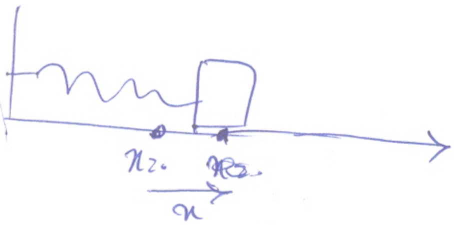
فصل چهارم

نوسانگرهای هماهنگ

۴-۱- حل مسئله نوسانگرهای هماهنگ

با معادله حرکت دستگاه جرم و فنر در قسمتهای گذشته آشنا شدیم. چنانکه دیدیم اگر $x=0$ نقطه تعادل دستگاه شکل (۴-۱) باشد نیروی فنر $F=-kx$ و معادله حرکت به صورت زیر است



شکل (۴-۱)

$$m\ddot{x}+kx=0 \qquad (۴-۱)$$

با نامگذاری $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ معادله $\ddot{x}+\omega^2x=0$ را داریم، که حل آن می تواند تابعهای $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ باشد. (به کمیت ω که بعد عکس زمان دارد بسامد زاویه ای می گوییم.) معادله دیفرانسیل (۴-۱) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو است و در کلی ترین حل آن دو ثابت اختیاری باید باشد (در بخش ... اثباتی کلی برای این امر ارائه کردیم). از طرفی معادله (۴-۱) را می توان به شکل زیر نیز نوشت

$$Lx=0 \qquad (۴-۲)$$

که در آن

$$L=m\frac{d^2}{dt^2}+k \qquad (۴-۳)$$

یک عملگر ~~است~~ خطی است. خاصیت کلی یک عملگر خطی آن است که اگر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ دو حل از معادله (۴-۲) باشند یعنی داشته باشیم $Lx_1=0$ و $Lx_2=0$ آنگاه برای ترکیب خطی دلخواه $A_1x_1(t)+A_2x_2(t)$ نیز داریم

$$L(A_1x_1+A_2x_2)=A_1Lx_1+A_2Lx_2=0$$

به بیان دیگر هر ترکیب خطی از جوابها یک جواب دیگر است. اگر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ دو حل مستقل از معادله $Lx=0$ باشند، یعنی مضرب یکدیگر نباشند، کلی ترین

حل معادله (۴-۱) به صورت $A_1x_1(t)+A_2x_2(t)$ است. بنابراین برای یافتن کلی‌ترین حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ خطی کافی است دو حل مستقل از آن را بیابیم و آنها را با ضرایب دلخواه ترکیب کنیم. در مورد خاص معادله (۴-۱) تابع های $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ دو حل مستقل هستند. بنابراین کلی‌ترین حل معادله (۴-۱) می‌تواند به صورت

$$x(t)=A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t \qquad (۴-۴)$$

در نظر گرفته شود. حل کلی (۴-۴) را به صورت دیگری نیز می‌توان نوشت:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (۴-۵)$$

در این رابطه اگر $\cos(\omega t+\varphi)$ را بسط دهیم و با رابطه (۴-۴) مقایسه کنیم خواهیم داشت $A\cos\varphi=A_2$ و $-A\sin\varphi=A_1$. در هر دو شکل (۴-۴) و (۴-۵) در حل معادله حرکت (۴-۱) دو ثابت اختیاری وجود دارد و چنانکه دیدیم می‌توان این دو گونه حل را به راحتی به یکدیگر تبدیل کرد. ثابت های A و φ یا A_1 و A_2 را می‌توان با داشتن $x(0)$ و $v(0)$ یعنی مکان و سرعت اولیه به دست آورد. با مشتق گیری از روابط (۴-۴) و (۴-۵) داریم

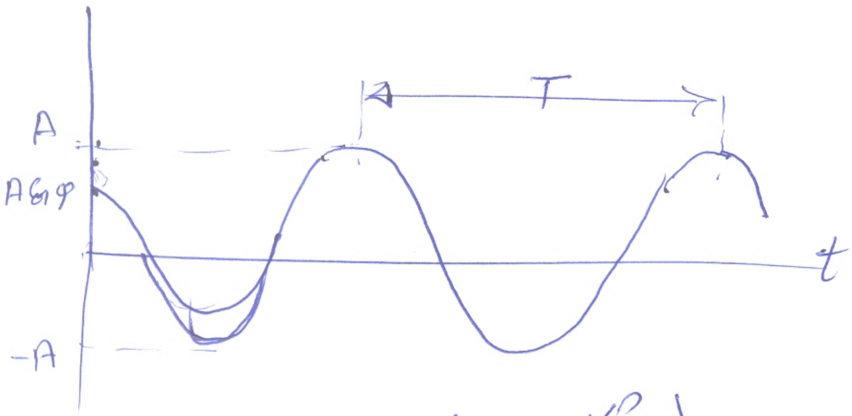
$$v(t)=A_1\omega\cos\omega t-A_2\omega\sin\omega t=-A\omega\sin(\omega t+\varphi) \qquad (۴-۶)$$

در لحظه $t=0$ داریم

$$x(0)=A_2=A\cos\varphi$$
$$v(0)=A_1\omega=-A\omega\sin\varphi \qquad (۴-۷)$$

که با حل آنها ثابت های مورد نظر به دست می‌آید. نمودار تابع $x(t)$ برحسب زمان از رابطه (۴-۵) مشابه به شکل (۴-۲) است.

