که $F(x)$ تابعی خوش رفتار از مختصه x ذره است. منظور از خوش رفتار آن است که تابع و مشتق های آن در تمام بازهٔ مورد نظر ناپیوستگی ندارند و به راحتی می توان از آن انتگرال گرفت. چون مؤلفه های y و z نیرو صفر است، حرکت در این دو جهت با سرعت ثابت انجام می گیرد. می توانیم فرض کنیم به دستگاه مختصاتی رفته ایم که در آن v_y و v_z هر دو صفر هستند. بنابراین حرکت به طور کامل محدود به محور x است و می توان به جای کمیتهای برداری از کمیتهای جبری استفاده کرد. حال معادله حرکت

نیوتن ناشی از نیروی $F(x)$ چنین است:

$$m\frac{dv}{dt} = F(x) \qquad (۴۴'-۲)$$

طرفین این رابطه را در $v = \frac{dx}{dt}$ ضرب می کنیم، در نتیجه داریم

$$mv\frac{dv}{dt} = F(x)\frac{dx}{dt} \qquad (۴۴''-۲)$$

اگر طرفین رابطه را در dt ضرب کنیم و از دو طرف انتگرال بگیریم به دست می آید،

$$\int_{v_0}^{v} mv'dv' = \int_{x_0}^{x} F(x')dx' \qquad (۴۵-۲)$$

انتگرال سمت راست را از نقطه x_0 تا x حساب می کنیم و فرض می کنیم در این بازهٔ مکانی سرعت از v_0 تا v تغییر کرده است. (رابطه ۲-۴۵) عبارت سمت راست را با W_{x_0-x} نشان می دهیم و آن را کار نیروی $F(x)$ در جابجایی ذره از x_0 تا x می نامیم. در سمت چپ رابطه (۲-۴۵) انتگرالده دیفرانسیل تابع $\frac{1}{2}mv^2$

از سرعت است. حاصل رابطه (۲-۴۵) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{x_0 - x} \qquad (۲-۴۶)$$

که در آن $K = \frac{1}{2}mv^2$ انرژی جنبشی ذره نام دارد. رابطه (۲-۴۶) به قضیه کار - انرژی معروف است. این رابطه در حقیقت بیان دیگری از قانون دوم نیوتن برای نیروی وابسته به مکان در یک بعد است.

با کمی دقت در رابطه (۲-۴۶) می‌توان مشاهده کرد که تا این مرحله ما هنوز از وابسته به مکان بودن نیرو استفاده نکرده‌ایم. به بیان دیگر قضیه کار - انرژی فقط مخصوص نیروهای وابسته به مکان نیست و برای هر نیروی دلخواه به همان شکل (۲-۴۶) است که در آن $W = \int F dx$. اما کمیت W را در حالت کلی نمی‌توان بدون حل کامل مسئله حساب کرد. یعنی اول باید مسئله را حل کرده باشیم و $x(t)$ را به دست آورده باشیم تا بتوانیم برای نیروی دلخواه $F(x, v, t, \ldots)$ کمیت $\int F dx$ را حساب کنیم.

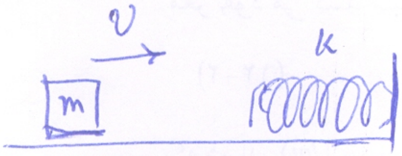
بنابراین هرچند قضیه کار - انرژی در حالت کلی اعتبار دارد اما استفاده از آن همیشه مفید نیست. در این باره بعداً و بعد از بیان مسئله دو سه بعد صحبت خواهیم کرد.

حال برگردیم به نیروی وابسته به مکان. رابطه (۲-۴۶) نشان می‌دهد انتگرال مکانی نیروی وابسته به مکان با تغییرات کمیت $\frac{1}{2}mv^2$

برابر است. این رابطه را می‌توان با رابطه (۲-۱۶) برای نیروی وابسته به زمان مقایسه کرد. در آنجا دیدیم که انتگرال زمانی نیروی وابسته به زمان با تغییرات کمیت mv برابر است. هر دو کمیت با افزایش جرم و سرعت ذره بزرگی ~~[illegible]~~ بیشتر خواهد بود، اما یکی به انتگرال زمانی نیرو (یعنی برهم نهی اثر نیرو در بازه‌های زمانی کوچک) و دیگری به ~~[illegible]~~ انتگرال مکانی نیرو (یعنی برهم نهی اثر نیرو در بازه‌های مکانی کوچک) مربوط است. ضمناً کمیت $m\vec{v}$ در حالت کلی برداری است (به رابطه ۲-۱۸ نگاه کنید)، در حالی که کمیت $\frac{1}{2}mv^2$ نرده‌ای است. در هر حال بحث فوق و رابطه (۲-۴۶) نشان می‌دهد که کمیت $\frac{1}{2}mv^2$ یعنی انرژی جنبشی ذره کمیتی مهم است که می‌تواند در تحلیل حرکت ذره مفید واقع شود. خلاصه اینکه حاصل اثر یک نیرو در طی یک بازهٔ مکانی تغییر انرژی جنبشی ذره است. اگر در طی حرکت، در مجموع بازه‌های مکانی $F(x)$ با dx هم‌سو باشد انرژی جنبشی ذره افزوده می‌شود و اگر ناهمسو باشد انرژی جنبشی ذره کم می‌شود. اگر ذره‌ای که با سرعت v در حال حرکت است کاملاً متوقف شود کار نیرویی که محیط روی آن وارد می‌کند $-\frac{1}{2}mv^2$ است. نیرویی که ذره به محیط وارد می‌کند بنا بر قانون سوم نیوتن خلاف جهت نیرویی است که محیط به ذره وارد می‌کند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت

که کار ذره روی محیط وقتی از سرعت v به حال سکون می‌رسد $+\frac{1}{2}mv^2$ است.
به بیان دیگر ذره‌ای که با سرعت v حرکت می‌کند دارای قابلیت انجام کار روی محیط است و می‌توان گفت:
« انرژی جنبشی یک ذره برابر است با مقدار کاری که ذره روی محیط انجام می‌دهد تا متوقف شود ».

به عنوان مثال به دستگاه شکل (۲-۹) توجه کنید. در این دستگاه جسم m با سرعت v به فنری که یک سر آن آزاد و سر دیگر آن به دیوار ثابتی تکیه دارد می‌رسد و ضمن فشرده کردن فنر سرعتش به صفر می‌رسد. در اینجا جسم m انرژی جنبشی از دست می‌دهد ولی در عوض روی محیط خود (فنر) کار انجام می‌دهد. کار نیروی فنر روی جسم در هر لحظه خلاف جابه‌جایی جسم (در حین فشرده سازی) است. بنابراین همان طور که انتظار می‌رود $W_{x_0 \to x}$ منفی است. اما نیروی جسم روی فنر در جهت جابه‌جایی ذره است و کار آن مثبت است. چنانکه می‌بینیم جسم m به دلیل سرعت خود قابلیت انجام کار روی محیط خود را داشته و در این مثال قادر به فشرده سازی فنر بوده است.



