

ریاضی مهندسی پیشرفته ۱

جبر خطی و حساب تغییرات

تألیف

دکتر علیرضا شهیدی (عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی اصفهان)

دکتر مجتبی محزون (عضو هیئت علمی دانشگاه شیراز)

قادر متعال را شاکرم که بار دیگر توان و زمان لازم را عطايم کرد تا بتوانم یکی دیگر از جزوات درسی را که از زمان دانشجویی در اواخر دهه هفتاد شمسی در محضر استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محزون نوشته و مسائل حل شده متعددی را که تا به امروز جمع آوری کرده بودم به صورت مجلد درآورم، با تقاضای بخشش بابت همه کاستی ها سخن را با حکایتی از سعدی کوتاه میکنم

حکیمی را پرسیدند چندین درخت نامور که خدای عزوجل آفریده است و برومند هیچ یک را آزاد نخوانده اند مگر سرو را که ثمره های ندارد. درین چه حکمت است؟ گفت هر درختی را ثمره معین است که به وقتی معلوم به وجود آن تازه آید و گاهی به عدم آن پشمرده شود و سرو را هیچ از این نیست و همه وقتی خوشست و این است صفت آزادگان

پس از خلیفه نخواهد گذشت در بغداد

به آنچه می گذرد دل من که دلبی

ورت ز دست نید چو سرو باش آزاد

کرت ز دست بر آید چو نخل باش کریم

علیرضا شهیدی

استادیار دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی اصفهان

فهرست مطالب

۱	فصل اول - ماتریسها و عملیات مقدماتی سطری
۱	۱-۱ مقدمه
۳	۲-۱ جمع و ضرب ماتریسها
۳	۱-۲-۱ تعریف جمع و ضرب
۵	۲-۲-۱ تقسیم بندی ماتریسها
۸	۳-۲-۱ ترانهاد و الحاقی یک ماتریس
۱۱	۴-۲-۱ دستگاه معادلات جبری
۱۳	۳-۱ ویژگی ماتریسها
۱۳	۱-۳-۱ ماتریس همانی
۱۴	۲-۳-۱ ماتریس معکوس
۱۷	۳-۳-۱ ماتریس متعامد و یکانی
۲۰	۴-۱ ماتریسهای معادل سطری
۲۰	۱-۴-۱ عملیات مقدماتی سطری
۲۵	۲-۴-۱ ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی
۲۷	۵-۱ تمرینها
۳۱	فصل دوم - فضای برداری
۳۱	۱-۲ میدان اعداد
۳۴	۲-۲ فضای برداری
۳۴	۱-۲-۲ تعریف فضای برداری

۴۳	۲-۲-۲ زیر فضا
۴۷	۳-۲-۲ گسترش
۴۸	۴-۲-۲ وابستگی خطی و استقلال خطی
۴۹	۵-۲-۲ بردارهای پایه و بُعد یک فضای برداری
۶۰	۶-۲-۲ مختصات
۶۲	۷-۲-۲ تغییر پایه و مختصات
۶۶	۳-۲ تمرین ها
۷۳	فصل سوم - تبدیلهای خطی
۷۳	۱-۳ تعریف یک تبدیل خطی
۷۸	۲-۳ هسته یک تبدیل خطی
۷۹	۳-۳ تصویر یک تبدیل خطی
۸۵	۴-۳ نمایش ماتریسی تبدیلهای خطی
۸۸	۵-۳ تغییر پایه و عملگرهای خطی
۹۱	۶-۳ جبر تبدیلهای خطی
۹۱	۱-۶-۳ جمع تبدیلهای خطی و ضرب در اسکالر
۹۳	۲-۶-۳ ضرب تبدیل های خطی
۹۴	۳-۶-۳ تبدیل معکوس
۹۷	۷-۳ فضای مستوی
۹۷	۱-۷-۳ تعریف فضای مستوی
۹۸	۲-۷-۳ تعریف خط در $\mathbb{R}^N$

۹۹	۳-۷-۳ تعریف صفحه در $\mathbb{R}^N$
۱۰۳	۳-۷-۴ تعریف ابرصفحه در $\mathbb{R}^N$
۱۰۵	۳-۸ تمرین ها
۱۱۱	فصل چهارم - دترمینان
۱۱۱	۴-۱ مقدمه و تعریف دترمینان
۱۱۴	۴-۲ تأثیر عملیات مقدماتی سطری بر دترمینان
۱۱۴	۴-۲-۱ عملیات نوع اول
۱۱۴	۴-۲-۲ عملیات نوع دوم
۱۱۵	۴-۲-۳ عملیات نوع سوم
۱۱۷	۴-۳ کهاد و همسازه
۱۱۷	۴-۳-۱ کهاد یا دترمینان جزء
۱۱۸	۴-۳-۲ کهاد مکمل و همسازه
۱۲۰	۴-۴ معکوس یک ماتریس
۱۲۲	۴-۵ تمرین ها
۱۲۵	فصل پنجم - مقادیر ویژه و توابع ماتریسی
۱۲۵	۵-۱ مقادیر ویژه و فضاها و ویژه عملگرهای خطی
۱۲۵	۵-۱-۱ مقدمه
۱۲۶	۵-۱-۲ تعریف
۱۳۲	۵-۲ توابع یک ماتریس مربع

۱۳۲	۵-۲-۱ مقدمه
۱۳۳	۵-۲-۲ کثیرالجمله با ضرایب ماتریسی
۱۳۶	۴-۲-۳ معادله مشخصه یک ماتریس مربع
۱۳۸	۵-۳-۳ روشهای محاسبه توابع ماتریسی
۱۳۸	۵-۳-۱ اگر ماتریس قابل قطری شدن باشد
۱۴۰	۴-۳-۲ دستورالعمل سیلوستر
۱۴۲	۴-۳-۳ محاسبه fA در حالت کلی
۱۴۴	۵-۴ چند جملههای مینیمال
۱۴۹	۵-۵ تمرین ها
۱۵۳	فصل ششم - فضای برداری با ضرب داخلی
۱۵۳	۶-۱ ضرب داخلی
۱۵۳	۶-۱-۱ تعریف
۱۵۴	۶-۱-۲ ضربهای داخلی استاندارد
۱۵۸	۶-۲ تصویر عمودی و زیرفضای عمودی
۱۵۸	۶-۲-۱ فرآیند گرام اشمیت
۱۶۳	۶-۲-۲ بهترین تقریب
۱۶۶	۶-۲-۳ مکمل عمودی
۱۷۰	۶-۲-۴ نامساوی بسل
۱۷۱	۶-۲-۵ قضیه تجزیه QR
۱۷۳	۶-۲-۶ درونیابی خطی و بهترین حل
۱۷۶	۶-۳ عملگرهای خودالحاقی و یکانی

۱۷۶	۶-۳-۱ عملگر الحاقی
۱۷۸	۶-۳-۲ عملگر خود الحاقی
۱۷۹	۶-۳-۳ عملگر یکانی
۱۸۸	۶-۴-۴ ماتریسهای ساده و نرمال
۱۸۸	۶-۴-۱ ماتریسهای ساده
۱۸۸	۶-۴-۲ ماتریسهای نرمال
۱۹۳	۶-۵ تمرینها

فصل هفتم - معادلات دیفرانسیل خطی

۱۹۹	۷-۱ مقدمه
۲۰۱	۷-۲ دستگاه معادلات همگن
۲۰۱	۷-۲-۱ ماتریس انتقال حالت
۲۰۴	۷-۲-۲ دستگاه با ضرائب ثابت
۲۰۶	۷-۲-۳ دستگاه با ضرائب متغیر
۲۰۸	۷-۲-۴ دستگاه همگن و ماتریزان
۲۰۹	۷-۳-۳ دستگاه غیر همگن
۲۰۹	۷-۳-۱ دستگاه غیر همگن با ضرائب ثابت
۲۰۹	۷-۳-۱ دستگاه غیر همگن با ضرائب متغیر
۲۱۰	۷-۴ روشهای عددی
۲۱۱	۷-۵ تمرین ها

فصل هشتم - فرمهای درجه دوم

۲۱۳	۸-۱ مقدمه
۲۱۵	۸-۲ فرمهای درجه دوم
۲۱۵	۸-۲-۱ تعاریف مربوط به فرمهای درجه دوم
۲۱۷	۸-۲-۲ قضایای مربوط به فرمهای درجه دوم
۲۲۵	۸-۳ آزمون مشتق دوم
۲۲۵	۸-۳-۱ اکسترمم توابع چند متغیره
۲۲۸	۸-۳-۲ شرایط جانبی و ضرایب لاگرانژ
۲۳۱	۸-۴ قطری سازی همزمان با استفاده از همنهشتی
۲۳۵	۸-۵ تمرین ها
۲۳۹	فصل نهم - حساب تغییرات
۲۳۹	۹-۱ مقدمه و مبانی حساب تغییرات
۲۳۹	۹-۱-۱ لم اساسی و ساده ترین مسئله در تئوری تغییرات
۲۴۴	۹-۱-۲ تعریف اپراتور تغییرات یا وردش
۲۵۴	۹-۱-۳ فانکشنالهای چند متغیره و قیود جانبی
۲۵۴	۹-۲ اصل کار مجازی
۲۵۸	۹-۳ کاربرد اصل کار مجازی
۲۶۰	۹-۴ مسائل مهندسی در تغییرشکلهای کوچک
۲۶۰	۹-۴-۱ میله تحت اثر بار محوری
۲۶۳	۹-۴-۲ تیر برنولی تحت اثر خمش و برش
۲۷۰	۹-۵ تمرین ها

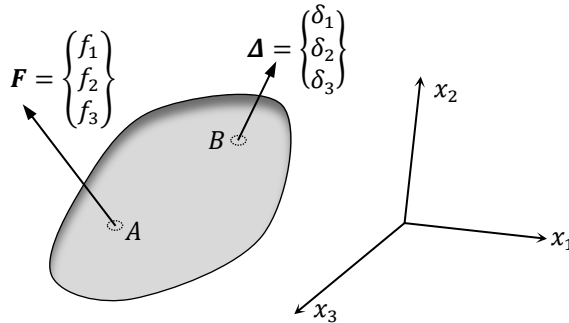
فصل اول

ماتریس‌ها و عملیات مقدماتی سطری

۱-۱ مقدمه

در طبیعت برای اندازه‌گیری و یا تعریف برخی از مشخصات فیزیکی، صرفاً به ارائه یک عدد نیاز است به عنوان مثال درجه حرارت در یک نقطه از یک جسم مادی با یک عدد مشخص می‌شود به این گونه کمیت‌ها اسکالر گفته می‌شود؛ لیکن اندازه‌گیری و یا توصیف کامل برخی دیگر از کمیت‌ها، مستلزم ارائه بیش از یک عدد است به عنوان مثال در مسائل مهندسی برای تعریف نیروی اعمالی در یک نقطه از یک جسم مادی، علاوه بر مقدار آن بایستی راستای آن نیز بیان شود که در این صورت در فضای سه بعدی نیاز به ارائه سه عدد است؛ این سه عدد در کنار یکدیگر می‌بین یک نیرو به نام F هستند و می‌توان آن را با یک آرایش سطری به صورت $F = \langle f_1 \ f_2 \ f_3 \rangle$ و یا ستونی نمایش داد که اصطلاحاً بردار نامیده می‌شود؛ همچنین کمیت‌های دیگری هستند که تعریف کامل آنها به ارائه چندین عدد نیاز دارد به عنوان مثال فرض کنید در فضای سه بعدی بخواهیم ساده‌ترین و در عین حال، کامل‌ترین رابطه خطی بین

نیروی F اعمالی به نقطه A از یک جسم مادی پایدار مطابق شکل (۱-۱) را با تغییر مکان Δ در نقطه دیگری مانند B بیان کنیم



شکل (۱-۱) تغییر مکان یک نقطه از جسم مادی تحت اثر یک نیروی متمرکز

از آنجائی که جابجائی و نیرو هر دو ماهیت برداری دارند و از طرفی بایستی هر مؤلفه نیرو به هر سه مؤلفه جابجائی مربوط باشد لذا واضح است که ساده‌ترین رابطه خطی بین آنها قاعدتاً باید بر حسب نُه عدد k_{ij} به صورت زیر بیان شود

$$\begin{cases} f_1 = k_{11}\delta_1 + k_{12}\delta_2 + k_{13}\delta_3 \\ f_2 = k_{21}\delta_1 + k_{22}\delta_2 + k_{23}\delta_3 \\ f_3 = k_{31}\delta_1 + k_{32}\delta_2 + k_{33}\delta_3 \end{cases}$$

و اگر این اعداد را در یک آرایش سطری-ستونی مرتب کنیم ماتریس سختی k_{ij} تشکیل می‌شود یعنی آرایشی سه در سه از اعداد که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$F = K\Delta = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}$$

در واقع در یک سیستم چند درجه آزادی مفهوم ماتریس سختی به همین ترتیب تعریف و نمایان می‌شود.

یک ماتریس در واقع آرایش منظمی از اعداد است که در دو راستای سطری و ستونی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند؛ به عنوان مثال اگر A یک ماتریس با مرتبه $M \times N$ باشد یعنی دارای M سطر و N ستون است که اگر درایه سطر i ام و ستون j ام آن را با نمایش اندیسی a_{ij} نمایش دهیم می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

اگر تعداد سطرها و ستونهای یک ماتریس برابر باشد آن ماتریس مربعی نامیده می‌شود، همچنین درایه‌های a_{11} ، a_{22} و الی a_{NN} درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس هستند و مجموع آنها اصطلاحاً رد یا تریس ماتریس $\text{trace}(A) = \sum a_{ii}$ نامیده می‌شود.

۲-۱ جمع و ضرب ماتریس‌ها

۲-۱-۱ تعریف جمع و ضرب

اگر دو ماتریس تعداد سطر و ستون یکسانی داشته باشند مثلاً $A_{M \times N}$ و $B_{M \times N}$ باشد در این صورت می‌توان این دو ماتریس را با هم جمع و یا از یکدیگر کم کرد که حاصل، ماتریسی از همان نوع و مرتبه می‌شود به این صورت که

$$\left. \begin{aligned} C &= A \pm B \\ c_{ij} &= a_{ij} \pm b_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

همچنین اگر اسکالری مانند α در یک ماتریس ضرب شود در این صورت در تک تک درایه‌های آن ماتریس ضرب شده و مرتبه ماتریس را تغییر نمی‌دهد و می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} C &= \alpha A \\ c_{ij} &= \alpha a_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

ضرب ماتریس‌ها و نحوه تعریف آن برگرفته از مسائل کاربردی مهندسی است به این صورت که اگر ماتریس $A_{M \times N}$ و ماتریس $B_{N \times P}$ باشد حاصلضرب AB برابر است با

$$\left. \begin{aligned} C &= AB \\ c_{ij} &= \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj} \end{aligned} \right\} \quad (۴-۱)$$

که ماتریس $C_{M \times P}$ خواهد بود و واضح است که این ضرب از قاعده جابجائی تبعیت نمی‌کند ولی شرکت‌پذیر است همچنین اگر $A_{N \times N}$ و $B_{N \times N}$ هر دو ماتریس‌های مربعی باشند در حالت کلی $BA \neq AB$ در ضرب از ویژگی جابجائی تبعیت نمی‌کنند البته همواره می‌توان ماتریس‌هایی را یافت که در ضرب جابجاپذیر باشند به عنوان مثال کلیه ماتریس‌ها به صورت

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_N A^N$$

که تابع دلخواهی مانند f از یک ماتریس مشخص مانند A باشند در ضرب با یکدیگر از قاعده جابجائی تبعیت می‌کنند یعنی می‌توان نوشت

$$f(A)g(A) = g(A)f(A)$$

به قسمی که g هر تابع دلخواه دیگری می‌تواند باشد. در حالت کلی اگر $BA = AB$ یعنی دو ماتریس در ضرب با یکدیگر از ویژگی جابجائی تبعیت کنند در این صورت هر توانی از این ماتریس‌ها نیز در ضرب جابجاپذیرند یعنی رابطه زیر

$$B^n A^m = A^m B^n$$

به ازای هر مقدار m, n اعداد صحیح دلخواه نیز برقرار است و یا به عنوان مثال دیگر می‌توان گفت اتحاد زیر

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

برقرار است اگر و فقط اگر دو ماتریس A, B در ضرب با یکدیگر از ویژگی جابجائی تبعیت کنند. همچنین از رابطه حاصلضرب ماتریسی $BA = BC$ در حالت کلی نمی‌

توان نتیجه گرفت که $A = C$ است فقط در حالت خاصی که ماتریس B مربعی و معکوس پذیر باشد این نتیجه گرفته می‌شود که در ادامه فصل به آن پرداخته می‌شود.

۲-۲-۱ تقسیم بندی ماتریس‌ها

(الف) تقسیم بندی سطری و یا ستونی - هر ماتریس را می‌توان به شکل دلخواه به زیرماتریس‌ها تقسیم بندی کرد به عنوان مثال اگر $A_{M \times N}$ باشد و آنرا به صورت سطری تقسیم بندی کنیم خواهیم داشت

$$A = \begin{Bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_M \end{Bmatrix}_{M \times N} \quad \hat{a}_i = \langle a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{iN} \rangle_{1 \times N} \quad (5-1)$$

به قسمی که $\hat{a}_i$ به صورت یک بردار سطری $1 \times N$ همان سطر i ام ماتریس A است؛ و به طور مشابه اگر $B_{N \times P}$ باشد و آنرا به صورت ستونی تقسیم بندی کنیم خواهیم داشت

$$B = \langle b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_P \rangle_{N \times P} \quad b_i = \begin{Bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{Ni} \end{Bmatrix}_{N \times 1} \quad (6-1)$$

به قسمی که b_i به صورت یک بردار ستونی $N \times 1$ ستون i ام ماتریس B است. در یک دستگاه معادلات جبری $Ax = y$ با نمایش ستونی متشکل از M معادله و N مجهول به صورت

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{Bmatrix} \quad (7-1)$$

با تقسیم بندی ماتریس A به صورت ستونی داریم

$$Ax = \langle a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N x_i a_i \quad (۸-۱)$$

به بیان دیگر بردار به دست آمده از حاصلضرب Ax در هر صورت برابر با ترکیب خطی ستونهای ماتریس A خواهد بود؛ همچنین در یک دستگاه معادلات جبری $x^T B = y^T$ با نمایش سطری متشکل از P معادله و N مجهول به صورت زیر

$$\langle x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N \rangle \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1P} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2P} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NP} \end{bmatrix} = \langle y_1 \ y_2 \ \dots \ y_P \rangle \quad (۹-۱)$$

با تقسیم بندی ماتریس B به صورت سطری داریم

$$x^T B = \langle x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N \rangle \begin{Bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_N \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N x_i \hat{b}_i \quad (۱۰-۱)$$

به بیان دیگر بردار سطری به دست آمده از حاصلضرب $x^T B$ در هر صورت برابر با ترکیب خطی سطرهاى ماتریس B خواهد بود.

قضیه ۱-۱ اگر ماتریس $A_{M \times N}$ و ماتریس $B_{N \times P}$ باشد و داشته باشیم $C_{M \times P} = AB$ در این صورت می توان گفت سطرهاى C برابر با ترکیب خطی سطرهاى B و ستونهای آن ترکیب خطی ستونهای A خواهند بود.

اگر $C = AB$ باشد در این صورت با تقسیم بندی ستونی ماتریس B می توان نوشت

$$\begin{aligned} C &= AB = A \langle b_1 \ b_2 \ \dots \ b_P \rangle_{M \times P} \\ C &= \langle Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_P \rangle_{M \times P} \end{aligned} \quad c_i = Ab_i \quad (۱۱-۱)$$

به قسمی که c_i ستون i ام ماتریس C است و برابر است با حاصل ضرب ماتریس A در ستون i ام ماتریس B در نتیجه بر اساس رابطه (۸-۱) c_i برابر ترکیب خطی ستونهای ماتریس A خواهد بود. به طور مشابه با تقسیم بندی سطری ماتریس B داریم

$$C = AB = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_M \end{pmatrix} B \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a}_1 B \\ \hat{a}_2 B \\ \vdots \\ \hat{a}_M B \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow c_{ij} = \hat{a}_i b_j \quad (۱۲-۱)$$

$$\hat{c}_i = \hat{a}_i B = \sum_{j=1}^N a_{ij} \hat{b}_j$$

به قسمی که $\hat{c}_i$ سطر i ام ماتریس C است و همانطور که مشاهده می‌شود برابر با حاصل ضرب سطر i ام ماتریس A در ماتریس B است در نتیجه بر اساس رابطه (۱۰-۱) می‌توان گفت $\hat{c}_i$ برابر ترکیب خطی از سطرهاى B است.

(ب) تقسیم بندی دلخواه - لازم به ذکر است که تقسیم بندی هر ماتریس مشخص به زیرماتریس‌ها به تنهایی کاملاً دلخواه است لیکن در ضرب ماتریس‌ها این تقسیم بندی بایستی به گونه‌ای باشد که با قوانین ضرب ماتریسی همخوانی داشته باشند به عنوان مثال اگر یک ماتریس $(M+R) \times (N+P)$ به صورت زیر تقسیم بندی شود

$$\begin{bmatrix} A_{M \times N} & B_{M \times P} \\ C_{R \times N} & D_{R \times P} \end{bmatrix}_{(M+R) \times (N+P)}$$

و به طور مشابه اگر یک ماتریس دیگر $(N+P) \times (S+K)$ به صورت

$$\begin{bmatrix} E_{N \times S} & F_{N \times K} \\ G_{P \times S} & H_{P \times K} \end{bmatrix}_{(N+P) \times (S+K)}$$

تقسیم بندی شود در این صورت می‌توان حاصل ضرب این دو ماتریس را با این نحوه تقسیم بندی به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{M \times N} & B_{M \times P} \\ C_{R \times N} & D_{R \times P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{N \times S} & F_{N \times K} \\ G_{P \times S} & H_{P \times K} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}_{(M+R) \times (S+K)} \end{aligned} \quad (۱۳-۱)$$

به قسمی که ماتریس حاصل یک ماتریس $(M + R) \times (S + K)$ خواهد بود

مثال (۱-۱)

به عنوان مثال فرض کنید ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد و بخواهیم حاصلضرب $C = AB$ را با تقسیم بندی ماتریس A به صورت زیر به دست آوریم

$$A = \langle A_{11} \quad A_{12} \rangle \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

در این صورت ماتریس B لزوماً بایستی به صورت زیر تقسیم بندی شود

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix}, B_{21} = \langle 0 \quad 2 \rangle, B_{22} = 1$$

تا با ضرب ماتریسها سازگار باشد و بنابراین می توان نوشت

$$C = \langle C_{11} \quad C_{12} \rangle = \langle A_{11} \quad A_{12} \rangle \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \quad , \quad C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

که با انجام عملیات ضرب زیرماتریسهای فوق خواهیم داشت

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \langle 0 \quad 2 \rangle = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} 1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

که در نهایت ماتریس برابر خواهد شد با $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

۳-۲-۱ ترانزاده و الحافی یک ماتریس

همانطور که در قبل بیان شد اگر ماتریس $A_{M \times N}$ باشد در این صورت a_{ij} درایه سطر i ام و ستون j ام آن است به این ترتیب، ترانزاده^۱ این ماتریس با A^T نمایش داده شده که درایه سطر i ام و ستون j ام آن a_{ji} می‌شود و به شکل ماتریسی می‌توان نوشت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{M1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{M2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix} \quad (۱۴-۱)$$

به بیان دیگر اگر $B = A^T$ باشد در این صورت می‌توان نوشت $b_{ij} = a_{ji}$ با این تعریف ماتریس مربعی A متقارن نامیده می‌شود اگر داشته باشیم $A = A^T$ و یا به بیان اندیسی $a_{ij} = a_{ji}$ به عنوان مثال در حالت خاص ماتریس‌های 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3+i & 2-2i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix}$$

A یک ماتریس متقارن حقیقی است و B یک ماتریس متقارن مختلط است؛ همچنین ماتریس مربعی A پادمتقارن است اگر $A = -A^T$ و یا به بیان اندیسی $a_{ij} = -a_{ji}$ به عنوان مثال در حالت خاص ماتریس‌های 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2+3i \\ -2-3i & 0 \end{bmatrix}$$

A یک ماتریس پادمتقارن حقیقی و B یک ماتریس پادمتقارن مختلط است همانطور که مشاهده می‌شود درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس پادمتقارن لزوماً صفر هستند. با این تعریف هر ماتریس مربعی دلخواه مانند A را می‌توان به صورت منحصر به فرد به مجموع دو قسمت متقارن و پادمتقارن به صورت زیر تقسیم کرد

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \\ A &= A_S + A_A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \end{aligned} \right\} \quad (۱۵-۱)$$

^۱ Transpose

به عنوان مثال در حالت خاص زیر برای یک ماتریس حقیقی $A_{2 \times 2}$ داریم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

همچنین این تجزیه، منحصر به فرد است چراکه اگر یک ماتریس به دو شکل متفاوت مانند زیر به مجموع دو قسمت متقارن و پادمتقارن تجزیه شده باشد داریم

$$\left. \begin{aligned} A &= A_{S1} + A_{A1} \\ A &= A_{S2} + A_{A2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A_{S1} - A_{S2}) = (A_{A2} - A_{A1})$$

رابطه فوق بدان معنی است که بایستی ماتریس متقارن $(A_{S1} - A_{S2})$ با ماتریس پادمتقارن $(A_{A2} - A_{A1})$ برابر باشد که نتیجه می شود هر دو برابر ماتریس صفر هستند بنابراین $A_{S1} = A_{S2}$ و $A_{A2} = A_{A1}$ یعنی این تجزیه، لزوماً منحصر به فرد است.