چنانکه دیده می‌شود جابه‌جایی نوسانگر در بازه $-A<x<A$ است



(شکل ۴-۲)

به همین کمیت به A که از جنس طول است دامنهٔ نوسان گفته می‌شود. از شکل (۴-۲) و نیز از رابطهٔ (۴-۵) می‌بینیم که پس از طی مدت $T=\frac{2\pi}{\omega}$ تابع هر مقداری داشته باشد، تکرار می‌شود، یعنی $x(t)=x(t+T)$. ~~به سادگی می‌توان دید که~~ ~~با~~ $\cancel{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}$ ~~و~~ $\cancel{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$ ~~است~~

به کمیت T دورهٔ نوسان گفته می‌شود. در رابطهٔ (۴-۵) به آرگمان تابع کسینوس، یعنی به کمیت $(\omega t+\varphi)$ فاز نوسان و به φ فاز اولیه گفته می‌شود. این کمیت‌ها بدون بعد هستند، اما چون در آرگمان توابع مثلثاتی جای گرفته‌اند آنها را با واحدهای زاویه مثل رادیان می‌سنجیم. مثلاً می‌گوییم بعد از زمان T فاز نوسان به اندازهٔ 2π اضافه می‌شود و بعد از زمان $T/2$ فاز نوسان به اندازهٔ π افزوده می‌شود. توجه داشته باشید که در ضمن حرکت نوسانگر شکل (۴-۱) هیچ زاویه‌ای در کار نیست و حرکت روی خط راست انجام می‌شود.

انرژی نوسانگرهای هماهنگ –

انرژی دستگاه جرم و فنر شکل (۴-۱) شامل انرژی جنبشی جرم m و انرژی پتانسیل فنر k است:

$$E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2 \qquad (۴-۸)$$

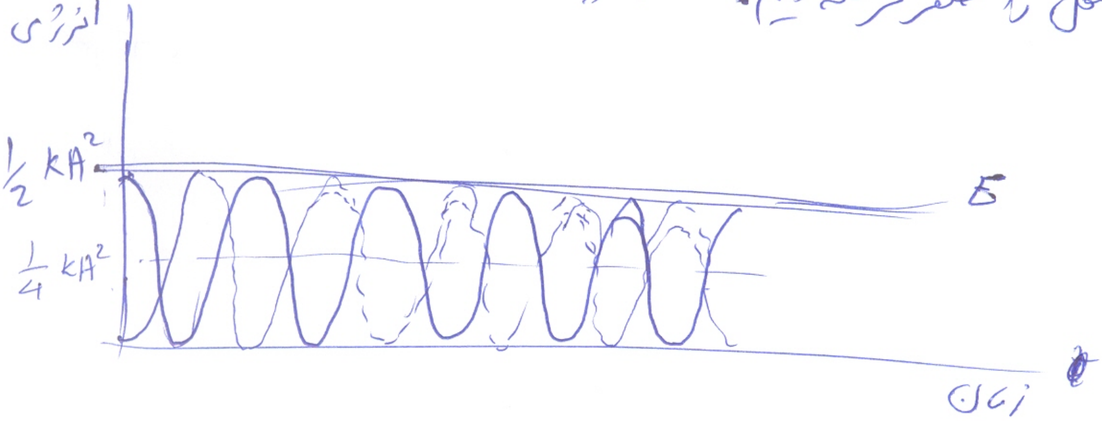
با قرار دادن $x(t)$ از رابطه (۴-۵) و $v(t)$ از رابطه دوم (۴-۶) در رابطه (۴-۸) داریم

$$E = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

چون $m\omega^2=k$ می‌توان از ضریب $\frac{1}{2}kA^2$ در دو جمله فوق فاکتور گیری کرد چون جمع سینوس به توان دو و کسینوس به توان دو برای هر فاز دلخواه $(\omega t+\varphi)$ یک است داریم

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \qquad (۴-۹)$$

پایستگی انرژی در این دستگاه به وضوح از حذف زمان در عبارت فوق دیده می‌شود. در نمودار شکل (۴-۳) کمیت های $K=\frac{1}{2}mv^2$ و $V=\frac{1}{2}kx^2$ و مجموع آنها بر حسب زمان رسم شده‌اند. برای سهولت فاز اولیه را در این شکل را صفر گرفته‌ایم. خطوط پر نمودار $K(t)$ و خطوط خط‌چین $V(t)$ را



شکل (۴-۳)

نشان می‌دهند. با کمی دقت می‌توان دید که دوره تکرار هر کدام از دو کمیت فوق $T/2$ است. در واقع با یک محاسبه ساده داریم

$$K(t) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t) = \frac{1}{4}kA^2\left(1-\cos(2\omega t)\right)$$

$$V(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t = \frac{1}{4}kA^2(1+\cos 2\omega t) \qquad (۴-۱۰)$$

یعنی توابع فوق توابعی نوسانی با بسامد زاویه‌ای 2ω حول مقدار میانگین $\frac{1}{4}kA^2$ هستند. متناسب بودن انرژی کل یک نوسانگر با مجذور دامنه نوسان

یک ویژگی مهم نوسانگرهای هماهنگ کلاسیک است.

اهمیت نوسانگرهای هماهنگ ـ

مسئله جرم و فنر شکل (۴-۱) به تنهایی اهمیت اساسی ندارد اما بسیاری از دستگاه‌های فیزیکی هستند که معادله حرکت آنها مشابه معادله حرکت دستگاه جرم و فنر است. در حقیقت هر دستگاهی با مختصه تعمیم یافته $q(t)$ که معادله حرکت آن به شکل

$$a\ddot{q}+bq=0 \qquad (۴-۱۱)$$

باشد دارای حلی به شکل $q(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ است که در آن $\omega=\sqrt{\frac{b}{a}}$. در معادله (۴-۱۱) کمیت b نقشی مشابه ثابت فنر k و کمیت a نقشی مشابه جرم m در رابطه (۴-۱) دارد. در این مسئله کلی کمیت

$$E=\frac{1}{2}a\dot{q}^2+\frac{1}{2}bq^2 \qquad (۴-۱۲)$$

با محاسباتی مشابه آنچه به رابطه (۴-۹) منجر شد، ثابت حرکت است. اگر از طرفین رابطه (۴-۱۲) نسبت به زمان مشتق‌گیری کنیم حاصل می‌شود

$$a\dot{q}\ddot{q}+bq\dot{q}=0 \Rightarrow a\ddot{q}+bq=0$$

در فصل گذشته (بخش ۳-...) دیدیم که برای هر پتانسیل دلخواه $V(x)$ در نزدیکی نقطه تعادل پایدار x_0، رفتار پتانسیل تقریباً با پتانسیل سهمی $V(x)\simeq V(x_0)+\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$ قابل تقریب است. در این صورت از رابطه پایستگی انرژی داریم