شکل (۲-۹)

حال می‌خواهیم این قابلیت انجام کار روی محیط را به شکل کمی توصیف کنیم. برای این کار فرض کنید بتوانیم تابع $V(x)$ را بیابیم به گونه‌ای که

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \qquad (۲-۴۷)$$

این کار با توجه به اینکه $F(x)$ را تابع خوش رفتاری فرض کردیم همیشه امکان پذیر است. در این صورت انتگرال سمت راست رابطه (۲-۴۵) را اکنون به سهولت می توان گرفت و رابطه (۲-۴۶) به صورت زیر در می آید

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-\left[V(x)-V(x_0)\right] \qquad (۲-۴۸)$$

و یا به طور خلاصه $\Delta K=-\Delta V$. رابطه (۲-۴۸) را به شکل زیر نیز می توان نوشت

$$\frac{1}{2}mv^2+V(x)=\frac{1}{2}mv_0^2+V(x_0) \qquad (۲-۴۹)$$

نتیجه (۲-۴۹) نشان می دهد کمیت

$$E=\frac{1}{2}mv^2+V(x) \qquad (۲-۵۰)$$

در نقطه x دلخواه از حرکت، و یا بهتر بگوییم در لحظه t دلخواه، همان مقداری را دارد که در نقطه شروع x_0 (با سرعت v_0) داشت. به عبارت دیگر E همواره ثابت است و با زمان تغییر نمی کند.

یک بار دیگر به مثال شکل (۲-۹) توجه کنید. وقتی جسم از سرعت v به سرعت صفر می رسد در محیط خویش تغییری ایجاد می کند (فنر را می فشارد). به بیان بهتر هیات دستگاهی که از جسم و محیط تشکیل شده تغییر می کند. کمیت فیزیکی $V(x)$ که آن را انرژی پتانسیل دستگاه می نامیم بیانگر این تغییر هیات است. در این مثال نیروی فنر یک نیروی وابسته به مکان است که با رابطه

$$F(x)=-kx \qquad (۲-۵۱)$$

بیان می شود (با فرض آن که انتهای آزاد فنر نقطه $x=0$ باشد). با توجه به رابطه (۲-۴۷) می توان انرژی پتانسیل دستگاه جرم-فنر را به صورت

زیر نشان داد

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 + C \qquad (۲-۵۱)$$

ثابت C را هرچه بگیریم در درستی رابطه (۲-۴۷) اثری ندارد. می‌توان برای سهولت فرض کرد در نقطه $x=0$، یعنی در حالتی که فنر طول عادی خود را دارد انرژی پتانسیل دستگاه صفر است. در این صورت نقطه $x=0$ را (در این مثال خاص) مبدا پتانسیل می‌نامیم. به این ترتیب انرژی پتانسیل دستگاه مذکور چنین است

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \qquad (۲-۵۲)$$

فرض کنیم در مثال فوق جسم فنر را به اندازه طول A فشرده و متوقف شده است. در این صورت بنا بر رابطهٔ (۲-۵۰) داریم

$$\frac{1}{2} mv^2 + 0 = \boxed{\cancel{\frac{1}{2}kA}}\ 0 + \frac{1}{2} kA^2 \qquad (۲-۵۴)$$

به این ترتیب بیشینه فشردگی فنر برابر است با $A = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v$. حال ببینیم محتوای رابطه (۲-۵۰) در این مثال چیست. جسم m که با سرعت v حرکت می‌کند دارای قابلیت مکانیکی است که آن را با انرژی جنبشی $\frac{1}{2} mv^2$ نشان داده‌ایم. بنا به این قابلیت جسم روی محیط کار انجام می‌دهد. انجام این کار را به صورت کمی با تغییر انرژی پتانسیل دستگاه جرم-فنر به اندازه $\frac{1}{2} kA^2$ نشان داده‌ایم. به این ترتیب حاصل جمع تغییرات انرژی جنبشی دستگاه $\Delta K = -\frac{1}{2} m v_0^2$ و تغییرات انرژی پتانسیل دستگاه $\Delta V = \frac{1}{2} kA^2$ صفر است. کمیت E در رابطه (۲-۵۰) مجموع این دو کمیت را نشان می‌دهد و به آن

انرژی مکانیکی دستگاه می گوییم. ثابت بودن E در طول زمان به معنای آن است که

$$\Delta E = \Delta K + \Delta V = 0 \qquad (۲-۵۵)$$

رابطه (۲-۵۵) که به معنای ثابت بودن E در رابطه (۲-۵۰) است، قانون پایستگی انرژی مکانیکی نام دارد. در یک جمع‌بندی نهایی می‌توان این قانون را به این صورت درک کرد که هرگز جسمی تغییر سرعت کمی اعم مگر آن که تغییر معینی در ~~...~~ پیکربندی جسم و محیط آن اتفاق افتاده باشد. در بیان کمی دقیق‌تر

"فقط تغییراتی در سرعت جسم و هم‌زمان با آن، حالت جسم و محیط امکان‌پذیر هستند که با قانون پایستگی انرژی سازگار باشند."

حال بار دیگر قانون پایستگی انرژی (۲-۵۰) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + V(x) = E = \text{ثابت} \qquad (۲-۵۶)$$

این رابطه را به گونه زیر هم می‌توان درک کرد. با گذشت زمان $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ هر دو تغییر می‌کنند، اما ترکیب ریاضی خاصی از آنها را به صورت سمت چپ رابطه (۲-۵۶) همواره با زمان ثابت می‌ماند. به همین علت E را یک ثابت حرکت می‌نامیم. اگر از طرفین رابطه (۲-۵۶) نسبت به زمان مشتق بگیریم حاصل می‌شود

$$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dV}{dx} = 0$$

که با ساده کردن طرفین نسبت به $\dot{x}$ نتیجه می‌شود

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} = F(x)$$

که همان قانون نیوتن است. (۲-۴۴)

