تمرین های سری یازدهم

۱- ثابت کنید ضرایب بسط یک بردار دلخواه $|v>$ برحسب بردار های پایه $|u_1> \ldots |u_n>$ یکتاست.

۲- الف) ثابت کنید برای یک فضای برداری محدود بعد ، تعداد بردار های پایه برای تمام پایه ها یکسان است.

ب) ثابت کنیدیک دسته بردار متعامد بهنجار مستقل خطی هستند.

۳- در یک فضای دو بعدی مختلط یک پایه $e_1=(1,0)$,$e_2=(0,1)$ است . پایه ی دیگر $u_1=1/\sqrt{2}\,(1,1)$,$u_2=1/\sqrt{2}\,(1,-1)$ است.

الف)ماتریس تبدیل از پایه e_i ها به پایه u_i ها و معکوس آن را بدست آورید.

ب)عملگر های زیر را که در پایه e_1 ها نوشته شده در پایه u_i ها بدست آورید.

$$R_1=1/2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2=1/2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_3=1/2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

۴- با استفاده از نامساوی شوارتز ثابت کنید مجموعه توابع مجذور انتگرال پذیر یک فضای برداری است.

۵- نشان دهید می توان با شروع از پایه دلخواه $|u_1> \dots |u_n>$ یک پایه متعامد بهنجار برپا کرد. برای این کار $|e_1>$ را از بهنجار کردن $|u_1>$ به دست می آوریم. سپس از $|u_2>$ تصویر آن در امتداد $|e_1>$ را کسر می کنیم و نتیجه را بهنجار می کنیم و به همین ترتیب ادامه می دهیم. این روش را تا مرتبه سوم ادامه دهید.

۶- زاویه دوبه دوی بردار های زیر را با یکدیگر بدست آورید.

(0,1,0)

(i,1,i)

(1,i,1)

۷- الف) ثابت کنید عملگر های $\pi_+=1/2(1+\pi)$,$\pi_-=1/2(1-\pi)$ عملگر تصویر هستند که π عملگر پاریته است.(برای این کار باید ثابت کنید $\pi_-^2=\pi_-$, $\pi_+^2=\pi_+$, $\pi_-\pi_+=\pi_+\pi_-=0$)

ب)اثر π_+ و π_- روی تابع موج دلخواه $\psi(x)$ چه می دهد؟

۹- مزدوج هرمیتی عملگرهای d^2/dx^2 , $x\, d/dx$ را از تعریف مستقیم بدست آورید.

$$\int \Phi^* A \psi\, dx = \int (A^{+}\varphi)^* \psi\, dx$$

۱۰- فرض کنید $|u_i>$ ها پایه قدیم و $|e_i>$ها پایه جدید باشند بطوری که

$$|uj> = \sum_i (sij)^{-1} |ei>$$

$$|ei> = \sum_j sji \ |uj>$$

وهر دو پایه معامد بهنجار باشند

الف) ثابت کنید $<u_j|e_i>=s_{ij}$ و $<e_i|u_j>=s_{ij}^{-1}$

ب) ثابت کنید ماتریس s یکانی است.(ماتریس یکانی $ss^+=s^+s=1,\ s_{ij}^{+}=s_{ji}^{*}$)

۱۱-بنا به تعریف اگر A یک عملگر باشد

$$e^A=\sum \frac{1}{n!} A^n$$

ثابت کنید اگر A هرمیتی باشد e^A نیز هرمیتی است.ولی $e^{iA}=U$ یکانی است یعنی
$UU^+=U^+U=1$

-۱۲

ثابت کنید روابط زیر برای عملگرهایی که جابجا نمی‌شوند برقرارند:
(الف) اگر A و B هرمیتی باشند آنگاه $i[A,B]$ نیز هرمیتی است.
(ب) $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$.
(ج) $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$ (اتّحاد ژاکوبی).

-۱۳

با بسط نماها ثابت کنید:

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \cdots$$

-۱۴

با استفاده از رابطهٔ جابجایی بین عملگرهای x و p معادلات بستگی زمانی $\langle x\rangle$ و $\langle p\rangle$ را برای هامیلتونی

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2+\omega_2 x+C)$$

به‌دست آورید.

-۱۵

معادلات حرکتی را که در مسئلهٔ 14 به‌دست آوردید حلّ کنید. جوابهای خود را برحسب $\langle x\rangle_0$ و $\langle p\rangle_0$ بنویسید که مقادیر چشمداشتی در لحظهٔ $t=0$ هستند.

-۱۶

الکترونی که در میدان الکتریکی نوسانی حرکت می‌کند با عملگر هامیلتونی

$$H = \frac{p^{۲}}{۲m} - (eE_{\circ} \cos\omega t)\, x$$

توصیف شده‌است. عبارتهایی برای بستگی زمانی $\langle x \rangle$، $\langle p \rangle$ و $\langle H \rangle$ حساب کنید.

-۱۷

معادلات حرکتی را که در مسئلهٔ 16 به‌دست آوردید حل کنید. جوابهای خود را برحسب $\langle x \rangle_{\circ}$ و $\langle p \rangle_{\circ}$ بنویسید که مقادیر چشمداشتی در لحظهٔ $t = \circ$ هستند.

۱۸- الف) ثابت کنید اگر A هرمیتی باشد $<A^2>$ حقیقی و مثبت است.

ب) ثابت کنید اگر U ,V یکانی باشند UV هم یکانی است.

ج)ثابت کنید اگر U یکانی باشد و $|\phi\rangle = U|\psi\rangle$ آنگاه $\langle\psi|\psi\rangle = \langle\phi|\phi\rangle$.