همچنین ترانهاد هرمیتی یک ماتریس قابل تعریف است؛ اگر $A_{M \times N}$ یک ماتریس با درایه های مختلط باشد در این صورت ترانهاد هرمیتی یا ترانهاد مزدوج آن با A^* نمایش داده شده که درایه سطر i ام و ستون j ام آن $\bar{a}_{ji}$ می شود به بیان دیگر اگر $B = \bar{A}^T = A^*$ باشد در این صورت $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$ خواهد بود و به شکل ماتریسی می توان نوشت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{M1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & & \bar{a}_{M2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1N} & \bar{a}_{2N} & \dots & \bar{a}_{MN} \end{bmatrix} \quad (۱۶-۱)$$

متعاقباً ماتریس هرمیتی تعریف می شود به این صورت که ماتریس مربعی A با درایه های مختلط، هرمیتی است اگر $A = A^*$ و یا به بیان اندیسی $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ باشد به عنوان مثال در حالت خاص $A_{2 \times 2}$ ماتریس زیر

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس هرمیتی است و همانطور که مشاهده می شود درایه های روی قطر اصلی آن لزوماً حقیقی هستند؛ همچنین ماتریس مربعی A پادهرمیتی است اگر داشته

باشیم $A = -A^*$ و یا به بیان اندیسی $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$ به عنوان مثال در حالت خاص $A_{2 \times 2}$ ماتریس زیر

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix}$$

یک ماتریس پادهرمیتی است و همانطور که مشاهده می‌شود درایه‌های روی قطر اصلی آن لزوماً موهومی محض هستند. بنابراین هر ماتریس مربعی با درایه‌های مختلط مانند A را می‌توان به صورت منحصر به فرد به دو قسمت هرمیتی و پادهرمیتی تقسیم کرد

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{2}(a_{ij} + \bar{a}_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - \bar{a}_{ji}) \\ A &= \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*) \end{aligned} \right\} \quad (۱۷-۱)$$

که با استدلالی مشابه حالت قبل می‌توان ثابت کرد که این تجزیه، منحصر به فرد است به عنوان مثال در حالت خاص زیر برای یک ماتریس مختلط $A_{2 \times 2}$ داریم

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & 5-3i \\ 1-i & 3-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2i & 2-2i \\ -2-2i & -i \end{bmatrix}$$

با تعاریف اخیر کاملاً واضح است که یک ماتریس هرمیتی با درایه‌های حقیقی، متقارن است و هر ماتریس پادهرمیتی با درایه‌های حقیقی، پادمتقارن است و یا به بیان دیگر یک ماتریس متقارن حقیقی حالت خاصی از یک ماتریس هرمیتی است و یک ماتریس پادمتقارن حقیقی، پادهرمیتی است.

۴-۲-۱ دستگاه معادلات جبری

هر چند به صورت مختصر در انتهای این فصل و به طور مفصل در فصل آینده به حل دستگاه معادلات جبری و بررسی سازگاری و شرایط وجود جواب برای آن پرداخته می‌شود لیکن در اینجا لازم است یادآوری مختصری به شکل مفهومی به شرایط وجود جواب برای یک دستگاه معادلات جبری بشود؛ به طور کلی هر دستگاه معادلات جبری

شامل M معادله و N مجهول را می‌توان به صورت ماتریسی $Ax = b$ و یا به شکل زیر نوشت

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{Bmatrix} = b$$

به قسمی $A_{M \times N}$ یک ماتریس مشخص است که اصطلاحاً ماتریس ضرایب نامیده می‌شود، بردار مجهولات و $b_{M \times 1}$ یک بردار مشخص است که اگر $b = 0$ برابر صفر باشد دستگاه معادلات $Ax = 0$ همگن نامیده می‌شود. لازم به ذکر است که لزوماً M به معنای تعداد معادلات مستقل نیست و همچنین تعداد معادلات مستقل نمی‌تواند بیشتر از تعداد مجهولات باشد چراکه به منزله وجود تناقض در ساختار معادلات است.

الف) دستگاه همگن: برای دستگاه همگن $Ax = 0$ در حالتی که $M < N$ باشد بدان معنی است که تعداد معادلات مستقل لزوماً کمتر از تعداد مجهولات است و لذا دستگاه، بی‌نهایت جواب دارد و اصطلاحاً دستگاه دارای حل غیربدیهی است. لیکن در حالتی که $M \geq N$ باشد نمی‌توان به صراحت در مورد وجود و یا عدم وجود جواب اظهار نظر کرد لیکن اگر تعداد معادلات مستقل بزرگتر و یا برابر با تعداد مجهولات باشد می‌توان به صراحت گفت که دستگاه همگن $Ax = 0$ صرفاً دارای حل بدیهی $x = 0$ است.

الف) دستگاه ناهمگن: شرط وجود جواب برای دستگاه ناهمگن $Ax = b$ آن است که در معادلات مستقل، تناقض ذاتی وجود نداشته باشد و یا اصطلاحاً سازگار باشد؛ حال با فرض اینکه دستگاه معادلات ناهمگن $Ax = b$ سازگار بوده و تعداد معادلات مستقل کمتر از تعداد مجهولات باشد دستگاه، بی‌نهایت جواب داشته لیکن در حالتی که تعداد معادلات مستقل برابر با تعداد مجهولات باشد می‌توان گفت که دستگاه $Ax = b$ دارای یک حل منحصر به فرد است و در نهایت اگر تعداد معادلات مستقل بزرگتر از تعداد

مجهولات باشد مجدداً به منزله وجود تناقض و ناسازگاری در ساختار معادلات بوده و دستگاه دارای حل نیست.

مثال (۲-۱)

به عنوان مثال دستگاه معادلات شامل دو معادله و سه مجهول زیر ناسازگار بوده و دارای حل نیست

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

در حالی که دستگاه معادلات شامل سه معادله و دو مجهول زیر سازگار بوده و بی نهایت جواب دارد

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

۳-۱ ویژگی ماتریس‌ها

۱-۳-۱ ماتریس همانی

ماتریس مربعی $N \times N$ با نماد استاندارد I_N که تنها درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر واحد بوده و بقیه درایه‌ها صفر باشند ماتریس همانی^۱ نامیده می‌شود؛ نمایش اندیسی ماتریس همانی، تانسور مرتبه دوم معروفی به نام دلتای کرونیکر است که با نماد δ_{ij} نمایش داده می‌شود و می‌توان نوشت

^۱ Identity Matrix

$$I_N = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \langle e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_N \rangle$$

$$e_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad e_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \cdots \quad e_N = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$
(۱۸-۱)

به قسمی که e_i ستون i ام ماتریس همانی است و سطر i ام آن برابر $\hat{e}_i = e_i^T$ خواهد بود؛ با توجه به نحوه تعریف ضرب ماتریس ها واضح است که ماتریس همانی در واقع عضو خنثی این ضرب است یعنی به ازای هر ماتریس دلخواه $A_{N \times N}$ داریم

$$AI = IA = A$$

حاصلضرب ماتریس $A_{N \times N}$ در ماتریس همانی I_N با تقسیم بندی ستونی آن را می توان به صورت زیر نوشت

$$AI_N = A \langle e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_N \rangle$$

$$A = \langle Ae_1 \ Ae_2 \ \cdots \ Ae_N \rangle$$

$$a_i = Ae_i$$
(۱۹-۱)

یعنی ستون i ام ماتریس A برابر با $a_i = Ae_i$ است به همین ترتیب و با استدلال مشابه می توان نشان داد که سطر i ام ماتریس A برابر است با $\hat{a}_i = e_i^T A$ و همچنین درایه a_{ij} را می توان به صورت $a_{ij} = e_i^T Ae_j$ نوشت.

۲-۳-۱ ماتریس معکوس

الف) ماتریس های غیرمربعی - با تعریف ماتریس همانی می توان معکوس یک ماتریس را تعریف کرد؛ اگر $A_{M \times N}$ یک ماتریس دلخواه باشد و ماتریس $X_{N \times M}$ وجود داشته باشد به قسمی که $XA = I_N$ در اینصورت X معکوس چپ A و اگر $AX = I_M$ در اینصورت X معکوس راست ماتریس A نامیده می شود که البته برای یک ماتریس غیرمربعی

همواره یکی از معکوسهای چپ و یا راست وجود دارد. به طور خلاصه می‌توان گفت که اگر ماتریسی دارای ستونهای مستقل باشد معکوس چپ و اگر دارای سطریهای مستقل باشد معکوس راست دارد که البته منحصر به فرد هم نخواهد بود به عنوان مثال در ذیل برای یک ماتریس غیرمربعی وجود معکوس بررسی شده است.

مثال (۳-۱)

ماتریس زیر را در نظر بگیرید و در مورد وجود و یا عدم وجود معکوس چپ و یا راست، بحث کرده و در صورت امکان آن را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: وجود معکوس چپ بدان معنی است که ماتریس $B_{3 \times 2}$ وجود داشته به قسمی $BA = I_3$ که در این صورت بایستی داشته باشیم

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

واضح است که رابطه فوق منجر به یک دستگاه معادلات جبری با ۹ معادله و ۶ مجهول خواهد شد که با نوشتن معادلات نتیجه میشود تعداد معادلات مستقل بیشتر از تعداد مجهولات است یعنی به تناقض منجر شده و لذا جواب ندارد. چنانکه گفته شد این ماتریس دارای رتبه سطری کامل است و می‌توان برای آن معکوس راست پیدا کرد. وجود معکوس راست بدان معنی است که ماتریس $B_{3 \times 2}$ وجود داشته به قسمی $AB = I_2$ که در این صورت بایستی داشته باشیم به این صورت که

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که منجر به یک دستگاه معادلات جبری زیر می‌شود

$$\begin{cases} b_{11} + 2b_{21} = 1 \\ -b_{11} + b_{31} = 0 \\ b_{12} + 2b_{22} = 0 \\ -b_{12} + b_{32} = 1 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha & -2\beta \\ \alpha & \beta \\ 1 - 2\alpha & 1 - 2\beta \end{bmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

همانطور که مشاهده می‌شود منجر به یک دستگاه چهار معادله و شش مجهول می‌گردد که بی‌نهایت جواب به شکل کلی نوشته شده در فوق دارد که به ازای مقادیر دلخواه α, β عضو میدان اعداد مختلط به دست می‌آیند.

ب) ماتریس‌های مربعی - تعداد سطرهای مستقل (ر.ک ۲-۲-۴) یک ماتریس را رتبه^۱ سطر^۱ و تعداد ستونهای مستقل آنرا رتبه^۲ ستونی^۲ آن ماتریس گویند. یک ماتریس مربعی غیرمنفرد نامیده می‌شود اگر معکوس پذیر باشد و در این صورت معکوس چپ و راست آن با هم برابرند چراکه اگر B معکوس راست و C معکوس چپ ماتریس A باشد می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} AB &= I \\ CA &= I \end{aligned} \right\}$$

با ضرب از سمت چپ رابطه $AB = I$ در ماتریس C و با توجه به ویژگی شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها و همچنین جایگذاری رابطه $CA = I$ خواهیم داشت

$$\Rightarrow C(AB) = (CA)B \Rightarrow B = C$$

در صورت غیرمنفرد بودن ماتریس A ، معکوس آنرا با نماد A^{-1} نمایش داده و بنابراین حل منحصر به فرد دستگاه معادلات $Ax = b$ را می‌توان به صورت $x = A^{-1}b$ نوشت.

مثال (۱-۴)

اگر ماتریس‌های A و B هر دو معکوس‌پذیر باشند در این صورت $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ چرا که

$$(AB)(AB)^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = I$$

و به طور کلی $(AB \dots C)^{-1} = C^{-1} \dots B^{-1} A^{-1}$ همچنین خواننده می‌تواند به عنوان تمرین نشان دهد $(AB)^T = B^T A^T$ و به طور کلی $(AB \dots C)^T = C^T \dots B^T A^T$ و نیز همچنین ترانپوذه معکوس یک ماتریس با معکوس ترانپوذه آن برابر است و به طور خلاصه می‌توان نوشت $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = A^{-T}$

ج) ویژگی معکوس پذیری - اگر یک یا چند ستون از ماتریس A برابر صفر باشد در این صورت آن ماتریس معکوس پذیر نیست چراکه اگر به عنوان نمونه ستون i ام این ماتریس برابر صفر باشد $a_i = 0$ در این صورت به ازای هر ماتریس دلخواهی مانند X که از سمت چپ در آن ضرب شود با تقسیم بندی ستونی ماتریس A داریم

$$\left. \begin{aligned} XA &= X(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N) \\ Xa_i &= 0 \neq e_i \end{aligned} \right\}$$

بنابراین $Xa_i = 0$ یعنی ستون i ام حاصلضرب XA برابر صفر خواهد شد و لذا نمی‌تواند این حاصلضرب برابر ماتریس همانی شود؛ همچنین اگر چند ستون از ماتریسی مانند A به یکدیگر وابسته باشند در این صورت آن ماتریس معکوس پذیر نیست چراکه چند ستون از حاصلضرب هر ماتریسی مانند X در آن وابسته شده و لذا نمی‌تواند XA برابر ماتریس همانی باشد و به استدلال مشابه در مورد سطرها نیز نکات فوق برقرار است.

۳-۳-۱ ماتریس متعامد و یکانی

با تعریف ماتریس معکوس می‌توان ماتریس‌های متعامد و یکانی را تعریف کرد؛ ماتریس مربعی A با درایه‌های حقیقی، متعامد^۱ است اگر بردارهای سطری و یا بردارهای ستونی آن بر هم عمود باشند؛ اگر $A^T A = I$ باشد یعنی بردارهای ستونی آن بر هم عمودند و اگر $AA^T = I$ باشد یعنی بردارهای سطری آن بر هم عمودند؛ حال اگر هم

^۱ Orthogonal Matrix

بردارهای سطری و هم بردارهای ستونی بر یکدیگر عمود باشند بدان معناست که این بردارها یکه هم هستند و در واقع داریم

$$\left. \begin{aligned} A^T A &= A A^T = I \\ \sum_{k=1}^N a_{ik} a_{jk} &= \sum_{k=1}^N a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (20-1)$$

به بیان دیگر در هر ماتریس مربع که بردارهای سطری آن یکه بوده و متعامد باشند در این صورت بردارهای ستونی نیز یکه و بر هم عمود خواهند بود و برعکس. المثنی ماتریس متعامد در ماتریس‌های با درایه‌های مختلط منجر به تعریف ماتریس یکانی می‌شود ماتریس A یکانی^۱ است اگر داشته باشیم

$$\left. \begin{aligned} A A^* &= A^* A = I \\ \sum_{k=1}^N a_{ik} \bar{a}_{jk} &= \sum_{k=1}^N a_{ki} \bar{a}_{kj} = \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (21-1)$$

در واقع در این ماتریس سطرها و ستونها با درایه‌های مختلط، یکه بوده و بر هم عمودند. واضح است که ماتریس یکانی با درایه‌های حقیقی، همان متعامد یکان مدولی است (Kreyszig, 2011).

مثال (۱-۵)

به عنوان مثال در فضای دوبعدی بردارهای $\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$ دو به دو بر هم عمودند حال اگر آنها را یکه کرده و در ستونهای یک ماتریس مربعی $A_{2 \times 2}$ قرار دهیم داریم

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = A^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

خواهیم دید که یک ماتریس متعامد به دست آمد

مثال [۶-۱]

به عنوان مثال دیگر در فضای سه بعدی بردارهای $\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$ دو به دو بر هم عمودند حال اگر آنها را یگه کرده و در ستونهای یک ماتریس مربعی $A_{3 \times 3}$ قرار دهیم داریم

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

خواهیم دید که سطرهای این ماتریس نیز یگه و بر هم عمودند و لذا یک ماتریس متعامد خواهیم داشت.

مثال [۷-۱]

در این مثال سعی شده با حل یک معادله ماتریسی ساده در مورد نکات و مشکلات آن دید مناسبی به خواننده محترم داده شود. رابطه $A^2 = B$ را در نظر بگیرید در این صورت A را می‌توان جذر B نامید لیکن ممکن است ماتریسی جذر نداشته باشد به عنوان مثال ماتریس

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جذر ندارد چراکه با حل معادلات حاصله به صورت

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + bc = 0 \\ b(a + d) = 1 \\ c(a + d) = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{array} \right\}$$

از دو معادله میانی بایستی هر دو رابطه زیر برقرار باشند

$$\left\{ \begin{array}{l} a + d \neq 0 \\ c = 0 \end{array} \right\}$$

در نتیجه از معادلات اول و چهارم نتیجه می‌شود

$$a = d = 0$$

که به تناقض می‌رسد یعنی ماتریس فوق فاقد جذر است لیکن ماتریسی ممکن است بی‌نهایت جذر داشته باشد به عنوان مثال ماتریس همانی را به صورت زیر در نظر بگیرید که به ازای هر مقدار حقیقی $\forall \theta \in \mathbb{R}$ در رابطه $A^2 = B$ صدق میکند

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

البته جذرهای ماتریس همانی صرفاً محدود به ماتریس‌های فوق نمی‌شود و می‌توان ماتریس‌های دیگری نیز به دست آورد که در رابطه فوق صدق کنند به عنوان مثال

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴-۱ ماتریس‌های معادل سطری

۴-۱-۱ عملیات مقدماتی سطری

- **عملیات نوع اول:** حاصلضرب یک اسکالر مخالف صفر در یک سطر از ماتریس
- **عملیات نوع دوم:** تعویض دو سطر دلخواه از یک ماتریس
- **عملیات نوع سوم:** تعویض یک سطر با مجموع همان سطر و حاصلضرب اسکالر در سطر دیگر

همانطور که مشاهده می‌شود عملیات مقدماتی سطری شامل سه عمل ترکیب سطری یک ماتریس است که اگر بر روی ماتریس A انجام شود تغییری در حل دستگاه معادلات جبری همگن $Ax = 0$ حاصل نمی‌کند و همینطور اگر بر روی ماتریس افزوده $[A \mid b]$ انجام شود تغییری در حل دستگاه معادلات جبری $Ax = b$ حاصل نمی‌کند. نظیر هر عملیات مقدماتی سطری یک ماتریس مقدماتی وجود دارد که در واقع از انجام آن عملیات بر روی ماتریس همانی حاصل می‌شود؛ به این صورت که اگر e یکی از عملگرهای مقدماتی باشد می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} e_{(A)} &= EA \\ E &= e_{(I)} \end{aligned} \right\} \quad (22-1)$$

به عنوان مثال اگر $A_{2 \times 2}$ باشد در این صورت ماتریس‌های مقدماتی نظیر عملیات سطری را به ترتیب می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

با دقت در ماهیت تعریفی عملیات مقدماتی سطری می‌توان دریافت که تمامی این عملیات معکوس پذیرند و به تبع ماتریس‌های مقدماتی معکوس پذیرند و با انجام عکس هر عملیات مقدماتی بر روی ماتریس همانی معکوس ماتریس‌های مقدماتی نیز به دست می‌آیند

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

اگر با انجام عملیات مقدماتی سطری متعدد ماتریس A به ماتریس B بدل شده باشد در این صورت این دو ماتریس معادل سطری یکدیگر بوده و آن را با نماد $A \sim B$ نمایش می‌دهند و همانطور که مشاهده می‌شود معادل سطری بودن، یک رابطه هم ارزی است یعنی دارای سه ویژگی انعکاسی، تقارن و تعدی می‌باشد

$$\left. \begin{aligned} A &\sim A \\ A &\sim B \Leftrightarrow B \sim A \\ A &\sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C \end{aligned} \right\} \quad (23-1)$$

با انجام عملیات مقدماتی سطری نوع دوم و سوم هر ماتریس دلخواه را می‌توان به یک ماتریس بالادوزنقه‌ای بدل کرد و اگر ماتریسی مربعی باشد می‌توان آنرا به یک ماتریس بالامثلثی بدل کرد.

مثال (۸-۱)

با انجام عملیات مقدماتی سطری ماتریس زیر را به یک ماتریس بالادوزنقه‌ای بدل کنید و همچنین ماتریسهای مقدماتی نظیر را مشخص کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

ابتدا با عملیات نوع سوم کلیه درایه‌های ستون اول در سطرهاى دوم به بعد را صفر می‌کنیم یعنی منفی سطر اول را با سطر دیگر جمع کرده و به جای آن قرار می‌دهیم؛ به دنبال انجام این عملیات ماتریس مقدماتی نظیر نیز به دست می‌آید

$$A \sim A_1 = E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال مجدداً با انجام عملیات مشابه کلیه درایه‌های ستون دوم در سطرهاى سوم به بعد را صفر می‌کنیم یعنی منفی ضربی از سطر دوم را با سطر دیگر جمع کرده و به جای آن قرار می‌دهیم؛ ماتریس مقدماتی نظیر نیز به دست می‌آید

$$A_1 \sim A_2 = E_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌شود حاصل یک ماتریس بالادوزنقه‌ای است که در یک مرحله دیگر می‌توان با انجام یک عملیات دیگر سطر آخر را نیز صفر کرد

$$A_2 \sim A_3 = E_3 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس‌های مقدماتی را به ترتیب اثر دهیم با توجه به ویژگی شرکت‌پذیری در ضرب ماتریس‌ها داریم

$$A_3 = E_3 E_2 E_1 A = SA$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = SA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌شود ماتریس S که از حاصلضرب ماتریس‌های مقدماتی حاصل شده یک ماتریس پائین‌مثلثی و معکوس‌پذیر است. با توجه به روند بررسی این مثال و همچنین تعریف ماتریس‌های مقدماتی می‌توان قضیه زیر را مطرح کرد.

قضیه ۲-۱ اگر ماتریس A طی انجام متعدد عملیات مقدماتی سطری به ماتریس B بدل شده باشد در این صورت ماتریس معکوس‌پذیر S وجود دارد به قسمی که $B = SA$ مطابق مثال حل شده فرض کنید ماتریس A طی انجام عملیات مقدماتی سطری به ماتریس B بدل شده است لذا ماتریس‌های معکوس‌پذیر مقدماتی به صورت زیر وجود دارند

$$\left. \begin{array}{l} A \sim A_1, A_1 \sim A_2, \dots, A_{N-1} \sim B \\ A_1 = E_1 A \\ A_2 = E_2 A_1 \\ \vdots \\ B = E_N A_{N-1} \end{array} \right\} \Rightarrow B = E_N E_{N-1} \dots E_2 E_1 A$$

با توجه به شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها نتیجه می‌شود

$$\left. \begin{array}{l} B = SA \\ S = E_N E_{N-1} \dots E_2 E_1 \\ S^{-1} = (E_1)^{-1} (E_2)^{-1} \dots (E_{N-1})^{-1} (E_N)^{-1} \end{array} \right\}$$

و چون ماتریس‌های مقدماتی معکوس‌پذیرند لذا ماتریس S معکوس‌پذیر است.

همانطور که در قبل گفته شد با انجام عملیات مقدماتی سطری هر ماتریس دلخواه مربعی A را می‌توان به یک ماتریس بالامثلثی U بدل کرد؛ حال اگر یکی از درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس بالامثلثی برابر صفر باشد در این صورت آن ماتریس منفرد است چراکه با انجام مجدد عملیات مقدماتی سطری می‌توان یک سطر صفر ایجاد کرد همچنین اگر هیچ یک از درایه‌های روی قطر اصلی یک ماتریس مثلثی صفر نباشد می‌توان آنرا با انجام عملیات مقدماتی سطری به ماتریس همانی بدل کرد که به عنوان نمونه مثالهای زیر ارائه شده است.

مثال (۹-۱)

به عنوان مثال ماتریس زیر را در نظر بگیرید این ماتریس منفرد است چرا که

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ابتدا سطر سوم، منفی دو برابر سطر دوم را به جای سطر سوم قرار می‌دهیم و سپس در مرحله بعدی، سطر چهارم منفی سه برابر سطر سوم را به جای سطر چهارم قرار می‌دهیم مشاهده می‌شود که ماتریس حاصل دارای یک سطر صفر است.

مثال (۱۰-۱)

به عنوان مثال ماتریس مثلثی زیر غیرمنفرد است و معادل سطری با ماتریس همانی است چرا که

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که ماتریسهای مقدماتی نظیر عملیات فوق به ترتیب عبارتند از

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

که حاصل S نیز به صورت زیر یک ماتریس بالامثلثی و معکوس‌پذیر است

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

و همانطور که در این مثال مشاهده می‌شود ماتریس S برابر معکوس ماتریس A است. بنابراین هر ماتریس مثلثی غیرمنفرد را می‌توان با انجام عملیات سطری مقدماتی به ماتریس همانی بدل کرد. ماحصل و چکیده مطالب و مثالهای اخیر را می‌توان در دو قضیه زیر خلاصه کرد.