در حالت کلی برای یک نظریه دینامیکی با متغیرهای دینامیکی $q_1(t), \dots q_{3N}(t)$ کمیت

$$H(q_1, \dots q_{3N}; \dot q_1, \dots \dot q_{3N}, \dots) \qquad (۲-۵۱)$$

ثابت حرکت نامیده می‌شود اگر با گذشت زمان H همواره ثابت باقی بماند. اگر H شامل سرعتهای $\dot q_1, \dots \dot q_{3N}$ باشد، می‌توان با مشتق‌گیری زمانی از H معادله‌ای به دست آورد که شامل شتابهای $\ddot q_1, \dots \ddot q_{3N}$ است. چنین معادله‌ای باید از انجام اعمال جبری بر روی معادلات حرکت (که معمولاً معادلات دیفرانسیل مرتبه دو هستند) به دست آمده باشد. اگر به هر طریق ممکن کمیت H را به دست آورده باشیم حل مسئله از این سو آسان است؛ یعنی با مشتق‌گیری می‌توان سازگاری رابطه ثابت $=H$ با معادلات حرکت را تحقیق کرد. اما از آن سو مسئله چندان آسان نیست. یعنی با نوشتن معادلات حرکت در حالت کلی نمی‌توان به راحتی حدس زد که چه اعمال ریاضی می‌توانند ما را به یک ثابت حرکت برسانند. به عنوان مثال برای نیروی وابسته به مکان در یک بعد، تکنیک اصلی آن بود که طرفین رابطه (۲-۴۴′) را در سرعت ضرب کنیم و به رابطه (۲-۴۴″) برسیم، تا با انتگرال‌گیری به قانون پایستگی انرژی منتهی شود.

نکته دیگری که در این مبحث شایان ذکر است انتخاب علامت منفی در رابطه (۲-۴۷) است. این علامت منفی اهمیت قابل توجهی دارد. اگر به قضیه کار-انرژی $\Delta K = W$ برگردیم، انتخاب فوق باعث شد به رابطه $\Delta K = -\Delta V$ برسیم و نهایتاً $K+V$ را ثابت انرژی بنامیم. اگر این علامت منفی فرض نشده بود، رابطه پایستگی انرژی به صورت

"ثابت$=K-V$" در می آمد که حس فیزیکی خوبی به ما نمی دهد. قانون پایستگی انرژی به شکل "$K+V=$ثابت" مستلزم دست به دست شدن انرژی مکانیکی از انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل و برعکس را به خوبی القا می کند.

و بالاخره به عنوان آخرین نکته در این بخش ببینیم ثابت E چگونه تعیین می شود. رابطه (۳-۵۶) نشان می دهد که برای تعیین E کافی است مقدار انرژی پتانسیل در یک نقطه معین مثل x_0 را بدانیم و در عین حال اندازهٔ سرعت ذره در این نقطه یعنی v_0 را نیز بدانیم. در این صورت مقدار ثابت E عبارت است از

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2+V(x_0) \qquad (۳-۵۷)$$

در مثال فنر شکل (۳-۹) دیدیم که عبارت انرژی پتانسیل تا حد یک ثابت اختیاری که به انتخاب مبدأ پتانسیل بستگی دارد نامعین است. به بیان دیگر اگر برای $V(x)$ داشته باشیم $F(x)=-\frac{dV}{dx}$ آنگاه برای $V'(x)=V(x)+C$ نیز همین رابطه درست است. حال فرض کنید به جای $V(x)$ ما $V'(x)$ را انتخاب کرده باشیم. در این صورت از رابطه (۳-۵۷) دیده می شود که مقدار E نیز این بار به صورت

$$E'=\frac{1}{2}mv_0^2+V'(x) \qquad (۳-۵۸)$$

است. اما نکته مهم آن است که رابطه $E=\frac{1}{2}mv^2+V(x)$ و رابطه $E'=\frac{1}{2}mv^2+V'(x)$ هر دو یک چیز هستند. رابطه دوم همان قبلی است که به طرفین آن ثابت C اضافه شده است. بنابراین هم کمیت انرژی

پتانسیل و هم انرژی مکانیکی E ، به انتخاب مبدأ پتانسیل بستگی دارند. اما این بستگی یکسان است و با تغییر مبدأ پتانسیل هردو به یک میزان کم یا زیاد می‌شوند.

۳-۶- حل مسائل از روش انرژی

در بخش قبل ما قانون پایستگی انرژی را با شروع از قانون دوم نیوتن برای یک نیروی وابسته به مکان به دست آوردیم. اما می‌توان فرض کرد که از ابتدا دینامیک یک دستگاه تک ذره‌ای تحت شرایط معینی توسط قانون پایستگی انرژی به صورت زیر داده شده است:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E = \text{ثابت} \qquad (۳-۵۹)$$

در این نوع نگاه به مسئله برهم‌کنش ذره با محیط خویش به جای آنکه با تابع نیرو، یعنی $F(x)$، توصیف شود، با تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ توصیف می‌شود. به عبارت دیگر به همان اندازه که ممکن است مفهوم نیرو را مفهومی اساسی در توصیف برهم‌کنش‌ها به شمار آوریم، می‌توانیم مفهوم انرژی پتانسیل را مفهوم اساسی بدانیم. حال ببینیم از رابطه (۳-۵۹) چگونه می‌شود به حل معادله حرکت دست یافت. با محاسبهٔ v از رابطه (۳-۵۹) داریم

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]} \qquad (۳-۶۰)$$

چنانکه دیده می‌شود زیر رادیکال تفاضل دو کمیت E و $V(x)$ آمده که به انتخاب مبدأ پتانسیل بستگی ندارد. در اینجا مشکل انتخاب علامت + یا - در رابطه (۳-۶۰) را داریم که در ضمن بحث‌های آینده به آن خواهیم پرداخت.

رابطه (۲-۶۰) را می توان به صورت زیر درآورد

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}} = \pm \int dt \qquad (۲-۶۱)$$

به این ترتیب با یک انتگرال گیری می توان به رابطه ای مشابه $f(x)=\pm t$ رسید که $f(x)$ انتگرال عبارت سمت چپ است. با محاسبه x از این عبارت علی الاصول می توان $x(t)$ را به دست آورد و حل مسئله کامل می شود. وقتی حل یک مسئله مکانیک به محاسبهٔ یک یا چند انتگرال می رسد ما آن را تمام شده می پنداریم. محاسبهٔ انتگرال یک فرایند مشخص ریاضی با تکنیک های خودش است که هر چند اهمیت دارد، اما موضوع بحث مکانیک نیست. در نهایت حتی اگر انتگرال به شکل تحلیلی قابل محاسبه نباشد می شود آن را با روشهای عددی حل کرد. اگر شرط اولیه را به صورت مقدار x در لحظه $t=0$ بدانیم رابطه (۲-۶۱) را به صورت انتگرال معین حل می کنیم. در غیر این صورت یک ثابت انتگرال گیری به یکی از دو طرف اضافه می شود که مقدار آن به شرایط اولیه بستگی دارد. علامت + یا - در رابطه (۲-۶۱) همان علامت سرعت در رابطه (۲-۶۰) است. برای سهولت می توان بازهٔ انتگرال گیری را به محدوده ای محدود کرد که سرعت علامتش عوض نمی شود، مثلاً اگر در لحظه $t=0$ سرعت ذره مثبت باشد فرض می کنیم انتگرال روی t بازه ای گرفته می شود که هنوز سرعت تغییر نکرده است. معمولاً همان جواب را می شود برای هر زمان دلخواه تعمیم داد، چرا که برای نیروی وابسته به مکان معادله حرکت برای تمام بازه های زمانی شکل یکسانی دارد و جواب تحلیلی برای یک بازهٔ خاص برای تمام زمانها اعتبار یکسانی دارد.