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x_0)+\frac{1}{2}k(x-x_0)^2=E \qquad (۴-۱۳)$$

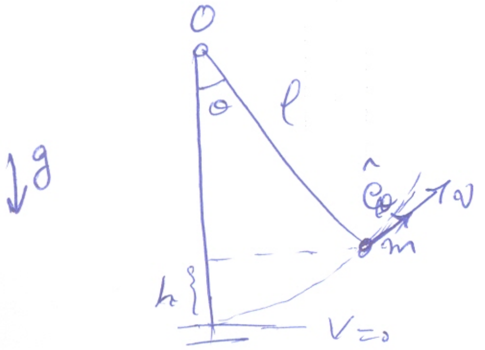
با مشتق‌گیری نسبت به زمان از طرفین رابطه (۴-۱۳) حاصل می‌شود

$$m\dot{x}\ddot{x} + k(x-x_0)\dot{x} = 0$$

که با حذف $\dot{x}$ و نامگذاری $x-x_0=x'$ به معادله نوسانگرهماهنگ زیر تبدیل می شود

$$m\ddot{x}' + kx' = 0$$

بنابراین اهمیت مسئله نوسانگرهماهنگ در همین نکته است که این حرکت کلی ترین شکل نوسان هردستگاه فیزیکی دلخواه حول نقطه تعادل پایدار آن را نشان می دهد.



(شکل ٤-٤)

مثال ١- آونگ ساده -

آونگ ساده از جرم نقطه ای m در انتهای نخی به طول ثابت l تشکیل شده که انتهای دیگر نخ به نقطه ثابت O آویخته شده و دستگاه در یک صفحه قائم حرکت می کند. زاویه θ مطابق شکل (٤-٤) زاویه انحراف آونگ از امتداد قائم است که به سمت راست مثبت و به سمت چپ منفی اندازه گیری می شود. جرم m روی دایره ای به شعاع l حرکت می کند. در لحظه ای که در شکل (٤-٤) نشان داده شده ارتفاع گلوله آونگ از پایین ترین نقطه حرکت چنین است:

$$h = l - l\cos\theta \qquad (١٤-٤)$$

بنابراین انرژی پتانسیل دستگاه برحسب زاویه θ به صورت زیر است

$$V(\theta) = mgh = mgl(1-\cos\theta) \qquad (١٥-٤)$$

سرعت لحظه ای گلوله نیز مطابق شکل به صورت

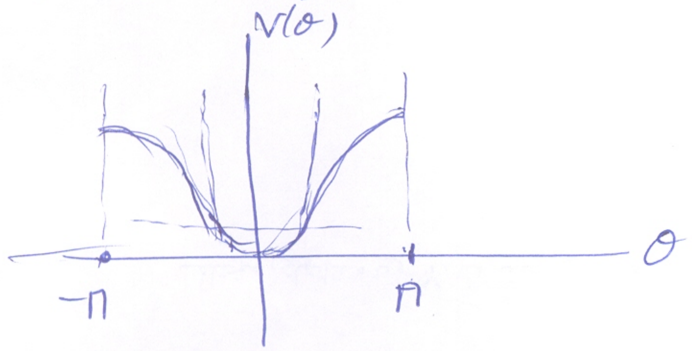
$$\vec{v} = l\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \qquad (١٦-٤)$$

است. دقت کنید که زاویه θ در این مسئله با قرارداد معمول مختصات قطبی

که در آن زاویه انحراف از امتداد افقی اندازه گیری می شود فرق دارد، اما بردار سرعت به همان شکل است، که چون $r=l$ ثابت است، سرعت فقط مؤلفه $\hat{\theta}$ دارد. حال چون گلوله آونگ فقط تحت تأثیر نیروی پایستار وزن و نیروی قیدی کشش نخ قرار دارد، رابطه پایستگی انرژی برای آن به صورت زیر است

$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl(1-\cos\theta) \qquad (۱۷-٤)$$

لازم به یادآوری است که کار نیروی قیدی کشش نخ همواره صفر است و اثری از کار آن در قضیه کار-انرژی باقی نمی ماند. (به بحث انجام شده در بخش (۳-...) مراجعه کنید.). نمودار انرژی پتانسیل (٤-۱۵) در شکل (٤-۵) رسم شده است.



