حل معادله (۴-۲) به صورت $A_1x_1(t)+A_2x_2(t)$ است. بنابراین برای یافتن کلی‌ترین حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ خطی کافی است دو حل مستقل از آن را بیابیم و آنها را با ضرایب دلخواه ترکیب کنیم. در مورد خاص معادله (۴-۱) تابع های $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ دو حل مستقل هستند. بنابراین کلی‌ترین حل معادله (۴-۱) می‌تواند به صورت

$$x(t)=A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t \qquad (۴-۴)$$

در نظر گرفته شود. حل کلی (۴-۴) را به صورت دیگری نیز می‌توان نوشت:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (۴-۵)$$

اگر در این رابطه $\cos(\omega t+\varphi)$ را بسط دهیم و با رابطه (۴-۴) مقایسه کنیم خواهیم داشت $A\cos\varphi=A_2$ و $-A\sin\varphi=A_1$. در هر دو شکل (۴-۴) و (۴-۵) در حل معادله حرکت (۴-۱) دو ثابت اختیاری وجود دارد. چنانکه دیدیم می‌توان این دوگونه حل را به راحتی به یکدیگر تبدیل کرد. ثابت های A و φ یا A_1 و A_2 را می‌توان با داشتن $x(0)$ و $v(0)$ یعنی مکان و سرعت اولیه به دست آورد. با مشتق‌گیری از روابط (۴-۴) و (۴-۵) داریم

$$v(t)=A_1\omega\cos\omega t-A_2\omega\sin\omega t=-A\omega\sin(\omega t+\varphi) \qquad (۴-۶)$$

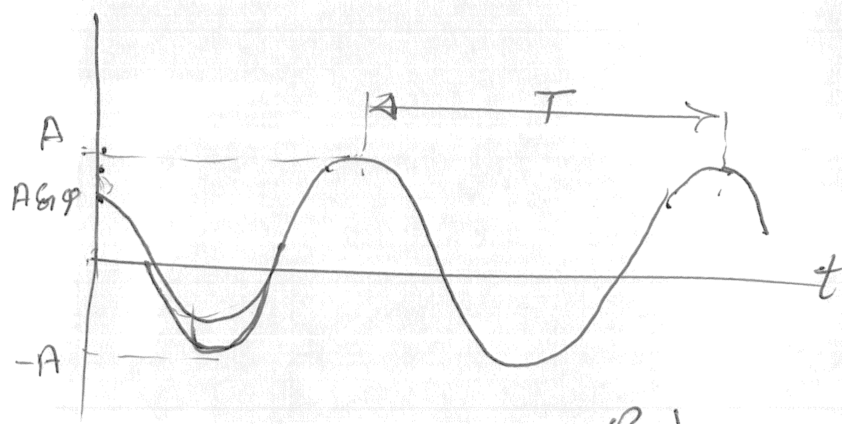
در لحظه $t=0$ داریم

$$x(0)=A_2=A\cos\varphi$$
$$v(0)=A_1\omega=-A\omega\sin\varphi \qquad (۴-۷)$$

که با حل آنها ثابت های مورد نظر به دست می‌آید.

نمودار تابع $x(t)$ برحسب زمان از رابطه (۴-۵) مشابه شکل (۴-۲) است.

چنانکه دیده می‌شود جابه‌جایی نوسانگر در بازه $-A<x<A$ است



(شکل ۴-۲)

به همین کمیت به A که از جنس طول است دامنه‌ی نوسان گفته می‌شود. از شکل (۴-۲) و نیز از رابطه (۴-۵) می‌بینیم که پس از طی مدت $T=\frac{2\pi}{\omega}$ تابع هر مقداری داشته باشد، تکرار می‌شود، یعنی $x(t)=x(t+T)$.

~~می‌توان دید که ... $\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$ ... $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ ...~~

به کمیت T دوره‌ی نوسان گفته می‌شود. در رابطه (۴-۵) به آرگمان تابع کسینوس، یعنی به کمیت $(\omega t+\varphi)$ فاز نوسان و به φ فاز اولیه گفته می‌شود. این کمیت‌ها بدون بعد هستند، اما چون در آرگمان توابع مثلثاتی جای گرفته‌اند آنها را با واحدهای زاویه مثل رادیان می‌سنجیم. مثلاً می‌گوییم بعد از زمان T فاز نوسان به اندازه‌ی 2π اضافه می‌شود و بعد از زمان $T/2$ فاز نوسان به اندازه‌ی π افزوده می‌شود. توجه داشته باشید که در ضمن حرکت نوسانگر شکل (۴-۱) هیچ زاویه‌ای در کار نیست و حرکت روی خط راست انجام می‌شود.

انرژی نوسانگر هماهنگ –

انرژی دستگاه جرم و فنر شکل (۴-۱) شامل انرژی جنبشی جرم m و انرژی پتانسیل فنر k است:

$$E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2 \qquad (۴-۸)$$

با قرار دادن $x(t)$ از رابطه (۴-۵) و $v(t)$ از رابطه (۴-۶) در رابطه (۴-۸) داریم

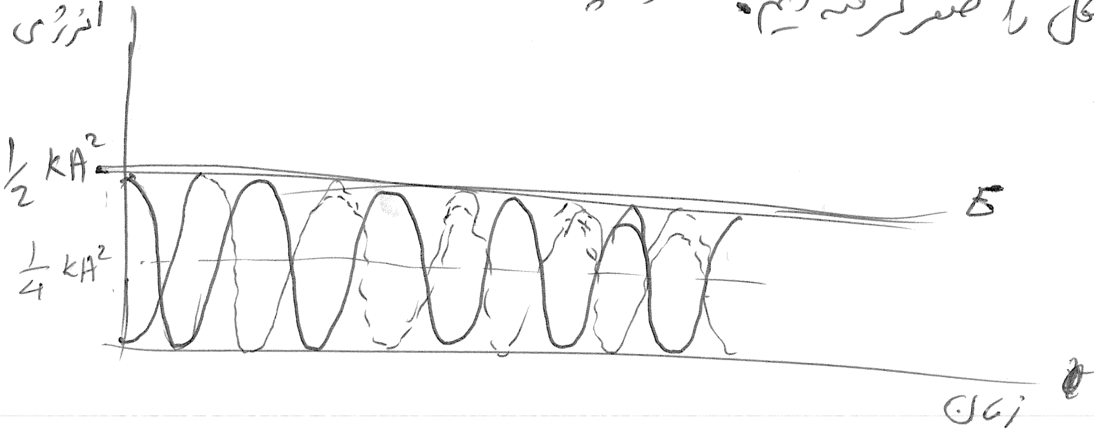
$$E = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t+\varphi) + \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \sin^2(\omega t+\varphi)$$

چون $m\omega^2 = k$ می توان از ضریب $\frac{1}{2}kA^2$ از دو جمله فوق فاکتور گیری کرد
چون جمع سینوس به توان دو و کسینوس به توان دو برای هر فاز دلخواه $(\omega t+\varphi)$ یک است داریم

$$\cancel{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

$$E = \frac{1}{2} kA^2 \qquad (۴-۹)$$

پایستگی انرژی در این دستگاه به وضوح از حذف زمان در عبارت فوق دیده می شود. در نمودار شکل (۴-۳) کمیت های $K = \frac{1}{2} mv^2$ و $V = \frac{1}{2} kx^2$ و مجموع آنها بر حسب زمان رسم شده اند. برای سهولت فاز اولیه را در این شکل را صفر گرفته ایم. خطوط پر نمودار $K(t)$ و خطوط خط چین $V(t)$ را



(شکل ۴-۳)

نشان می دهند. با کمی دقت می توان دید که دوره تکرار هر کدام از دو کمیت فوق $T/2$ است. در واقع با یک محاسبه ساده داریم

$$K(t) = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{4} kA^2 (1-\cos(2\omega t))$$

$$V(t) = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{4} kA^2 (1+\cos 2\omega t) \qquad (۴-۱۰)$$

یعنی توابع فوق توابعی نوسانی با بسامد زاویه ای 2ω حول مقدار میانگین $\frac{1}{4}kA^2$ هستند. متناسب بودن انرژی کل یک نوسانگر با مجذور دامنه نوسان

یک ویژگی مهم نوسانگرهای کلاسیک است.