مثال ۱ـ سقوط آزاد و پتانسیل وزن.

هرچند نیروی وزن ثابت است اما می‌توان آن را تابعی از مکان نیز فرض کرد. فرض کنیم محور y به سمت بالا و شتاب گرانش در جهت $-y$ است. بنابراین از رابطهٔ جبری $F=-mg$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$V(y)=mgy+C \qquad (۶۲-۲)$$

دقت کنید که در این حرکت یک بعدی و در راستای محور y فرض شده است، در نتیجه، رابطه (۲-۴۷) به صورت $F(y)=-\frac{dV}{dy}$ باید در نظر گرفته شود. قانون پایستگی انرژی (۲-۵۱) نیز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2+V(y)=E \qquad (۶۳-۲)$$

ثابت C در رابطه (۲-۶۲) به انتخاب مبدأ پتانسیل بستگی دارد. فرض کنیم نقطه $y=0$ مبدأ پتانسیل باشد. در این صورت $C=0$ و رابطه (۲-۶۳) به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2+mgy=E \qquad (۶۴-۲)$$

ثابت E به شرایط اولیه بستگی دارد. فرض کنیم جسم با سرعت اولیه v_0 از مبدأ مختصات به سمت بالا پرتاب شود. در این صورت برای نقطه $y=0$ داریم

$$\frac{1}{2}mv_0^2=E \qquad (۶۵-۲)$$

با قرار دادن E در رابطه (۲-۶۴) و محاسبه $\dot{y}$ به دست می‌آید

$$\frac{dy}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2-mgy\right)} \qquad (۶۶-۲)$$

فعلاً فرض کنیم حرکت ذره را در بازه زمانی از لحظه پرتاب تا قبل از رسیدن به نقطه اوج بررسی می‌کنیم. در این بازهٔ زمانی سرعت ذره مثبت است. بنابراین رابطه

(۲-۶۶) را می‌توان به صورت انتگرالی زیر درآورد.

$$\int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{v_0^2-2gy'}} = \int_0^t dt \qquad (۲-۶۷)$$

در اینجا شرط اولیه $y(0)=0$ را نیز اعمال کرده‌ایم. انتگرال (۲-۶۷) به راحتی گرفته می‌شود و حاصل چنین است

$$-\frac{1}{g}\sqrt{v_0^2-2gy'}\Big|_0^y = t$$

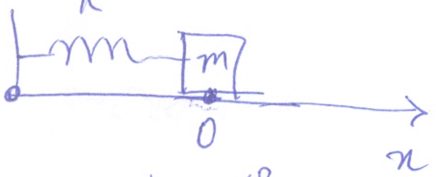
$$\Rightarrow \sqrt{v_0^2-2gy} - v_0 = -gt \Rightarrow v_0^2-2gy = (v_0-gt)^2$$

که پس از ساده کردن به صورت رابطه آشنای زیر درمی‌آید

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \qquad (۲-۶۸)$$

هرچند نتیجه را با درنظر گرفتن علامت + در رابطه (۲-۶۶) به دست آوردیم اما این نتیجه برای تمام حرکت حتی موقعی که سرعت منفی است (جسم در حال بازگشت به پایین است) نیز صادق است. اگر علامت (-) را انتخاب می‌کردیم باید حدود انتگرال‌ها در رابطه (۲-۶۷) را نیز متناظر با بازه‌ای که سرعت منفی است انتخاب می‌کردیم. با کمی دقت و محاسبه، خوانندگان می‌توانند نشان دهند که نتیجه همان رابطه (۲-۶۸) خواهد بود.

مثال ۲- حل مسئله جرم فنر از روش انرژی.

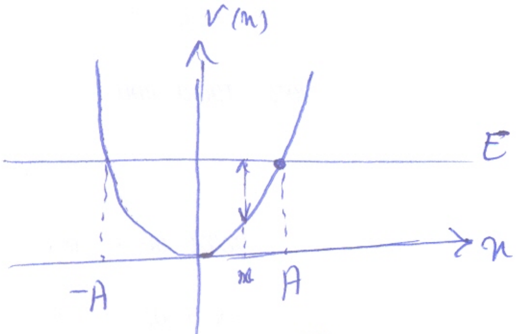


شکل (۲-۱۰)

دستگاه آشنای جرم و فنر شکل (۲-۱۰) را درنظر بگیرید. طبق معمول مبدأ مختصات و نیز مبدأ پتانسیل را محل قرار گرفتن جرم در حالتی که فنر طول آزاد خود را دارد می‌گیریم. در این صورت نیرو $F(x)=-kx$ و انرژی پتانسیل $V(x)=\frac{1}{2}kx^2$ خواهد بود و قانون پایستگی انرژی مکانیکی به صورت زیر است

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=E \qquad (۶۹-۲)$$

پیش از آنکه با روش انتگرال گیری ذکر شده مسئله را حل کنیم، به نمودار انرژی پتانسیل دستگاه در شکل (۱۱-۲) توجه کنید. در این



شکل (۱۱-۲)

نمودار محور افقی x (برحسب واحدی از طول) و محور قائم $V(x)$ (برحسب واحدی از انرژی) است. توجه کنید که این شکل را با مسیر حرکت اشتباه نگیرید. مسیر حرکت در راستای محور x است که محور افقی شکل (۱۱-۲) است. تابع $V(x)=\frac{1}{2}kx^2$ یک سهمی کمینه‌ای است که کمینه آن در $x=0$ قرار دارد. تقعر منحنی همواره به سمت بالا و مقدار آن ثابت k است.

مرسوم است که در نمودار انرژی پتانسیل، انرژی کل را هم با یک خط افقی که عرض از مبدأ آن ثابت E است نشان دهیم. با توجه به آنکه انرژی جنبشی همواره کمیتی مثبت است، در رابطه با پتانسیل انرژی همواره باید

$$E \geqslant V(x) \qquad (۷۰-۲)$$

به بیان دیگر، در این مسئله و هر مسئله دیگری حرکت به ناحیه‌ای محدود است که نامساوی (۷۰-۲) برقرار باشد. بنابراین با توجه به مبدأ پتانسیل انتخاب شده، در رابطه (۶۹-۲) مقادیر منفی E امکان پذیر نیستند. البته کمترین مقدار ممکن انرژی $E=0$ است که در آن خط E بر سهمی $\frac{1}{2}kx^2$ در نقطه $x=0$ مماس است. در این حالت جسم در مبدأ مختصات ساکن است و حل معادله حرکت برای تمام زمانها $x(t)=0$ است.