شکل (٤-۵)

این نمودار در مقیاس زوایای θ بزرگ شکل سهمی ندارد. اما اگر انرژی بسیار نزدیک به انرژی نقطه کمینه یعنی $V(0)=0$ باشد، می توان تابع $V(\theta)$ را به شکل تقریبی سهمی (منحنی نقطه‌چین) در نظر گرفت. در حقیقت از بسط تیلور تابع $\cos\theta$ داریم

$$V(\theta)=mgl\left[1-\left(1-\frac{\theta^2}{2}+\dots\right)\right]\approx\frac{1}{2}mgl\theta^2 \qquad (۱۸-٤)$$

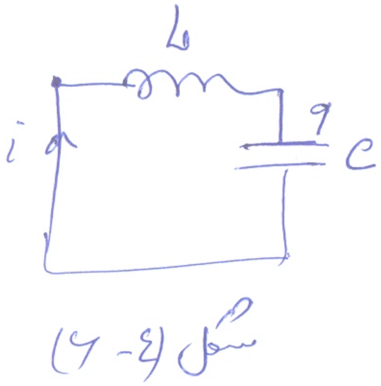
بنابراین برای θهای کوچک رابطه پایستگی انرژی (٤-۱۷) به شکل ساده‌تر زیر در می آید

$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2=\text{ثابت} \qquad (۱۹-٤)$$

از مقایسه رابطه (۴-۱۹) با شکل کلی رابطه با پیشکی (۴-۱۲) داریم $a=ml^2$
و $b=mgl$ در نتیجه $\omega=\sqrt{\frac{mgl}{ml^2}}=\sqrt{g/l}$. بنابراین آونگ با بسامد
زاویه‌ای $\sqrt{g/l}$ و دوره نوسان $T=2\pi\sqrt{l/g}$ حول نقطه تعادل نوسان
هماهنگ انجام می‌دهد.
حل معادله نوسان آونگ با فرض آنکه در لحظه $t=0$ آونگ به اندازه
زاویه θ_0 منحرف شده و از حال سکون رها شود به صورت

$$\theta(t)=\theta_0\cos\omega t \qquad (۴-۲۰)$$

خواهد بود. اگر انرژی نوسانگرهای تنگ زیادتر شود دامنه نوسانات
بزرگتر می‌شود. برای زوایای انحراف بزرگتر از حدود 5° بسط انجام
شده در رابطه (۴-۱۸) کفایت نمی‌کند و باید جملات مرتبه‌های بالاتر
در بسط $\cos\theta$ را نیز در نظر گرفت. در این صورت معادله حرکت دیگر
شکل ساده نوسانگرهای تنگ را ندارد و حتی خاصیت خطی بودن آن
نیز به هم می‌خورد.



شکل (۴-۶)

مثال ۲- مدار ~~[illegible]~~ خودالقا ـ خازن.
در شکل (۴-۶) مدار ساده‌ای را می‌بینید که از خودالقای
L و خازن C تشکیل شده است. فرض کنید در لحظه
نامعین t بار روی (جوشن بالایی) خازن $q(t)$
و شدت جریان در مدار $i(t)$ باشد. علامت q و i را چنان گرفته‌ایم
که رابطه

$$i(t)=\frac{dq}{dt} \qquad (۴-۲۱)$$

برقرار باشد. با استفاده از قانون حلقه در مدار تک حلقه‌ای فوق

داریم

$$L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0 \qquad (۲۲-٤)$$

که با استفاده از رابطه (٤-۲۱) داریم

$$L\ddot{q}+\frac{1}{C}q=0 \qquad (۲۳-٤)$$

این معادله حرکت نیز مشابه به شکل کلی (٤-۱۱) است که در آن $a=L$ و $b=\frac{1}{C}$.

با تعریف

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (۲٤-٤)$$

معادله حرکت (٤-۲۳) به شکل معمول نوسانگرهای هماهنگ با بسامد زاویه‌ای ω تبدیل می‌شود. با کمی وارسی بر روی کمیت‌های الکتریکی و مغناطیسی می‌توان دید که کمیت LC با بعد زمان به توان دو دارد و در نتیجه بعد ω از رابطه (٤-۲٤) عکس زمان است.

اگر فرض کنیم در لحظه $t=0$ خازن به اندازه بار q_0 پر شده و سپس به خودالقا تخلیه شود، حل معادله حرکت نوسانی (٤-۲۳) به صورت

$$q(t)=q_0\cos\omega t \qquad (۲۵-٤)$$

در می‌آید. این رابطه نشان می‌دهد که در لحظه وصل شدن مدار بار خازن و انرژی ذخیره شده در آن، یعنی $q_0^2/2C$ بیشینه است. سپس خازن در خودالقا تخلیه می‌شود در لحظه $t=T/4$ بار خازن صفر می‌شود.

از رابطه شدت جریان (٤-۲۱) داریم

$$i=-q_0\omega\sin\omega t \qquad (۲۶-٤)$$

در بازهٔ زمانی $0<t<T/2$ جهت جریان برخلاف جهت نشان داده شده در شکل (۴-۶) است. بیشینه شدت جریان $q_0\omega = q_0/\sqrt{LC}$ است که در لحظه $t=T/4$ (و نیز در $t=3T/4$) اتفاق می‌افتد. در بازهٔ زمانی $T/2<t<T$ شدت جریان (۴-۲۵) مثبت و مطابق شکل (۴-۶) است.

انرژی دستگاه مجموع انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن یعنی $E_C = q^2/2C$ انرژی مغناطیسی و انرژی ذخیره شده در خود القا، یعنی $E_L = \frac{1}{2}Li^2$ که ثابت است به طوری که داریم

$$E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C} \qquad (۴-۲۷)$$

جالب توجه است که کمیت بالا در این حالت مفهوم مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ندارد و اساساً ماهیتی متفاوت با انرژی یک دستگاه مکانیکی دارد. از مقایسه رابطه (۴-۲۷) با شکل کلی (۴-۱۲) نیز مجدداً می‌توان مشابهت‌های $a=L$ و $b=\frac{1}{C}$ را دریافت.