اهمیت نوسانگرهای هماهنگ

مسئله جرم و فنر شکل (۴-۱) به تنهایی اهمیت اساسی ندارد، اما بسیاری از دستگاههای فیزیکی هستند که معادله حرکت آنها مشابه معادله حرکت دستگاه جرم و فنر است. در حقیقت هر دستگاهی با مختصه تعمیم یافته $q(t)$ که معادله حرکت آن به شکل

$$a\ddot{q}+bq=0 \qquad (۴-۱۱)$$

باشد دارای حلی به شکل $q(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ است که در آن $\omega=\sqrt{\frac{b}{a}}$. در معادله (۴-۱۱) کمیت b نقشی مشابه ثابت فنر k و کمیت a نقشی مشابه جرم m در رابطه (۴-۱) دارد. در این مسئله کمیت

$$E=\frac{1}{2}a\dot{q}^2+\frac{1}{2}bq^2 \qquad (۴-۱۲)$$

با محاسباتی مشابه آنچه به رابطه (۴-۹) منجر شد، ثابت حرکت است.

اگر از طرفین رابطه (۴-۱۲) نسبت به زمان مشتق گیری کنیم حاصل می گردد

$$a\dot{q}\ddot{q}+bq\dot{q}=0 \Rightarrow a\ddot{q}+bq=0$$

در فصل گذشته (بخش ۳...) دیدیم که برای هر پتانسیل دلخواه $V(x)$ در نزدیکی نقطه تعادل پایدار x_0، رفتار پتانسیل تقریباً با پتانسیل سهمی $V(x)\simeq V(x_0)+\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$ قابل تقریب است. در این صورت از رابطه پایستگی انرژی داریم

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x_0)+\frac{1}{2}k(x-x_0)^2=E \qquad (۴-۱۳)$$

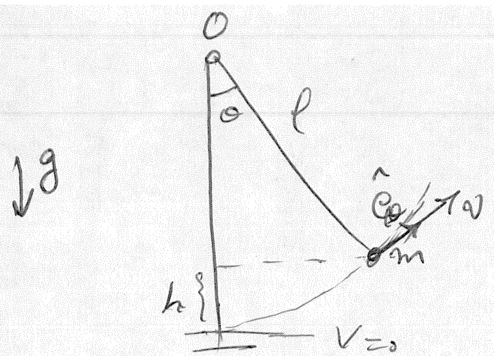
با مشتق گیری نسبت به زمان از طرفین رابطه (۴-۱۳) حاصل می شود

$$m\dot{x}\ddot{x} + k(x-x_0)\dot{x} = 0$$

که با حذف $\dot{x}$ و نامگذاری $x-x_0=x'$ به معادله نوسانگر هماهنگ زیر تبدیل می‌شود

$$m\ddot{x}' + kx' = 0$$

بنابراین اهمیت مسئله نوسانگر هماهنگ در همین نکته است که این حرکت کلی‌ترین شکل نوسان هر دستگاه فیزیکی دلخواه حول نقطه تعادل پایدار آن را نشان می‌دهد.



(شکل ٤-٤)

مثال ۱- آونگ ساده-

آونگ ساده از جرم نقطه‌ای m در انتهای نخی به طول ثابت l تشکیل شده که انتهای دیگر نخ به نقطه ثابت O آویخته شده و دستگاه در یک صفحه قائم حرکت می‌کند. زاویه θ مطابق شکل (٤-٤) زاویه انحراف آونگ از امتداد قائم است که به سمت راست مثبت و به سمت چپ منفی اندازه‌گیری می‌شود. جرم m روی دایره‌ای به شعاع l حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که در شکل (٤-٤) نشان داده شده ارتفاع گلوله آونگ از پایین‌ترین نقطه حرکت چنین است:

$$h = l - l\cos\theta \qquad (١٤-٤)$$

بنابراین انرژی پتانسیل دستگاه برحسب زاویه θ به صورت زیر است

$$V(\theta) = mgh = mgl(1-\cos\theta) \qquad (١٥-٤)$$

سرعت لحظه‌ای گلوله نیز مطابق شکل به صورت

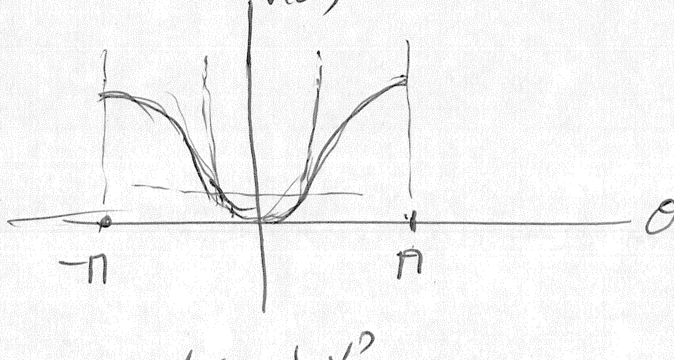
$$\vec{v} = l\dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad (١٦-٤)$$

است. دقت کنید که زاویه θ در این مسئله با قرارداد معمول مختصات قطبی

که در آن زاویه انحراف از امتداد افقی اندازه گیری می شود فرق دارد، اما بردار سرعت به همان شکل است، که چون $r=l$ ثابت است، سرعت فقط مؤلفه $\hat{\theta}$ دارد. حال چون گلوله آونگ فقط تحت تاثیر نیروی پایستار وزن و نیروی قید کشش نخ قرار دارد، رابطه پایستگی انرژی برای آن به صورت زیر است

$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl(1-\cos\theta) \qquad (۱۷-٤)$$

لازم به یادآوری است که کار نیروی قید کشش نخ همواره صفر است و اثری از کار آن در قضیه کار- انرژی باقی نمی ماند. (به بحث انجام شده در بخش (۳-...) مراجعه کنید). نمودار انرژی پتانسیل (٤-۱۵) در شکل (٤-۵) رسم شده است.



شکل (٤-۵)

این نمودار در مقیاس زوایای θ بزرگ شکل سهمی ندارد. اما اگر انرژی بسیار نزدیک به انرژی نقطه کمینه یعنی $V(0)=0$ باشد، می توان تابع $V(\theta)$ را به شکل تقریبی سهمی (اصطلاحاً نقطه صفر) در نظر گرفت.