برای هر مقدار $E>0$ خط E منحنی $V(x)$ را در دو نقطه قطع می کند. با توجه به آنکه سهمی $\frac{1}{2}kx^2$ نسبت به محور قائم در نمودار (ل-۱۱) متقارن است نقاط تقاطع E با $V(x)$ به فاصله یکسان در دو سوی محل تعادل هستند که آنها را با $x=A$ و $x=-A$ مشخص کرده ایم. جرم هرگز نمی تواند فراتر از ناحیه $-A \leq x \leq A$ قرار گیرد، چراکه در خارج از این ناحیه $E<V(x)$ و نامساوی (ل-۷۰) برهم می خورد. نقاط $x=\pm A$ در شکل (ل-۱۱) ریشه های معادله $E-V(x)=0$ هستند و به آنها نقاط بازگشت می گوییم.

بنابراین روشن است که $\cancel{E=\frac{1}{2}kA^2}$ $E=\frac{1}{2}kA^2$، چراکه در این صورت

$$\cancel{E=\frac{1}{2}kA^2} \quad \frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}kx^2=0 \Rightarrow x=\pm A$$

بنابراین رابطه پایستگی انرژی (ل-۶۹) به صورت زیر در می آید

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2 \qquad \text{(ل-۷۰)}$$

از این رابطه می توان دید که در نقطه دلخواه x (به شکل ل-۱۱ نگاه کنید) اندازه انرژی جنبشی ذره با تفاوت ارتفاع خط افقی E با منحنی $V(x)$ بستگی دارد. در شکل (ل-۱۱) پاره خط عمودی نشان داده شده با علامت $\updownarrow$ در نقطه x اندازه انرژی جنبشی را نشان می دهد. هرچه به نقطه $x=0$ یعنی نقطه تعادل فنر نزدیک تر باشیم انرژی جنبشی بیشتر است. برعکس هرچه به نقاط بازگشت نزدیک شویم انرژی جنبشی کمتر است. جسم هنگام عبور از نقطه تعادل به سمت راست بیشینه سرعت را دارد. این سرعت با نزدیک شدن به نقطه بازگشت $x=A$ کمتر و کمتر می شود. در این نقطه جسم در یک لحظه ساکن می شود و مجدداً به سمت نقطه تعادل برمی گردد. در نقطه تعادل این بار به سمت چپ یعنی

بیشینه سرعت را به سمت چپ دارد. جسم به حرکتش به سمت چپ تا نقطه بازگشت $x=-A$ ادامه می دهد و در این حال اندازه سرعتش کم و کمتر می شود. پس از سکون لحظه ای در نقطه $x=-A$ مجدداً به سمت راست سرعت می گیرد و با بیشینه سرعت از مبدأ عبور می کند. ~~در حین عبور از نقطه دلخواه x~~

این حرکت به همین ترتیب تکرار می شود. در هر دور از حرکت ذره دوبار از نقطه دلخواه x عبور می کند یک بار به سمت راست و بار دیگر به سمت چپ و سرعتش در هر دو حالت یکسان است، چراکه اندازه انرژی جنبشی جسم ضمن رفت و برگشت یکی است. نکته جالب توجه در این تجزیه و تحلیل آن است که ما با استفاده از نمودار انرژی پتانسیل، بدون آنکه معادله حرکت را به طور کامل حل کرده باشیم اطلاعات قابل توجهی در مورد نوع حرکت به دست آوردیم.

حال بپردازیم به حل کمّی مسئله با استفاده از قانون پایستگی انرژی (۳-۷۰). با حل این معادله برای $\dot{x}$ خواهیم داشت

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}kx^2\right)} \qquad (۳-۷۱)$$

با نامگذاری $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ و با فرض آنکه در لحظه $t=0$ جسم در نقطه $x=0$ باشد و به سمت راست حرکت کند داریم

$$\int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{A^2-x'^2}}=\omega\int_0^t dt' \qquad (۳-۷۲)$$

با تغییر متغیر $\frac{x}{A}=\sin\theta$ انتگرال سمت چپ به راحتی حساب می شود و جواب چنین است

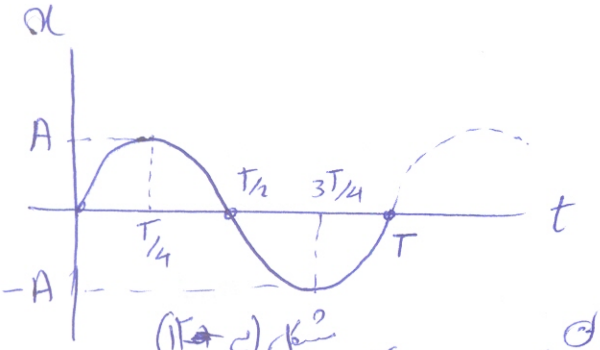
$$\sin^{-1}\frac{x'}{A}\Big|_0^x=\omega t$$

که حل نهایی آن به صورت زیر است:

$x(t) = A\sin\omega t$

(۲-۷۲)

بنابراین حل معادله حرکت تابعی سینوسی از زمان است که با نمودار شکل (۲-۱۲) مشخص می‌شود. در رابطه (۲-۷۲) کمیت A از جنس طول است و دامنه نوسان نام دارد. آرگمان تابع سینوس نیز طبق معمول بدون بعد است و کمیت $\sqrt{k/m}$ بعد عکس زمان دارد. این کمیت بسامد زاویه‌ای نام دارد و آهنگ تغییر فاز تابع سینوس برحسب زمان را نشان می‌دهد.



