم صرفاً به ثابت بودن بردار $\vec{l}$ یعنی اندازه حرکت زاویه‌ای مربوط به حرکت نسبی ~~[illegible]~~ توجه داریم.

همان طور که در بخش (۳-۱۰) ~~[illegible]~~ دیدیم ثابت بودن تکانه زاویه‌ای باعث می‌شود حرکت در یک صفحه صورت گیرد. این صفحه، بر بردار تکانه زاویه‌ای عمود است و صفحه‌ای است که در لحظه $t=0$ (یا هر لحظه دلخواه دیگر) از بردارهای

$\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ ساخته می‌شود. فرض کنیم صفحهٔ حرکت نسبی صفحهٔ X-Y باشد (شکل ۵-۷)
اگر از مختصات قطبی برای بیان مکان و سرعت نسبی استفاده کنیم، همان
طور که در رابطهٔ (۳-۱۴۸) دیدیم بردار اندازهٔ حرکت زاویه‌ای به

صورت
$$\vec{l} = \mu r^2 \dot{\theta}\, \hat{e}_z$$

در می‌آید. توجه کنید که تفاوت رابطهٔ اخیر با رابطهٔ (۳-۱۴۸) در این
است که به جای جرم m (جرم ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی مرکزی قرار
گرفته است) جرم کاهیدهٔ μ آمده است. به این ترتیب از



شکل ۵-۷- نمایش ذره در صفحهٔ حرکت

پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای داریم

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{ثابت} \qquad (۵-۳۳)$$

اگر از سمت $+z$ به صفحهٔ xy نگاه کنیم و حرکت ذره پادساعتگرد
باشد، یعنی $\dot{\theta}$ مثبت باشد، کمیت l مثبت و در غیر این صورت منفی
است.

کمیت ثابت دیگر در این مسئله، انرژی است. برای درک این مطلب،
به بیان قضیه کار-انرژی برای هر یک از دو ذره توجه کنید. اگر
نیروی خارجی صفر باشد، ذرهٔ 1 تنها تحت اثر نیروی $\vec{F}_{21} = F(r)\hat{e}_r$
و ذرهٔ 2 نیز تنها تحت اثر نیروی $\vec{F}_{12} = -F(r)\hat{e}_r$ قرار دارد. از
قضیه کار-انرژی برای این دو ذره داریم

اگر دستگاه از پیکربندی A به پیکربندی B رفته باشد

$$\Delta T_1 = \int_A^B (F(r)\hat{e}_r)\cdot d\vec{r}_1 \qquad (۵-۳۴)$$

$$\Delta T_2 = \int_A^B (-F(r)\hat{e}_r)\cdot d\vec{r}_2 \qquad (۵-۳۵)$$

از جمع کردن روابط (۵-۳۴) و (۵-۳۵) با یکدیگر داریم

$$\Delta(T_1+T_2) = \int_A^B (F(r)\,\hat{e}_r)\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_A^B F(r)\,dr$$

$$= -\Delta V(r) \qquad (۵-۳۶)$$

که در آن $d\vec{r} = d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2$ و $V(r)$ تابع اولیه $F(r)$ با علامت منفی است، یعنی

$$F(r) = -\frac{dV}{dr} \qquad (۵-۳۷)$$

اما از رابطه (۵-۲۹) دیدیم که $\underbrace{T = T_1 + T_2}$ انرژی جنبشی کل دستگاه یعنی از دو بخش T_{cm} و $T' = \frac{1}{2}\mu v^2$ تشکیل شده است. چون نیروی خارجی نداریم سرعت مرکز جرم ثابت است و در نتیجه T_{cm} تغییر نمی‌کند. بنابراین $\Delta T_{cm} = 0$ و رابطه (۵-۳۶) نتیجه می‌دهد

$$\frac{1}{2}\mu v^2 + V(r) = E = \text{ثابت} \qquad (۵-۳۸)$$

توجه - محتوای محاسبه‌ی (۵-۳۶) نشان می‌دهد که ما برای برهم‌کنش دو ذره، یک انرژی پتانسیل می‌نویسیم که منفی گرادیان آن نیروی وارد به ذره‌ی 1 را می‌دهد. صرف نظر از جنبه مرکزی بودن نیروی برهم‌کنش، در این انرژی پتانسیل برهم‌کنش به صورت $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ است. برای استفاده‌های بعدی توجه کنید که اگر از این

انرژی پتانسیل نسبت به مختصات ذره ۱ گرادیان بگیریم داریم

$$\vec{F}_{21} = -\nabla_{r_1} V(r_1-r_2) = -\nabla_{(r_1-r_2)} V(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \qquad (۵-۳۹)$$