در حقیقت از بسط تیلور تابع $\cos\theta$ داریم

$$V(\theta)=mgl\left[1-\left(1-\frac{\theta^2}{2}+\cdots\right)\right]\approx\frac{1}{2}mgl\theta^2 \qquad (۱۸-٤)$$

بنابراین برای θهای کوچک رابطه پایستگی انرژی (٤-۱۷) به شکل ساده‌تر زیر در می‌آید

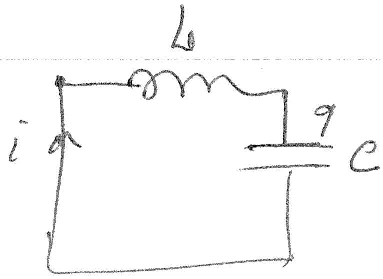
$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2=\text{ثابت} \qquad (۱۹-٤)$$

از مقایسه رابطه (۴-۱۹) با شکل کلی رابطه پاییستگی (۴-۱۲) داریم $a = ml^2$ و $b = mgl$ در نتیجه $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{g/l}$. بنابراین آونگ با بسامد زاویه ای $\sqrt{g/l}$ و دورهٔ نوسان $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ حول نقطه تعادل نوسان هماهنگ انجام می دهد.

حل معادله نوسان آونگ با فرض آنکه در لحظه $t=0$ آونگ به اندازهٔ زاویه θ_0 منحرف شده و از حال سکون رها شود به صورت

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\omega t \qquad (۴-۲۰)$$

خواهد بود. اگر انرژی نوسانگر هماهنگ زیادتر شود دامنه نوسانات بزرگتر می شود. برای زوایای انحراف بزرگتر از حدود ۵° بسط انجام شده در رابطه (۴-۱۸) کفایت نمی کند و باید جملات مرتبه های بالاتر در بسط $\sin\theta$ را نیز در نظر گرفت. در این صورت معادله حرکت دیگر شکل سادهٔ نوسانگرهای هماهنگ را ندارد و حتی خاصیت خطی بودن آن نیز به هم می خورد.



شکل (۴-۶)

مثال ۲- مدار خودالقا-خازن.

در شکل (۴-۶) مدار ساده ای را می بینید که از خودالقای L و خازن C تشکیل شده است. فرض کنید در لحظه نامعین t بار روی (جوشن بالایی) خازن $q(t)$ و شدت جریان در مدار $i(t)$ باشد. علامت q و i را چنان گرفته ایم که رابطه

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \qquad (۴-۲۱)$$

برقرار باشد. با استفاده از قانون حلقه در مدار تک حلقه ای فوق

داریم

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \qquad (۴-۲۲)$$

که با استفاده از رابطه (۴-۲۱) داریم

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \qquad (۴-۲۳)$$

این معادله حرکت نیز مشابه شکل کلی (۴-۱۱) است که در آن $a=L$ و $b=\frac{1}{C}$.

با تعریف

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (۴-۲۴)$$

معادله حرکت (۴-۲۳) به شکل معمول نوسانگرهای هماهنگ با بسامد زاویه‌ای ω تبدیل می‌شود. با کمی وارسی بر روی کمیت‌های الکتریکی و مغناطیسی می‌توان دید که کمیت LC ابعاد زمان به توان دو دارد و در نتیجه بعد ω از رابطه (۴-۲۴) عکس زمان است.

اگر فرض کنیم در لحظه $t=0$ خازن به اندازه بار q_0 پر شده و سپس به طور ناگهانی تخلیه شود، حل معادله حرکت نوسانی (۴-۲۳) به صورت

$$q(t) = q_0\cos\omega t \qquad (۴-۲۵)$$

در می‌آید. این رابطه نشان می‌دهد که در لحظه وصل شدن مدار بار خازن و انرژی ذخیره شده در آن، یعنی $q_0^2/2C$ بیشینه است. سپس خازن به طور ناگهانی تخلیه می‌گردد در لحظه $t=T/4$ بار خازن صفر می‌شود.

از رابطه شدت جریان (۴-۲۱) داریم

$$i = -q_0\omega\sin\omega t \qquad (۴-۲۶)$$

در بازه‌ی زمانی $0<t<T/2$ جهت جریان برخلاف جهت نشان داده شده در شکل (۴-۶) است. بیشینه‌ی شدت جریان $q_0\omega = q_0/\sqrt{LC}$ است که در لحظه $t=T/4$ (و نیز در $t=3T/4$) اتفاق می‌افتد. در بازه‌ی زمانی $T/2<t<T$ شدت جریان (۴-۲۵) مثبت و مطابق شکل (۴-۶) است.

انرژی دستگاه مجموع انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن، یعنی $\mathcal{E}_E = q^2/2C$ و انرژی مغناطیسی ذخیره شده در خود القا، یعنی $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$ است که ثابت است به طوری که داریم

$$E=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C} \qquad (۴-۲۷)$$

جالب توجه است که کمیت پایسته در این حالت مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نیست و اساساً ماهیتی متفاوت با انرژی یک دستگاه مکانیکی دارد. از مقایسه‌ی رابطه (۴-۲۷) با شکل کلی (۴-۱۲) نیز مجدداً می‌توان مشابهت‌های $a=L$ و $b=\frac{1}{C}$ را دریافت.

نکته قابل توجه آن است که شکل کلی انرژی (۴-۱۲) و معادله حرکت (۴-۱۱) ماهیتی عام دارد و محدود به گستره‌ی دستگاه‌های مکانیکی نیز نیست. به همین جهت در فرهنگ رایج فیزیکدان‌ها وقتی از نوسانگرهای کوک صحبت می‌شود صرفاً به دستگاه مکانیکی خاصی مثل جرم و فنر محدود نمی‌شود و به هر سیستمی که معادله حرکت آن مشابه (۴-۱۱) است اطلاق می‌شود. برای هر نوسانگر(ها) کوک، بسامد نوسان $\omega=\sqrt{b/a}$، بسامد طبیعی گفته می‌شود. برای دستگاه جرم و فنر $\sqrt{K/m}$، برای آونگ $\sqrt{g/l}$ و برای

مثلا مدار LC با ثابت $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ با بسامد طبیعی به شمار می‌رود. بسامد طبیعی هر دستگاه به پارامترهایی از دستگاه و محیط بستگی دارد. بسامد طبیعی یک نوسانگر آن بسامدی است که وقتی دستگاه از نقطه تعادل پایدار منحرف و رها شود با آن بسامد نوسان می‌کند. در مقابل این مفهوم، بسامد نوسان واداشته مربوط به حرکتی است که در آن دستگاه را از بیرون در معرض یک نیروی نوسان کننده با بسامد واداشته ω قرار می‌دهیم.

استفاده از توابع مختلط در بررسی حرکت نوسانی —

برای حل معادلات حرکت مربوط به انواع نوسانگر استفاده از روش توابع مختلط گاه محاسبات را بسیار ساده و روشن می‌سازد. پیش از آن که بخواهیم از این روش در بررسی حرکت نوسانگرها هنگ استفاده کنیم لازم است مقدمه‌ای ریاضی درمورد توابع مختلط بیان کنیم.