قضیه ۳-۱ بر اساس مطالب مطرح شده در فوق می‌توان گفت هر ماتریس مربعی غیرمنفرد معادل سطری با ماتریس همانی است

قضیه ۴-۱ اگر ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ را به شکل افزوده با ماتریس همانی $[A_{N \times N} \parallel I_N]$ در کنار هم قرار دهیم به قسمی که $[I_N \parallel B_{N \times N}] \sim [A_{N \times N} \parallel I_N]$ در این صورت $B = A^{-1}$ خواهد بود چراکه طبق قضیه قبل ماتریس معکوس پذیر S وجود دارد به قسمی که $[I \parallel B] = S [A \parallel I] = [SA \parallel S]$ یعنی $S = B = A^{-1}$ است.

۲-۴-۱ ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی

با انجام عملیات مقدماتی سطری هر ماتریس دلخواه را می‌توان به یک ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی بدل کرد که دارای مشخصات زیر است

- سطرهاى صفر بعد از سطرهاى غیر صفر قرار دارند
- به شکل پلکانی درایه مقدم غیر صفر هر سطر، برابر واحد است
- اعداد بالا و پائین درایه مقدم غیر صفر، در هر سطر دیگری برابر صفر است

به عنوان مثال ماتریس A زیر طی انجام عملیات مقدماتی سطری به یک ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی بدل می‌شود

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌شود درایه‌های مقدم مشخص شده غیر صفر واحد به صورت پلکانی در سطرهاى ماتریس تغییر می‌کنند؛ واضح است که سطرهاى غیر صفر ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی مستقل بوده و مبین تعداد سطرهاى مستقل و یا همان رتبهٔ سطری یک ماتریس می‌باشند همچنین می‌توان گفت ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی، المثنای ماتریس همانی برای ماتریس‌های منفرد و یا غیرمربعی است چراکه اگر ماتریس مربعی غیرمنفرد باشد ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی آن همان ماتریس همانی خواهد شد. به عنوان مثال اگر ماتریس غیرمنفرد

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

طی انجام عملیات مقدماتی سطری به ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی بدل شود به ماتریس

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همانی بدل می‌شود. ملاحظاتاتی که از تعریف فوق برداشت می‌شود عبارتند از اینکه اولاً برای یک ماتریس دلخواه، ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی وجود داشته و منحصر به فرد است؛ ثانیاً ماتریس‌هائی که معادل سطری یکدیگرند ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی یکسانی دارند و ثالثاً ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ معادل سطری ماتریس همانی است اگر و فقط اگر دستگاه معادلات $Ax = 0$ صرفاً دارای حل بدیهی $x = 0$ باشد

مثال (II-1)

ثابت کنید ماتریس‌های A و B داده شده به صورت زیر معادل سطری یکدیگرند

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

ابتدا با انجام عملیات سطری مقدماتی ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی هر یک از این دو ماتریس را به صورت جداگانه به دست می‌آوریم در ابتدا ماتریس A عبارت است از

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و همینطور ماتریس B عبارت است از

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 6 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 6 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌شود هر دو ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی یکسانی دارند لذا معادل سطری یکدیگرند.

۵-۱ تعریف‌ها

۱. اگر C یک ماتریس مربعی دلخواه باشد چه وقت ممکن است ماتریس‌های مربعی B, A را بتوان یافت به قسمی که داشته باشیم $BA - AB = C$

۲. اولاً برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با انجام عملیات مقدماتی سطری ثابت کنید معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر $ad - bc \neq 0$ ثانیاً ثابت کنید اگر ماتریس $A_{2 \times 1}$ و ماتریس $B_{1 \times 2}$ بوده در این صورت ماتریس AB لزوماً یک ماتریس منفرد است

۳. اولاً ثابت کنید اگر ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ یک ماتریس غیرمنفرد باشد در این صورت اگر به ازای ماتریس $B_{N \times N}$ داشته باشیم $AB = 0$ و یا $BA = 0$ در این صورت لزوماً $B = 0$ خواهد بود ثانیاً اگر ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ منفرد باشد در این صورت می‌توان ماتریس مربعی غیرصفر $B_{N \times N} \neq 0$ را طوری به دست آورد که $AB = 0$ و یا $BA = 0$

۴. ثابت کنید اگر ماتریس $A_{M \times N}$ و ماتریس $B_{N \times M}$ بوده به قسمی که $M > N$ در این صورت ماتریس AB لزوماً یک ماتریس منفرد است؛ در مورد BA چه می‌توان گفت

۵. ثابت کنید اگر ماتریس $A_{M \times N}$ و دارای M ستون مستقل باشد در این صورت ماتریس $A^T A$ یک ماتریس متقارن و معکوس‌پذیر بوده ماتریس AA^T یک ماتریس متقارن و منفرد است

۶. در ابتدا شرط معکوس‌پذیری ماتریس $\begin{bmatrix} B_{r \times r} & 0_{r \times s} \\ C_{s \times r} & D_{s \times s} \end{bmatrix}$ به قسمی که $n = r + s$ را بررسی کرده و سپس معکوس آن را به دست آورید

۷. ثابت کنید هر ماتریس مربعی دلخواه با درایه‌های حقیقی و یا مختلط مانند A را می‌توان به صورت منحصر به فرد به صورت $A = X + iY$ نوشت به قسمی که هر دو ماتریس X, Y هرمیتی هستند

۸. ثابت کنید عملیات مقدماتی تعویض دو سطر را می‌توان با انجام دنباله‌ای از عملیات مقدماتی سطری دیگر نتیجه گرفت و در حالت دو بعدی ماتریس‌های مقدماتی نظیر را به ترتیب به دست آورید و با حاصلضرب آنها این نتیجه را نشان دهید

۹. فرض کنید ماتریس A به صورت زیر داده شده است بررسی کنید که به ازای کدام y دستگاه معادلات $Ax = y$ دارای جواب است

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۰. ثابت کنید ماتریس‌های زیر تحت هیچ شرایطی معادل سطری یکدیگر نیستند

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

۱۱. اگر $A_{N \times N}$ یک ماتریس مربعی و $[I \parallel C] \sim [A \parallel B]$ در این صورت نشان دهید ماتریس C حل منحصربه‌فرد دستگاه $AX = B$ است

۱۲. اگر تعداد سطرهای غیرصفر ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی یا رتبه‌ی سطری ماتریس $A_{M \times N}$ با رتبه‌ی سطری ماتریس $B_{M \times N}$ برابر باشد آیا این دو ماتریس معادل سطری یکدیگرند برای حالات مختلف بحث کنید

۱۳. کلیه‌ی ماتریس‌های $A_{2 \times 2}$ تحویل یافته سطری پلکانی را توصیف کنید

۱۴. اولاً ثابت کنید حاصلضرب چند ماتریس بالامثلثی یک ماتریس بالامثلثی است
ثانیاً نشان دهید معکوس یک ماتریس بالامثلثی نیز یک ماتریس بالامثلثی است
و همینطور ماتریسهای پائین مثلثی نیز اینچنین هستند

۱۵. برای ماتریسهای A زیر یک ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی R و نیز یک
ماتریس غیرمنفرد $S_{3 \times 3}$ بیابید به قسمی که $SA = R$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & i \\ 1 & -3 & -i \\ i & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۶. فرض کنید $A_{2 \times 3}$ و $B_{2 \times 3}$ دو ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی بوده و
جوابهای دو دستگاه $Ax = 0$ و $Bx = 0$ یکسان باشند ثابت کنید $A = B$

۱۷. با انجام عملیات مقدماتی سطری نشان دهید

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

۱۸. اگر a, b اعداد حقیقی باشند با بیان یک الگوی مناسب حاصل عبارت ماتریسی
 $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}^n$ را به ازای مقادیر مختلف عدد طبیعی n به دست آورید

۱۹. نتیجه تمرین ۱۷ این مطلب را تداعی می کند که شاید ماتریس زیر معکوس
پذیر بوده و معکوس آن دارای درایه های صحیح باشد آیا می توانید این مطلب
را ثابت کنید

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

فصل دوم

فضای برداری

۱-۲ میدان اعداد

نظریهٔ اعداد به همراه اصل اقلیدس مبانی و اصول ریاضیات مهندسی هستند. نظریه اعداد برگرفته از مشاهدات انسانی و اندازه گیری کمیت‌های مختلف در مسائل مهندسی می‌باشد؛ بسته به نوع کمیتی که اندازه گیری می‌شود با مجموعه‌های مختلفی از اعداد سر و کار خواهیم داشت. به عنوان مثال مجموعه $(\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots; +, \times)$ اعداد طبیعی و نیز مجموعه اعداد صحیح $(\mathbb{Z} = \dots - 2, -1, \pm 0, +1, +2, \dots; +, \times)$ به همراه تعریف دو عمل جمع و ضرب بیشتر برای نمایش تعداد اشیاء و اجسام قابل شمارش به کار می‌روند که مجموعه‌هائی ناپیوسته هستند و به عنوان مثال برای اندازه گیری کمیتی مانند طول، قابل استفاده نیستند بنابراین مجموعه‌ای از اعداد حقیقی پیوسته $(\mathbb{R} = (-\infty + \infty) + \times)$ به همراه دو عمل جمع و ضرب تعریف می‌شود و در جایی که انجام محاسبات متعدد و مختلف ریاضی مانند محاسبه جذر و توانهای دلخواه اعداد مورد نیاز باشد مجموعه اعداد پیوسته مختلط $(\mathbb{C} = x + iy; +, \times)$ به همراه دو عمل جمع و ضرب تعریف می‌شود. البته تمام این مجموعه‌ها و یا هر مجموعه دلخواه دیگری از اعداد به همراه عملیات جمع و ضرب، تشکیل میدان نمی‌دهند. مجموعه $\mathbb{F}$ متشکل

از اعداد، به همراه دو عمل جمع و ضرب $(\mathbb{F}, +, \times)$ ، تشکیل یک میدان می‌دهد اگر علاوه بر خاصیت بسته بودن نسبت به این دو عمل، خواص نه گانه زیر را نیز ارضا نماید

$$\left. \begin{aligned} &\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad (\alpha + \beta) = (\beta + \alpha) \in \mathbb{F} \\ &\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F} \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \\ &\exists 0 \in \mathbb{F} \text{ s.t. } \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \alpha + 0 = \alpha \\ &\forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \exists -\alpha \in \mathbb{F} \text{ s.t. } \alpha + (-\alpha) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} &\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad (\alpha \times \beta) = (\beta \times \alpha) \in \mathbb{F} \\ &\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F} \quad (\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma) \\ &\exists 1 \in \mathbb{F} \text{ s.t. } \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \alpha \times 1 = \alpha \\ &\forall \alpha \neq 0 \in \mathbb{F} \quad \exists (\alpha^{-1}) \in \mathbb{F} \text{ s.t. } \alpha \times (\alpha^{-1}) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F} \quad (\alpha + \beta) \times \gamma = (\alpha \times \gamma) + (\beta \times \gamma)$$

چهار ویژگی اول از این هشت ویژگی، عبارتند از جابجائی، شرکت‌پذیری، وجود عضو خنثی و عضو قرینه برای عمل جمع و به همین ترتیب چهار ویژگی دوم برای عمل ضرب می‌باشند؛ ویژگی نهم قدری قابل تأمل است یعنی بخش‌پذیری ضرب بر روی جمع چرا اینگونه است و چرا عکس آن یعنی بخش‌پذیری جمع بر روی ضرب صحیح نیست؛ تأمل پیرامون این ویژگی به خواننده محترم واگذار می‌شود.

از جمله معروفترین میدان‌ها می‌توان به میدان اعداد مختلط $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ، میدان اعداد حقیقی $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ و یا میدان اعداد گویا $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ اشاره نمود. هر زیر مجموعه از یک میدان که نسبت به دو عمل جمع و ضرب بسته باشد زیرمیدان نامیده می‌شود. به عنوان مثال میدان اعداد حقیقی زیرمیدانی از میدان اعداد مختلط است و میدان اعداد گویا زیرمیدانی از هر دو می‌باشد؛ همچنین می‌توان اثبات کرد هر زیرمیدان از میدان اعداد مختلط شامل اعداد گویا است؛ میدان اعداد مختلط و یا هر زیرمیدانی از آن اصطلاحاً میدان با سرشتمائی صفر نامیده می‌شود (Hoffman, 1971) میدانهای اعداد گویا، حقیقی و مختلط را میدان با سرشتمائی صفر گویند.

مثال [۱-۲] میدان اعداد با اعضای محدود

الف) مجموعه دو عضوی $(\mathbb{F} = \{0,1\}; +, \times)$ با تعریف دو عمل جمع و ضرب به صورت زیر تشکیل یک میدان با سرشتمانی یک می‌دهد و مشاهده می‌شود که کلیه خواص نه گانه میدان را ارضا می‌کند

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

ب) همچنین مجموعه سه عضوی $(\mathbb{F} = \{0,1,2\}; +, \times)$ که در آن عملیات جمع و ضرب به صورت باقیمانده جمع و ضرب معمولی بر عدد ۳ تعریف شود کلیه خواص میدان را ارضا کرده و تشکیل میدانی با سرشتمانی دو می‌دهد که به عنوان تمرین بررسی این ویژگیهای نه گانه به خواننده واگذار می‌شود.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

ج) ولی مجموعه چهار عضوی $(\mathbb{F} = \{0,1,2,3\}; +, \times)$ که در آن عملیات جمع و ضرب مانند قبل به صورت باقیمانده جمع و ضرب معمولی بر عدد ۴ تعریف می‌شود تشکیل میدان نمی‌دهد بررسی علت این مورد به عهده خواننده گذاشته شده است

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

۲-۲ فضای برداری

۱-۲-۲ تعریف فضای برداری

همانطور که در ابتدای فصل اول بیان شد در طبیعت برای اندازه‌گیری و یا بیان برخی از ویژگیهای فیزیکی، صرفاً به ارائه یک عدد نیاز است به عنوان مثال درجه حرارت در یک نقطه مادی، که اسکالر نامیده می‌شود؛ لیکن اندازه‌گیری و یا توصیف کامل برخی از کمیتها، مستلزم بیان بیش از یک عدد است به عنوان مثال برای بیان نیروی اعمالی در یک نقطه، علاوه بر مقدار آن بایستی راستای آن نیز بیان شود که در این صورت در فضای سه‌بعدی نیاز به ارائه سه عدد است؛ این سه عدد در کنار هم در یک آرایش سطری و یا ستونی از دیدگاه فضای برداری تشکیل یک بردار می‌دهند و یا به عنوان مثال دیگر تعریف کامل وضعیت تنش در یک نقطه از یک محیط پیوسته یا جسم مادی، مستلزم ارائه بردار تنش روی سه صفحهٔ مختلفی است که از آن نقطه عبور می‌کنند بنابراین در فضای سه‌بعدی نیاز به سه عدد است؛ این سه عدد در کنار هم در یک آرایش ماتریسی از دیدگاه فضای برداری تشکیل یک بردار می‌دهند.

تعریف: مجموعهٔ V متشکل از بردارها به همراه تعریف دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر بر روی میدان اعداد $\mathbb{F}$ تشکیل یک فضای برداری می‌دهد اگر علاوه بر خاصیت بسته بودن نسبت به این دو عمل، ویژگیهای هشت‌گانهٔ زیر را نیز ارضا نماید

$$\left. \begin{aligned} &\forall x, y \in V \quad x + y = y + x \\ &\forall x, y, z \in V \quad (x + y) + z = x + (y + z) \\ &\exists \vec{0} \in V \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in V \quad x + \vec{0} = x \\ &\forall x \in V \quad \exists (-x) \in V \quad \text{s.t.} \quad x + (-x) = \vec{0} \\ &\forall x \in V \quad 1 \cdot x = x \\ &\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, x \in V \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \\ &\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, x \in V \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x \\ &\forall \alpha \in \mathbb{F}, x, y \in V \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

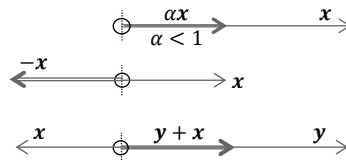
در این صورت اعضای V بردار و اعضای $\mathbb{F}$ اسکالر نامیده می‌شوند. به قسمی که $\vec{0}$ بردار صفر نامیده شده و با توجه به ویژگیهای فوق نتیجه می‌شود حاصلضرب اسکالر عدد صفر میدان در هر بردار دلخواهی برابر بردار صفر می‌شود چراکه

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x = \vec{0}$$

به عنوان معروفترین فضاهای برداری می‌توان به فضای بردارهای N تائی که با نماد $V = \mathbb{F}^N$ نمایش داده می‌شود اشاره کرد که البته این فضا خودش حالت خاصی از فضای ماتریسهای $V = \mathbb{F}^{M \times N}$ است؛ همچنین می‌توان به فضای تابعی اشاره کرد که مجموعه کلیه توابع از یک دامنه پیوسته و یا ناپیوسته به میدان $\mathbb{F}$ است البته این فضاهای معروف برداری در ادامه به طور مفصل تعریف و بیان می‌شوند. لیکن قبل از آن به ذکر چند مثال بسیار ساده و محسوس به همراه تعبیر هندسی آنها می‌پردازیم.

مثال (۲-۲) فضای برداری یک بعدی اقلیدسی $V = \mathbb{R}^1$

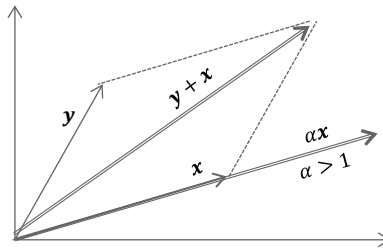
مجموعه کلیه بردارهای موجود روی یک خط راست که به صورت یک پیکان مبداء مختصات را به نقاط متعدد روی این خط وصل می‌کنند با تعریف هندسی جمع برداری و ضرب اسکالر مطابق شکل (۲-۱) تشکیل یک فضای برداری به نام $V = \mathbb{R}^1$ می‌دهند



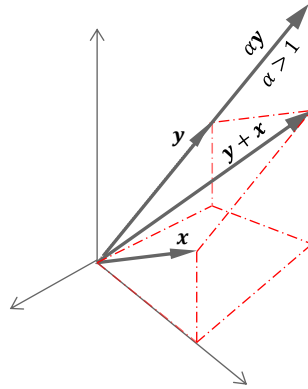
شکل (۲-۱) فضای برداری متشکل از بردارهای یک بعدی واقع بر روی یک خط

مثال [۳-۲] فضای برداری دو بعدی اقلیدسی $V = \mathbb{R}^2$

مجموعه کلیه بردارهای موجود در یک صفحه مسطح اقلیدسی که به صورت یک پیکان مبدا مختصات را به نقاط مختلف صفحه، متصل می‌کنند با تعریف جمع برداری مطابق قانون هندسی متوازی‌الاضلاع و ضرب اسکالری که با حفظ راستای یک بردار مطابق شکل (۲-۲) صرفاً طول آن را تغییر می‌دهد تشکیل یک فضای برداری به نام $V = \mathbb{R}^2$ می‌دهند؛

**شکل (۲-۲) فضای برداری بر روی یک سطح مسطح اقلیدسی****مثال [۴-۲] فضای برداری سه بعدی اقلیدسی $V = \mathbb{R}^3$**

مجموعه کلیه بردارهای موجود در فضای سه بعدی اقلیدسی $V = \mathbb{R}^3$ که به صورت یک پیکان مبدا مختصات را به نقاط مختلف فضا، متصل می‌کنند با تعریف جمع برداری و ضرب اسکالر مطابق شکل (۳-۲) با قانون هندسی متوازی‌الاضلاع و ضرب اسکالری که صرفاً طول بردار را تغییر می‌دهد بر روی میدان اعداد حقیقی تشکیل یک فضای برداری می‌دهند



شکل (۳-۲) فضای برداری سه‌بعدی اقلیدسی $V = \mathbb{R}^3$

مثال (۵-۲) فضای بردارهای N تایی $V = \mathbb{F}^N$

اگر بردار $x_{N \times 1}$ باشد یعنی دارای N مؤلفه مستقل است درایه i ام آن با x_i نمایش داده شده که اسکالری از میدان اعداد $\mathbb{F}$ است و می‌توان فرم کلی این بردار را در یک آرایش سطری و یا عمده‌تاً ستونی از اعداد به صورت

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} \in \mathbb{F}^N, \quad x_i \in \mathbb{F}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (۳-۲)$$

نمایش داد. مجموعه این بردارها به همراه دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر به صورت

$$\left. \begin{aligned} & \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in \mathbb{F}^N \\ & x + y \triangleq \begin{Bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_N + y_N \end{Bmatrix} \in \mathbb{F}^N, \alpha x \triangleq \begin{Bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_N \end{Bmatrix} \in \mathbb{F}^N \end{aligned} \right\} \quad (۴-۲)$$

بر روی میدان اعداد $\mathbb{F}$ تشکیل یک فضای برداری می‌دهند؛ در این فضا بردار صفر $\vec{0}$ یک برداری است که کلیه درایه‌های آن برابر صفر است که به همراه بردار قرینه $(-x)$ در زیر ارائه شده و می‌توان نوشت

$$\vec{0} \triangleq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \in \mathbb{F}^N \quad (-x) \triangleq \begin{Bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_N \end{Bmatrix} \in \mathbb{F}^N \quad (۵-۲)$$

خواننده محترم می‌تواند به عنوان تمرین برقراری و صحت ویژگیها و خواص هشت گانه این فضای برداری را با تعریفهای اخیر مورد کنکاش قرار دهد.

مثال [۶-۲] فضای ماتریسهای $V = \mathbb{F}^{M \times N}$

یک ماتریس در واقع آرایش منظمی از اعداد است که در دو راستای سطری و ستونی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند؛ به عنوان مثال اگر $A_{M \times N}$ یک ماتریس باشد یعنی دارای M سطر و N ستون است که اگر درایه سطر i ام و ستون j ام آن a_{ij} باشد در این صورت می‌توان آنرا به صورت زیر نمایش داد

$$\left. \begin{aligned} & A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{M \times N} \\ & a_{ij} \in \mathbb{F} \quad \left. \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, M \\ j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (۶-۲)$$

اگر تعداد سطرها و ستونهای یک ماتریس برابر باشد، مربعی نامیده می شود و همچنین درایه های a_{11} , a_{22} و الی a_{NN} درایه های روی قطر اصلی ماتریس هستند. اگر $A_{M \times N}$ و $B_{M \times N}$ یک ماتریس دیگر باشد در این صورت مجموعه ماتریسهای هم نوع و هم مرتبه به همراه دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر به صورت

$$\left. \begin{aligned} & \forall \alpha \in \mathbb{F} \text{ and } \forall A, B \in \mathbb{F}^{M \times N} \\ & A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1N} + b_{1N} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & & a_{2N} + b_{2N} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} + b_{M1} & a_{M2} + b_{M2} & \cdots & a_{MN} + b_{MN} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{M \times N} \\ & C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \\ & \alpha \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1N} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & & \alpha a_{2N} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{M1} & \alpha a_{M2} & \cdots & \alpha a_{MN} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{M \times N} \\ & C = \alpha A \Rightarrow c_{ij} = \alpha a_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (7-2)$$

بر روی میدان اعداد $\mathbb{F}$ تشکیل یک فضای برداری می دهند. در این فضا بردار صفر $\vec{0}$ یک ماتریسی است که کلیه درایه های آن برابر صفر است که به همراه بردار قرینه $(-A)$ در زیر ارائه شده و می توان نوشت

$$\vec{0} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (-A) = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1N} \\ -a_{21} & -a_{22} & & -a_{2N} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{M1} & -a_{M2} & \cdots & -a_{MN} \end{bmatrix} \quad (8-2)$$

همچنین خواننده محترم می تواند به عنوان تمرین برقراری و صحت ویژگیها و خواص هشت گانه این فضای برداری را با تعریفهای اخیر مورد بررسی قرار دهد.