اگر از همین انرژی پتانسیل نسبت به مختصات ذره ۲ گرادیان بگیریم به دست می آید

$$\vec{F}_{12} = -\nabla_{r_2} V(r_1-r_2) = +\nabla_{(r_1-r_2)} V(r_1-r_2) = -\vec{F}_{12} \qquad (۵-۴۰)$$

به بیان دیگر همین که نیروی برهم کنش میان دو جسم را نیروی پایستار بگیریم که از طریق گرادیان گیری از یک پتانسیل تابع مکان نسبی آنها به دست می آید این امر تضمین کننده قانون سوم نیوتن در شکل ضعیف آن خواهد بود. در محاسبه فوق به عنوان مثال برای مولفه x هر یک از نیروها از رابطه های مشتق زنجیره ای زیر استفاده کرده ایم

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial(x_1-x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial(x_1-x_2)} = \frac{\partial}{\partial(x_1-x_2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial(x_1-x_2)}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial(x_1-x_2)} = -\frac{\partial}{\partial(x_1-x_2)}$$

که وقتی در کنار روابط متناظر برای دو مولفه دیگر قرار گیرد به صورت رابطه برداری زیر بیان می شود

$$\nabla_{r_1} = -\nabla_{r_2} = \nabla_{(r_1-r_2)} \qquad (۵-۴۱)$$

البته توجه کنید که رابطه (۵-۴۱) برای وقتی درست است که مشتق گیری از تابعی از (r_1-r_2) صورت گیرد.

حال اگر به جنبهٔ مرکزی بودن نیروی برهم‌کنش توجه کنیم، کافی است انرژی پتانسیل برهم‌کنش را فقط تابعی از $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ یعنی فاصله دو ذره درنظر بگیریم. در این صورت از رابطهٔ (۵-۳۹) داریم

$$\vec{F}_{21} = -\vec{\nabla}_r V(\vec{r}) = -\frac{dV}{dr}\hat{e}_r = F(r)\hat{e}_r \quad (۵-۴۲)$$

نیروی وارد به ذرهٔ ۲ نیز با توجه به رابطه (۵-۴۰) منفی عبارت فوق خواهد بود. نتیجهٔ نهایی این قرار را می‌توان به صورت زیر جمع‌بندی کرد. اصل همگنی فضا ایجاب می‌کند که انرژی پتانسیل برهم‌کنش دو جسم تابعی از $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ باشد و اصل همسانگردی نیز ایجاب می‌کند که این کمیت فقط تابعی از اندازه $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ باشد. گزارهٔ اول منجر به قانون سوم نیوتن در بیان ضعیف و گزارهٔ دوم منجر به قانون سوم نیوتن در بیان قوی آن می‌شود.

حال یک بار دیگر به رابطه پایستگی انرژی (۵-۳۸) برگردیم. این رابطه گزاره‌ای ریاضی درباره حرکت نسبی دو ذره به ما می‌دهد. اگر بردار سرعت نسبی را $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ بگیریم (رابطه ۱-۱۲۷)، از معادله (۵-۳۸) داریم

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E \qquad (۵-۴۳)$$

روابط پایستگی (۵-۳۳) و (۵-۴۳) دو رابطهٔ اساسی برای حل فصل مسئله نیروی مرکزی است

۵-۳- حل کلی مسئله نیروی مرکزی

در یک مسئله نیروی مرکزی مختصات قطبی بردار (مکان) نسبی دو ذره، یعنی $r(t)$ و $\theta(t)$ متغیرهای دینامیکی هستند که هدف به دست آوردن آنهاست. معادله حرکت نیوتن برای این دستگاه در رابطه برداری (۵-۲۲) بیان شده است. اگر مؤلفه‌های این رابطه را در پایه قطبی $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ بیان کنیم، با توجه به روابط (۱-۱۳۰) برای مؤلفه‌های شتاب در مختصات قطبی داریم

$$\begin{cases} \mu(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F(r) \\ \mu(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=0 \end{cases} \qquad (۵-۴۴)$$

این معادلات دو معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ هستند که حل آنها به چهار ثابت اولیه احتیاج دارد. از سوی دیگر معادلات (۵-۳۳) و (۵-۴۳) دو معادله دیفرانسیل مرتبه ۱ برحسب توابع $r(t)$ و $\theta(t)$ و مشتقات زمانی مرتبه اول آنها هستند. یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که این دو دسته رابطه با یکدیگر معادلند. با مشتق‌گیری از روابط (۵-۳۳) و (۵-۴۳) داریم

$$\begin{cases} 2\mu r\dot{r}\dot{\theta}+\mu r^2\ddot{\theta}=0 \\ \mu\dot{r}\ddot{r}+\mu r\dot{r}\dot{\theta}^2+\mu r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+\dot{r}\frac{dV}{dr}=0 \end{cases}$$