فرض کنید تابع تحلیلی $f(x)$ (یعنی تابعی که بینهایت بار مشتق‌پذیر است و تمام مشتقات آن پیوسته‌اند) حول نقطه $x=0$ دارای بسط تیلور زیر باشد

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{(۳۸-۴)}$$

(از متغیر حقیقی x)

به طور مشابه می‌توان تابع $f(z)$ از متغیر مختلط z را به صورت زیر (مثلا) تعریف کرد

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{(۳۹-۴)}$$

به عنوان مثال

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 \qquad \text{(۴۰-۴)}$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots \qquad \text{(۴۱-۴)}$$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots \qquad (۴-۴۲)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (۴-۴۳)$$

با مشتق گیری از رابطه (۴-۴۰) نسبت به z داریم $\frac{d}{dz}e^z = e^z$ و با محاسبه مستقیم می توان نشان داد $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. به بیان دیگر عموم خواصی که تابع حقیقی e^x دارد به طور مشابهی برای تابع مختلط e^z برقرار است. بنابراین $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$. در این رابطه e^a یک عدد حقیقی معلوم است. حال ببینیم مفهوم $e^{i\theta}$ چیست؟ با استفاده از رابطه (۴-۴۰) داریم

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2!}i^2\theta^2 + \frac{1}{3!}i^3\theta^3 + \frac{1}{4!}i^4\theta^4 + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta \qquad (۴-۴۴)$$

در این محاسبه از رابطه $i^2 = -1$ و بسط توابع $\sin\theta$ و $\cos\theta$ استفاده کرده ایم. به طور مشابه با تبدیل $\theta \to -\theta$ داریم

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad (۴-۴۵)$$

معکوس روابط (۴-۴۴) و (۴-۴۵) به صورت زیر است

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \qquad (۴-۴۶)$$

چنانکه می دانیم بین مختصات دکارتی (x,y) و مختصات قطبی (ρ,φ) یک نقطه در صفحه $x-y$ روابط $x=\rho\cos\varphi$ و $y=\rho\sin\varphi$ برقرار است. حال در صفحه مختلط Z برای عدد مختلط $Z=x+iy$ می توان نمایش قطبی $Z=\rho e^{i\varphi}$ را نیز در نظر گرفت. از روابط (۴-۴۴) داریم

$$Z=\rho e^{i\varphi}=(\rho\cos\varphi)+i(\rho\sin\varphi)=x+iy \quad (۴-۴۷)$$

به $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ گاهی نُرم یا بزرگی عدد مختلط Z گفته می شود و آنرا با $|Z|$ نیز نمایش می دهند. کمیت $\varphi=tg^{-1}\frac{y}{x}$ نیز فاز عدد مختلط Z است.

متناظر با هر عدد مختلط $Z=x+iy=\rho e^{i\varphi}$ می توان مزدوج مختلط آن را به صورت $Z^*=x-iy=\rho e^{-i\varphi}$ تعریف کرد. اگر $f(z)$ تابع دلخواهی از متغیر مختلط Z باشد، می توان نشان داد که مزدوج مختلط آن به صورت $[f(z)]^*=f(z^*)$ است. به عبارت دیگر کافی است در یک عبارت پیچیده از اعداد مختلط هرجا i هست آن را به $(-i)$ تبدیل کنیم تا عبارت مربوط مزدوج مختلط شود. با استفاده از تعریف مزدوج مختلط می توان نوشت

$$\rho=|Z|=\sqrt{ZZ^*} \qquad (۴-۴۸)$$

$$tg\,\varphi=\frac{-i(z-z^*)}{z+z^*}$$

$$x=Re\,Z=\frac{1}{2}(z+z^*) \quad \text{و} \quad y=Im\,Z=\frac{1}{2i}(z-z^*)$$

برخی از اتحادهای مثلثاتی را می توان از روابط سینوس و کسینوس برحسب توابع نمایی با توان موهومی به دست آورد. به عنوان مثال از رابطه

$$e^{i\theta_1}\,e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

و استفاده از رابطه (۴-۴۴) برای تک تک جملات داریم

$$\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$=(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)$$

از برابر قرار دادن بخش های حقیقی و موهومی طرفین، اتحادهای مثلثاتی مربوط به $\cos(\theta_1+\theta_2)$ و $\sin(\theta_1+\theta_2)$ به دست می آیند.

حال به توابع نمایی $e^{i\omega t}$ و $e^{-i\omega t}$ توجه کنید. برای هر دو تابع داریم

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\pm i\omega t}\right)=\pm i\omega\, e^{\pm i\omega t} \qquad (۳۹-۴)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{\pm i\omega t}\right)=-\omega^2 e^{\pm i\omega t}$$

یعنی توابع $e^{\pm i\omega t}$ درست مشابه $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ هر دو می توانند جوابهای معادله $\ddot{z}+\omega^2 z=0$ یعنی معادله حرکت نوسانگرهای هماهنگ باشند. فرض کنیم $z(t)$ حلی از معادله حرکت نوسانگرهای هماهنگ باشد. اگر قرار دهیم $z=x+iy$ داریم $\dot{z}=\dot{x}+i\dot{y}$ و $\ddot{z}=\ddot{x}+i\ddot{y}$، ~~[illegible]~~ بنابراین معادله نوسانگرهای هماهنگ برای z نتیجه می دهد

$$(\ddot{x}+\omega^2 x)+i(\ddot{y}+\omega^2 y)=0 \qquad (۴۰-۴)$$

برای آنکه یک عدد مختلط صفر باشد لازم است قسمت حقیقی و موهومی آن جداگانه صفر باشند. بنابراین از معادله حرکت نوسانگرهای هماهنگ برای متغیر z داریم

$$\ddot{z}+\omega^2 z=0 \Rightarrow \begin{cases}\ddot{x}+\omega^2 x=0\\ \ddot{y}+\omega^2 y=0\end{cases} \qquad (۴۱-۴)$$

~~[illegible]~~ از رابطه (۴۱-۴) می توان دریافت که برای حل معادله حرکت $\ddot{x}+\omega^2 x=0$

می توان معادله $\ddot{z}+\omega^2 z=0$ را در چارچوب اعداد مختلط حل کرد و نهایتاً فقط قسمت حقیقی آن را به عنوان حلی از معادله $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ به حساب آورد.

از روابط (۴-۳۹) می توان دید که $Ae^{i\omega t}$ و $Be^{-i\omega t}$ هر کدام حلی از معادله نوسانگرهای هنگ برای متغیر z هستند. اما A و B هر کدام یک عدد مختلط اند که معادل با دو عدد حقیقی هستند. بنابراین در کلی ترین حل معادله نوسانگرهای هنگ برای z چهار ثابت دلخواه وجود دارد. این جای تعجب نیست، چراکه روابط (۴-۴۱) نشان می دهد که یک معادله نوسانگر هماهنگ برای متغیر مختلط z معادل با دو معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ است، یکی برای $x(t)$ و دیگری برای $y(t)$ است، که روی هم شامل ۴ ثابت اولیه اند.