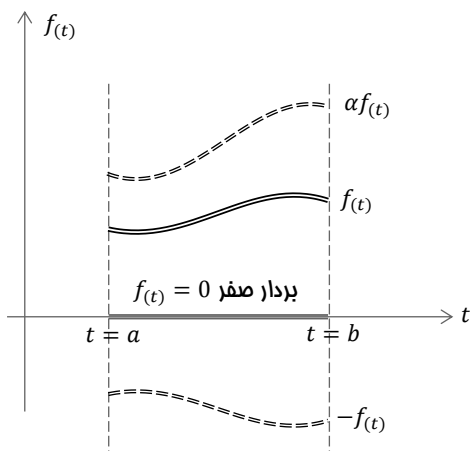
مثال (۷-۲) فضای کلیه توابع یک متغیره

فضای تابعی یکی از کلی‌ترین فضاهای برداری است که شاید به جرأت بتوان گفت اکثر فضاهای برداری حالت خاصی از آن هستند؛ منظور از فضای تابعی مجموعه کلیه توابع از دامنه $\mathcal{M}$ به میدان $\mathbb{F}$ با تعریف جمع برداری و ضرب اسکالر به صورت

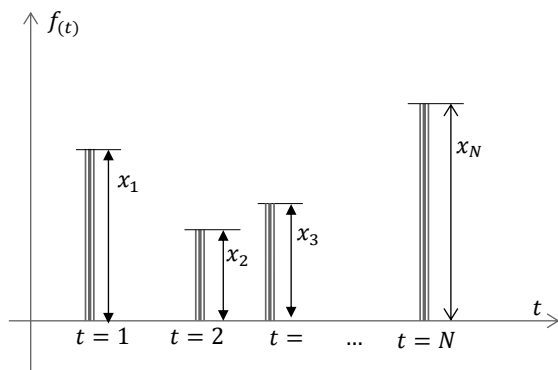
$$\left. \begin{aligned} &\forall f, g: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{F} \\ &\forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \forall t \in \mathcal{M} \\ &(f + g)(t) = f(t) + g(t) \\ &(\alpha f)(t) = \alpha f(t) \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

است که در این صورت مجموعه $\mathcal{M}$ دامنه نامیده شده و میدان $\mathbb{F}$ برد نامیده می‌شود. البته مجموعه $\mathcal{M}$ می‌تواند یک مجموعه پیوسته باشد به عنوان مثال کلیه توابع پیوسته یک متغیره با مقدار حقیقی به صورت $f(t)$ در بازه $t \in (a, b)$ به میدان اعداد حقیقی $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ با تعریف جمع برداری و ضرب اسکالر به صورت فوق تشکیل یک فضای برداری می‌دهند که البته همانطور که مشاهده می‌شود همان تعاریف معمول جمع دو تابع و حاصلضرب یک عدد در یک تابع می‌باشد؛ بردار صفر در این فضا همان تابع صفر است و بردار قرینه در شکل (۴-۲) به صورت شماتیک نمایش داده شده است.

در ابتدا بیان شد بسیاری از فضاهای برداری حالت خاصی از فضای تابعی هستند به عنوان مثال فضای $V = \mathbb{F}^N$ را در نظر بگیرید در واقع مانند فضای تابعی یک متغیره است که دامنه آن $\mathcal{M} = (1, 2, \dots, N)$ یک دامنه ناپیوسته است و مانند آن است که در مثال تابع یک متغیره شکل (۴-۲) به جای اینکه مقدار تابع به صورت پیوسته بر روی یک دامنه، مشخص باشد به صورت ناپیوسته مانند شکل (۵-۲) بر روی N نقطه مشخص شود و بنابراین هر بردار در این فضا را می‌توان به شکل یک تابع ناپیوسته به صورت زیر $V = \{f_{(t)} = x_t \in \mathbb{F} \quad t \in \mathcal{M} = (1, 2, \dots, N)\}$ نوشت.



شکل (۲-۴) مجموعه کلیه توابع یک متغیره پیوسته در یک بازه مشخص



شکل (۲-۵) $V = \mathbb{F}^N$ به صورت مجموعه‌ای از توابع یک متغیره ناپیوسته

مثال [۸-۲] فضای کلیه توابع دو متغیره

به عنوان مثال دیگر می‌توان مجموعه کلیه توابع دو متغیره پیوسته با مقدار حقیقی به شکل $f(x, y)$ را از یک دامنه مشخص مانند $x, y \in \mathcal{M}$ به میدان $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ به همراه تعریف مشابه جمع برداری و ضرب اسکالر به صورت

$$\left. \begin{array}{l} \forall f, g: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{F} \\ \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \forall (x, y) \in \mathcal{M} \\ (f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y) \\ (\alpha f)(x, y) = \alpha f(x, y) \end{array} \right\}$$

که همان تعاریف معمول جمع دو تابع و حاصلضرب یک عدد در یک تابع به عنوان یک فضای برداری در نظر گرفت که البته در اینجا دامنه $\mathcal{M}$ می‌تواند محدوده داخلی هر منحنی بسته دلخواهی در صفحه xy باشد. بردارها در این فضا در واقع رویه‌های پیوسته‌ای در حوزه مورد نظر می‌باشند و بردار صفر در این فضا همان رویه صفر یعنی $f(x, y) = 0$ است.

همچنین به عنوان مثال دیگر فضای ماتریسهای $V = \mathbb{F}^{M \times N}$ را در نظر بگیرید در واقع مانند فضای تابعی دو متغیره است که دامنه آن

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1,1 & 1,2 & \dots & 1,N \\ 2,1 & 2,2 & \dots & 2,N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M,1 & M,2 & \dots & M,N \end{pmatrix}$$

یک دامنه دوتائی ناپیوسته است و مانند آن است که در مثال تابع دو متغیره $f(x, y)$ به جای اینکه مقدار تابع به صورت پیوسته بر روی یک دامنه، مشخص باشد به صورت ناپیوسته بر روی $M \times N$ نقطه مشخص شود و بنابراین هر بردار در این فضا را می‌توان به شکل یک تابع ناپیوسته به صورت زیر $i, j \in \mathcal{M} \quad f(i, j) = a_{ij} \in \mathbb{F}$ نوشت.

۲-۲-۲ زیر فضا

اگر V فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ باشد منظور از زیر فضای W از آن، زیرمجموعه‌ای از فضای V است که خودش به تنهایی فضای برداری باشد. ملاحظاتی که از این تعریف منتج می‌شود به عنوان اولین نکته واضح است که اگر W زیر فضا باشد تهی نیست چراکه لزوماً بایستی بردار صفر $\vec{0} \in V$ باشد همچنین بایستی $\forall x \in V \Rightarrow (-x) \in V$ و در نهایت باید نسبت به دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر که از فضای مادر خودش به ارث می‌برد بسته بوده یا دارای خاصیت بستاری باشد یعنی

$$\left. \begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \forall x, y \in V \\ x + y \in V \\ \alpha x \in V \end{array} \right\}$$

حال می‌توان ملاحظات فوق را در یک رابطه به صورت یک قضیه خلاصه کرد.

قضیه ۱-۲ اگر V فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ و W زیرمجموعه‌ای از بردارهای آن باشد شرط لازم و کافی برای اینکه W زیر فضایی از V باشد آنست که

$$\left. \begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbb{F} \\ \forall x, y \in W \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha x + y \in W \quad (۱۰-۲)$$

واضح است که کل مجموعه V و بردار $\{\vec{0}\}$ دو زیرفضای بدیهی از یک فضای برداری دلخواه مانند V هستند. برای درک بهتر مفهوم زیرفضا در ادامه مثالهای مختلفی ارائه می‌شود.

مثال (۹-۲) زیرفضایی از $\mathbb{F}^N$

فرض کنید $V = \mathbb{F}^N$ و $x = \langle x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N \rangle^T \in V$ باشد در این صورت کلیه بردارهایی که برای آنها رابطه زیر بین درایه‌ها برقرار باشد

$$\sum_{i=1}^N x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_N = 0$$

یعنی مجموع مؤلفه‌های آنها برابر صفر باشد زیر مجموعه‌ای از V هستند آیا تشکیل زیرفضا می‌دهند. با توجه به قضیه (۱-۲) $\forall x, y \in W$ و همچنین $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ داریم

$$\left. \begin{aligned} x = \langle x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N \rangle \in W &\Rightarrow \sum x_i = 0 \\ y = \langle y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N \rangle \in W &\Rightarrow \sum y_i = 0 \\ z = \alpha x + y = \langle \alpha x_1 + y_1 \ \alpha x_2 + y_2 \ \dots \ \alpha x_N + y_N \rangle \end{aligned} \right\}$$

حال بایستی بررسی کنیم که آیا بردار $z = \alpha x + y$ جاصل از این ترکیب خطی در زیر مجموعه W قرار می‌گیرد یا خیر

$$\left. \begin{aligned} \sum z_i = \sum (\alpha x_i + y_i) &= \alpha (\sum x_i) + (\sum y_i) = 0 \\ \Rightarrow z = \alpha x + y &\in W \end{aligned} \right\}$$

لذا قید مربوطه را ارضا کرده و در نتیجه این مجموعه از بردارها تشکیل زیر فضا می‌دهند. به عنوان مثال دیگر می‌توان مجموعه بردارهایی که یک یا چند درایه آنها برابر صفر است را در نظر گرفت که تشکیل زیرفضائی از $V = \mathbb{F}^N$ می‌دهند؛ بررسی آن به عنوان تمرین به عهده خواننده محترم واگذار شده است.

مثال [۱-۲] فضای حل دستگاه معادلات همگن زیرفضایی از $V = \mathbb{F}^N$

در ابتدا نشان داده می‌شود مجموعه بردارهای $x \in W \subset \mathbb{F}^N$ که در دستگاه معادلات همگن $Ax = 0$ صدق می‌کنند به قسمی که $A_{M \times N}$ یک ماتریس مشخص است، تشکیل زیرفضائی از $\mathbb{F}^N$ را می‌دهند که فضای حل دستگاه $Ax = 0$ یا اصطلاحاً فضای تهی ماتریس A نامیده می‌شود و سپس در حالت خاص زیر این مجموعه بردارها به دست آورده می‌شوند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به قضیه قبل $\forall x, y \in W$ و همچنین $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ داریم

$$\left. \begin{array}{l} x \in W \Rightarrow Ax = 0 \\ y \in W \Rightarrow Ay = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z = \alpha x + y \Rightarrow Az = 0$$

حال باید بررسی کنیم که آیا بردار $z \in W$ هست یعنی آیا در دستگاه معادلات همگن اخیر صدق می‌کند که با جایگذاری نتیجه می‌شود

$$\left. \begin{array}{l} Az = A(\alpha x + y) = \alpha Ax + Ay = 0 \\ \Rightarrow z = \alpha x + y \in W \end{array} \right\}$$

بنابراین این مجموعه بردارها تشکیل زیر فضا می‌دهند که اصطلاحاً آنرا فضای حل دستگاه معادلات همگن $Ax = 0$ گوئیم. حال در مورد مثال خاص داده شده $x \in \mathbb{F}^3$ بوده و با حل دستگاه معادلات به صورت زیر

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

نتیجه می‌شود به ازای هر بردار $x \in W$ متعلق به فضای حل دستگاه معادلات فوق بایستی به صورت ضربی از بردار زیر باشد

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$$

به طور خلاصه در روند حل دستگاه معادلات همگن $Ax = 0$ اگر تعداد معادلات مستقل بیشتر از تعداد مجهولات باشد در این صورت دستگاه صرفاً دارای حل بدیهی $x = 0$ است لیکن اگر تعداد معادلات مستقل کمتر از تعداد مجهولات باشد در این صورت دستگاه دارای حل غیر بدیهی بوده که البته منحصر به فرد نیست و بی‌نهایت جواب دارد مانند مثال عددی که در فوق بررسی شد.

مثال [۱۱-۳]

فرض کنید $V = \mathbb{F}^{N \times N}$ یعنی فضای ماتریسهای مربعی باشد در این صورت زیرمجموعه های زیر را از نظر تشکیل و یا عدم تشکیل زیر فضا مورد بررسی قرار دهید.

- مجموعه ماتریسهای متقارن و یا پادمتقارن به طور جداگانه بر روی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ و همچنین بر روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{F} = \mathbb{C}$
- مجموعه ماتریسهای هرمیتی و یا پادهرمیتی به طور جداگانه بر روی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ و همچنین بر روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{F} = \mathbb{C}$
- مجموعه ماتریسهای $A_{N \times N}$ که در ضرب با ماتریس مشخصی مانند $B_{N \times N}$ از ویژگی جابجائی $AB = BA$ تبعیت می کنند
- مجموعه ماتریسهای متعامد $AA^T = I$ و نیز مجموعه ماتریسهای یکانی $AA^* = I$
- مجموعه ماتریسهای که یک و یا چند درایه آنها برابر عدد ثابتی است
- مجموعه ماتریسهای بدون تریس $Tr(A) = \sum a_{ii} = 0$

مثال [۲-۱۲]

فرض کنید $V = f(x) \in \mathbb{C}$ فضای کلیه توابع یک متغیره پیوسته با مقدار مختلط در بازه حقیقی $x \in (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ باشد در این صورت بررسی کنید کدام یک از مجموعه های زیر تشکیل زیر فضا می دهند

- مجموعه کلیه چند جمله ای های درجه N به پائین به صورت زیر با ضرایب حقیقی و یا با ضرایب مختلط $f(x) = a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0$
- مجموعه کلیه توابع حقیقی با شرط $f(x_1) = a, f(x_2) = b$
- مجموعه کلیه توابع مختلط با شرط $f(\bar{x}) = \bar{f}(x)$

۳-۲-۲ گسترش

اگر V فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ و $\mathcal{S} = \langle x_1 \ x_2 \ \dots \rangle$ مجموعه ای از بردارهای V باشد منظور از زیر فضائی که توسط $\mathcal{S}$ گسترش می یابد فصل مشترک کلیه زیر فضاهای V

است که شامل $\mathcal{S}$ باشند. اگر $\mathcal{S} = \langle x_1 \ x_2 \ \dots \ x_j \rangle$ شامل تعداد محدودی بردار باشد گوئیم زیر فضا توسط بردارهای $W = \text{Span}(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_j)$ گسترش یافته است و به بیان دیگر زیرفضای W شامل کلیه ترکیبات خطی از بردارهای $\mathcal{S}$ است.

اولاً اگر W_1 و W_2 دو زیرفضا باشند در این صورت $W_1 \cap W_2$ نیز زیرفضا است و یا به بیان کلی تر اگر $\{W_i\}$ گردایه‌ای از زیرفضاهای V باشند در این صورت $\{\cap W_i\}$ نیز زیرفضای V است چراکه $\forall x, y \in \{\cap W_i\} \Rightarrow x, y \in W_i$ و چون W_i به تنهایی زیرفضا است لذا

$$\forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \alpha x + y \in W_i \Rightarrow \alpha x + y \in \{\cap W_i\}$$

بنابراین زیرفضائی که توسط $\mathcal{S}$ گسترش می‌یابد شامل کلیه ترکیبات خطی از بردارهای $\mathcal{S}$ است. به عنوان نمونه مثال (۲-۹) را در نظر بگیرید.

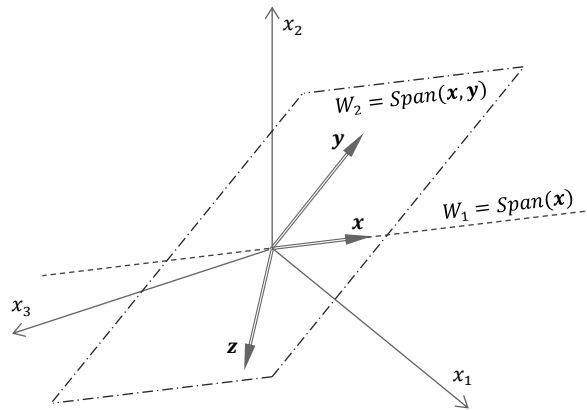
مثال (۲-۱۳) گسترش زیرفضا در فضای سه بعدی اقلیدسی

فرض کنید $V = \mathbb{R}^3$ و مجموعه $\mathcal{S} = \langle x, y, z \rangle$ شامل سه بردار به صورت زیر باشد مطلوب است توصیف زیرفضاهائی که توسط این بردارها گسترش می‌یابد.

$$x = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{Bmatrix}, \quad z = \begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

به طور کلی اگر بخواهیم کلیه زیرفضاهای $V = \mathbb{R}^3$ را توصیف کنیم با توجه به لزوم وجود بردار صفر در هر زیر فضا و نیز با توجه به ماهیت هندسی جمع برداری و ضرب اسکالر مطابق شکل (۲-۶) می‌توان گفت کلیه خطوطی که از مبدأ مختصات می‌گذرند اصطلاحاً زیرفضاهای یک بعدی $\mathbb{R}^3$ و کلیه صفحاتی که از مبدأ می‌گذرند زیرفضاهای دو بعدی $\mathbb{R}^3$ هستند. در این مثال خاص همانطور که در شکل (۲-۶) نمایش داده شده خطی که شامل بردار x باشد در واقع همان زیرفضای $W_1 = \text{Span}(x)$ است که توسط آن گسترش می‌یابد و همچنین صفحه‌ای که شامل بردارهای x, y باشد در واقع همان زیرفضای $W_2 = \text{Span}(x, y)$ است که توسط آن دو بردار گسترش یافته است؛ و همانطور که مشاهده می‌شود $W_1 \cap W_2 = W_1$ خواهد بود. همچنین با توجه به اینکه

لذا این بردار در زیرفضای W_2 قرار داشته و در نتیجه $W_2 = \text{Span}(x, y, z)$



شکل (۱-۲) توصیف هندسی زیرفضاهای $V = \mathbb{R}^3$

۴-۲-۲ وابستگی خطی و استقلال خطی

اگر V فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ باشد در این صورت مجموعه $S = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_M \rangle$ از بردارهای مجزای آن را مستقل خطی گوئیم اگر از رابطه

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^K c_i \alpha_i &= c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_K \alpha_K = \vec{0} \\ c_1 &= c_2 = \dots = c_K = 0 \end{aligned} \right\} \quad (۱-۲)$$

لزوماً نتیجه شود که کلیه c_i ها برابر عدد صفر هستند در غیر این صورت حتی اگر یکی از ضرایب را بتوان غیر صفر به دست آورد مجموعه را وابسته خطی گوئیم. با توجه به تعریف فوق ملاحظات زیر نتیجه می‌شوند.

- هر مجموعه‌ای که شامل بردار صفر $\vec{0}$ باشد وابسته خطی است چرا که $\vec{0} = \vec{0}$.
- به بیان دیگر شرط اینکه یک مجموعه تک عضوی $\{x\}$ مستقل خطی باشد آن است که $x \neq \vec{0}$
- چنانچه مجموعه‌ای شامل زیرمجموعه وابسته باشد خودش وابسته است
- هر زیرمجموعه از یک مجموعه مستقل، مستقل است
- شرط لازم و کافی برای اینکه مجموعه‌ای مستقل باشد آن است که هر زیرمجموعه آن مستقل باشد به خصوص در مواردی که با مجموعه‌های نامتناهی سر و کار داریم می‌توان از این مفهوم استفاده کرد

۵-۲-۲ بردارهای پایه و بُعد یک فضای برداری

اگر V فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ باشد در این صورت مجموعه $B = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_N \rangle$ از بردارهای V که مستقل خطی بوده و این فضا را می‌گستراند پایه‌ای برای V خوانده می‌شود

$$\left. \begin{aligned} B = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_N \rangle \\ \forall x \in V \Rightarrow x = \sum_{i=1}^K x_i \alpha_i = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots x_N \alpha_N \end{aligned} \right\} \quad (12-2)$$

همانطور که از تعریف فوق مشهود است پایه، منحصر به فرد نیست لیکن پایه استاندارد برای فضاهای برداری معروف تعریف می‌شود. به عنوان مثال پایه استاندارد برای $V = \mathbb{F}^N$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\left. \begin{aligned} B = \langle e_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \ e_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \ \dots \ e_N = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \rangle \\ \forall x \in V \Rightarrow x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^K x_i e_i = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots x_N e_N \end{aligned} \right\} \quad (13-2)$$

و یا به عنوان مثال دیگر در حالت خاصی از فضای ماتریسها پایه استاندارد برای $V = \mathbb{F}^{2 \times 3}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (۱۴-۲)$$

$$\forall \mathbf{A} \in V \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}\mathbf{A}_1 + a_{12}\mathbf{A}_2 + \dots + a_{23}\mathbf{A}_6$$

و همچنین در فضای تابعی اگر $W = P_{(x)}^N$ مجموعه کلیه چند جمله‌ای‌های درجه N به پائین باشد در این صورت پایه‌ای برای آن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{B} = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^N \rangle$$

$$\forall f_{(x)} \in V \Rightarrow f_{(x)} = \sum_{k=0}^N a_k x^k \quad (۱۵-۲)$$

مثال [۱۴-۲]

ثابت کنید ستونهای یک ماتریس معکوس‌پذیر مانند $\mathbf{P} = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N \rangle$ تشکیل پایه‌ای برای $V = \mathbb{F}^N$ می‌دهند.

پایه، مستلزم ارضای دو شرط استقلال و گسترش است لذا با توجه به اینکه ماتریس $\mathbf{P}$ معکوس‌پذیر است لذا معادل سطری ماتریس همانی است و می‌توان نوشت

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^K x_i \mathbf{p}_i = x_1 \mathbf{p}_1 + x_2 \mathbf{p}_2 + \dots + x_N \mathbf{p}_N = \mathbf{0} \\ \mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{P} \sim \mathbf{I} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

یعنی شرط استقلال برقرار است حال به بررسی گسترش می‌پردازیم یعنی

$$\left. \begin{aligned} \forall \mathbf{y} \in V \Rightarrow \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^K x_i \mathbf{p}_i = x_1 \mathbf{p}_1 + x_2 \mathbf{p}_2 + \cdots x_N \mathbf{p}_N \\ \mathbf{P}\mathbf{x} &= \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} \end{aligned} \right\}$$

مثال [۲-۱۵]

فرض کنید بخواهیم ثابت کنیم در فضای توابع یک متغیره $V = f(x)$ مجموعه توابع چندجمله‌ای تا هر درجه دلخواه N به صورت $B = \{1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N\}$ مستقل خطی هستند. برای این اثبات تابع $f(x)$ را به صورت ترکیب خطی از این توابع به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$$

حال اگر با فرض $f(x) = 0$ نتیجه بگیریم که تمامی ضرایب a_i صفر هستند حکم استقلال این مجموعه اثبات شده است. از طرفی اگر تابعی برابر صفر باشد کلیه مشتقات آن نیز برابر صفر است لذا با فرض $N=1$ با مساوی صفر قرار دادن خود تابع و مشتق مرتبه اولش خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x = 0 \\ f'(x) &= a_1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

که می‌توان آن را به صورت ماتریسی نیز نوشت و واضح است که ماتریس ضرایب بالامثلثی غیرمنفرد بوده و لذا تحت هر شرایطی $a_0 = a_1 = 0$ همچنین با استدلال مشابه با فرض $N=2$ با مساوی صفر قرار دادن خود تابع، مشتق مرتبه اول و مشتق مرتبه دومش یک دستگاه سه معادله و سه مجهول خواهیم داشت که مجدداً می‌توان آن را به صورت ماتریسی نیز نوشت و واضح است که ماتریس ضرایب، بالامثلثی و غیرمنفرد بوده و لزوماً نتیجه می‌شود $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

$$\left. \begin{aligned} f &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0 \\ f' &= a_1 + 2a_2 x = 0 \\ f'' &= 2a_2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

همچنین با استدلال مشابه به ازای هر مرتبه دلخواه N از توان چندجمله‌ای با مساوی صفر قرار دادن کلیه مشتقات تابع تا مرتبه N خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} f^{(0)} &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N = 0 \\ f^{(1)} &= a_1 + 2a_2x + \dots + Na_Nx^{N-1} = 0 \\ f^{(2)} &= 2a_2 + \dots + N(N-1)a_Nx^{N-2} = 0 \\ f^{(N)} &= N(N-1)(N-2)\dots(2)(1)a_N = 0 \end{aligned} \right\} f^{(r)} = \frac{d^r f}{dx^r}$$

به قسمی که $f^{(r)}$ مبین مشتق مرتبه r ام تابع $f(x)$ نسبت به متغیر x است همچنین می‌توان روابط فوق را به صورت ماتریسی زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} 0! & x & x^2 & & x^N \\ 0 & 1! & 2x & & Nx^{N-1} \\ 0 & 0 & 2! & \ddots & N(N-1)x^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & N! \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌شود ماتریس ضرایب ایجاد شده یک ماتریس بالامثلثی است که درایه‌های روی قطر اصلی آن به ترتیب اعداد صحیح مثبت و مخالف صفر $0!, 1!, 2!, \dots, N!$ هستند در نتیجه این ماتریس، غیرمنفرد و معکوس‌پذیر بوده و بنابراین لزوماً بایستی کلیه ضرایب a_i برابر صفر باشند یعنی نتیجه می‌شود

$$a_0 = a_1 = \dots = a_N = 0$$

مثال [۱۶-۲]

تشکیل پایه برای فضای حل دستگاه همگن $Ax = 0$ در حالت خاص زیر پایه‌ای برای این فضای حل تشکیل دهید

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

در ابتدا با انجام عملیات مقدماتی سطری ماتریس A را به ماتریس تحویل یافته پلکانی نظیر U تبدیل می‌کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه دستگاه همگن $Ax = 0$ معادل است با دستگاه همگن $Rx = 0$ که با حل آن داریم

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$$

به بیان دیگر هر بردار x متعلق به فضای حل این دستگاه معادله به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 - x_4 \\ x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$$

واضح است که اولاً دو بردار

$$B = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

مستقل خطی بوده و فضای حل دستگاه $Ax = 0$ را می‌گسترانند بنابراین B پایه‌ای برای فضای حل این دستگاه می‌باشد.