نکته قابل توجه آن است که شکل کلی انرژی (۴-۱۲) و معادله حرکت (۴-۱۱) ماهیتی عام دارد و محدود به گستره دستگاههای مکانیکی نیست. به همین جهت در فرهنگ رایج فیزیکدانها وقتی از نوسانگرهای هماهنگ صحبت می‌شود صرفاً به دستگاه مکانیکی خاصی مثل جرم و فنر محدود نمی‌شود و به هر سیستمی که معادله حرکت آن مشابه (۴-۱۱) است اطلاق می‌شود. برای هر نوسانگر هماهنگ به بسامد نوسان $\omega=\sqrt{\frac{b}{a}}$، بسامد طبیعی گفته می‌شود. برای دستگاه جرم و فنر $\sqrt{\frac{K}{m}}$، برای آونگ $\sqrt{g/l}$ و برای

مدار LC با ثابت $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ با بسامد طبیعی به نوسان در می‌آید. بسامد طبیعی هر دستگاه به پارامترهایی از دستگاه و محیط بستگی دارد. بسامد طبیعی یک نوسانگر آن بسامدی است که وقتی دستگاه از نقطه تعادل پایدار منحرف و رها شود با آن بسامد نوسان می‌کند. در مقابل این مفهوم، بسامد نوسان واداشته مربوط به حرکتی است که در آن دستگاه را از بیرون در معرض یک نیروی نوسان کننده با بسامد واداشته ω قرار می‌دهیم.

استفاده از توابع مختلط در بررسی حرکت نوسانی -

برای حل معادلات حرکت مربوط به انواع نوسانگر استفاده از روش توابع مختلط گاه محاسبات را بسیار ساده و روشن می‌سازد. پیش از آن که بخواهیم از این روش در بررسی حرکت نوسانگرها هنگ استفاده کنیم لازم است مقدمه‌ای ریاضی در مورد توابع مختلط بیان کنیم.

فرض کنید تابع تحلیلی $f(x)$ (یعنی تابعی که بینهایت بار مشتق‌پذیر است و تمام مشتقات آن پیوسته‌اند) حول نقطه $x=0$ دارای بسط تیلور زیر باشد

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{(از متغیر حقیقی } x\text{)} \qquad (۴-۲۸)$$

به طور مشابه می‌توان تابع $f(z)$ از متغیر مختلط z را به صورت زیر تعریف کرد

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (۴-۲۹)$$

به عنوان مثال

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 \qquad (۴-۳۰)$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots \qquad (۴-۳۱)$$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots \qquad (۴-۳۲)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (۴-۳۳)$$

با مشتق گیری از رابطه (۴-۳۰) نسبت به z داریم $\frac{d}{dz}e^z = e^z$ و با محاسبه مستقیم می توان نشان داد $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. به بیان دیگر عموم خواصی که تابع حقیقی e^x دارد به طور مشابهی برای تابع مختلط e^z برقرار است. بنابراین $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$. در این رابطه e^a یک عدد حقیقی معلوم است. حال ببینیم مفهوم $e^{i\theta}$ چیست؟ با استفاده از رابطه (۴-۳۰) داریم

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2!}i^2\theta^2 + \frac{1}{3!}i^3\theta^3 + \frac{1}{4!}i^4\theta^4 + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta \qquad (۴-۳۴)$$

در این محاسبه از رابطه $i^2 = -1$، و بسط توابع $\sin\theta$ و $\cos\theta$ استفاده کرده ایم. به طور مشابه با تبدیل $\theta \to -\theta$ داریم

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad (۴-۳۵)$$

معکوس روابط (۴-۳۴) و (۴-۳۵) به صورت زیر است

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \qquad (۴-۳۶)$$

چنانکه می دانیم بین مختصات دکارتی (x,y) و مختصات قطبی (ρ,φ) یک نقطه در صفحه x-y روابط $x=\rho\cos\varphi$ و $y=\rho\sin\varphi$ برقرار است. حال در صفحه مختلط z برای عدد مختلط $z=x+iy$ می توان نمایش قطبی $z=\rho e^{i\varphi}$ را نیز در نظر گرفت. از روابط (۴-۴۴) داریم

$$z=\rho e^{i\varphi}=(\rho\cos\varphi)+i(\rho\sin\varphi)=x+iy \qquad (۴\text{-}۴۷)$$

به $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ گاهی نُرم یا بزرگی عدد مختلط z گفته می شود و آنرا با $|z|$ نیز نمایش می دهند. کمیت $\varphi=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ نیز فاز عدد مختلط z است.

متناظر با هر عدد مختلط $z=x+iy=\rho e^{i\varphi}$ می توان مزدوج مختلط آن را به صورت $z^*=x-iy=\rho e^{-i\varphi}$ تعریف کرده. اگر $f(z)$ تابع دلخواهی از متغیر مختلط z باشد، می توان نشان داد که مزدوج مختلط آن به صورت $[f(z)]^*=f(z^*)$ است. به عبارت دیگر کافی است در یک عبارت پیچیده از اعداد مختلط هر جا هست آن را به $(-i)$ تبدیل کنیم تا عبارت مربوط مزدوج مختلط شود. با استفاده از تعریف مزدوج مختلط می توان نوشت

$$\rho=|z|=\sqrt{zz^*} \qquad (۴\text{-}۴۸)$$

$$\tan\varphi=\frac{-i(z-z^*)}{z+z^*}$$

$$x=\operatorname{Re}z=\frac{1}{2}(z+z^*) \quad \text{و} \quad y=\operatorname{Im}z=\frac{1}{2i}(z-z^*)$$

برخی از اتحادهای مثلثاتی را می توان از روابط سینوس و کسینوس برحسب توابع نمایی با توان موهومی به دست آورد. به عنوان مثال از رابطه

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

و استفاده از رابطه (۴-۴۴) برای یک یک جملات داریم

$$\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$=(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)$$

از برابر قرار دادن بخش های حقیقی و موهومی طرفین، اتحادهای مثلثاتی مربوط به $\cos(\theta_1+\theta_2)$ و $\sin(\theta_1+\theta_2)$ به دست می آید.