حال به حل $z=Ae^{i\omega t}$ توجه کنید که عدد مختلط A را در آن به صورت قطبی $A=A_0e^{i\varphi}$ می نویسیم. داریم

$$z=A_0e^{i(\omega t+\varphi)} = A_0\cos(\omega t+\varphi)+iA_0\sin(\omega t+\varphi) \qquad (۴-۴۲)$$

اگر فقط به قسمت حقیقی (۴-۴۲) علاقه مند باشیم داریم

$$x=\mathrm{Re}\,z=A_0\cos(\omega t+\varphi) \qquad (۴-۴۳)$$

این حل از نوع کلی حل (۴-۸) است که شامل دو ثابت اختیاری A_0 و φ است. به عبارت دیگر حل مختلط $z=Ae^{i\omega t}$ شامل عدد مختلط A است که نُرم آن دامنه نوسان و فاز آن فاز اولیه نوسان است. اگر حل $z=Be^{-i\omega t}$ را برای $B=B_0e^{i\varphi'}$ بگیریم باز هم قسمت حقیقی آن به صورت

$$x = Re\left[B_0 e^{-i(\omega t-\varphi')}\right] = B_0 \cos(\omega t-\varphi')$$

خواهد بود که در واقع حل دیگری از نوسانگرهای هماهنگ با دو ثابت اختیاری دیگر (یعنی B_0 و $-\varphi'$) است. کافی است یکی از دو حل را در نظر بگیریم. ترکیب کامل هر دو حل وقتی ضروری است که به هر دو قسمت حقیقی و موهومی $Z(t)$ علاقه‌مند باشیم.

یک بار دیگر روی نقش مهمی که مختلط بودن ضریب A در حل $Z = Ae^{i\omega t}$ دارد تأکید می‌کنیم. فرض کنید دامنه مختلط A در عدد i ضرب شود. از رابطه (٤-٤ج) داریم $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ بنابراین

$$Z = Ae^{i\omega t} \rightarrow iAe^{i\omega t} = e^{i\frac{\pi}{2}} A_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = A_0 e^{i(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2})}$$

$$\Rightarrow \quad Re Z \rightarrow A_0 \cos(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2})$$

یعنی ضرب شدن دامنه در i مثل آن است که فقط $\frac{\pi}{2}$ به فاز آن اضافه شود. مثلاً اگر به رابطه $x(t)$ و $v(t)$ در نوسانگر توجه کنیم داریم

$$Z = Ae^{i\omega t} \Rightarrow \dot{Z} = i\omega A e^{i\omega t}$$

$$x = A_0 \cos(\omega t+\varphi) \Longrightarrow v = A_0\omega \cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

اینکه دامنه سرعت (در اعداد مختلط) $i\omega$ برابر دامنه مکان است یعنی اندازه دامنه ω برابر است و فاز آن نیز $\frac{\pi}{2}$ اضافه‌تر است.

ترکیب نوسان‌های هم بسامد –

فرض کنید نوسانگری تحت تأثیر چندین حرکت نوسانی با دامنه‌ها و فازهای مختلف قرار گیرد که همه آنها بسامد ω دارند. در این

صورت جا به جایی نوسانگر به صورت زیر است

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N} A_i \cos(\omega t+\varphi_i) \qquad (۴۴-۴)$$

~~روش~~ سؤال این است که دامنه و فاز حرکت برآیند چیست؟ روش مستقیم پاسخ به این سؤال آن است که هر یک از جملات رابطه (۴۴-۴) را برحسب $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ بسط دهیم و نتیجه نهایی را به صورت رابطه (۴-۴) درآوریم. نتیجه چنین است

$$x(t)=\left(\sum_{i=1}^{N} A_i \cos\varphi_i\right)\cos\omega t+\left(-\sum_{i=1}^{N} A_i \sin\varphi_i\right)\sin\omega t$$

$$= A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t$$

$$= A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (۴۵-۴)$$

همانطور که بعد از رابطه (۴-۵) دیدیم، نهایتاً می‌توان نوشت:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=\sqrt{\left(\sum A_i \cos\varphi_i\right)^2+\left(\sum A_i \sin\varphi_i\right)^2}$$

$$\tan\varphi=-\frac{A_2}{A_1}=\frac{\sum A_i \sin\varphi_i}{\sum A_i \cos\varphi_i} \qquad (۴۶-۴)$$

اما یک راه دیگر نیز برای این مسئله با استفاده از اعداد مختلط وجود دارد.

رابطه (۴۴-۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x(t)=\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{N}\left(A_i e^{i\varphi_i}\right)e^{i\omega t} \qquad (۴۷-۴)$$

بنابراین برای پیدا کردن دامنه و فاز حرکت برآیند کافی است دامنه‌ی مختلط مؤلفه‌های نوسانی یعنی $\tilde{A}_i=A_i e^{i\varphi_i}$ ها را با هم جمع کنیم.

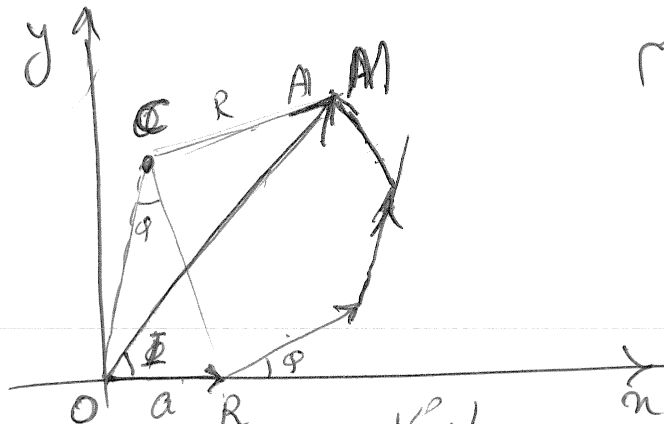
اما خوشبختانه جمع اعداد مختلط را می‌توان در صفحه $x-y$ با جمع بردارها

دو بعدی نشان دارد. نتیجه این روش آن است که برای جمع نوسان‌های هم بسامد، هر نوسان را با برداری نشان دهیم که بزرگی آن با دامنه نوسان متناسب باشد و زاویه آن با محور x با فاز نوسان برابر باشد. برآیند حرکتهای نوسانی فوق با برآیند بردارهای دو بعدی مذکور که به آنها «فازور» گفته می‌شود به دست می‌آید.

مثال - در درس اپتیک خواهید دید که از برهم نهی امواج پراکنده شده از یک توری پراش بر روی یک پرده نوسانی به صورت زیر حاصل می‌شود

$$x(t)=\sum_{n=0}^{N} a\cos(\omega t+n\varphi)$$

در شکل (۴-۷) نمایش فازورهای مربوط به مؤلفه‌های نوسانی فوق رسم شده است. این شکل برای $N=4$ رسم شده است، اما استدلال هندسی ما کلیت دارد. با توجه به شکل و بدون نیاز به توضیحات می‌توان نوشت



شکل ۴-۷

$$a=2R\sin\frac{\varphi}{2} \quad , \quad A=2R\sin\frac{N\varphi}{2} \quad \Rightarrow \quad A=a\,\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$\Phi=\frac{\pi-\varphi}{2}-\frac{\pi-N\varphi}{2}=\frac{(N-1)\varphi}{2}$$

برای نوشتن روابط فوق از دو مثلث متساوی الساقین COR و COM استفاده شده است.