قضیه ۲-۲ شرط وجود جواب برای دستگاه معادلات غیرهمگن $Ax = b$ آن است که بردار b در فضای ستونی ماتریس A باشد. منظور از فضای ستونی یک ماتریس فضائی است که توسط بردارهای ستونی آن گسترده می‌شود و به تبع فضای سطری یک ماتریس فضائی است که توسط بردارهای سطری آن گسترده می‌شود لذا اگر $A_{M \times N}$ باشد واضح است که فضای ستونی زیرفضائی از $\mathbb{F}^M$ و فضای سطری زیرفضائی از $\mathbb{F}^N$ است

فرض کنید ماتریس $A_{M \times N}$ و بردار $x_{N \times 1}$ و بردار $b_{M \times 1}$ باشد؛ مطابق فصل قبل از نتیجه رابطه (۱-۸) می‌دانیم که به ازای هر بردار x دلخواه، حاصل Ax یعنی حاصلضرب ماتریس A در هر بردار دلخواه x برابر با ترکیب خطی ستونهای ماتریس A خواهد بود بنابراین شرط سازگاری این دستگاه آن است که بردار b در گستره ستونهای ماتریس A قرار داشته باشد یعنی

$$b \in \text{Span}(a_1, a_2, \dots, a_N)$$

به قسمی که a_i ستون i ام ماتریس A است. یک روش برای بررسی این شرط سازگاری آن است که در ابتدا با انجام عملیات مقدماتی سطری ماتریس افزوده $[A \mid b]$ را به ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی $[R \mid z]$ بدل می‌کنیم؛ حال اگر تعداد سطرهای غیر صفر یا همان رتبه سطری ماتریس A برابر r باشد شرط سازگاری دستگاه آن است که

$$[A \mid b] \sim [R \mid z] \Rightarrow z_{r+1} = z_{r+2} = \dots = z_M = 0$$

به بیان دیگر رتبه سطری ماتریس A باید با رتبه سطری ماتریس افزوده $[A \mid b]$ برابر باشد و این بدان معناست که بردار b در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد.

مثال [۷-۲]

فرض کنید ماتریس $A_{5 \times 5}$ و به صورت زیر باشد شرط سازگاری دستگاه $Ax = b$ را بررسی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مطابق قضیه قبل در ابتدا ماتریس افزوده $[A \mid b]$ را به ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی $[R \mid z]$ بدل می‌کنیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & b_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & b_3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & b_4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & b_5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 1 & b_4 - 2b_1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & b_5 - b_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 1 & b_4 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 + b_2 - b_4 \end{bmatrix}$$

در نتیجه شرط سازگاری دستگاه آن است که

$$\begin{cases} b_3 + b_2 - b_1 = 0 \\ b_5 + b_2 - b_4 = 0 \end{cases}$$

یعنی هر بردار بایستی به صورت زیر باشد

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_3 + b_2 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_5 + b_2 \\ b_5 \end{Bmatrix} = b_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + b_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + b_5 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

این نتیجه بدان معنی نیز هست که فضای ستونی ماتریس A گسترهٔ سه بردار فوق می‌باشد

قضیه ۳-۲ اگر فضای برداری V توسط تعداد محدودی از بردارهای $\langle \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \alpha_N \rangle$ گسترده شود در این صورت هیچ مجموعهٔ مستقلی در V نمی‌تواند بیش از N عضو داشته باشد و یا به بیان دیگر مجموعهٔ $B' = \langle \beta_1 \ \beta_2 \dots \beta_M \rangle$ با $M > N$ لزوماً وابسته است.

اثبات: چون فضای برداری V توسط مجموعهٔ $\langle \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \alpha_N \rangle$ گسترده شده است لذا هر بردار دلخواه دیگری مانند β_i را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای B به صورت

$$\beta_i = \sum_{j=1}^N a_{ji} \alpha_j \quad (۱۶-۲)$$

نوشت حال اگر مجموعه B' بخواهد مستقل خطی باشد بایستی از رابطه

$$\sum_{i=1}^M c_i \beta_i = \vec{0} \quad (۱۷-۲)$$

نتیجه شود که تمام ضرایب $c_i = 0$ برابر صفر هستند؛ حال با جایگذاری رابطه (۲)-۲-۱۶ در رابطه (۲)-۱۷ و جابجائی دو علامت $\sum$ نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=1}^M c_i \left(\sum_{j=1}^N a_{ji} \alpha_j \right) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \left(\sum_{i=1}^M a_{ji} c_i \right) = \vec{0} \quad (۱۸-۲)$$

یعنی در نهایت منجر به دستگاه معادلات جبری به صورت

$$\sum_{i=1}^M a_{ji} c_i = 0 \quad j = 1:N \quad (۱۹-۲)$$

یعنی N معادله و M مجهول با $M > N$ می‌شود که لزوماً دارای حل غیر بدیهی بر روی مجهولات c_i است؛ بنابراین مجموعه $B' = \langle \beta_1 \beta_2 \dots \beta_M \rangle$ لزوماً وابسته خطی است. در نتیجه اگر فضای برداری V توسط تعداد محدودی بردار گسترده شده باشد تعداد بردارهای هر دو پایه آن برابرند

$$\left. \begin{aligned} B &= \langle \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N \rangle \quad N \leq M \\ B' &= \langle \beta_1 \beta_2 \dots \beta_M \rangle \quad M \leq N \end{aligned} \right\} \Rightarrow M = N = \dim(V) \quad (۲۰-۲)$$

و اصطلاحاً بعد آن فضای برداری $\dim(V)$ نامیده می‌شود. بنابراین اگر $N = \dim(V)$ باشد در این صورت هر مجموعه‌ای که بیش از N عضو داشته باشد لزوماً وابسته بوده و نیز هیچ مجموعه‌ای با کمتر از N عضو نمی‌تواند V را بگستراند.

مثال [۱۸-۲]

به عنوان مثال اگر ماتریس مشخص $A_{M \times N}$ دارای r سطر مستقل بوده و W فضای حل دستگاه $Ax = 0$ باشد در این صورت نشان دهید $Dim(W) = N - r$ همچنین بُعد چندین فضای برداری متعدد در زیر آورده شده که لازم است با تشکیل پایه‌ای برای آنها صحت این اعداد را بررسی کنید

$$\left. \begin{aligned} Dim(\mathbb{F}^N) &= N \\ Dim(\mathbb{F}^{M \times N}) &= M \times N \\ Dim(\mathbb{F}^{N \times N} \text{ Symmetric}) &= \frac{N^2 + N}{2} \\ Dim(\mathbb{F}^{N \times N} \text{ Anti - Symmetric}) &= \frac{N^2 - N}{2} \\ Dim(x \in \mathbb{F}^N \text{ s.t. } A_{M \times N} x = 0) &= N - \text{Rowrank}(A) \\ Dim(V = f_{(x)} = \text{Span}\langle 1 \ x \ x^2 \dots x^N \rangle) &= N + 1 \end{aligned} \right\}$$

مثال [۱۹-۲]

اگر V یک فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ بوده و W_1, W_2 دو زیر فضای آن باشند مطابق مطالب ارائه شده در بخش ۲-۲-۳ می‌دانیم که اشتراک آنها $W_1 \cap W_2$ نیز زیرفضائی از V است حال اگر $W = W_1 \oplus W_2$ مجموع مستقیم دو زیرفضا باشد (یعنی شامل کلیه ترکیبات خطی از بردارهای این دو زیرفضا) اولاً ثابت کنید W زیرفضائی از V است و داریم $Dim(W) = Dim(W_1) + Dim(W_2) - Dim(W_1 \cap W_2)$ سپس نتیجه این مسئله را به چندین زیرفضای $W_1, W_2, \dots, W_k$ تعمیم دهید.

اثبات: با توجه به اینکه $W = W_1 \oplus W_2$ شامل کلیه ترکیبات خطی از بردارهای این دو زیرفضا است لذا به ازای هر دو بردار دلخواه $\forall x, y \in W$ می توان نوشت

$$\forall x, y \in W \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases} \quad s.t. \quad \begin{cases} x_1, y_1 \in W_1 \\ x_2, y_2 \in W_2 \end{cases}$$

حال هر ترکیب خطی از بردارهای فوق را می توان به صورت زیر نوشته و تفکیک کرد

$$cx + y = (cx_1 + y_1) + (cx_2 + y_2) \Rightarrow \begin{cases} cx_1 + y_1 \in W_1 \\ cx_2 + y_2 \in W_2 \end{cases}$$

با توجه به اینکه W_1, W_2 خودشان به تنهایی زیرفضا هستند واضح است که این ترکیب خطی $cx + y \in W$ و بنابراین W نیز زیرفضا است حال برای تعیین بُعد آن فرض کنید مجموعه $\langle \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \rangle$ پایه ای برای $W_1 \cap W_2$ باشد سپس پایه های B_1, B_2 را برای این دو زیرفضا به صورت زیر

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \langle \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \beta_{r+1} \beta_{r+2} \dots \beta_m \rangle \\ B_2 &= \langle \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \gamma_{r+1} \gamma_{r+2} \dots \gamma_n \rangle \end{aligned} \right\}$$

یعنی به گونه ای تشکیل می دهیم که r بردار اول آنها همان بردارهای پایه $W_1 \cap W_2$ باشد سپس با توجه به اینکه هر بردار در W حاصل مجموع و یا ترکیب خطی از بردارهای این دو زیرفضا است در نتیجه مجموعه بردارهای مستقل B به صورت

$$B = \langle \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \beta_{r+1} \beta_{r+2} \dots \beta_m \gamma_{r+1} \gamma_{r+2} \dots \gamma_n \rangle$$

پایه ای برای W خواهد بود و لذا $\dim(W) = m + n - r$ اکنون با توجه به روند اثبات ارائه شده در فوق می توان این نتیجه را به چندین زیرفضا به صورت

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$$

تعمیم داد که بررسی و تعیین بُعد آن به عهده خواننده محترم واگذار می شود.

۶-۲-۲ مختصات

اگر V فضای برداری متناهی‌البعد بر میدان $\mathbb{F}$ و $B = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_N \rangle$ پایه مرتبی برای آن باشد به ازای هر بردار دلخواه $\forall x \in V$ می‌توان نوشت

$$x = \sum_{i=1}^N x_i \alpha_i = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_N \alpha_N \quad (۲۱-۲)$$

در این صورت مختصات بردار x نسبت به پایه B را با نماد $[x]_B$ به صورت

$$[x]_B = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} \quad (۲۲-۲)$$

نمایش داده که همواره یک بردار $1 \times N$ است. دو ملاحظه مهم از این تعریف نتیجه می‌شود؛ اولاً آنکه مختصات هر بردار نسبت به یک پایه، منحصر به فرد است چرا که اگر به عنوان مثال مختصات یک بردار دلخواه $x \in V$ دو نمایش مختلف به صورت زیر داشته باشد

$$\left. \begin{aligned} [x]_B = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} &\Rightarrow x = \sum_{i=1}^N x_i \alpha_i \\ [x]_B = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{Bmatrix} &\Rightarrow x = \sum_{i=1}^N z_i \alpha_i \end{aligned} \right\}$$

با تساوی دو رابطه فوق خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^N x_i \alpha_i = \sum_{i=1}^N z_i \alpha_i \Rightarrow \sum_{i=1}^N (x_i - z_i) \alpha_i = \vec{0}$$

و در نهایت با توجه به استقلال بردارهای پایه نتیجه می‌شود

$$x_i - z_i = 0 \Rightarrow x_i - z_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

ثانیاً اینکه مختصات بردار صفر $\vec{0}$ در هر فضای برداری و نسبت به هر پایه دلخواه بایستی به صورت زیر باشد

$$[\vec{0}]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۲۳-۲)$$

که اثبات و استدلال پیرامون این نتیجه به عهده خواننده محترم گذاشته می شود لیکن ذکر این نکته ضروری است که عدم احراز شرط فوق به معنای عدم استقلال بردارهای پایه است.

مثال [۲۰-۲]

فرض کنید V فضای ماتریسهای $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ متقارن و B, B' به صورت

$$B = \left\{ \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \alpha'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

دو پایه مرتب برای آن باشند در این صورت به عنوان مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ را می توان به صورت زیر بر حسب این بردارهای پایه بسط داد

$$A = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3$$

$$A = 3\alpha'_1 - 2\alpha'_2 + \alpha'_3$$

بنابراین مختصات ماتریس A نسبت به این دو پایه به صورت زیر خواهد بود

$$[A]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad [A]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود با تغییر پایه، مختصات یک بردار عوض می شود که در ادامه به این موضوع پرداخته شده و رابطه بین آنها استخراج می گردد.

مثال [۲-۲۱]

اگر V فضائی برداری بر میدان $\mathbb{F}$ بوده و W_1, W_2 دو زیرفضای مستقل آن باشند به قسمی که مجموع مستقیم این دو زیرفضا برابر $V = W_1 \oplus W_2$ شود در ابتدا ثابت کنید هر بردار دلخواه در V را می‌توان به مجموع دو بردار منحصر به فرد تجزیه کرد سپس نشان دهید تحت چه شرایطی و به چه صورت نتیجه این مسئله به چندین زیرفضای $W_1, W_2, \dots, W_k$ قابل تعمیم است.

اثبات: با توجه به مثال ۲-۱۹ در این شرایط $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ یعنی دو زیرفضا هیچ اشتراکی نداشته و $r = 0$ است بنابراین مجموعه

$$B = \langle \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_m \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_n \rangle$$

پایه‌ای برای V خواهد بود و لذا $\forall x \in V$ به صورت زیر خواهیم داشت $x = x_1 + x_2$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^m a_i \beta_i & [x_1]_{B_1} &= \langle a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m \rangle^T \\ x_2 &= \sum_{i=1}^n b_i \gamma_i & [x_2]_{B_2} &= \langle b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n \rangle^T \end{aligned} \right\}$$

به قسمی که $[x_1]_{B_1}$ مختصات بردار $x_1 \in W_1$ نسبت به پایه B_1 بوده و به همین ترتیب $[x_2]_{B_2}$ مختصات بردار $x_2 \in W_2$ نسبت به پایه B_2 می‌باشد و از آنجائی که مختصات هر بردار نسبت به یک پایه منحصر به فرد است نتیجه می‌شود این تجزیه نیز منحصر به فرد خواهد بود البته به این صورت نیز می‌توان استدلال کرد که اگر بردار $x \in V$ را بتوان به صورت دیگری مثلاً $x = x'_1 + x'_2$ تجزیه کرد

$$x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2 \Rightarrow x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2$$

چون دو زیرفضا هیچ اشتراکی ندارند خواهیم داشت

$$x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2 = \vec{0} \Rightarrow x_1 = x'_1, x_2 = x'_2$$

در حالی که اگر اشتراک دو زیرفضا تهی نباشد این تجزیه منحصر به فرد نیست

مثال [۲۲-۲]

در حالت خاصی که $V = \mathbb{R}^3$ است اگر زیرفضای W_1 صفحه $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ و زیرفضای W_2 خط $6x_1 = 3x_2 = 2x_3$ باشد بررسی کنید آیا بردار $\langle 2 \ 2 \ 2 \rangle \in V$ را می توان به صورت مجموع دو بردار از این دو زیرفضا نوشت و آیا این تجزیه منحصر به فرد است.

حل: در ابتدا پایه ای برای این دو زیرفضا تشکیل می دهیم با توجه به تعریف ارائه شده برای W_1 مطابق روابط زیر نتیجه می شود $W_1 = \text{Span}\{\langle 1 \ -2 \ 0 \rangle, \langle 0 \ 2 \ 1 \rangle\}$

$$\forall x \in W_1 \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 - 2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

و به طور مشابه $W_2 = \text{Span}\langle 1 \ 2 \ 3 \rangle$ است حال بررسی می کنیم که تحت چه شرایطی می توان بردار $\langle 2 \ 2 \ 2 \rangle \in V$ را به صورت ترکیب خطی از این بردارهای پایه نوشت لذا خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

با تشکیل ماتریس افزوده دستگاه فوق و انجام عملیات مقدماتی سطری خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

که به صورت منحصر به فرد منجر به محاسبه $a = 3, b = 5, c = -1$ شد بنابراین می توان نوشت

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

به قسمی که $x_1 = \langle 3 \ 4 \ 5 \rangle \in W_1$ و $x_2 = \langle -1 \ -2 \ -3 \rangle \in W_2$ و کاملاً واضح است که چون دو زیرفضای W_1, W_2 مستقل بودند در نتیجه دستگاه معادلات حاصله منجر به حل منحصر به فرد شد

۷-۲-۲ تغییر پایه و مختصات

اگر V فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ و $B = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_N \rangle$ و $B' = \langle \alpha'_1 \ \alpha'_2 \ \dots \ \alpha'_N \rangle$ دو پایه مرتب برای آن باشند در این صورت مختصات بردار دلخواهی مانند $\forall x \in V$ در این فضا نسبت به این دو پایه به صورت

$$\left. \begin{aligned} x = \sum_{j=1}^N x_j \alpha_j &\Rightarrow [x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \\ x = \sum_{i=1}^N x'_i \alpha'_i &\Rightarrow [x]_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_N \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (24-2)$$

قابل نمایش است؛ از طرفی می توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_i &= \sum_{j=1}^N p_{ji} \alpha_j \quad i = 1:N, \quad p_{ji} \in \mathbb{F} \\ P &= \langle p_1 \ p_2 \ \dots \ p_N \rangle \quad p_i = [\alpha'_i]_B \end{aligned} \right\} \quad (25-2)$$

همانطور که مشاهده می شود در اینجا یک ماتریس مربعی $P_{N \times N}$ شکل می گیرد که با توجه به رابطه فوق واضح است که ستون i ام آن یعنی p_i مختصات α'_i نسبت به پایه B است. حال به ازای هر بردار دلخواه x از رابطه (۲۴-۲) می توان نوشت

$$x = \sum_{j=1}^N x_j \alpha_j = \sum_{i=1}^N x'_i \alpha'_i \quad (26-2)$$

با جایگذاری رابطه (۲-۲۵) در رابطه (۲-۲۶) و سپس جابجایی دو علامت $\sum$ داریم

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^N x_j \alpha_j = \sum_{i=1}^N x'_i \sum_{j=1}^N p_{ji} \alpha_j = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N p_{ji} x'_i \right) \alpha_j \\ &\Rightarrow x_j = \sum_{i=1}^N p_{ji} x'_i \end{aligned} \right\} \quad (2-27)$$

که نتیجه می‌شود

$$[x]_B = P[x]_{B'} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_N \end{Bmatrix} \quad (2-28)$$

در اینجا ماتریس P لزوماً یک ماتریس غیرمنفرد و معکوس‌پذیر است چراکه اگر در رابطه فوق $x = \vec{0}$ یعنی بردار صفر قرار داده شود داریم

$$[\vec{0}]_B = P[\vec{0}]_{B'}$$

از طرفی با توجه به رابطه (۲-۲۳) که حاکی از آن است که مختصات بردار صفر نسبت به هر پایه‌ای لزوماً بایستی بردار N تائی صفر باشد $[\vec{0}]_B = \mathbf{0}$ نتیجه می‌شود که دستگاه فوق لزوماً بایستی دارای حل بدیهی $[\vec{0}]_{B'} = \mathbf{0}$ باشد لذا ماتریس P حتماً معکوس‌پذیر است؛ لازم به ذکر است که منفرد بودن ماتریس P از لحاظ مفهومی به معنای عدم استقلال بردارهای یکی از پایه‌ها و یا هردو پایه می‌باشد.

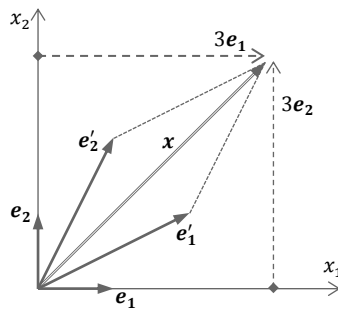
مثال [۲-۲۳]

فرض کنید $V = \mathbb{R}^2$ و B, B' به صورت زیر دو پایه مرتب برای آن باشند

$$B = \langle e_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, e_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rangle$$

$$B' = \langle e'_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, e'_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \rangle$$

در این صورت با محاسبهٔ ماتریس P مختصات بردار $x = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$ را نسبت به پایهٔ B' به دست آورید. شکل (۷-۲) این بردارها را به صورت شماتیک نمایش می‌دهد.



شکل (۷-۲) فضای برداری $V = \mathbb{R}^2$ به همراه تغییر پایه

با توجه به رابطهٔ (۲-۲۵) نتیجه می‌شود

$$p_1 = [e'_1]_B = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad p_2 = [e'_2]_B = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[x]_{B'} = P^{-1}[x]_B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

همانطور که از شکل (۷-۲) به طور هندسی مشخص است معنی نتیجه فوق را می‌توان به صورت $x = 3e_1 + 3e_2 = e'_1 + e'_2$ نوشت.

مثال (۲-۲۴)

فرض کنید $V = \{f(x)\}$ فضای کلیهٔ چندجمله‌ای‌های درجه دو و B' به صورت زیر پایه‌ای برای آن باشد مطلوب است محاسبهٔ مختصات تابع $g(x) = 6 - 3x^2$ نسبت به این پایه

$$\mathcal{B}' = \langle (1 + 2x + 3x^2), (1 - 2x^2), (1 + x - x^2) \rangle$$

حل: با در نظر گرفتن $\mathcal{B} = \langle 1, x, x^2 \rangle$ به عنوان پایه استاندارد می توان ماتریس P را به صورت زیر محاسبه کرد

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[g(x)]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[g(x)]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \end{Bmatrix}$$

این نتیجه بدان معناست که

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= 6(1) + 0(x) - 3(x^2) \\ g(x) &= 3(1 + 2x + 3x^2) + 9(1 - 2x^2) - 6(1 + x - x^2) \end{aligned} \right\}$$

۳-۲ تمرین ها

۱. اولاً ثابت کنید هر زیرمیدانی از اعداد مختلط شامل اعداد گویا است ثانیاً نشان دهید مجموعه اعداد به صورت $a + b\sqrt{2}$ به قسمی که a, b عدد گویا هستند زیرمیدانی از اعداد حقیقی است.

۲. مجموعه m عضوی $Z_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ را در نظر بگیرید اگر جمع و ضرب در آن را به صورت باقیمانده جمع و ضرب معمولی بر m تعریف کنیم ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه Z_m میدان باشد آن است که m عدد اول باشد

۳. مجموعه ماتریسها با درایه‌های حقیقی به صورت $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید اگر جمع و ضرب در این مجموعه را به صورت جمع و ضرب معمولی ماتریسها تعریف کنیم اولاً نشان دهید این مجموعه به میدان بدل خواهد شد ثانیاً نشان دهید که این میدان در تناظر یک به یک با میدان اعداد مختلط بوده و سپس با استفاده از این نتیجه حاصل عبارت $B = A^m$ را محاسبه کنید به قسمی که $m \geq 1$ یک عدد صحیح مثبت است

۴. اگر V مجموعه کلیه توابع $f(t)$ با مقدار مختلط روی محور حقیقی $\forall t \in \mathbb{R}$ با فرض $f(-t) = \bar{f}(t)$ باشد نشان دهید که این توابع به همراه تعریف دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر به صورت $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ و $(cf)(t) = cf(t)$ فضای برداری بر روی میدان $\mathbb{R}$ است. تابعی با مقدار مختلط در این فضا مثال بزنید

۵. فرض کنید $V = \mathbb{R}^N$ در این صورت کدام یک از زیرمجموعه‌های زیر تشکیل زیر فضا می‌دهند. $\forall x \in V \Rightarrow x = \langle x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N \rangle$

- مجموعه بردارهای با شرط $x_1 \geq 0$
- مجموعه بردارهای با شرط $x_1 + 3x_2 = x_3$
- مجموعه بردارهای با شرط $(x_1)^2 = x_2$
- مجموعه بردارهای با شرط $x_1 x_2 = 0$
- مجموعه بردارهای با شرط $x_1 \in \mathbb{Q}$

۶. فرض کنید $V = \mathbb{F}^{N \times N}$ یعنی فضای ماتریسهای مربعی باشد در این صورت کدام یک از زیرمجموعه‌های زیر تشکیل زیر فضا می‌دهند و بعد آن را به دست آورید.