حال به توابع نمایی $e^{i\omega t}$ و $e^{-i\omega t}$ توجه کنید. برای هر دو تابع داریم

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\pm i\omega t}\right)=\pm i\omega\, e^{\pm i\omega t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{\pm i\omega t}\right)=-\omega^2 e^{\pm i\omega t} \qquad (۳۹-۴)$$

یعنی توابع $e^{\pm i\omega t}$ درست مشابه $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ هر دو می توانند جوابهای معادله $\ddot{z}+\omega^2 z=0$ یعنی معادله حرکت نوسانگر هماهنگ باشند. فرض کنیم $z(t)$ حلی از معادله حرکت نوسانگر هماهنگ باشد. اگر قرار دهیم $z=x+iy$ داریم $\dot{z}=\dot{x}+i\dot{y}$ و $\ddot{z}=\ddot{x}+i\ddot{y}$، ~~...~~ بنابراین معادله نوسانگر هماهنگ برای z نتیجه می دهد

$$(\ddot{x}+\omega^2 x)+i(\ddot{y}+\omega^2 y)=0 \qquad (۴۰-۴)$$

برای آنکه یک عدد مختلط صفر باشد لازم است قسمت حقیقی و موهومی آن جداگانه صفر باشند. بنابراین از معادله حرکت نوسانگر هماهنگ برای متغیر z داریم

$$\ddot{z}+\omega^2 z=0 \Rightarrow \begin{cases}\ddot{x}+\omega^2 x=0\\ \ddot{y}+\omega^2 y=0\end{cases} \qquad (۴۱-۴)$$

~~...~~ از رابطه (۴۱-۴) می توان دریافت که برای حل معادله حرکت $\ddot{x}+\omega^2 x=0$

می توان معادله $\ddot{Z}+\omega^2 Z=0$ را در چارچوب اعداد مختلط حل کرد و نهایتاً فقط قسمت حقیقی آن را به عنوان حلی از معادله $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ به حساب آورد.

از روابط (۴-۲۹) می توان دید که $Ae^{i\omega t}$ و $Be^{-i\omega t}$ هر کدام حلی از معادله نوسانگرهای هماهنگ برای متغیر Z هستند. اما A و B هر کدام یک عدد مختلط اند که معادل با دو عدد حقیقی هستند. بنابراین در کلی ترین حل معادله نوسانگرهای هماهنگ برای Z چهار ثابت دلخواه وجود دارد. این جای تعجب نیست، چراکه روابط (۴-۴۱) نشان می دهد که یک معادله نوسانگر هماهنگ برای متغیر مختلط Z معادل با دو معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ (یکی برای $x(t)$ و دیگری برای $y(t)$) است، که روی هم شامل ۴ ثابت اولیه اند.

حال به حل $Z=Ae^{i\omega t}$ توجه کنید که عدد مختلط A را ~~[illegible]~~ در آن به صورت قطبی $A=A_0e^{i\varphi}$ می نویسیم. داریم

$$Z=A_0e^{i(\omega t+\varphi)}=A_0\cos(\omega t+\varphi)+iA_0\sin(\omega t+\varphi) \qquad (۴-۴۲)$$

اگر فقط به قسمت حقیقی (۴-۴۲) علاقه مند باشیم داریم

$$x=\mathrm{Re}\,Z=A_0\cos(\omega t+\varphi) \qquad (۴-۴۳)$$

این حل از نوع کلی حل (۴-۸) است که شامل دو ثابت اختیاری A_0 و φ است.

به عبارت دیگر حل مختلط $Z=Ae^{i\omega t}$ شامل عدد مختلط A است که نرم آن دامنه نوسان و فاز آن فاز اولیه نوسان است. اگر حل $Z=Be^{-i\omega t}$ را برای $B=B_0e^{i\varphi'}$ بگیریم باز هم قسمت حقیقی آن به صورت

$$x = Re\left[B_0 e^{-i(\omega t - \varphi')}\right] = B_0 \cos(\omega t - \varphi')$$

خواهد بود که در واقع حل دیگری از نوسانگرهماهنگ با دو ثابت اختیاری دیگر (یعنی B_0 و $-\varphi'$) است. کافی است یکی از دو حل را در نظر بگیریم. ترکیب کامل هر دو حل وقتی ضروری است که به هر دو قسمت حقیقی و موهومی $Z(t)$ علاقه‌مند باشیم.

یکبار دیگر روی نقش مهمی که مختلط بودن ضریب A در حل $Z = Ae^{i\omega t}$ دارد تاکید می‌کنیم. فرض کنید دامنه مختلط A در عدد i ضرب شود. از رابطه (۴-۲۵) داریم $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ بنابراین

$$Z = Ae^{i\omega t} \to iAe^{i\omega t} = e^{i\frac{\pi}{2}} A_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = A_0 e^{i(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})}$$

$$\Rightarrow \quad Re Z \to A_0 \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

یعنی ضرب شدن دامنه در i مثل آن است که فقط $\frac{\pi}{2}$ به فاز آن اضافه شود. مثلاً اگر به رابطه $x(t)$ و $v(t)$ در نوسانگر توجه کنیم داریم

$$Z = Ae^{i\omega t} \Rightarrow \dot{Z} = i\omega A e^{i\omega t}$$

$$x = A_0 \cos(\omega t + \varphi) \Longrightarrow v = A_0 \omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

اینکه دامنه سرعت (در اعداد مختلط) $i\omega$ برابر دامنه مکان است یعنی اندازه دامنه ω برابر است و فاز آن نیز $\frac{\pi}{2}$ اضافه‌تر است.