نوسانگرهای هماهنگ دو و سه بعدی

فرض کنید ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر پتانسیل زیر باشد

$$V(x,y)=\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{2}k_2y^2 \qquad (۴-۴۸)$$

نیروی وارد بر ذره از رابطه ..... چنین است

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}V=-k_1x\hat{e}_x-k_2y\hat{e}_y \qquad (۴-۴۹)$$

معادلات حرکت از قانون دوم نیوتن چنین است

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-k_1x \\ m\ddot{y}=-k_2y \end{cases} \qquad (۴-۵۰)$$

با تعریف $\omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m}}$ و $\omega_2=\sqrt{\frac{k_2}{m}}$ دو معادله حرکت مستقل از هم به صورت زیر داریم

$$\begin{cases} \ddot{x}+\omega_1^2x=0 \\ \ddot{y}+\omega_2^2y=0 \end{cases} \qquad (۴-۵۱)$$

که نمایشگر دو نوسانگر هماهنگ جدا از هم است. منظور از این جمله آن است که هر معادله را می‌توان مستقل از دیگری حل کرد. کلی‌ترین حل معادلات (۴-۵۱) به صورت زیر است

$$\begin{aligned} x&=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1) \\ y&=A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2) \end{aligned} \qquad (۴-۵۲)$$

در راستای x حرکتی نوسانی با دوره نوسان $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$، دامنه A_1 و فاز اولیه φ_1 و در راستای y نیز حرکتی نوسانی با دوره نوسان $T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}$، دامنه A_2 و فاز اولیه φ_2 داریم. بنابراین حرکت ~~...~~ در

ناحیه $-A_1 \leq x \leq A_1$ و $-A_2 \leq y \leq A_2$ یعنی مستطیلی به ابعاد $2A_1 \times 2A_2$ محصور است. اگر ω_1 و ω_2 نامشخص باشند و رابطهٔ خاصی با هم نداشته باشند ذره به مرور تمام نقاط مستطیل مذکور را طی می کند و حرکت به مسیر یا ناحیه خاص محدود نخواهد بود. به بیان دقیق‌تر برای هر نقطه دلخواه (x_0, y_0) می توان نقطه ای از مسیر یافت که فاصله آن از نقطه مذکور از هر مقدار دلخواه ϵ کوچکتر باشد. اما شاید بهتر باشد ابتدا به بررسی برخی از حالتهای خاص بپردازیم.

الف - بسامدهای برابر -

اگر در رابطه (۴-۴۸) داشته باشیم $K_1 = K_2$ آنگاه داریم $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. حرکتها دارای بسامدهای یکسان هستند. از روابط (۴-۵۲) می توان دید که در این حالت ~~$y(t+T$~~ ~~$x(t+T) = x(t)$~~

$x(t+\frac{2\pi}{\omega}) = x(t)$ و $y(t+\frac{2\pi}{\omega}) = y(t)$. بنابراین پس از زمان $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ذره مجدداً در همان نقطه قبلی قرار می‌گیرد. علاوه بر این با مشتق گیری از روابط (۴-۵۲) می توان دید که مؤلفه های سرعت ذره یعنی $\dot{x}$ و $\dot{y}$ نیز توابعی دوره ای از زمان با دورهٔ یکسان T هستند. به این ترتیب با هر بار گذشت یک دورهٔ نوسان، حرکت عیناً تکرار می شود و مسیر حرکت بسته است. حال ببینیم این شکل مسیر چه خمی است؟

بدون نقض کلیت مسئله می توان مبدأ زمان را چنان گرفت که در لحظهٔ $t=0$ فاز اولیه نوسان در جهت x صفر باشد و داشته باشیم

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad (۴-۵۳)$$

از روابط فوق می‌توان نوشت

$$\begin{cases} \dfrac{x}{A} = \cos\omega t \\ \dfrac{y}{B} = \cos\varphi \cos\omega t - \sin\varphi \sin\omega t \end{cases}$$

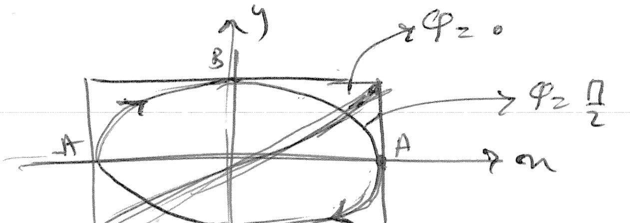
که نتیجه می‌دهد

$$\frac{y}{B} = (\cos\varphi)\frac{x}{A} - (\sin\varphi)\left(\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\varphi\right)^2 = \sin^2\varphi\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right) \Longrightarrow$$

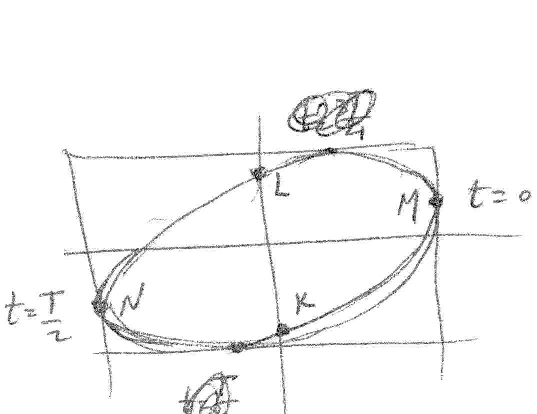
$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi \qquad (۵۴-۴)$$

برای حالت خاص $\varphi=0$ داریم $\left(\frac{y}{B}-\frac{x}{A}\right)^2=0$ که به معادله خط راست $y=\frac{B}{A}x$ منجر می‌شود. همچنین برای حالت خاص $\varphi=\frac{\pi}{2}$ داریم $\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}=1$ که معادله یک بیضی به قطرهای $2A$ و $2B$ است که محورهای x و y محورهای تقارن آن هستند. این دو حالت خاص در شکل (۸-۴) رسم شده است. برای φ دلخواه



شکل (۸-۴)

کماکان شکل مسیر یک بیضی است که محور آن نسبت به محور x چرخیده است. (شکل ۹-۴)



شکل (۹-۴)

در لحظات $t=0$، $t=\frac{T}{2}$ ذره در نقاط M و N و در لحظات $t=\frac{T}{4}$، $t=\frac{3T}{4}$ ذره در نقاط K و L است. برای اثبات

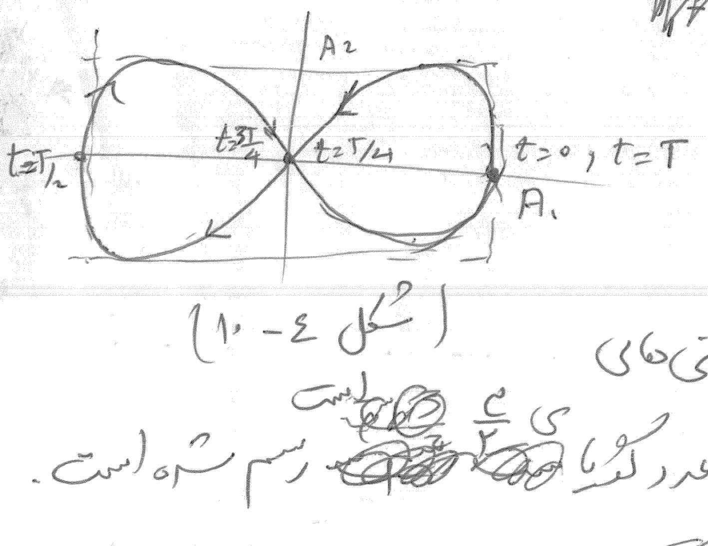
آنکه برای φ دلخواه مسیر بیضی است می‌توان محورهای مختصات
x و y را چنان چرخاند که به ازای x' و y' (مختصات نسبت به
محورهای چرخیده) رابطه (۴-۵۴) فاقد جمله ضربی (xy) باشد.
این کار از حوصلهٔ بحث فعلی خارج است.