- مجموعه ماتریسهای متقارن و یا پادمتقارن به طور جداگانه بر روی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ و همچنین بر روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{F} = \mathbb{C}$
- مجموعه ماتریسهای هرمیتی و یا پادهرمیتی به طور جداگانه بر روی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ و همچنین بر روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

- مجموعه ماتریسهای $A_{N \times N}$ که در ضرب با ماتریس مشخصی مانند $B_{N \times N}$ از ویژگی جابجائی $AB = BA$ تبعیت می کنند
- مجموعه ماتریسهای متعامد $AA^T = I$
- مجموعه ماتریسهای یکانی $AA^* = I$
- مجموعه ماتریسهای که یک و یا چند درایه آنها برابر عدد ثابتی است
- مجموعه ماتریسهای بدون تریس $Tr(A) = \sum a_{ii} = 0$

۷. فرض کنید $V = (\mathbb{R}^+)^N$ فضای N تائی های حقیقی مثبت با تعریف جمع برداری و ضرب اسکالر به صورت زیر بر روی میدان اعداد حقیقی تشکیل یک فضای برداری می دهد سپس با تشکیل پایه ای برای آن بعد آن را تعیین کنید

$$\left. \begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in V \quad x_i \in \mathbb{R}^+ \\ \forall c \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V \\ x \oplus y &\triangleq \begin{pmatrix} (x_1)(y_1) \\ (x_2)(y_2) \\ \vdots \\ (x_N)(y_N) \end{pmatrix} \quad c \otimes x \triangleq \begin{pmatrix} (x_1)^c \\ (x_2)^c \\ \vdots \\ (x_N)^c \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

۸. ثابت کنید زیرمجموعه $W = \{x = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle^T \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ با تعریف جمع برداری $x \oplus y$ و ضرب اسکالر $c \otimes x$ به صورت زیر تشکیل یک فضای برداری بر میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R} \in c$ می دهد و با نوشتن پایه ای برای آن بعد آن را تعیین کنید

$$x \oplus y \triangleq \begin{pmatrix} x_1 + y_1 - 1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}, c \otimes x \triangleq \begin{pmatrix} cx_1 + 1 - c \\ cx_2 \\ cx_3 \end{pmatrix}$$

۹. ثابت کنید اگر W_1 و W_2 دو زیر فضا بوده در این صورت $W_1 \cap W_2$ نیز زیرفضا است

۱۰. ثابت کنید اگر W_1 و W_2 دو زیر فضا بوده و $W_1 \cup W_2$ نیز زیرفضا باشد در این صورت یکی از دو زیرفضا شامل دیگری است

۱۱. ثابت کنید اگر W_1 و W_2 دو زیر فضا بوده و اگر فضای $W \triangleq W_1 \oplus W_2$ را به معنای مجموع مستقیم دو زیرفضا تعریف کنیم یعنی شامل کلیه ترکیبات خطی این دو زیرفضا باشد در این صورت ثابت کنید

$$\dim(W) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

۱۲. ثابت کنید اگر W_1 و W_2 دو زیر فضای V بوده و به قسمی که $W_1 \cap W_2 = \vec{0}$ اگر فضای $W \triangleq W_1 \oplus W_2$ را به معنای مجموع مستقیم دو زیرفضا تعریف کنیم در این صورت ثابت کنید $\forall x \in V$ می‌توان آنرا به صورت منحصر به فرد به مجموع دو بردار به صورت زیر تجزیه کرد

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{s.t.} \quad x_1 \in W_1, \quad x_2 \in W_2$$

۱۳. فرض کنید $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ و W_1 فضای کلیه ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}$ باشد اولاً ثابت کنید W_1 زیرفضای V است ثانیاً زیرفضای W_2 را طوری بیابید که $V \triangleq W_1 \oplus W_2$ و $W_1 \cap W_2 = \vec{0}$

۱۴. اگر V مجموعه کلیه توابع $f(x)$ از مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد و W مجموعه کلیه توابع باشد که در معادله دیفرانسیل زیر به همراه شرایط مرزی مربوطه

$$\frac{d^4 u}{dx^4} - k^4 u = 0, \quad k = \text{cte}' \quad u(0) = u'(0) = 0$$

صدق کنند آیا W زیرفضای V است و بعد آن را مشخص کنید.

۱۵. مجموعه اعداد حقیقی را به عنوان فضای برداری بر میدان اعداد گویا تعریف کنید و سپس ثابت کنید این فضا متناهی البعد نیست

۱۶. اگر $x = \langle x_1 \ x_2 \rangle$ و $y = \langle y_1 \ y_2 \rangle$ دو بردار در فضای $V = \mathbb{R}^2$ باشند که در شرایط زیر صدق میکنند ثابت کنید این دو بردار تشکیل پایه‌ای برای V را می دهند

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0, \quad (x_1)^2 + (x_2)^2 = (y_1)^2 + (y_2)^2 = 1$$

۱۷. ثابت کنید در فضای تابعی با دامنه پیوسته از میدان $\mathbb{F}$ به $\mathbb{F}$ مجموعه‌های زیر مستقل خطی هستند

$$\begin{aligned} & \langle 1 \ t \ \dots \ t^n \rangle \bullet \\ & \langle \cos t \ \cos 2t \ \dots \ \cos nt \rangle \bullet \\ & \langle \sin t \ \sin 2t \ \dots \ \sin nt \rangle \bullet \end{aligned}$$

۱۸. اگر $V = \text{Span}\{1, x, x^2\}$ فضای کلیه توابع چندجمله‌ای درجه دو و اگر m عدد حقیقی مشخصی باشد ثابت کنید مجموعه توابع $\{1, x + m, (x + m)^2\}$ تشکیل پایه‌ای برای V می دهد و مختصات تابع $f(x) = a + bx + cx^2$ را نسبت به آن به دست آورید

۱۹. شرط اینکه بردار $b = \langle b_1, \dots, b_5 \rangle$ در زیرفضائی از $\mathbb{R}^5$ باشد که توسط بردارهای α_i زیر گسترده می شود چیست و سپس مختصات این بردار را نسبت به پایه $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ به دست آورید $\alpha_1 = \langle 1, 0, 2, 1, -1 \rangle$ $\alpha_2 = \langle -1, 2, -4, 2, 0 \rangle$ $\alpha_3 = \langle 2, -1, 5, 2, 1 \rangle$ $\alpha_4 = \langle 2, 1, 3, 5, 2 \rangle$

۲۰. اگر V, W فضاهای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ باشند در این صورت حاصلضرب مستقیم این دو فضا را توسط رابطه $V \times W = \{(v, w) \text{ s.t. } v \in V, w \in W\}$ تعریف می کنیم؛ با تعریف جمع برداری و ضرب اسکالر به نحو مناسب ثابت کنید این

حاصلضرب یک فضای برداری است و چنانچه $Dim(V) = N$ و $Dim(W) = M$ باشد بُعد این فضای حاصلضرب را به دست آورید

۲۱. اگر $A_{M \times N}$ و $B_{N \times P}$ ماتریسهای مشخص بوده و $C = AB$ در این صورت ثابت کنید $Rank(C) \leq Rank(A)$ و همچنین $Rank(C) \leq Rank(B)$

۲۲. اگر $A_{M \times N}$ یک ماتریس مشخص با ویژگی $Rank(A) = N$ و W زیرفضای ماتریسهای $B_{K \times M}$ با شرط $BA = 0$ باشد در این صورت بُعد W را مشخص کنید

۲۳. اگر $V = \mathbb{R}^5$ باشد و W_1, W_2 دو زیرفضای آن باشند که توسط بردارهای زیر گسترده می‌شوند در این صورت مطلوب است محاسبه $W_1 \cap W_2$ و تشکیل پایه ای برای آن

$$W_1 = Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad W_2 = Span \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

۲۴. اگر فضای تهی ماتریس $A_{3 \times 4}$ برابر $N_A = Span\langle -2, -1, 0, 0 \rangle^T$ و فضای تهی ماتریس $B_{3 \times 4}$ برابر $N_B = Span\langle -1, -2, 1, 0 \rangle^T$ بوده همچنین فضای تهی ماتریس $C_{3 \times 4}$ برابر $N_C = N_A \oplus N_B$ باشد در این صورت مطلوب است محاسبه ماتریسهای تحویل یافته پلکانی معادل هریک از ماتریسهای فوق

۲۵. اگر $A_{M \times N}$ و $B_{M \times N}$ ماتریسهای مشخص بوده و رتبه سطری آنها برابر باشد آیا می‌توان گفت معادل سطری یکدیگرند، در مورد حالات مختلف M, N بحث کنید

۲۶. اگر V فضای کلیه ماتریسهای $A_{2 \times 2}$ بوده که در ضرب با ماتریس مشخص $P_{2 \times 2}$ (با درایه‌های غیر صفر) از خاصیت جابجائی تبعیت کنند، اولاً ثابت کنید V یک فضای برداری است و با تعیین پایه‌ای برای آن بُعد آن را پیدا کنید و نشان

دهید V نسبت به ضرب ماتریسی بسته و جابجا پذیر است. ثالثاً در حالت خاص $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ پایه را تشکیل داده و نشان دهید به ازای هر $\forall A \neq \mathbf{0}$ عضو این فضا داریم $\det(A) \neq 0$

۲۷. اگر $A_{M \times N}$ ماتریس مشخصی باشد ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه دستگاه معادلات ناهمگن $AX = Y$ دارای جواب باشد آن است رتبه سطری ماتریس A باید با رتبه سطری ماتریس افزوده $[A \ \ Y]$ برابر باشد

۲۸. اگر $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ باشد در این صورت پایه $\langle A_1, \dots, A_4 \rangle$ برای این فضا به گونه‌ای به دست آورید که $(A_i)^2 = A_i \ i = 1:4$ سپس مختصات ماتریس دلخواه $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را نسبت به این پایه به دست آورده و صحت رابطه $[x]_B = P[x]_B$ را بررسی کنید

۲۹. در ابتدا پایه‌ای برای فضای حل دستگاه همگن $Ax = \mathbf{0}$ تشکیل داده و سپس شرط سازگاری دستگاه $Ax = y$ را برای ماتریس زیر بررسی کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & -3 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

فصل سوم

تبدیل‌های خطی

۱-۳ تعریف یک تبدیل خطی

اگر V, W فضاهای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ بوده و نگاشت $T: V \rightarrow W$ تبدیلی از بردارهای V به بردارهای W باشد یعنی $\forall x \in V \rightarrow Tx = y \in W$ مشروط بر اینکه با اعمال این نگاشت، ترکیب خطی بین بردارها حفظ شود یعنی

$$\left. \begin{array}{l} \forall x_1, x_2 \in V \quad \forall c \in \mathbb{F} \\ T(cx_1 + x_2) = c(Tx_1) + (Tx_2) \end{array} \right\} \quad (1-3)$$

در این صورت T یک تبدیل خطی نامیده می‌شود؛ اولین ملاحظه از این تعریف آن است که بردار صفر $\vec{0} \in V$ لزوماً بایستی تحت هر تبدیل خطی دلخواه به بردار صفر $\vec{0} \in W$ نگاشت شود چراکه به عنوان مثال می‌توان به صورت زیر استدلال کرد

$$T\vec{0} = T(\vec{0} + \vec{0}) = T(\vec{0}) + T(\vec{0}) = 2T\vec{0} \Rightarrow T\vec{0}^V = \vec{0}^W$$

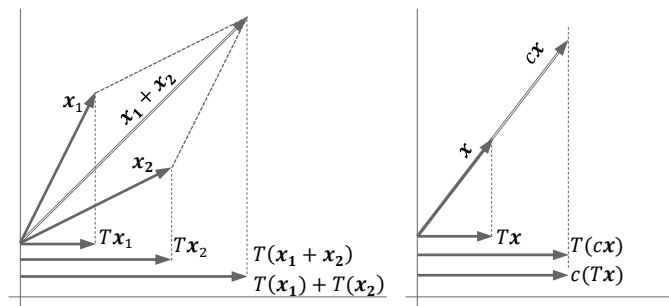
تبدیل خطی صفر $T = 0$ و عملگر همانی $T = I$ با تعریف زیر به شکل بدیهی تبدیل‌هایی خطی هستند

$$\left. \begin{aligned} \forall x \in V \Rightarrow 0x = \vec{0} \\ \forall x \in V \Rightarrow Ix = x \end{aligned} \right\} \quad (۲-۳)$$

لازم به ذکر است که هر تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ یک عملگر خطی نامیده می‌شود همچنین هر تبدیل خطی $T: V \rightarrow \mathbb{F}$ یعنی از بردارهای V به میدان $\mathbb{F}$ را اصطلاحاً یک تابعک یا فانکشنال خطی گویند. برای درک بهتر مفهوم تبدیل‌های خطی ابتدا به ذکر چند مثال هندسی می‌پردازیم و سپس در ادامه مثال‌های متعدد دیگری ارائه می‌شود.

مثال (۱-۳)

فضای برداری دوبعدی اقلیدسی $V = \mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید و فرض کنید T تبدیلی باشد که هر بردار را روی محور افقی مطابق شکل (۱-۳) تصویر کند.



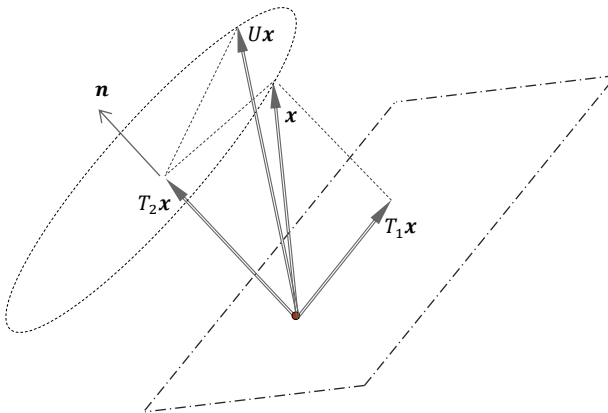
شکل (۱-۳) تبدیل خطی تصویر عمودی در $V = \mathbb{R}^2$

همانطور که مشاهده می‌شود حاصل تصویر مجموع دو بردار دلخواه با مجموع تصویر آنها برابر است به بیان دیگر چه در ابتدا دو بردار را با هم جمع کرده و سپس بردار

حاصل را تصویر کنیم و چه اینکه در ابتدا هر کدام را به صورت جداگانه تصویر کرده و سپس حاصل این دو بردار تصویر شده را با هم جمع کنیم یعنی می‌توان نوشت $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$ همچنین تفاوتی بین این وجود ندارد که در ابتدا طول یک بردار را تغییر داده و سپس آنرا تصویر کنیم با اینکه در ابتدا تصویر کرده و سپس طول بردار تصویر شده را به همان نسبت تغییر دهیم یعنی $T(cx) = c(Tx)$

مثال (۲-۳)

به عنوان یک مثال هندسی دیگر در فضای $V = \mathbb{R}^3$ مطابق شکل (۲-۳) دو عملگر تصویر عمودی T_1, T_2 و یک عملگر دوران U نمایش داده شده‌اند به قسمی که عملگر T_1 هر بردار را در صفحه‌ای با بردار قائم یگانه n تصویر کرده و عملگر T_2 هر بردار را بر روی خطی با راستای n تصویر می‌کند همچنین U عملگری است که هر بردار را حول محوری با راستای n به اندازه یک زاویه مشخص دوران می‌دهد همگی عملگرهائی خطی هستند یعنی ترکیب خطی بین بردارها را حفظ می‌کنند. در هر فضای برداری دلخواه عملگرهای تصویر عمودی و دوران، دو عملگر معروف و پرکاربرد هستند.



شکل (۲-۳) ترسیم هندسی عملگرهای تصویر عمودی و دوران

مثال (۳-۳)

به عنوان یک مثال دیگر اگر $V = \mathbb{F}^N$ و $W = \mathbb{F}^M$ بوده و نگاشت $T: V \rightarrow W$ به صورت $\forall x \in V \Rightarrow Tx \triangleq Ax$ تعریف شود به قسمی که $A_{M \times N}$ یک ماتریس مشخص است در این صورت T یک تبدیل خطی خواهد بود چراکه

$$\left. \begin{array}{l} \forall x_1, x_2 \in V \quad \forall c \in \mathbb{F} \\ T(cx_1 + x_2) = A(cx_1 + x_2) = c(Ax_1) + (Ax_2) \end{array} \right\}$$

لذا ماتریس مربعی یک عملگر خطی محسوب می‌شود.

مثال (۴-۳)

اگر $V = \mathbb{F}^{N \times N}$ فضای ماتریسهای مربعی باشد در این صورت نگاشت $T: V \rightarrow \mathbb{F}$ یعنی از فضای V به میدان $\mathbb{F}$ با تعریف $\forall A \in V \Rightarrow TA \triangleq \text{trace}(A)$ یک تبدیل تابعک یا فانگشنال خطی است چراکه

$$\left. \begin{array}{l} \forall A_1, A_2 \in V \quad \forall c \in \mathbb{F} \\ T(cA_1 + A_2) = \text{trace}(cA_1 + A_2) = c \text{trace}(A_1) + \text{trace}(A_2) \end{array} \right\}$$

مثال (۵-۳)

در فضای تابعی $V = \{f(x)\}$ عملگر مشتق‌گیری با تعریف $Tf \triangleq Df = f'$ یک عملگر خطی است چراکه $\forall f, g \in V \Rightarrow D(cf + g) = cf' + g'$ البته هر مرتبه مشتق نیز می‌تواند باشد؛ همچنین در فضای تابعی تبدیل‌های انتگرالی مانند تبدیل فوریه و یا تبدیل لاپلاس نیز از جمله تبدیل‌های خطی هستند

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}f(t) = g(\omega) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ \mathcal{L}f(t) = \varphi(s) &\triangleq \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \end{aligned} \right\}$$

چراکه به ازای هر دو تابع دلخواه f_1, f_2 و به ازای هر اسکالر حقیقی c داریم

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}(cf_1 + f_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (cf_1 + f_2)e^{-i\omega t} dt \\ &= c \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2 e^{-i\omega t} dt = cg_1 + g_2 \\ \mathcal{L}(cf_1 + f_2) &= \int_0^{\infty} (cf_1 + f_2)e^{-st} dt \\ &= c \int_0^{\infty} f_1 e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f_2 e^{-st} dt = c\varphi_1 + \varphi_2 \end{aligned} \right\}$$

مثال (۳-۶)

فرض کنید در فضای تابعی $V = C^2[a, b]$ و $W = C^0[a, b]$ باشد در این صورت تبدیل

$$\forall u_{(x)} \in V \Rightarrow Tu \triangleq \alpha_0 \frac{d^2 u}{dx^2} + \alpha_1 u + \int_a^b k_{(x,y)} u_{(y)} dy$$

یک تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ می‌باشد چراکه

$$\left. \begin{aligned} \forall u_1, u_2 \in V &\Rightarrow T(cu_1 + u_2) \\ &= \alpha_0 \frac{d^2}{dx^2} (cu_1 + u_2) + \alpha_1 (cu_1 + u_2) + \int_a^b k(cu_1 + u_2) dy \\ &= c \left(\alpha_0 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \alpha_1 u_1 + \int_a^b k u_1 dy \right) \\ &\quad + \left(\alpha_0 \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \alpha_1 u_2 + \int_a^b k u_2 dy \right) = cT(u_1) + T(u_2) \end{aligned} \right\}$$

مثال [۷-۳]

در مثالهای اخیر چندین نمونه متعدد از تبدیل‌ها و عملگرهای خطی بیان شد حال چند نمونه از تبدیل‌های غیرخطی ارائه می‌شود

الف) به عنوان مثال نگاشت $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با تعریف $T \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ یک عملگر خطی نیست چراکه ترکیب خطی بین بردارها را در جمع برداری و ضرب اسکالر حفظ نمی‌کند و طبق تعریف می‌توان نوشت

$$T(x+y) = \begin{Bmatrix} (x_1+y_1)(x_2+y_2) \\ x_2+y_2 \end{Bmatrix} \neq Tx + Ty = \begin{Bmatrix} x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ x_2 + y_2 \end{Bmatrix}$$

$$T(cx) = \begin{Bmatrix} c^2 x_1 x_2 \\ cx_2 \end{Bmatrix} \neq cTx = \begin{Bmatrix} cx_1 x_2 \\ cx_2 \end{Bmatrix}$$

ب) به عنوان مثال دیگر در فضای تابعی، مشابه حالت قبل به سادگی قابل اثبات است که نگاشت $T: f(x) \rightarrow f(x)$ با تعریف $Tf = f^2$ یک عملگر غیرخطی است.

ج) و یا در فضای ماتریسهای مربع، نگاشت $T: V \rightarrow V$ با تعریف $\forall A \in V \Rightarrow TA \triangleq A^2$ یک عملگر غیرخطی و نگاشت $T: V \rightarrow \mathbb{F}$ با تعریف $\forall A \in V \Rightarrow TA \triangleq \text{trace}(A^2)$ فانگشنال غیرخطی است.

قضیه [۱-۳] اگر V فضای برداری متناهی‌البعد بر میدان $\mathbb{F}$ و $B = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_N \rangle$ پایه مرتبی برای آن باشد و اگر $\langle \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_N \rangle$ بردارهای دلخواهی در فضای W باشند در این صورت تبدیل خطی یکتا و منحصر به فردی $T: V \rightarrow W$ وجود دارد به قسمی که

$$T\alpha_i = \beta_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

اثبات: به ازای هر بردار دلخواه $\forall x \in V$ می‌توان نوشت

$$x = \sum_{i=1}^K x_i \alpha_i = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_N \alpha_N$$

در این صورت اگر تبدیل $T: V \rightarrow W$ به صورت

$$Tx \triangleq x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_N\beta_N$$

تعریف شود اولاً یک تبدیل خطی است زیرا

$$\begin{aligned} T(cx + y) &= (cx_1 + y_1)\beta_1 + (cx_2 + y_2)\beta_2 + \cdots + (cx_N + y_N)\beta_N \\ &= c(x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_N\beta_N) + (y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_N\beta_N) \\ &= cT(x) + T(y) \end{aligned}$$

ثانیاً منحصر به فرد است چراکه اگر تبدیل دیگری مانند U وجود داشته باشد به قسمی

که به ازای $i = 1, 2, \dots, N$ داشته باشیم $U\alpha_i = \beta_i$ در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned} Ux &= U(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_N\alpha_N) = x_1(U\alpha_1) + x_2(U\alpha_2) + \cdots + x_N(U\alpha_N) \\ &= x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_N\beta_N = Tx \end{aligned}$$

و بنابراین نتیجه می‌شود که لزوماً بایستی تبدیل T با تبدیل U برابر باشد.

مثال (۸-۳)

به عنوان مثال فرض کنید تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ بردارهای $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ پایه استاندارد در $\mathbb{R}^3$ را به ترتیب به بردارهای $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ در $\mathbb{R}^2$ بدل کند. در این صورت با توجه به قضیه (۱-۳) می‌توان نوشت

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

همچنین اگر تبدیل خطی $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ بردارهای مستقل $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ در $\mathbb{R}^3$ را به ترتیب به بردارهای $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ در $\mathbb{R}^2$ بدل کند. در این صورت با توجه به قضیه (۱-۳) می‌توان نوشت

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (2x_2 - x_1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

۲-۳ هسته یک تبدیل خطی

اگر T یک تبدیل خطی از فضای برداری $T: V \rightarrow W$ باشد در این صورت مجموعه بردارهای $x \in V$ که برای آنها $Tx = \vec{0}^{(W)}$ یعنی به بردار صفر در فضای W نگاشت می‌شوند تشکیل زیرفضائی از V را می‌دهند که اصطلاحاً هسته^۱ یا فضای تهی^۲ تبدیل T نامیده می‌شود.

$$\left. \begin{aligned} N_T &= \text{Kernel}(T) \text{ or } \text{Null Space}(T) \\ N_T &\triangleq \{x \in V \text{ s.t. } Tx = \vec{0}\} \end{aligned} \right\} \quad (۳-۳)$$

اولاً واضح است که هسته، زیر فضا است چراکه

$$\left. \begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in N_T \Rightarrow Tx_1 = Tx_2 = \vec{0} \\ T(cx_1 + x_2) = cTx_1 + Tx_2 = \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow cx_1 + x_2 \in N_T$$

که در واقع یکی از نتایج خطی بودن تبدیل T است. بعد این زیر فضا هیچه^۳ تبدیل خطی نامیده می‌شود

$$\text{Nullity}(T) \triangleq \text{Dim}(N_T) \quad (۴-۳)$$

۳-۳ تصویر یک تبدیل خطی

اگر T یک تبدیل خطی از فضای برداری $T: V \rightarrow W$ باشد در این صورت مجموعه بردارهای $y \in W$ که برای آنها وجود دارد بردار $\exists x \in V$ به قسمی که $Tx = y$

^۱ Kernel

^۲ Null Space

^۳ Nullity

تشکیل زیرفضائی از W را می‌دهند که اصطلاحاً تصویر^۱ یا بُرد^۲ تبدیل خطی T نامیده می‌شود

$$\begin{aligned} R_T &= \text{Range}(T) \text{ or } \text{Imaginary}(T) \\ R_T &\triangleq \{y \in W \text{ s.t. } \exists x \in V, Tx = y\} \end{aligned} \quad (۵-۳)$$

اولاً واضح است که تصویر، زیر فضا است چراکه

$$\left. \begin{aligned} \forall y_1, y_2 \in R_T &\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in V \text{ s.t. } Tx_1 = y_1, Tx_2 = y_2 \\ cy_1 + y_2 &= cTx_1 + Tx_2 = T(cx_1 + x_2) \\ &\Rightarrow cy_1 + y_2 \in R_T \end{aligned} \right\}$$

که در واقع مجدداً مطابق قبل یکی از نتایج خطی بودن تبدیل T است. بُعد این زیر فضا رتبه^۳ تبدیل خطی نامیده می‌شود

$$\text{Rank}(T) \triangleq \text{Dim}(R_T) \quad (۶-۳)$$

مثال (۹-۳)

الف) به عنوان نمونه در مثال (۱-۳) که $V = \mathbb{R}^2$ بوده و T تبدیلی است که هر بردار را روی محور افقی مطابق شکل (۱-۳) تصویر می‌کند در این صورت کلیه بردارهایی که بر روی محور قائم قرار دارند هسته این تبدیل خطی را تشکیل می‌دهند و لذا هیچ‌آن برابر واحد است همچنین کلیه بردارهایی که بر روی محور افقی قرار دارند تصویر و یا بُرد این تبدیل خطی را تشکیل می‌دهند و لذا رتبه آن نیز برابر یک است.