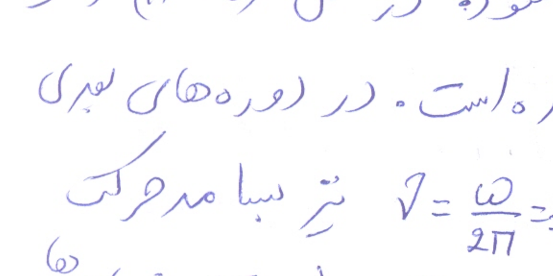
شکل (۲-۱۲)

کمیت

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (۲-۷۴)$$

نیز دورهٔ نوسان نام دارد. هرگاه به زمان t به اندازهٔ T افزوده شود مقدار x دوباره تکرار می‌شود. در شکل (۲-۱۲) وضعیت جابه‌جایی جسم در یک دورهٔ نوسان مشخص شده است. در دوره‌های بعدی این حرکت عیناً تکرار می‌شود. به کمیت $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ نیز بسامد حرکت گفته می‌شود. با توجه به تعریف دورهٔ نوسان روشن است که $\frac{1}{T}$ تعداد نوسان‌ها در واحد زمان است. این کمیت نیز بعد فیزیکی عکس زمان دارد. با مشتق‌گیری از رابطه (۲-۷۲) نسبت به زمان سرعت جسم در هر لحظه به صورت زیر به دست می‌آید

$$v(t) = A\omega\cos\omega t \qquad (۲-۷۵)$$

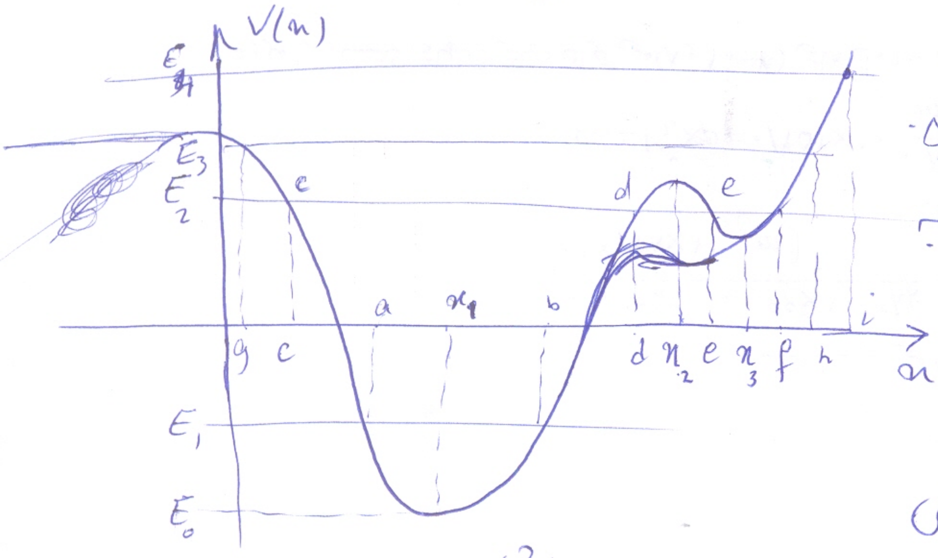


شکل (۲-۱۳)

که نمودار تغییرات زمانی آن به شکل (۲-۱۳) است. دامنه تغییرات سرعت بین $A\omega$ و $-A\omega$ است. بنابراین بیشینه سرعت $A\omega$ هنگام

عبور از نقطه تعادل اتفاق می‌افتد. از مقایسه روابط (۲-۷۲) و (۲-۷۴) می‌بینیم که توابع مکان و سرعت به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ با هم اختلاف فاز دارند. کمینه سرعت با بیشینه مکان و بیشینه سرعت با کمینه مکان مصادف است.

حال پس از مطالعه دستگاه جرم و فنر از روش انرژی پتانسیل، می‌توانیم همین روش را برای یک پتانسیل دلخواه نیز به کار ببریم. به عنوان مثال پتانسیل نامعینی که با نمودار شکل (۲-۱۴) داده شده است را در نظر بگیرید. می‌خواهیم انواع حرکت ذره‌ای به جرم m که تحت تأثیر چنین پتانسیلی است را بررسی کنیم. منظور از انواع حرکت، حرکتهای مختلفی است که به ازای مقادیر مختلف



(شکل ۲-۱۴)

ثابت E ممکن است رخ دهند. دقت کنید که E همواره برای یک حرکت معین ثابت است و ما در اینجا E را متغیر نمی‌دانیم، بلکه با هر مقدار ممکن E نوع حرکت را تعیین می‌کنیم. راهنمای اصلی عمل ما توجه به نامساوی (۲-۷۰) است.

کمترین مقدار ممکن انرژی E_0 است. به ازای این انرژی ذره در نقطه x_0 ساکن است. به ازای انرژی E_1 ذره در بازه $[a,b]$ همواره محصور است و بین دو نقطه بازگشت $x=a$ و $x=b$ حرکت تکرارشونده یا نوسانی انجام می‌دهد. این حرکت نوسانی لزوماً به شکل حرکت نوسانی سینوسی رابطه (۲-۷۲) نیست. نوسان سینوسی حرکت نوسانی هماهنگ نیز نامیده می‌شود و

منحصراً برای انرژی پتانسیل به شکل سهمی (شکل ۲-۱۱) اتفاق می افتد.

با انرژی E_2 ذره می تواند در یکی از دو بازه $[c, d]$ یا $[e, f]$ محصور باشد. اصطلاحاً به هر یک از این بازه ها یک چاه پتانسیل می گوییم. اگر ذره در چاه $[c, d]$ باشد هرگز به چاه $[e, f]$ راهی ندارد و برعکس. اینکه ذره در کدام چاه محصور باشد بستگی به شرایط اولیه دستگاه دارد.

با انرژی E_3 نیز مجدداً دو نقطه بازگشت g و h را داریم و ذره در بازه $[g, h]$ محصور است. در این حال هنگام رفت و برگشت بین نقاط ذکر شده سرعت ذره کم و زیاد می شود. هنگام عبور از کمینه x_0 بیشترین انرژی جنبشی و در نتیجه بیشترین سرعت را دارد. در عبور از نقطه بیشینه x_2 اندازه سرعت آن کاسته می شود و مجدداً تا نقطه x_3 افزایش می یابد. ~~[illegible]~~ پس تا نقطه بازگشت h سرعت کاهش می یابد تا صفر شود. به ازای انرژی E_4 وضعیت فرق می کند. با فرض آنکه در $x \to -\infty$ انرژی پتانسیل بینهایت میشود و به یک مقدار حدی میل کند مسیر ذره از سمت چپ نامتناهی است و فقط یک نقطه بازگشت در $x = i$ وجود دارد. اگر ذره به سمت چپ حرکت کند، تا ~~[illegible]~~ $-\infty$ به حرکت خود ادامه می دهد و هرگز برنمی گردد. اگر حرکت از ابتدا به سمت راست باشد، ذره تا نقطه بازگشت $x = i$ به سمت راست می رود و پس از یک لحظه سکون به سمت چپ باز می گردد و تا $-\infty$ ادامه حرکت می دهد.