ب - منحنی های لیساژو -

حال به عنوان مثال فرض کنید در معادلات (۴-۵۲) برای دو حرکت نوسانی عمود برهم در راستاهای x و y داشته باشیم $\omega_2 = 2\omega_1 = 2\omega$ در این صورت

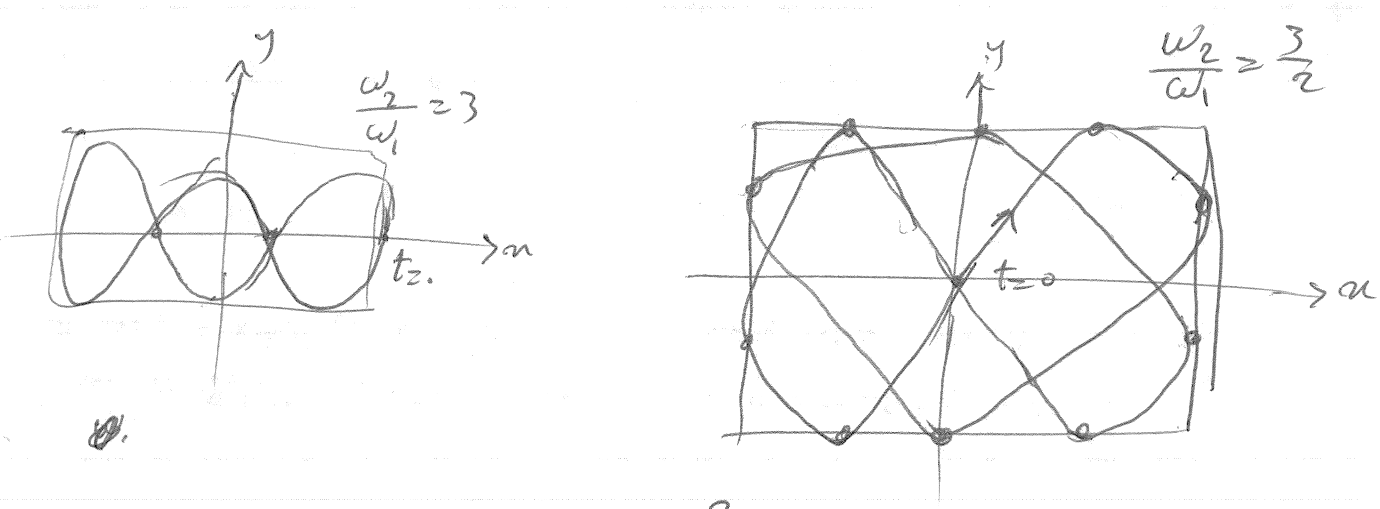
$$x = A_1 \cos \omega t \quad \text{و} \quad y = A_2 \cos(2\omega t + \varphi)$$

دوره های نوسان در دو راستای x و y باهم رابطه $T_2 = \frac{1}{2}T_1 = \frac{1}{2}T$ دارند. به این ترتیب هر یک بار نوسان در راستای x با دو بار نوسان کامل در راستای y همراه خواهد بود بنابراین با گذشت nT که n عددی صحیح است مقادیر x و y تکرار می‌شوند و مسیر حرکت بسته است. اگر برای سهولت فرض کنیم $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ مسیر به صورت شکل (۴-۱۰) خواهد بود که به شکل علامت ∞ است. اگر برعکس داشته باشیم $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1$ و یا $T_2 = 2T_1$ شکل مسیر به صورت 8 در می‌آید. به چنین خم هایی منحنی های لیساژو گفته می‌شود.



شکل (۴-۱۰)

در شکل (۴-۱۱) نمونه‌هایی دیگر از منحنی های لیساژو که در آنها نسبت $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ عدد گویا (عدد صحیح و یا $\frac{c}{2}$) است رسم شده است.



شکل ۴ - ۱۱

شکل سمت چپ ترسیم $x=A_1\cos\omega t$ و $y=A_2\sin(3\omega t)$

و شکل سمت راست ترسیم $x=A_1\sin(\omega t)$ و $y=A_2\sin(\frac{3}{2}\omega t)$ است.

توصیه می‌شود دانشجو با نقطه یابی به ازای $\omega t=\frac{\pi}{2},\pi,\ldots$ نقاط مهم منحنی‌های فوق را در شکل مشخص کند. اگر داشته باشیم $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{n}{m}$ که n و m دو عدد صحیح هستند (وابسته به هم اول) در این صورت به ازای $T=mT_1=nT_2$ مقادیر x و y تکرار می‌شوند و مسیر همان طور که در مثال‌های خاص بالا دیدیم تکرار می‌شود یعنی مسیر بسته است.

نقاط تعادل ناپایدار

در این فصل و در فصل گذشته دیدیم که برای هر پتانسیل دلخواه $V(x)$ در نزدیک نقطه می‌توان بسط تیلور تابع $V(x)$ را حول و حوش نقطه تعادل نوشت: x_0 نقطه تعادل پایدار یا ناپایدار باشد

$$V(x)\simeq V(x_0)+\frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \qquad (۴-۵۵)$$

که در آن $k=\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0}$. اگر نقطه x_0 نقطه تعادل پایدار باشد $k>0$ و

رفتار $V(x)$ در نزدیکی x_0 را می توان با پتانسیل نوسانگرهای هماهنگ تخمین زد.
در این صورت $\omega = \left[\frac{1}{m}\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0}\right]^{1/2}$ بسامد زاویه ای نوسانات کوچک
حول نقطه تعادل پایدار است. اگر x_0 نقطه تعادل ناپایدار باشد $k<0$
و رفتار پتانسیل به صورت شکل سهمی وارونه است. اگر فرض کنیم

$$\beta = -\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0} \qquad (۴-۵۶)$$

در این حالت رابطه پایستگی انرژی به طور تقریبی به صورت

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x_0) - \frac{1}{2}\beta(x-x_0)^2 = E \qquad (۴-۵۷)$$

خواهد بود. با مشتق گیری از این رابطه (مشابه کاری که با معادله (۴-۱۲)
انجام دادیم) و ساده کردن نسبت به $\dot{x}$ داریم

$$m\ddot{x} - \beta(x-x_0) = 0 \qquad (۴-۵۸)$$

حل این معادله برای $x' = x - x_0$ توابع نمایی $e^{-\beta t}$ و $e^{\beta t}$ است.
یعنی با توجه به شرایط اولیه، ذره با گذشت زمان به طور نمایی از نقطه x_0
دور می شود.