ب) به عنوان نمونه دیگر در مثال (۲-۳) که $V = \mathbb{R}^3$ است اگر مطابق شکل (۲-۳) زیرفضای W_1 را صفحه‌ای با قائم n و زیرفضای W_2 را خطی با راستای n تعریف کنیم

^۱ Imaginary

^۲ Range

^۳ Rank

در این صورت با توجه به تعریف عملگر T_1 که هر بردار را در زیرفضای W_1 و عملگر T_2 که هر بردار را در زیرفضای W_2 تصویر می‌کند می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} N_{(T_1)} = W_2 &\Rightarrow \text{Nullity}(T_1) = 1 \\ R_{(T_1)} = W_1 &\Rightarrow \text{Rank}(T_1) = 2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} N_{(T_2)} = W_1 &\Rightarrow \text{Nullity}(T_2) = 2 \\ R_{(T_2)} = W_2 &\Rightarrow \text{Rank}(T_2) = 1 \end{aligned} \right\}$$

همچنین U عملگری است که هر بردار را حول محوری با راستای n به اندازه زاویه مشخص، دوران می‌دهد لذا با توجه به برداشت هندسی از آن می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} N_{(U)} = \{\vec{0}\} &\Rightarrow \text{Nullity}(U) = 0 \\ R_{(U)} = V &\Rightarrow \text{Rank}(U) = 3 \end{aligned} \right\}$$

ج در مثال (۳-۳) نگاشت $T: \mathbb{F}^N \rightarrow \mathbb{F}^M$ به صورت $\forall x \in \mathbb{F}^N \Rightarrow Tx \triangleq Ax$ تعریف می‌شود به قسمی که $A_{M \times N}$ یک ماتریس مشخص است در این صورت فضای حل دستگاه $Ax = 0$ که زیرفضائی از $\mathbb{F}^N$ می‌باشد هسته این تبدیل خطی بوده و لذا هیچ‌آن برابر $\text{Rowrank}(A) - N$ است همچنین فضای ستونی ماتریس A که زیرفضائی از $\mathbb{F}^M$ می‌باشد بُرد این تبدیل خطی بوده و لذا رتبه آن برابر $\text{Columnrank}(A)$ است.

قضیه (۳-۲) اگر V فضای برداری متناهی‌البعد و $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد در این صورت رتبه T به اضافه هیچ‌ T برابر است با بُعد فضای V یعنی می‌توان

$$\text{Rank}(T) + \text{Nullity}(T) = N = \text{Dim}(V) \quad \text{نوشت}$$

اثبات: فرض کنید $k = \text{Nullity}(T)$ و $\langle \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \alpha_k \rangle$ پایه‌ای برای هسته T باشد در این صورت بردارهای $\langle \alpha_{k+1} \ \alpha_{k+2} \dots \alpha_N \rangle$ را می‌توان طوری به دست آورد که مجموعاً با هم به صورت $B = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \alpha_N \rangle$ پایه‌ای برای V تشکیل دهند واضح است که مجموعه $\langle T\alpha_1 \ T\alpha_2 \dots T\alpha_N \rangle$ بُرد T را می‌گسترانند و چون $T\alpha_1 = \dots = T\alpha_k = \vec{0}$ در نتیجه $\langle T\alpha_{k+1} \ T\alpha_{k+2} \dots T\alpha_N \rangle$ بُرد T را می‌گسترانند؛ حال اگر ثابت کنیم که مجموعه اخیر مستقل خطی می‌باشد نتیجه می‌شود که پایه‌ای برای R_T است. برای اثبات این استقلال بایستی از رابطه

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=k+1}^N c_i T\alpha_i &= c_{k+1} T\alpha_{k+1} + c_2 T\alpha_{k+2} + \dots + c_N T\alpha_N = \vec{0} \\ \beta &\triangleq \sum_{i=k+1}^N c_i \alpha_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow T\beta = \vec{0}$$

نتیجه شود که کلیه c_i ها برابر صفر هستند؛ با تعریف بردار β به صورت فوق و با توجه به خطی بودن تبدیل و مساوی صفر بودن $T\beta = \vec{0}$ نتیجه می‌شود که $\beta \in N_T$ و لذا می‌توان آنرا به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه در نظر گرفته شده برای هسته به صورت زیر نوشت

$$\beta = \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i = \sum_{i=k+1}^N d_i \alpha_i$$

دقت شود که رابطه فوق کماکان معادل با همان فرض اولیه در نظر گرفته شده می‌باشد که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^k c_i \alpha_i - \sum_{i=k+1}^N d_i \alpha_i = \vec{0}$$

حال با توجه به حدود تغییرات دو علامت Σ می‌توان با جایگذاری $d_i = -c_i$ به ازای مقادیر $i = k+1: N$ رابطه فوق را به صورت خلاصه زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^N c_i \alpha_i = \vec{0}$$

و در نهایت با توجه به اینکه مجموعه α_i ها مستقل خطی هستند نتیجه می‌شود

$$c_i = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N$$

بنابراین مجموعه $\langle T\alpha_{k+1} \ T\alpha_{k+2} \ \dots \ T\alpha_N \rangle$ پایه‌ای برای R_T است و لذا نتیجه می‌شود

$$Rank(T) = N - k \quad \text{و به این ترتیب} \quad Rank(T) + Nullity(T) = N$$

قضیه (۳-۳) اگر $A_{M \times N}$ یک ماتریس دلخواه باشد در این صورت رتبه سطری و رتبه ستونی آن با هم برابرند یعنی $Rowrank(A) = Columnrank(A)$

اثبات: فرض کنید $A_{M \times N}$ یک ماتریس مشخص بوده $V = \mathbb{F}^N$ و $W = \mathbb{F}^M$ و تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ به صورت $Tx \triangleq Ax$ $\forall x \in V$ تعریف شود در این صورت N_T فضای حل دستگاه همگن $Ax = 0$ است و می توان نوشت

$$Nullity(T) = N - Rowrank(A)$$

از طرفی به ازای هر $\forall y \in R_T \Rightarrow y = Ax$ یعنی بردار y ترکیب خطی ستونهای A است و لذا R_T فضای ستونی ماتریس A خواهد بود و می توان نوشت

$$Rank(T) = Columnrank(A)$$

و با توجه به قضیه قبل نتیجه می شود

$$Columnrank(A) = Rowrank(A) = Rank(A)$$

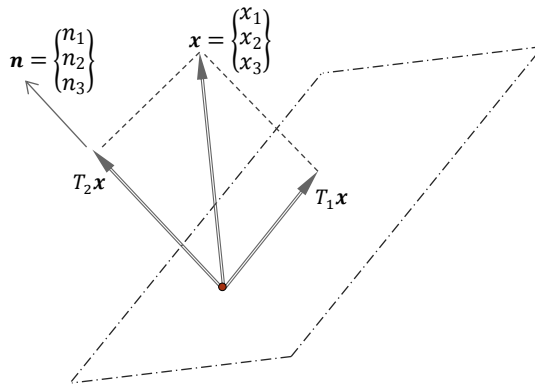
و به طور خلاصه گفته می شود رتبه ماتریس A و بنابراین

$$Rank(A) \leq \min(M, N)$$

حال می توان استدلال مطرح شده در قضیه (۲-۲) فصل قبل را به شکل بهتری توصیف کرد؛ می دانیم که شرط سازگاری دستگاه معادلات ناهمگن $Ax = b$ آن است که بردار b در فضای ستونی ماتریس A قرار داشته باشد و این بدان معنی است که اگر بردار b به عنوان یک ستون دیگر در کنار ستونهای ماتریس A قرار گیرد نباید رتبه ستونی این ماتریس افزوده، تغییر کند یعنی بایستی رتبه ستونی ماتریس A با رتبه ستونی ماتریس افزوده $[A \parallel b]$ برابر باشد از طرفی طبق قضیه قبل رتبه سطری و ستونی یک ماتریس با هم برابرند بنابراین شرط سازگاری دستگاه را می توان به این صورت بیان کرد که رتبه سطری ماتریس A باید با رتبه سطری ماتریس افزوده $[A \parallel b]$ برابر باشد.

مثال (۳-۱)

فرض کنید $V = \mathbb{R}^3$ فضای سه بعدی اقلیدسی مطابق شکل (۳-۲) و T_1 عملگر تصویر عمودی بر روی صفحه‌ای با قائم یکه $n = \langle n_1 \ n_2 \ n_3 \rangle^T$ بوده و T_2 عملگر تصویر عمودی بر روی خطی با راستای یکه n باشد اولاً نظیر هر یک از این عملگرها ماتریسهائی را به دست آورید که حاصلضرب آنها در هر بردار $x = \langle x_1 \ x_2 \ x_3 \rangle^T$ معادل تعریف آنها بوده و سپس بُرد و فضای پوچ آنها را متناسب با ماتریس نظیر هر یک توصیف کنید



شکل (۳-۳) توصیف هندسی هسته و بُرد عملگر تصویر عمودی

با استفاده از مفهوم تصویر عمودی واضح است که حاصل عبارت T_2x اولاً برداری در راستای n بوده و ثانیاً طول آن برابر ضرب داخلی $x \cdot n$ است لذا می‌توان در ابتدا حاصل عبارت Ux را با فرض نمایش ستونی هر بردار به صورت زیر نوشت

$$T_2x = (x \cdot n)n = nn^T x = Bx$$

ماتریس $B = nn^T$ در واقع نمایش ماتریسی عملگر T_2 است که در قسمت بعد بیان می‌شود ولی در این مثال می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$B = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \langle n_1 \quad n_2 \quad n_3 \rangle = \begin{bmatrix} n_1 n_1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2 n_2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3 n_3 \end{bmatrix}$$

و واضح است که رتبه آن برابر یک و هیچ‌آن برابر دو است همچنین فضای پوچ این عملگر همان صفحه با قائم n بوده و بُرد آن همان خط با راستای n است. از مفهوم تصویر عمودی و همچنین جمع برداری نیز می‌توان حاصل عبارت $T_1 x$ را با فرض نمایش ستونی هر بردار به صورت زیر نوشت

$$T_1 x = x - T_2 x = (I - nn^T)x = Ax$$

ماتریس $A = I - nn^T$ در واقع نمایش ماتریسی عملگر T_1 است که در قسمت بعد بیان می‌شود لیکن در حال حاضر می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$A = I - nn^T = \begin{bmatrix} 1 - n_1 n_1 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_2 n_1 & 1 - n_2 n_2 & -n_2 n_3 \\ -n_3 n_1 & -n_3 n_2 & 1 - n_3 n_3 \end{bmatrix}$$

بنابراین رتبه آن برابر دو و هیچ‌آن برابر یک است و برعکس حالت قبل بُرد این عملگر برابر صفحه با قائم n بوده و فضای پوچ آن همان خط با راستای n است. حال آیا می‌توانید به عنوان تمرین ماتریس نظیر عملگرهای تصویر آینه‌ای هر بردار را نسبت به یک صفحه و یا نسبت به یک خط به دست آورده و سپس رتبه و فضای پوچ آنها را توصیف کنید.

۳-۴ نمایش ماتریسی تبدیل‌های خطی

اگر V, W فضاهای برداری متناهی‌البعد بر میدان $\mathbb{F}$ و $B = \langle \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_N \rangle$ پایه مرتبی برای V و $B' = \langle \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_M \rangle$ پایه مرتبی برای W باشد و $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد در این صورت

$$T\alpha_i = \sum_{j=1}^M a_{ji}\beta_j \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (۷-۳)$$

ماتریس $A_{M \times N}$ که به صورت فوق شکل می‌گیرد را نمایش ماتریسی تبدیل خطی T نسبت به پایه‌های B, B' گوئیم و به شکل زیر می‌نویسیم

$$\left. \begin{aligned} A &= [T]_{B, B'} \\ A &= \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_N \rangle \\ \alpha_i &= [T\alpha_i]_{B'} \end{aligned} \right\} \quad (۸-۳)$$

همانطور که از ظاهر رابطه فوق مشهود است α_i ستون i ام ماتریس A برابر مختصات $T\alpha_i$ است نسبت به پایه B' در نتیجه به ازای هر بردار دلخواه $\forall x \in V$ و مفهوم مختصات خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^N x_i \alpha_i, [x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \\ y \triangleq Tx &= \sum_{j=1}^M y_j \beta_j, [Tx]_{B'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (۹-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۷-۳) در رابطه (۹-۳) و جابجائی دو علامت جمع خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} y &= Tx = \sum_{i=1}^N x_i T\alpha_i \\ y &= \sum_{i=1}^N x_i \left(\sum_{j=1}^M a_{ji} \beta_j \right) = \sum_{j=1}^M \left(\sum_{i=1}^N a_{ji} x_i \right) \beta_j \\ &\Rightarrow y_j = \sum_{i=1}^N a_{ji} x_i \end{aligned} \right\} \quad (۱۰-۳)$$

و در نهایت می‌توان نتیجه روابط فوق را به صورت خلاصه زیر نوشت

$$\left. \begin{aligned} A &\triangleq [T]_{B,B'} \\ [y]_{B'} &= A[x]_B \\ [Tx]_{B'} &= [T]_{B,B'}[x]_B \end{aligned} \right\} \quad (۱۱-۳)$$

لذا اگر $T: V \rightarrow V$ یک عملگر خطی باشد نمایش ماتریسی آن نسبت به یک پایه مرتب مانند $B = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \alpha_N \rangle$ ماتریسی مربع $A_{N \times N} \triangleq [T]_{B,B}$ به دست می‌دهد که به اختصار آن را به صورت $[T]_B$ نمایش داده و می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} T\alpha_i &= \sum_{j=1}^N a_{ji}\alpha_j \quad i = 1, 2, \dots, N \\ A_{N \times N} &\triangleq [T]_{B,B} = [T]_B = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \alpha_N \rangle \\ \alpha_i &= [T\alpha_i]_B \\ [Tx]_B &= [T]_B[x]_B = A[x]_B \end{aligned} \right\} \quad (۱۲-۳)$$

به قسمی که α_i ستون i ام ماتریس مربعی A برابر مختصات $T\alpha_i$ است نسبت به پایه B همچنین همانطور که از روابط فوق واضح است نمایش ماتریسی یک تبدیل و یا یک عملگر خطی از نظر ابعادی ثابت بوده لیکن از نظر مقادیر عددی درایه‌ها کاملاً وابسته به بردارهای پایه است و با تغییر کردن هر یک از پایه‌ها مقادیر عددی این ماتریس نیز تغییر می‌کند که در بخش بعدی به آن پرداخته می‌شود.

مثال (۱۱-۳)

فرض کنید $V = \mathbb{R}^3$ با پایه استاندارد B_1 و $W = \mathbb{R}^2$ و B_2, B'_2 به صورت زیر دو پایه مرتب برای آن باشند

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \langle \alpha_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \alpha_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \alpha_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rangle \\ B_2 &= \langle \beta_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \beta_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rangle, B'_2 = \langle \beta'_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \beta'_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \rangle \end{aligned} \right\}$$

اولاً نشان دهید تبدیل‌های T, U مطابق رابطه‌های زیر تبدیل‌هایی خطی هستند

$$Tx = T \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \triangleq \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad Ux = U \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \triangleq \begin{Bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{Bmatrix}$$

ثانیاً نمایش ماتریسی آنها را نسبت به پایه‌های فوق به دست آورید. طبق تعریف ارائه شده در رابطه (۳-۸) با اعمال تبدیل خطی T به هر یک از بردارهای پایه داریم

$$\left. \begin{aligned} T\alpha_1 &= T \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = (1)\beta_1 + (0)\beta_2 = \left(\frac{2}{3}\right)\beta'_1 + \left(-\frac{1}{3}\right)\beta'_2 \\ T\alpha_2 &= T \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = (0)\beta_1 + (1)\beta_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)\beta'_1 + \left(\frac{2}{3}\right)\beta'_2 \\ T\alpha_3 &= T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = (0)\beta_1 + (0)\beta_2 = (0)\beta'_1 + (0)\beta'_2 \end{aligned} \right\}$$

که ضرایب یا مختصات هر یک از بردارهای تبدیل شده ستونهای ماتریس مورد نظر را تشکیل می‌دهند در نتیجه می‌توان نمایش ماتریسی این تبدیل خطی را به صورت زیر نوشت

$$[T]_{B_1, B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T]_{B_1, B'_2} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

و به روش مشابه داریم

$$[U]_{B_1, B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [U]_{B_1, B'_2} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال (۳-۱۲)

به عنوان مثال دیگر فرض کنید $V = \text{Span}\{1, x\}$ فضای کلیه چندجمله‌ای‌های خطی B, B' به صورت زیر دو پایه مختلف برای آن باشند در این صورت نمایش ماتریسی عملگر مشتق گیری نسبت به این پایه‌ها عبارت است از

$$B = \langle (1), (x) \rangle \quad B' = \langle (1+x), (1-x) \rangle$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T]_{B'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

۳-۵ تغییر پایه و عملگرهای خطی

اگر V فضای برداری متناهی‌البعد بر میدان $\mathbb{F}$ و $T: V \rightarrow V$ یک عملگر خطی در آن باشد و اگر B, B' به صورت

$$\begin{aligned} B &= \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_N \rangle \\ B' &= \langle \alpha'_1 \ \alpha'_2 \ \dots \ \alpha'_N \rangle \end{aligned}$$

دو پایه مرتب برای آن باشند و همچنین اگر نمایش ماتریسی عملگر خطی T نسبت به این پایه‌ها به ترتیب برابر ماتریسهای زیر باشند

$$\left. \begin{aligned} A &\triangleq [T]_B \\ B &\triangleq [T]_{B'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} [Tx]_B &= A[x]_B \\ [Tx]_{B'} &= B[x]_{B'} \end{aligned} \quad (۱۳-۳)$$

در این صورت می‌خواهیم رابطه بین این دو ماتریس A, B را به دست آوریم؛ از قبل در مبحث تغییر پایه می‌دانیم که ماتریس معکوس پذیر P وجود دارد به قسمی که

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_i &= \sum_{j=1}^N p_{ji} \alpha_j \\ P &= \langle p_1 \ p_2 \ \dots \ p_N \rangle, \quad p_i = [\alpha'_i]_B \\ \forall x \in V &\Rightarrow [x]_B = P[x]_{B'} \\ Tx \in V &\Rightarrow [Tx]_B = P[Tx]_{B'} \end{aligned} \right\} \quad (۱۴-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۱۴-۳) در رابطه (۱۳-۳) داریم

$$\left. \begin{aligned} [Tx]_{B'} &= B[x]_{B'} \\ [Tx]_{B'} &= P^{-1}[Tx]_B = P^{-1}A[x]_B = P^{-1}AP[x]_{B'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (B - P^{-1}AP)[x]_{B'} = 0$$

با توجه به دلخواه بودن بردار x و مستقل بودن عبارت داخل پرانتز از آن نتیجه می‌شود

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow [T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P \quad (۱۵-۳)$$

که در واقع رابطه تشابه است و اصطلاحاً گوئیم ماتریسهای B, A متشابه هستند و همانطور که مشاهده می‌شود رابطه تشابه یک رابطه هم ارزی است چراکه هر سه ویژگی یک رابطه هم ارزی، یعنی ویژگی انعکاسی، تقارن و تعدی را به صورت زیر ارضا می‌کند

$$\left. \begin{aligned} A \sim A &\Rightarrow A = P^{-1}AP \Rightarrow P = I \\ A \sim B &\Rightarrow A = (P^{-1})^{-1}B(P^{-1}) \Rightarrow B \sim A \\ A \sim B &\Rightarrow B = P^{-1}AP \\ B \sim C &\Rightarrow C = Q^{-1}BQ \end{aligned} \right\} \Rightarrow C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ) \Rightarrow A \sim C$$

مثال (۳-۱۳)

فرض کنید بخواهیم در فضای توابع خطی نمایش ماتریسی عملگر مشتق گیری را نسبت به پایه $B = \{1+x, 1+2x\}$ به دست آوریم برای این کار در ابتدا نمایش ماتریسی آن را نسبت به پایه استاندارد $B' = \{1, x\}$ به صورت $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ نوشته از طرفی ماتریس معکوس پذیر ارتباط دو پایه برابر $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ است در نتیجه خواهیم داشت

$$[T]_B = P^{-1}[T]_{B'}P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

از لحاظ مفهومی ماتریس فوق این نتیجه را در بر خواهد داشت که اگر مختصات تابعی

$$\text{نسبت به پایه } [f]_B = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \text{ باشد در این صورت } [f']_B = \begin{Bmatrix} 2a+4b \\ -a-2b \end{Bmatrix} \text{ یعنی}$$

$$\frac{d}{dx}(a(1+x) + b(1+2x)) = (2a+4b)(1+x) - (a+2b)(1+2x)$$

مثال (۳-۱۴)

در فضای $V = \mathbb{R}^2$ نمایش ماتریسی عملگری که هر بردار را بر روی خط نیمساز ربع دوم تصویر می‌کند را نسبت به پایه $B = \left\{ \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \right\}$ به دست آورید.

اگر A نمایش ماتریسی این عملگر نسبت به پایه استاندارد باشد مطابق مثال (۳-۱۰) می‌توان نوشت $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و اگر B نمایش ماتریسی این عملگر نسبت به پایه B باشد خواهیم داشت

$$B = [T]_B = P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

از لحاظ مفهومی ماتریس فوق این نتیجه را در بر خواهد داشت که اگر مختصات یک بردار نسبت به پایه $[x]_B = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$ باشد در این صورت $[Tx]_B = \begin{Bmatrix} -1.5b \\ b \end{Bmatrix}$ یعنی

$$T\left(a \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + b \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}\right) = -1.5b \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + b \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

۳-۶ جبر تبدیل‌های خطی

۳-۶-۱ جمع تبدیل‌های خطی و ضرب در اسکالر

اگر V, W فضاهای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ و T, U تبدیل‌های خطی از $V \rightarrow W$ باشند در این صورت تبدیل‌های تعریف شده به صورت

$$\begin{aligned} (T + U)x &\triangleq (Tx) + (Ux) \\ \forall c \in \mathbb{F} \quad (cT)x &\triangleq c(Tx) \end{aligned} \quad (۳-۱۶)$$

نیز تبدیل‌های خطی از V به W هستند چراکه

$$\left. \begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{F}, x, y \in V \Rightarrow (T + U)(\alpha x + y) &= T(\alpha x + y) + U(\alpha x + y) \\ &= \alpha Tx + Ty + \alpha Ux + Uy = \alpha(T + U)x + (T + U)y \\ \forall \alpha \in \mathbb{F}, x, y \in V \Rightarrow (cT)(\alpha x + y) &= cT(\alpha x + y) \\ &= c(\alpha Tx + Ty) = \alpha(cT)x + (cT)y \end{aligned} \right\}$$

بنابراین می‌توان گفت که مجموعه تبدیل‌های خطی از V به W تشکیل یک فضای برداری می‌دهند که آنرا با نماد $L_{(V,W)}$ نمایش داده و می‌توان پایه‌ای برای آن تشکیل

داد. اگر V, W فضاهای برداری متناهی‌البعد بر میدان $\mathbb{F}$ و $\mathcal{B} = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_N \rangle$ پایه مرتبی برای V و اگر $\mathcal{B}' = \langle \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_M \rangle$ پایه مرتبی برای W باشد در این صورت

$$E^{(p,q)} \alpha_i \triangleq \begin{cases} \bar{0} & i \neq q \\ \beta_p & i = q \end{cases} \quad 1 \leq p \leq M, \ 1 \leq q \leq N \quad (17-3)$$

$$E^{(p,q)} \alpha_i = \delta_{iq} \beta_p$$

با توجه به نمایش ماتریسی تبدیل‌های خطی که در بخش قبل بیان شد می‌توان نمایش ماتریسی تبدیل‌های خطی تعریف شده فوق را به صورت

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

نوشت که در واقع پایه‌ای برای $\mathbb{F}^{M \times N}$ هستند؛ حال فرض کنید $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد به قسمی که

$$T \alpha_j = \sum_{p=1}^M A_{pj} \beta_p \quad j = 1, 2, \dots, N \quad A_{pq} \in \mathbb{F}$$

در این صورت خواهیم داشت

$$T = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N A_{pq} E^{(p,q)}$$

چراکه

$$T \alpha_j = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N A_{pq} E^{(p,q)} \alpha_j = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N A_{pq} \delta_{jq} \beta_p = \sum_{p=1}^M A_{pj} \beta_p$$

همچنین تبدیل‌های $E^{(p,q)}$ از یکدیگر مستقل هستند چراکه اگر ترکیب آنها به صورت

$$\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N A_{pq} E^{(p,q)} = 0$$

برابر با تبدیل صفر باشد بایستی $0 \alpha_i = \bar{0}$ و با توجه به استقلال β_p ها نتیجه می‌شود

$$\left. \begin{aligned} O\alpha_i &= \vec{0} \\ \sum_{p=1}^M A_{pj}\beta_p &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{pj} = 0$$