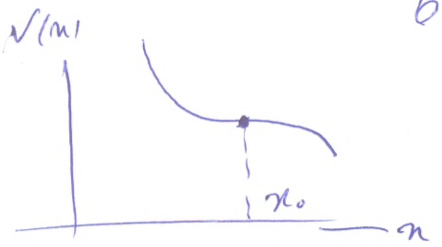
نقاط کمینه و بیشینه پتانسیل، نقاط تعادل دستگاه نامیده می شود. علت این نامگذاری آن است که در این نقاط $F(x) = -\frac{dV}{dx} = 0$، یعنی نیرویی وارد به

ذره در نقاط تعادل صفر است و اگر ذره را ساکن در آنها بگذاریم در همان نقطه باقی می ماند. اما یک تفاوت مهم فیزیکی میان نقاط کمینه و بیشینه وجود دارد. نقاط کمینه پتانسیل، نقاط تعادل پایدار و نقاط بیشینه، نقاط تعادل ناپایدار نام دارند. ببینیم علت این نامگذاری چیست. برای مثال به نقطه کمینه $x=x_1$ در شکل (۱۴-۲ الف) توجه کنید. سمت راست این نقطه تابع صعودی است و $F(x)=-\frac{dV}{dx}$ منفی، یعنی به سمت چپ است. بر عکس سمت راست نقطه تعادل پایدار x_1 تابع نزولی و نیرو به سمت راست است. یعنی در هر دو حال اگر ذره به سمت راست یا چپ نقطه تعادل پایدار منحرف شود نیروی وارد به آن به سمت نقطه تعادل است و ماهیتی بازگرداننده دارد. به بیان دیگر اگر ذره ای که در نقطه تعادل پایدار قرار گرفته به هر دلیلی اندکی از این نقطه منحرف شود، یعنی عاملی خارجی به آن مختصری انرژی بدهد جسم به سمت نقطه تعادل برمی گردد و از آن دور نمی شود.

حال به نقطه کمینه $x=x_2$ در شکل (۱۴-۲ ب) توجه کنید. سمت راست این نقطه تابع نزولی و نیروی $F(x)=-\frac{dV}{dx}$ مثبت است و سمت چپ آن، برعکس نیرو به سمت چپ است. یعنی ذره ای که در نقطه تعادل ناپایدار ساکن است اگر بر اثر اختلالی خارجی اندکی از این نقطه منحرف شود بر اثر نیروی وارده از این نقطه دور می شود و دیگر بر نمی گردد (مگر آنکه جلوتر به یک نقطه بازگشت برسد و برگردد، نظیر آنچه در شکل خاص ۲-۱۴ اتفاق افتاده است). اگر در ناحیه ای متناهی از محور x تابع انرژی پتانسیل مقدار ثابتی داشته باشد در تمام آن ناحیه نیرو صفر است. در نتیجه اگر در یکی

از نقاط این ناحیه ذره ساکن قرار گیرد بر اثر هر انحرافی نه دور می شود و نه باز می گردد. به این حالت تعادل بی تفاوت گفته می شود.

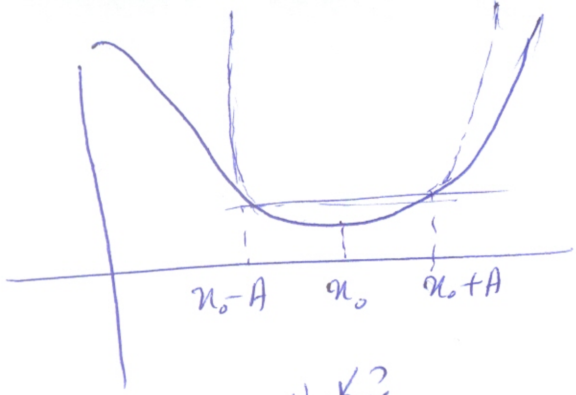
تفاوت نقاط تعادل پایدار و ناپایدار را با توجه به مشتق دوم تابع انرژی پتانسیل می توان تشخیص داد. در کمینه پتانسیل تقعر منحنی به سمت بالا و مشتق دوم مثبت است. در بیشینه پتانسیل نیز تقعر به سمت پایین و مشتق دوم $V(x)$ منفی است. بنابراین برای یافتن رفتار فیزیکی دستگاه در نزدیکی نقاط تعادل باید به مشتق دوم انرژی پتانسیل نگاه کرد. یک راه ساده دیگر نیز آن است که دستگاه را از نقطه تعادل منحرف کنیم؛ اگر انرژی دستگاه بیشتر شد آن نقطه، تعادل پایدار است و اگر کمتر شد تعادل ناپایدار است. نقاطی که در آنها هم مشتق اول و هم مشتق



شکل (۲-۱۵)

دوم صفر است نیز ناپایدار هستند. این نقاط نقاط فرینه دستگاه نام دارند که در عین حال نقطه عطف نیز هستند. شکل (۲-۱۵) نمونه‌ای از چنین وضعیتی را نشان می دهد. در نقطه $x=x_0$ از شکل مذکور اگر جسم به سمت چپ منحرف شود نیروی بازگرداننده آن را به x_0 برمی گرداند، اما اگر به راست منحرف شود نیروی وارد شده آن را از x_0 دور می کند. بنابراین روی هم رفته نقطه مذکور تعادل ناپایدار است.

حال اجازه دهید کمی دقیق تر به رفتار یک دستگاه حول و حوش یک نقطه تعادل پایدار نگاه کنیم. شکل (۲-۱۶) یک پتانسیل نامعین را نشان می دهد که در نقطه $x=x_0$ دارای یک نقطه تعادل پایدار است.



شکل (۲-۱۶)

فرض کنیم انرژی ذره فقط اندکی از انرژی پتانسیل نقطه x_0 بیشتر باشد. در این صورت ذره بین دو نقطه بازگشت که خیلی به نقطه x_0 نزدیک هستند و در نخستین تقریب به طور متقارن در دو سمت آن قرار گرفته اند رفت و برگشت می کند. از آنجا که فقط با نقاط نزدیک x_0 سروکار داریم، می توانیم تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ را در نزدیکی نقطه x_0 بسط تیلور دهیم.

$$V(x) = V(x_0) + \frac{dV}{dx}\Big|_{x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x_0}(x-x_0)^2 + \dots \qquad (۲-۷۶)$$

جمله اول مقدار ثابت است که در فیزیک مسئله نقشی ندارد. به سهولت می توان با انتخاب مبدأ پتانسیل جدید در نقطه x_0، این جمله را حذف کرد. جمله دوم به دلیل آنکه نقطه x_0 نقطه تعادل است و در آن $F(x) = -\frac{dV}{dx} = 0$ حذف می شود. بنابراین اولین جمله مهم در رفتار پتانسیل نزدیکی نقطه تعادل پایدار جمله مجذوری متناسب با $(x-x_0)^2$ است. اگر مبدأ مختصات را نیز به نقطه x_0 منتقل کنیم رفتار انرژی پتانسیل در اولین تقریب رفتار نوسانگر هماهنگ $\frac{1}{2}kx^2$ است که در آن

$$k = \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x_0} > 0 \qquad (۲-۷۷)$$