حال می خواهیم همین مفاهیم را برای $V(x,y)$ (پتانسیل دو متغیره) مورد بحث قرار دهیم.
تعمیم مطلب به سه بعد برای $V(x,y,z)$ و یا برای هر پتانسیل دلخواه به صورت
$V(q_1,\dots q_n)$ در فضای متغیرهای تعمیم یافته به طور مشابهی انجام می شود.
در دو بعد بسط تیلور تابع دلخواه $f(x,y)$ حول نقطه (x_0,y_0) به صورت
زیر است:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x_0,y_0}(x-x_0)+\frac{\partial V}{\partial y}\bigg|_{x_0,y_0}(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg|_{x_0,y_0}(x-x_0)^2+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\bigg|_{x_0,y_0}(y-y_0)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\bigg|_{x_0,y_0}(x-x_0)(y-y_0)\right]$$

$$+\cdots \qquad (۴-۵۹)$$

جملاتی که نوشته نشده‌اند شامل مشتق‌های جزئی بالاتر تابع $f(x,y)$ نسبت به متغیرها هستند که در توان‌های بالاتری از $(x-x_0)$ و $(y-y_0)$ ضرب شده‌اند. ~~اگر نقطه (x_0,y_0)~~

حال اگر بسط تیلور (۴-۵۹) را برای $V(x,y)$ حول نقطه تعادل (x_0,y_0) بنویسیم جملات شامل $\frac{\partial V}{\partial x}\big|_{x_0,y_0}$ و $\frac{\partial V}{\partial y}\big|_{x_0,y_0}$ صفر می‌شوند، چراکه نقطه تعادل بنا به تعریف جایی است که مؤلفه‌های نیروی وارد به ذره صفر است. (به یاد داشته باشید که مؤلفه‌های $\vec{F}=-\nabla V$ شامل مشتق‌های جزئی V نسبت به مختصات x و y است). بنابراین داریم

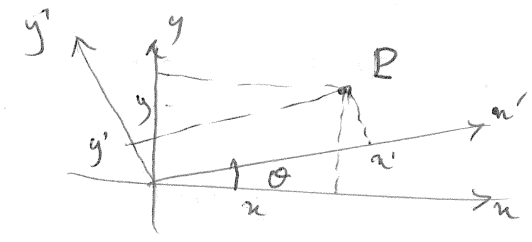
$$V(x,y)\simeq V(x_0,y_0)+\frac{1}{2}k_1(x-x_0)^2+\frac{1}{2}k_2(y-y_0)^2+k_{12}(x-x_0)(y-y_0) \qquad (۴-۶۰)$$

در اینجا با حذف جملات مراتب بالاتر از علامت تقریب $\simeq$ استفاده کرده‌ایم. جمله ثابت $V(x_0,y_0)$ در معادله حرکت نقشی ندارد و با انتخاب مبدأ پتانسیل مناسب قابل حذف کردن است. با تغییر مبدأ مختصات به نقطه (x_0,y_0) (و یا نامگذاری $x'=x-x_0$ و $y'=y-y_0$) پتانسیل (۴-۶۰) به صورت

$$V(x,y)\simeq\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{2}k_2y^2+k_{12}xy \qquad (۴-۶۱)$$

در می‌آید. پیش از این در بخش (۴-؟) با نوسانگرهای هماهنگ دو بعدی

آشنا شدیم. پتانسیل (۴-۶۱) با پتانسیل نوسانگر هماهنگ دو بعدی (۴-۴۸)
در جمله آخر، یعنی جمله $k_{12}xy$ تفاوت دارد. این جمله تحلیل مسئله
را کمی دشوارتر می‌کند. اگر پتانسیل (۴-۶۱) را در قانون نیوتن
قرار دهیم معادلات حرکت در جهتهای x و y جفتیده خواهند بود. انجام
این کار را به خواننده توصیه می‌کنیم. برای حل معادلات جفتیده مذکور
بنا به روش معمول باید بتوانیم ترکیبهای خطی جدیدی از x و y را به دست
آوریم که برای آنها معادلات مورد نظر واجفتیده شوند. به جای این کار
می‌توانیم در همین مرحله از متغیرهای x و y به متغیرهای x' و y'
برویم که برای آنها جمله ضربدری $k_{12}xy$ وجود نداشته باشد.



شکل ۴ - ۱۲

اگر دستگاه مختصات xy را مطابق شکل (۴-۱۲) در جهت پادساعتگرد بچرخانیم، چنانچه در فصل های آینده خواهیم دید مختصات جدید نقطه P یعنی x' و y' به صورت زیر به مختصات قبلی x و y مربوط هستند:

$$x' = (\cos\theta)x + (\sin\theta)y$$
$$y' = (-\sin\theta)x + (\cos\theta)y \qquad (۴-۶۲)$$

که θ زاویه دوران پادساعتگرد است. معکوس این روابط نیز به صورت زیر است:

$$x = (\cos\theta)x' + (-\sin\theta)y'$$
$$y = (+\sin\theta)x' + (\cos\theta)y' \qquad (۴-۶۳)$$

اگر x و y را از روابط (۴-۶۳) در عبارت (۴-۶۱) قرار دهیم، نتیجه پس از مرتب کردن جملات به صورت زیر است

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\left[k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta + 2k_{12}\sin\theta\cos\theta\right]x'^2$$
$$+\frac{1}{2}\left[k_1\sin^2\theta + k_2\cos^2\theta - 2k_{12}\sin\theta\cos\theta\right]y'^2 + \left[(\sin\theta\cos\theta)(k_1+k_2) + (\cos^2\theta-\sin^2\theta)k_{12}\right]x'y' \qquad (۴-۶۴)$$

حال با انتخاب θ ~~...~~ از معادله

$$(k_1+k_2)\sin\theta\cos\theta + 2k_{12}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) = 0 \qquad (۴-۹۵)$$

می‌توان ضریب $x'y'$ یعنی جمله ضربدری را در معادله (۴-۹۴) صفر کرد.

جواب این معادله به صورت

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left[\frac{-4k_{12}}{k_1+k_2}\right] \qquad (۴-۹۶)$$

است. اگر این مقدار θ_0 را در ضریب جمله x'^2 و y'^2 رابطه (۴-۹۴) قرار دهیم جواب به صورت

$$V(x',y') = \frac{1}{2}k_1' x'^2 + \frac{1}{2}k_2' y'^2 \qquad (۴-۹۷)$$

در می‌آید که مشابه پتانسیل (۴-۹۸) است. برای سهولت می‌توانیم از این به بعد علامتهای پریم را برداریم و فرض کنیم در صفحه xy چرخش مناسبی انجام داده‌ایم تا از شر جمله ضربدری در بسط $V(x,y)$ تا مرتبه دوم رها شویم. حال اگر همان طور که در بخش (۴-؟) بعد از رابطه (۴-۸۱) دیدیم را گرادیان منفی از پتانسیل فاقد جمله ضربدری معادلات حرکت نیوتن واجفتیده خواهند بود.

برای یک پتانسیل دلخواه با بسط تیلور تا مرتبه ۲ به صورت

$$V(x,y) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 \qquad (۴-۹۸)$$

حول نقطه تعادل (که آن را به نقطه $(0,0)$ با پتانسیل صفر منتقل کرده‌ایم) علامت k_1 و k_2 ممکن است مثبت یا منفی باشند. اگر نقطه تعادل مورد نظر یک کمینه مطلق باشد معنایش آن است که اگر از نقطه $(0,0)$ در هر جهت دلخواه حرکت کنیم $V(x,y)$ زیاد می‌شود. به طور خاص اگر x یا y ثابت باشد و فقط