ترکیب نوسان‌های هم بسامد-

فرض کنید نوسانگری تحت تاثیر چندین حرکت نوسانی با دامنه‌ها و فازهای مختلف قرار گیرد که همه آنها بسامد ω دارند. در

صورت جابه جایی نوسانگر به صورت زیر است

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N} A_i \cos(\omega t+\varphi_i) \qquad (۴-۴۴)$$

~~روش~~ سؤال این است که دامنه و فاز حرکت برآیند چیست؟ روش مستقیم پاسخ به این سؤال آن است که هر یک از جملات رابطه (۴-۴۴) را برحسب $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ بسط دهیم و نتیجه نهایی را به صورت رابطه (۴-۵) درآوریم. نتیجه چنین است

$$x(t)=\left(\sum_{i=1}^{N} A_i \cos\varphi_i\right)\cos\omega t+\left(-\sum_{i=1}^{N} A_i \sin\varphi_i\right)\sin\omega t$$

$$= A_1\cos\omega t + B_1 \sin\omega t$$

$$= A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (۴-۴۵)$$

همانطور که بعد از رابطه (۴-۵) دیدیم، نهایتاً می توان نوشت:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=\sqrt{\left(\sum A_i\cos\varphi_i\right)^2+\left(\sum A_i\sin\varphi_i\right)^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{A_2}{A_1}=\frac{\sum A_i \sin\varphi_i}{\sum A_i\cos\varphi_i} \qquad (۴-۴۶)$$

اما یک راه دیگر نیز برای این مسئله با استفاده از اعداد مختلط وجود دارد.

رابطه (۴-۴۴) را می توان به صورت زیر نوشت

$$x(t)=\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{N}\left(A_i e^{i\varphi_i}\right)e^{i\omega t} \qquad (۴-۴۷)$$

بنابراین برای پیدا کردن دامنه و فاز حرکت برآیند کافی است دامنه‌ی مختلط مؤلفه‌های نوسانی یعنی $\tilde{A}_i=A_i e^{i\varphi_i}$ ها را باهم جمع کنیم.

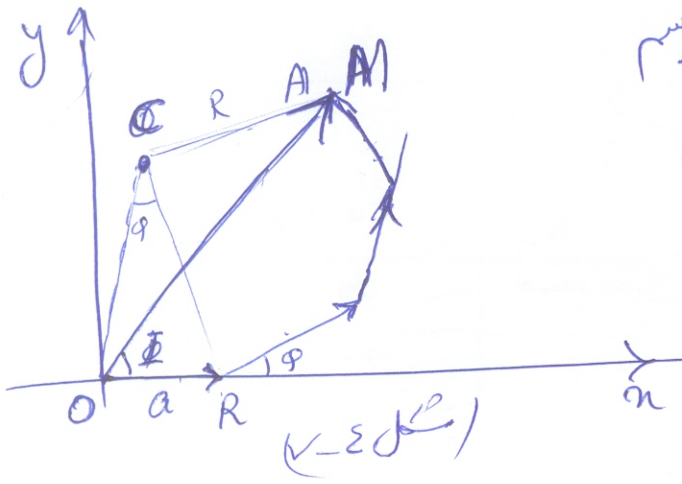
اما خوشبختانه جمع اعداد مختلط را می توان در صفحه x-y با جمع بردارها

دو بعدی نشان داد. نتیجه این روش آن است که برای جمع نوسان های هم بسامد، ~~[illegible]~~ هر نوسان را با برداری نشان دهیم که بزرگی آن با دامنه نوسان متناسب باشد و زاویه آن با محور x با فاز نوسان برابر باشد. برآیند حرکتهای نوسانی فوق با برآیند بردارهای دوبعدی مذکور که به آنها "فازور" گفته می شود به دست می آید.

مثال - در درس اپتیک خواهید دید که از برهم نهی امواج پراکنده شده از یک توری پراش بر روی یک پرده نوسانی به صورت زیر حاصل می شود

$$x(t)=\sum_{n=0}^{N} a\cos(\omega t+n\varphi)$$

در شکل (۴-۷) نمایش فازورهای مربوط به مؤلفه های نوسانی فوق رسم شده است. در این شکل برای $N=4$ رسم شده است، اما استدلال هندسی ما کلیت دارد. با توجه به شکل و بدون نیاز به توضیحات می توان نوشت



(شکل ۴-۷)

$$a=2R\sin\frac{\varphi}{2} \quad , \quad A=2R\sin\frac{N\varphi}{2} \quad \Rightarrow A=a\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$\Phi=\frac{\pi-\varphi}{2}-\frac{\pi-N\varphi}{2}=\frac{(N-1)\varphi}{2}$$

برای نوشتن روابط فوق از دو مثلث متساوی الساقین COR و COM استفاده شده است.

نوسانگرهای هماهنگ دو و سه بعدی

فرض کنید ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر پتانسیل زیر باشد

$$V(x,y)=\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{2}k_2y^2 \qquad (۴-۴۸)$$

نیروی وارد بر ذره از رابطه ..... چنین است

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}V=-k_1x\hat{e}_x-k_2y\hat{e}_y \qquad (۴-۴۹)$$

معادلات حرکت از قانون دوم نیوتن چنین است

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-k_1x \\ m\ddot{y}=-k_2y \end{cases} \qquad (۴-۵۰)$$

با تعریف $\omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m}}$ و $\omega_2=\sqrt{\frac{k_2}{m}}$ دو معادله حرکت مستقل از هم به صورت زیر داریم

$$\begin{cases} \ddot{x}+\omega_1^2x=0 \\ \ddot{y}+\omega_2^2y=0 \end{cases} \qquad (۴-۵۱)$$