اگر رابطه اول را به r ساده کنیم معادله دوم (۵-۴۴) را می‌دهد. همچنین اگر جمله $\ddot{\theta}\mu r^2$ در رابطه دوم را از رابطه اول جایگذاری کنیم و نتیجه را به $\dot{r}$ ساده کنیم، معادله اول (۵-۴۴) حاصل می‌شود. به این ترتیب

روشن است که روابط پایستگی (۵-۳۳) و (۵-۴۳) از انتگرال گیری از معادلات حرکت نیوتن حاصل شده‌اند. در واقع ثابتهای فیزیکی l و E ترکیبی از ثابت‌های اولیه دستگاه هستند که از آنها به عنوان انتگرال اول معادلات حرکت یاد می‌شود.

نخست به حل کلی معادلات حرکت با استفاده از روابط پایستگی می‌پردازیم

از معادله (۵-۳۳) می‌توان $\dot{\theta}$ را برحسب l به شکل زیر به دست آورد،

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}. \qquad (۵-۴۵)$$

حال می‌توان این نتیجه را در معادله (۵-۴۳) جایگزین کرد. نتیجه به صورت زیر است

$$\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = E. \qquad (۵-۴۶)$$

مجموع جمله دوم و سوم به انرژی پتانسیل مؤثر $V_e(r)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V_e(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r), \qquad (۵-۴۷)$$

جمله $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ در واقع بخشی از انرژی جنبشی دستگاه است، اما در اینجا به آن پتانسیل گریز از مرکز می‌گوییم. با استفاده از تعریف (۵-۴۷) رابطه پایستگی انرژی (۵-۴۶) چنین خواهد شد

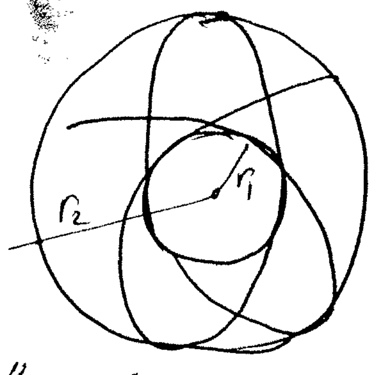
$$\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + V_e(r) = E \qquad (۵-۴۸)$$

این رابطه درست مشابه به رابطه پایستگی انرژی (۳-۹) برای ذره‌ای به جرم μ است که در یک حرکت یک بعدی تحت انرژی پتانسیل $V_e(r)$ قرار گرفته است.

جمله $\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2$ بخشی از انرژی جنبشی حرکت نسبی است که در آن $\dot{r}$

سرعت شعاعی نسبی است. این جمله مشابه انرژی جنبشی ذره در حرکت یک بعدی یعنی جمله $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ است. در بخش (۳-۶) به تفصیل دیدیم که اطلاعات بسیار مفیدی از حرکت را می‌توان از روی نمودار $V(x)$ به دست آورد. از جمله آنکه حرکت به ناحیه‌ای محدود است که در آن $E \geq V(x)$. این ناحیه محصور بین نقاط بازگشت است که از تقاطع ~~[illegible]~~ خط ($E=$ ثابت) از نمودار با منحنی $V(x)$ به دست می‌آید. در اینجا نیز حرکت در صفحه به بازه‌های شعاعی محدود است که از تقاطع خط ($E=$ ثابت) با منحنی $U(r)$ به دست می‌آید. به شکل (۵-۸) توجه کنید. در این نقاط که به آنها نقاط بازگشت شعاعی می‌گوییم $\dot{r}$ صفر است.

اگر برفرض r_1 و r_2 شعاعهای بازگشت دستگاه باشند و $r_1 < r_2$ شکل کلی مسیر حرکت چیزی شبیه شکل (۵-۹) است، مسیر حرکت بر دایره‌های به شعاع r_1 و r_2 مماس است و ذره بین این دو دایره مرتب و با اصطلاح مقید در حال رفت و آمد است.



شکل ۵-۹- حرکت دستگاهی که بین نقاط بازگشت شعاعی r_1 و r_2 مقید است

با توجه به رابطه (۵-۴۵) کمترین سرعت زاویه‌ای دستگاه هنگام عبور از کنار دایره به شعاع r_2 و بیشترین سرعت زاویه‌ای هنگام عبور از دایره به شعاع r_1 است. در حالت کلی دوره نوسان شعاعی و دوره چرخش ذره، یعنی زمانی که θ به اندازه 2π تغییر می‌کند، ممکن است باهم متفاوت باشند. اما اگر نسبت این دو دوره عددی گویا باشد، مسیر بسته است. یعنی زمانی را می‌توان یافت که طی آن