مثبت بودن کمیت k به دلیل آن است که نقطه x_0 کمینه پتانسیل است. آنچه بسط تیلور (۲-۷۶) نشان می دهد آن است که در نزدیکی نقطه x_0

از شکل (۳-۱۶) منحنی انرژی پتانسیل اصلی (خط پر) را می توان با

یک منحنی انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ (سهمی خط چین) تقریب

زد. در نقطه x_0 دو منحنی همدیگر را تلاقی کرده اند، پس مقدار V در

آنها یکی است و بر هم مماسند، پس مشتق اول آنها نیز یکسان و صفر است

و بالاخره تقعر آنها نیز یکسان است. بنابراین اندازه k سهمی نوسانگر

هماهنگ فرضی یا $\frac{d^2V}{dx^2}$ در آن نقطه یکسان است. روشن است که

اگر از نقطه x_0 بیشتر فاصله بگیریم توانهای بالاتر $(x-x_0)$ در بسط تیلور

(۳-۶۷) اهمیت می یابند و منحنی $V(x)$ از منحنی خط چین نوسانگر هماهنگ

فاصله می گیرد. به این ترتیب می توان به اهمیت مسئله نوسانگرها هماهنگ

بیشتر پی برد. در حقیقت هر پتانسیل دلخواهی در نزدیکی نقاط کمینه خود

رفتارش رفتار نوسانگر هماهنگ است. کلیه دستگاههای مکانیکی

با از دست دادن انرژی در نقاط تعادل پایدار خود آرام می گیرند و

چنانچه اختلالی بر آنها اثر کند حول و حوش این وضعیت نوسان انجام

می دهند بسامد نوسانهای کوچک حول نقطه تعادل پایدار از رابطه

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{d^2V}{dx^2}\bigg|_{x_0}} \qquad (۳-۶۸)$$

به دست می آید.

۳-۷- نیروهای وابسته به مکان در سه بعد -

فرض کنیم ذره ای به جرم m در فضای سه بعدی تحت تأثیر نیرویی قرار دارد

که هر سه مؤلفه‌ی آن توابعی از نقاط فضا هستند. در مختصات دکارتی چنین نیرویی با رابطه زیر توصیف می‌شود

$$\vec{F} = F_x(x,y,z)\,\hat{e}_x + F_y(x,y,z)\,\hat{e}_y + F_z(x,y,z)\,\hat{e}_z \qquad (۷۹-۲)$$

به چنین کمیتی در حالت سه بعدی یک میدان برداری گفته می‌شود. در یک میدان برداری به هر نقطه فضا با مختصات دکارتی x، y و z یک بردار نسبت داده می‌شود که معادل با سه تابع F_x، F_y و F_z است. در مقابل، در یک میدان نرده‌ای به هر نقطه x، y و z کمیت نرده‌ای $\varphi(x,y,z)$ نسبت داده می‌شود.

معادله حرکت نیوتن در شکل برداری آن به صورت زیر است:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}) \qquad (۸۰-۲)$$

اگر مانند آنچه در یک بعد انجام دادیم، در اینجا نیز طرفین رابطه (۲-۸۰) را در بردار $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ ضرب داخلی می‌کنیم. حاصل چنین است

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{F}(\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

با ضرب کردن طرفین در dt و انتگرال گیری روی طرفین داریم

$$\int m\vec{v}\cdot d\vec{v} = \int \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \qquad (۸۱-۲)$$

از آنجا که $\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2$ (که v اندازه بردار سرعت است) و $d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 2\vec{v}\cdot d\vec{v}$، سمت چپ رابطه (۲-۸۱) انتگرالی از $d(\frac{1}{2}mv^2)$ است که کماکان تغییرات انرژی جنبشی را می‌دهد:

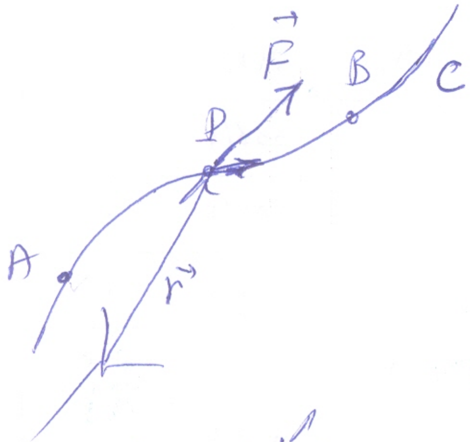
$$\int m\vec{v}\cdot d\vec{v} = \int d(\tfrac{1}{2}mv^2) = \Delta K$$

واما سمت راست رابطه (۴-۸۱) در سه بعد شکل پیچیده‌تری از یک بعد دارد. این کمیت کماکان کار نیروی $\vec{F}$ در جابه‌جایی ذره نام دارد و به صورت زیر است

$$W=\int\left[F_x(x,y,z)\,dx+F_y(x,y,z)\,dy+F_z(x,y,z)\,dz\right] \qquad (۴-۸۲)$$

که در آن از ضرب داخلی بردار $\vec{F}$ در رابطه ۴-۷۹ در بردار جابه‌جایی بینهایت کوچک

$$d\vec{r}=dx\,\hat{e}_x+dy\,\hat{e}_y+dz\,\hat{e}_z$$



شکل (۴-۱۷)

استفاده کرده‌ایم. در یک توصیف هندسی فرض کنید ذره روی خم C از نقطه A تا نقطه B حرکت کرده است. در نقطه نامشخص P روی مسیر که با بردار مکان $\vec{r}$ توصیف شده میدان نیرو شکل $\vec{F}(\vec{r})$ را دارد و بردار جابه‌جایی بردار بینهایت کوچک $d\vec{r}$ است که در شکل نشان داده شده است. کمیت $dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}$ کار نیروی F در جابه‌جایی بینهایت کوچک $d\vec{r}$ است، که کمیتی بینهایت کوچک است. این کمیت علاوه بر اندازه $|\vec{F}|$ و اندازه $|d\vec{r}|$ به زاویه دو بردار نیز بستگی دارد. از برهم‌نهی مقادیر دیفرانسیلی dW در حرکت از نقطه A تا نقطه B کمیت $W_{AB}^{(C)}$ به دست می‌آید که کار نیروی F در جابه‌جایی از A تا B روی مسیر C است. به این ترتیب رابطه (۴-۸۱) به قضیه کار-انرژی در سه بعد با بیان زیر منتهی می‌شود

$$K_B-K_A\equiv \frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=\int_{A\ (\text{روی مسیر } C)}^{B}\vec{F}\cdot d\vec{r}\equiv W_{AB}^{(C)}$$