که نمایشگر دو نوسانگر هماهنگ جدا از هم است. منظور از این جمله آن است که هر معادله را می‌توان مستقل از دیگری حل کرد. کلی‌ترین حل معادلات (۴-۵۱) به صورت زیر است

$$\begin{aligned} x&=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1) \\ y&=A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2) \end{aligned} \qquad (۴-۵۲)$$

در راستای x حرکتی نوسانی با دوره نوسان $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$، دامنه A_1 و فاز اولیه φ_1 و در راستای y نیز حرکتی نوسانی با دوره نوسان $T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}$، دامنه A_2 و فاز اولیه φ_2 داریم. بنابراین حرکت

ناحیه $-A_1 \leq x \leq A_1$ و $-A_2 \leq y \leq A_2$ یعنی مستطیلی به ابعاد $2A_1 \times 2A_2$ محصور است. اگر ω_1 و ω_2 نامشخص باشند و رابطهٔ خاصی با هم نداشته باشند ذره به مرور تمام نقاط مستطیل مذکور را طی می کند و حرکت به مسیر یا ناحیه خاصی محدود نخواهد بود. به بیان دقیق تر برای هر نقطه دلخواه (x_0, y_0) می توان نقطه ای از مسیر یافت که فاصله آن از نقطه مذکور از هر مقدار دلخواه ϵ کوچکتر باشد. اما شاید بهتر باشد ابتدا به بررسی برخی از حالتهای خاص بپردازیم:

الف - بسامدهای برابر -

اگر در رابطه (۴ - ۴۸) داشته باشیم $K_1 = K_2$ آنگاه داریم $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. حرکتها دارای بسامدهای یکسان هستند. از روابط (۴ - ۵۴) می توان دید که در این حالت ~~$y(t+T) \quad x(t+T) = x(t)$~~

$x(t+\frac{2\pi}{\omega}) = x(t)$ و $y(t+\frac{2\pi}{\omega}) = y(t)$. بنابراین پس از زمان $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ذره مجدداً در همان نقطه قبلی قرار می گیرد. علاوه بر این با مشتق گیری از روابط (۴ - ۵۲) می توان دید که مؤلفه های سرعت ذره یعنی $\dot{x}$ و $\dot{y}$ نیز توابعی دوره ای از زمان با دورهٔ یکسان T هستند. به این ترتیب با هر بار گذشت یک دورهٔ نوسان، حرکت عیناً تکرار می شود و مسیر حرکت بسته است. حال ببینیم این شکل مسیر چه خمی است؟

بدون نقض کلیت مسئله می توان مبدأ زمان را چنان گرفت که در لحظهٔ $t=0$ فاز اولیه نوسان در جهت x صفر باشد و داشته باشیم

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\cos(\omega t+\varphi) \end{cases} \qquad (۴ - ۵۳)$$

از روابط فوق می توان نوشت

$$\begin{cases} \dfrac{x}{A} = \cos\omega t \\ \dfrac{y}{B} = \cos\varphi \cos\omega t - \sin\varphi \sin\omega t \end{cases}$$

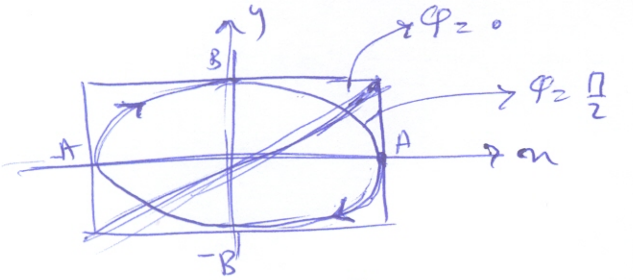
که نتیجه می دهد

$$\frac{y}{B} = (\cos\varphi)\frac{x}{A} - (\sin\varphi)\left(\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\varphi\right)^2 = \sin^2\varphi\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right) \Longrightarrow$$

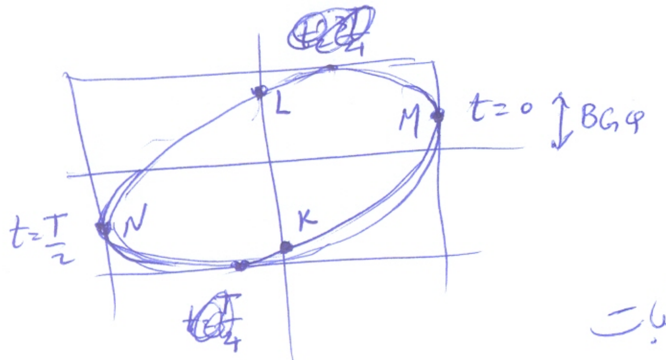
$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi \qquad (۵۴-۴)$$

برای حالت خاص $\varphi=0$ داریم $\left(\frac{y}{B}-\frac{x}{A}\right)^2=0$ که به معادله خط راست $y=\frac{B}{A}x$ منجر می شود. همچنین برای حالت خاص $\varphi=\frac{\pi}{2}$ داریم $\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}=1$ که معادله یک بیضی به قطرهای $2A$ و $2B$ است که محورهای x و y محورهای تقارن آن هستند. این دو حالت خاص در شکل (۴-۸) رسم شده است.



(شکل ۴-۸)

برای φ دلخواه کماکان شکل مسیر یک بیضی است که محور آن نسبت به محور x چرخیده است.



در لحظات $t=0, t=\frac{T}{2}$ ذره در نقاط M و N و در لحظات $t=\frac{T}{4}, t=\frac{3T}{4}$ ذره در نقاط K و L است. برای اثبات

آنکه برای φ دلخواه میسر بیش است می‌توان محورهای مختصات x و y را چنان چرخاند که به ازای x' و y' (مختصات نسبت به محورهای چرخیده) رابطه (۴-۵۴) فاقد جمله ضربی (xy) باشد. این کار از حوصله بحث فعلی خارج است.

ب- منحنی‌های لیساژو -