بنابراین تبدیل‌های $E^{(p,q)}$ پایه‌ای برای $L_{(V,W)}$ هستند و در نتیجه بعد آن برابر است با

$$\dim(L_{(V,W)}) = M \times N$$

و به تبع فضای کلیه عملگرهای خطی $T: V \rightarrow V$ با نماد $L_{(V,V)}$ نمایش داده می‌شود و خواهیم داشت

$$\dim(L_{(V,V)}) = N^2$$

۳-۶-۲ ضرب تبدیل‌های خطی

اگر V, W, Z فضاهای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ و $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی و $U: W \rightarrow Z$ یک تبدیل خطی دیگر باشد در این صورت $UT: V \rightarrow Z$ با تعریف

$$(UT)x \triangleq U(Tx) \quad (۱۸-۳)$$

یک تبدیل خطی از V به Z است چراکه

$$\left. \begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{F}, x, y \in V &\Rightarrow (UT)(\alpha x + y) = U(T(\alpha x + y)) \\ &= U(\alpha Tx + Ty) = \alpha U(Tx) + U(Ty) = \alpha(UT)x + (UT)y \end{aligned} \right\}$$

به عنوان مثال اگر $V = \mathbb{F}^N$ ، $W = \mathbb{F}^M$ و $Z = \mathbb{F}^P$ باشند و نداشت $T: V \rightarrow W$ به صورت

$$\forall x \in V \Rightarrow Tx \triangleq Ax$$

تعریف شود به قسمی که $A_{M \times N}$ یک ماتریس مشخص است و نداشت $U: W \rightarrow Z$ به صورت

$$\forall y \in W \Rightarrow Uy \triangleq By$$

تعریف شود به قسمی که $B_{p \times M}$ یک ماتریس مشخص دیگر باشد در این صورت

$$(UT)x \triangleq U(Tx) = U(Ax) = B(Ax) = (BA)x$$

به خصوص در مورد عملگرهای خطی $U, T: V \rightarrow V$ می‌توان عملگر (UT) و (TU) را تعریف کرد که البته در حالت کلی $(UT) \neq (TU)$ همچنین هر تابع دلخواهی به صورت $f_{(T)}$ یک عملگر خطی است

$$\left. \begin{array}{l} T^0 \triangleq I \\ T^1 \triangleq T \\ T^2 \triangleq T(T) \\ T^3 \triangleq T^2(T) \\ \vdots \\ T^N \triangleq T^{N-1}(T) \end{array} \right\} \Rightarrow f_{(T)} = \alpha_0 I + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_N T^N \quad (19-3)$$

۳-۶-۳ تبدیل معکوس

اگر V, W فضاهای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ و $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد در این صورت اگر تبدیل $U: W \rightarrow V$ وجود داشته باشد به قسمی که $(UT) = I$ نگاشت همانی بر V و $(TU) = I$ نگاشت همانی بر W باشد در این صورت تبدیل خطی T را معکوس پذیر گوئیم؛ شرط معکوس پذیری یک تبدیل خطی آن است که یک‌به‌یک^۱ و پوششی^۲ باشد مفهوم یک‌به‌یک بودن به آن معنی است که دو بردار مختلف به یک بردار یکسان نگاشت نشوند یعنی از رابطه $x_1 \neq x_2$ نتیجه شود که $Tx_1 \neq Tx_2$ و یا عکس نقیض این گزاره و به هر شکلی از روابط

^۱ One to One

^۲ Onto

$$\left. \begin{aligned} x_1 \neq x_2 &\Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2 \\ Tx_1 = Tx_2 &\Rightarrow x_1 = x_2 \\ T(x_1 - x_2) = \vec{0} &\Rightarrow x_1 - x_2 = \vec{0} \\ Tx = \vec{0} &\Rightarrow x = \vec{0} \end{aligned} \right\} \quad (۲۰-۳)$$

به معنای یک‌به‌یک بودن است؛ اولاً اگر یک تبدیل خطی مانند T معکوس پذیر باشد معکوس آن T^{-1} نیز یک تبدیل خطی است چراکه

$$\left. \begin{aligned} Tx_1 = y_1 &\Rightarrow T^{-1}y_1 = x_1 \\ Tx_2 = y_2 &\Rightarrow T^{-1}y_2 = x_2 \\ T(cx_1 + x_2) &= cTx_1 + Tx_2 = cy_1 + y_2 \\ T^{-1}(cy_1 + y_2) &= cx_1 + x_2 = cT^{-1}y_1 + T^{-1}y_2 \end{aligned} \right\}$$

ثانیاً مفهوم یک‌به‌یک بودن مطابق آخرین جمله رابطه (۲۰-۳) منجر به غیرمنفرد بودن می‌شود؛ تبدیل T خطی را غیرمنفرد گوئیم اگر از $Tx = \vec{0}$ نتیجه شود $x = \vec{0}$ یعنی هسته آن باید صرفاً بردار صفر باشد $N_T = \{\vec{0}\}$ و یا هیچ‌آن برابر صفر باشد.

قضیه (۳-۳) شرط لازم و کافی برای اینکه تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ غیرمنفرد باشد آن است که هر مجموعه مستقل در V به مجموعه مستقل در W نگاشت شود.

اثبات: فرض کنید تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ غیرمنفرد باشد و $\mathfrak{H} = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_k \rangle$ مجموعه مستقلی در V باشد که به مجموعه $\langle T\alpha_1 \ T\alpha_2 \ \dots \ T\alpha_k \rangle$ نگاشت شود حال می‌خواهیم ثابت کنیم که این مجموعه نیز مستقل است از رابطه

$$\sum_{i=1}^k c_i T\alpha_i = c_1 T\alpha_1 + c_2 T\alpha_2 + \dots + c_k T\alpha_k = \vec{0}$$

و خطی بودن تبدیل T داریم

$$\sum_{i=1}^k c_i T\alpha_i = T\left(\sum_{i=1}^k c_i \alpha_i\right) = \vec{0}$$

چون تبدیل غیرمنفرد بوده و مجموعه‌ی $\mathcal{B}$ مستقل است لذا

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i &= c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_k \alpha_k = \vec{0} \\ c_1 &= c_2 = \dots = c_k = 0 \end{aligned} \right\}$$

بنابراین مجموعه‌ی $\mathcal{B}$ مستقل است. حال برای اثبات طرف دوم قضیه یعنی با فرض اینکه هر مجموعه‌ی مستقل به مجموعه‌ی مستقل نگاشت شود یک مجموعه‌ی تک عضوی $\{x\}$ را در نظر بگیرید که شرط استقلال این است که $x \neq \vec{0}$ به مجموعه‌ی تک عضوی $\{Tx\}$ نگاشت شود که شرط استقلال آن است که $Tx \neq \vec{0}$ که در واقع همان مفهوم غیرمنفرد بودن است یعنی

$$\left. \begin{aligned} \{x\} &\rightarrow \{Tx\} \\ x \neq \vec{0} &\Rightarrow Tx \neq \vec{0} \\ Tx = \vec{0} &\Rightarrow x = \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_T = \{\vec{0}\}, \text{Nullity}(T) = 0$$

قضیه (۵-۳) فرض کنید $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی و $\dim(V) = N$ و $\dim(W) = M$ در این صورت گزاره‌های زیر با هم معادل هستند

- تبدیل T معکوس پذیر است
- تبدیل T غیر منفرد است
- تبدیل T پوششی است

به عنوان نمونه فرض کنید تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ غیرمنفرد باشد یعنی $\text{Nullity}(T) = 0$ و با توجه به قضیه $\text{Rank}(T) + \text{Nullity}(T) = N$ نتیجه می‌شود که $\text{Rank}(T) = N$ در نتیجه $R_T = W$ یعنی تبدیل T پوششی است به همین ترتیب موارد دیگر نتیجه می‌شوند؛ لذا در چنین حالتی اگر مجموعه‌ی $B = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_k \rangle$ پایه‌ای برای V باشد در این صورت مجموعه‌ی $B' = \langle T\alpha_1 \ T\alpha_2 \ \dots \ T\alpha_k \rangle$ پایه‌ای برای W است. نتیجه اینکه اگر V فضائی متناهی البعد بوده و $T: V \rightarrow V$ یک عملگر خطی

غیرمنفرد باشد در این صورت معکوس پذیر است و همچنین می توان گفت مجموعه عملگرهای خطی معکوس پذیر در فضای برداری V تشکیل یک گروه می دهند

$$\left. \begin{aligned} (T_1)(T_2 T_3) &= (T_1 T_2)(T_3) \\ (T)(I) &= (I)(T) = T \\ (T)^{-1}(T) &= (T)(T)^{-1} = I \end{aligned} \right\}$$

از آنجائی که تبدیل های خطی دارای نمایش ماتریسی هستند واضح است که شرط لازم و کافی برای اینکه یک تبدیل خطی معکوس پذیر باشد آن است که نمایش ماتریسی آن معکوس پذیر باشد لذا همانطور که در مورد ماتریسهای غیرمربعی در خصوص وجود معکوس چپ و یا راست بحث شد در مورد تبدیل های خطی نیز دقیقاً اینچنین است لیکن در مورد عملگرهای خطی که نظیر ماتریس های مربعی هستند شرط معکوس پذیری آن است که ماتریس نظیر، غیرمنفرد و معکوس پذیر باشد و در واقع میتوان به سادگی اثبات کرد که اگر $[T]_B = A$ در این صورت $[T^{-1}]_B = A^{-1}$

مثال [۳-۱۵]

به عنوان مثال در فضای سه بعدی اقلیدسی عملگر تصویر عمودی بر روی یک خط (با هیچۀ برابر دو) و عملگر تصویر عمودی بر روی یک صفحه (با هیچۀ برابر یک) هر دو منفرد بوده و در نتیجه معکوس پذیر نیستند ولی عملگر دوران حول یک محور دلخواه، غیرمنفرد و معکوس پذیر است. به عنوان مثال دیگر در فضای توابع چندجمله ای عملگر مشتق گیری یک عملگر منفرد (با هیچۀ برابر واحد) بوده و در نتیجه معکوس پذیر نیست.

۷-۳ فضای مستوی

۱-۷-۳ تعریف فضای مستوی

اگر V فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ و مجموعه $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n)$ بردارهای دلخواهی در آن باشند در این صورت فضای W شامل کلیه بردارهای به صورت

$$\forall x \in W \Rightarrow x = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \quad (۲۱-۳)$$

تشکیل یک فضای مستوی می‌دهند، به قسمی که α_0 یک بردار مشخص در فضای V است. فضای مستوی در واقع انتقال گستره یک مجموعه از بردارها به اندازه یک بردار ثابت است که به دلیل عدم وجود بردار صفر، فضای برداری نخواهد بود؛ به بیان دیگر می‌توان گفت که هر فضای مستوی موازی با یک فضای برداری است و همانطور که مشهود است نسبت به دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر بسته نیست.

به عنوان مثال اگر $A_{M \times N}$ یک ماتریس مشخص باشد از مباحث قبل می‌دانیم که فضای حل دستگاه معادلات همگن $Ax = 0$ تشکیل یک فضای برداری می‌دهد و می‌توان پایه‌ای به صورت مجموعه بردارهای

$$\mathcal{B} = \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\} \quad n = N - \text{Rowrank}(A) \\ Ax_i = 0, \quad i = 1:n$$

برای آن تشکیل داد حال اگر بردار x_0 وجود داشته باشد به قسمی که $Ax_0 = b$ در این صورت فضای حل دستگاه ناهمگن $Ax = b$ تشکیل یک فضای مستوی می‌دهد و می‌توان حل کامل این دستگاه را به صورت زیر نوشت

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

به عنوان مثال دیگر در فضای تابعی حل همگن یک معادله دیفرانسیل تشکیل یک فضای برداری می‌دهد که همان حل عمومی است لیکن حل کامل یک معادله دیفرانسیل ناهمگن حاصل جمع حل خصوصی و حل عمومی است که تشکیل یک

فضای مستوی می‌دهد. در ادامه صرفاً به توضیح و تفسیر پیرامون فضاهای مستوی موجود در فضای $V = \mathbb{R}^N$ پرداخته می‌شود.

۲-۷-۳ تعریف خط در $\mathbb{R}^N$

اگر $V = \mathbb{R}^N$ باشد در این صورت انتقال گستره یک بردار x_1 به اندازه یک بردار ثابت x_0 تشکیل خط می‌دهد و می‌توان نوشت

$$x = x_0 + \alpha x_1 \quad -\infty < \alpha < +\infty \quad (22-3)$$

در این صورت معادله خط عبور کرده از دو نقطه y_1, y_2 را می‌توان از انتقال گستره بردار $(y_2 - y_1)$ به اندازه بردار ثابت y_1 و یا y_2 که هر دو منجر به معادله یکسانی می‌شوند به دست آورد

$$\begin{cases} x = y_1 + \alpha(y_2 - y_1) = (1 - \alpha)y_1 + \alpha y_2 & \alpha \in \mathbb{R} \\ x = y_2 + \beta(y_1 - y_2) = \beta y_1 + (1 - \beta)y_2 & \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (23-3)$$

همچنین اگر $A_{N \times N}$ یک ماتریس مشخص حقیقی و رتبه آن برابر با $N - 1$ باشد در این صورت فضای حل دستگاه ناهمگن سازگار $Ax = b$ برابر یک خط است. به عنوان مثال فرض کنید $V = \mathbb{R}^2$ باشد در این صورت معادله خطی که از نقطه $(1, 1)$ با شیب دو عبور می‌کند عبارت است از انتقال گستره بردار $(1, 2)$ به اندازه یک بردار ثابت مانند بردار $(1, 1)$ که منجر به معادله زیر می‌شود

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 1 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

البته این بردار ثابت هر بردار دلخواهی است که مبدأ مختصات را به یکی از نقاط موجود بر روی این خط متصل می‌کند به عنوان مثال انتقال گستره بردار $(1, 2)$ به اندازه یک بردار ثابت مانند بردار $(2, 3)$ منجر به معادله

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} + \beta \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 1 \quad \beta \in \mathbb{R}$$

خواهد شد که همان معادله قبل است.

۳-۷-۳ تعریف صفحه در $\mathbb{R}^N$

اگر $V = \mathbb{R}^N$ باشد در این صورت انتقال گستره دو بردار $\{x_1, x_2\}$ به اندازه یک بردار ثابت x_0 تشکیل یک صفحه می‌دهد و می‌توان نوشت

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \beta x_2 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (۲۴-۳)$$

در این صورت معادله صفحه عبور کرده از سه نقطه y_1, y_2, y_3 عبارت است از

$$x = \alpha y_1 + \beta y_2 + (1 - \alpha - \beta) y_3 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (۲۵-۳)$$

که همانطور که مشاهده می‌شود انتقال گستره بردارهای $(y_1 - y_3)$ و $(y_2 - y_3)$ به اندازه بردار ثابت y_3 است. همچنین اگر $A_{N \times N}$ یک ماتریس مشخص حقیقی و رتبه آن برابر با $N - 2$ باشد در این صورت فضای حل دستگاه ناهمگن سازگار $Ax = b$ برابر یک صفحه است.

مثال (۱۶-۳)

در فضای $V = \mathbb{R}^3$ محل تقاطع صفحات زیر را مشخص کنید

$$x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \text{Span} \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) \quad x = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \text{Span} \left(\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \right)$$

برای به دست آوردن محل برخورد این دو صفحه بایستی نمایش پارامتری آنها را به صورت زیر مساوی یکدیگر قرار دهیم

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \beta \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \gamma \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \mu \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

که منجر به یک دستگاه جبری سه معادله و چهار مجهول به صورت زیر شده که بسته به وضعیت دستگاه شرایط مختلفی از لحاظ محل برخورد ایجاد می‌شود

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\gamma \\ -\mu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

به طور خلاصه اگر این دستگاه معادلات حاصله کاملاً مستقل باشد در این صورت دو صفحه یکدیگر را در یک خط قطع می‌کنند، اگر شامل دو معادله مستقل سازگار باشد در این صورت دو صفحه بر هم منطبق بوده و اگر شامل دو معادله مستقل ناسازگار باشد بدان معنی است که دو صفحه موازی هستند و در نهایت اگر یک معادله مستقل حاصل شود یعنی تناقض و بدان معناست که معادلات فوق مبین صفحه نبوده و در واقع مبین خط هستند. با انجام عملیات مقدماتی سطری بر روی ماتریس افزوده دستگاه داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه دو صفحه یکدیگر را در یک خط به معادله پارامتری زیر قطع می‌کنند و خواهیم داشت

$$\begin{Bmatrix} \alpha = 2\mu \\ \beta = 1 - \mu \\ \gamma = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + 2\mu \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + (1 - \mu) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \mu \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

و یا می‌توان معادله این خط را به صورت زیر نیز نوشت

$$\frac{x_1 - 2}{1} = \frac{x_2 - 2}{3} = \frac{x_3 - 2}{1}$$

مثال (۳-۱۷)

محل تقاطع دو صفحه با معادلات پارامتری زیر را در $V = \mathbb{R}^4$ به دست آورده و نشان دهید که بر هم منطبق هستند

$$\mathbf{x}_{(\alpha, \beta)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{(\gamma, \mu)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

روش اول: با قرار دادن بردارهایی که صفحات فوق را گسترش می‌دهند در سطریهای یک ماتریس و محاسبه ماتریس تحویل یافته سطرهای پلکانی نظیر هر یک از آنها نتیجه می‌شود که این ماتریسها معادل سطرهای یکدیگر هستند

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

لذا این دو صفحه موازی بوده و حال دنبال یک نقطه مشترک می‌گردیم که نتیجه می‌شود

$$\mathbf{x}_{(\alpha=1, \beta=0)} = \mathbf{x}_{(\gamma=0, \mu=0)}$$

روش دوم: مساوی قرار دادن معادلات پارامتری این دو صفحه منجر به یک دستگاه معادلات جبری با چهار معادله و چهار مجهول می‌شود که شرط انطباق این دو صفحه آن است که دستگاه معادلات حاصله به دو معادله مستقل سازگار منجر شود به بیان دیگر دو پارامتر α, β به طور مشخص بر حسب دو پارامتر γ, μ به دست آیند.

به طور خلاصه اگر دستگاه معادلات حاصله کاملاً مستقل باشد در این صورت دو صفحه یکدیگر را در یک نقطه مشخص قطع می‌کنند، اگر سه معادله مستقل سازگار باشد در این صورت دو صفحه یکدیگر را در یک خط قطع کرده و اگر ناسازگار باشد در این صورت دو صفحه متنافر هستند، اگر دو معادله مستقل سازگار باشد در این صورت دو صفحه بر هم منطبق بوده و اگر ناسازگار باشد در این صورت دو صفحه

موازی هستند، و اگر یک معادله مستقل حاصل شود یعنی تناقض و بدان معناست که معادلات فوق مبین صفحه نبوده و در واقع مبین خط هستند.

با مساوی قرار دادن فرم پارامتری این صفحات دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

با انجام عملیات مقدماتی سطری بر روی ماتریس افزوده دستگاه داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه منجر به دو معادله مستقل سازگار شد $\alpha = 1 + \gamma - 3\mu$ و $\beta = -\gamma + \mu$ که بدان معناست که دو صفحه بر هم منطبق هستند یعنی نظیر هر نقطه در یکی از صفحات می‌توان به طور مشخص و منحصر به فرد یک نقطه در صفحه دیگر یافت.

۳-۷-۳ تعریف ابرصفحه در $\mathbb{R}^N$

اگر $V = \mathbb{R}^N$ باشد در این صورت انتقال گستره $N - 1$ بردار $\{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$ به اندازه یک بردار ثابت x_0 تشکیل ابرصفحه می‌دهد و می‌توان نوشت

$$x = x_0 + \text{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\} \quad (۲۶-۳)$$

در این صورت معادله ابرصفحه عبور کرده از N نقطه $y_1, y_2, \dots, y_N$ عبارت است از

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_N y_N \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R} \quad (۲۷-۳)$$

اگر $A_{N \times N}$ یک ماتریس مشخص حقیقی و رتبه آن برابر با 1 باشد در این صورت فضای حل دستگاه ناهمگن سازگار $Ax = b$ برابر یک ابرصفحه است؛ در این حالت ماتریس A دارای یک سطر مستقل بوده یعنی می‌توان آنرا به صورت

$$A = \langle a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_N \rangle$$

به شکل یک بردار سطری نوشت لذا معادله ابرصفحه عبور کرده از N نقطه عبارت است

$$\left. \begin{aligned} \langle a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_N \rangle y_i &= b \\ \langle a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_N \rangle \langle y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_N \rangle &= b \langle 1 \ 1 \ \cdots \ 1 \rangle \\ AY = b1^T &\Rightarrow A = b1^T Y^{-1} \end{aligned} \right\}$$

به قسمی که y_i برابر ستون i ام ماتریس Y است و بنابراین معادله ابرصفحه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$1^T Y^{-1} x = 1$$

مثال (۳-۱۸)

به عنوان مثال معادله صفحه‌ای در $\mathbb{R}^3$ که از نقاط $\langle 1 \ 0 \ 1 \rangle$ ، $\langle 0 \ 1 \ 0 \rangle$ و $\langle 1 \ 0 \ 2 \rangle$ عبور می‌کند را می‌توان به صورت

$$\langle 1 \ 1 \ 1 \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = 1$$

نوشت بنابراین عبارت است از

$$\langle 1 \ 1 \ 1 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = x_1 + x_2 = 1$$

مثال [۳-۹]

به عنوان مثال معادلهٔ ابرصفحه‌ای در $\mathbb{R}^4$ که از نقاطی به مختصات زیر عبور می‌کنند

$$\langle 1 \ 1 \ 0 \ 0 \rangle, \langle 1 \ 2 \ 0 \ 0 \rangle, \langle 0 \ 0 \ 2 \ 1 \rangle, \langle 0 \ 0 \ 1 \ 1 \rangle$$

را می‌توان به این صورت نوشت که

$$\langle 1 \ 1 \ 1 \ 1 \rangle \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = 1$$

که عبارت است از

$$\langle 1 \ 1 \ 1 \ 1 \rangle \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = 1$$

و در نهایت منجر به معادلهٔ ابرصفحه‌ای به صورت $x_1 + x_4 = 1$ می‌شود.

۸-۳-۳ تعریف‌ها

۱. اگر $V = \mathbb{R}^3$ و $W = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ باشد و همچنین اگر تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ و تبدیل خطی $U: W \rightarrow V$ به صورت زیر تعریف شده باشد در این صورت پایه‌ای برای بُرد و فضای تهی هر یک از عملگرهای $R = TUT$ و $S = UTU$ تعیین کنید

$$Tx = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 - x_2 \end{bmatrix} \quad UA = \begin{Bmatrix} a_{11} + a_{22} \\ a_{12} - a_{21} \\ a_{11} - a_{22} \end{Bmatrix}$$

۲. اگر W زیرفضای m بُعدی فضای برداری n بُعدی V باشد؛ ثابت کنید مجموعه عملگرهای خطی $T: V \rightarrow V$ که فضای تهی آنها W است زیرفضائی از $L_{(V,V)}$ است و بُعد آن را تعیین کنید

۳. اگر V فضای برداری متناهی‌البعد و $T: V \rightarrow V$ عملگری خطی در آن باشد به قسمی که $Rank(T) = Rank(T^2)$ ثابت کنید R_T بُرد این عملگر خطی از N_T هسته آن از هم استقلال دارند $\{ \vec{0} \}$

۴. اگر V فضای برداری متناهی‌البعد با پایه $B = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ بر میدان $\mathbb{F}$ باشد در ابتدا نمایش ماتریسی عملگر خطی T که توسط روابط

$$T\alpha_n = \vec{0}, \quad T\alpha_i = \alpha_{i+1} \quad i = 1: n-1$$

تعریف می‌شود را نسبت به پایه B نوشته و ثابت کنید $T^n = 0$ است در حالی که $T^{n-1} \neq 0$ ، سپس نشان دهید اگر U هر عملگر خطی باشد که برای آن $U^n = 0$ ولی $U^{n-1} \neq 0$ ، پایه مرتب B' را همواره برای فضای V می‌توان یافت به قسمی که $[U]_{B'}$ یعنی نمایش ماتریسی U نسبت به پایه B' برابر با $[T]_B$ یعنی نمایش ماتریسی T نسبت به پایه B شود.

۵. اگر $V = \mathbb{F}^{2 \times 2}$ و $P_{2 \times 2}$ یک ماتریس مشخص باشد؛ چنانچه عملگر خطی T بر فضای V توسط رابطه $\forall A \in V \Rightarrow TA \triangleq PA$ تعریف شود در این صورت ثابت کنید $tr(T) = 2tr(A)$

۶. اگر $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ و $P_{2 \times 2}$ یک ماتریس مشخص باشد؛ چنانچه عملگر خطی T بر فضای V توسط رابطه $\forall A \in V \Rightarrow TA \triangleq PA - AP$ تعریف شود در این صورت با نوشتن نمایش ماتریسی آن $rank(T)$ رتبه و $nullity(T)$ هیچه آن را به دست آورید

۷. فرض کنید $P_{2 \times 2}$ و $Q_{3 \times 3}$ ماتریسهای مشخص با $rank(P) = rank(Q) = 2$ باشند چنانچه در فضای $V = \mathbb{R}^{2 \times 3}$ عملگر خطی T توسط رابطه $\forall A \in V \Rightarrow TA \triangleq PAQ$ تعریف شود رتبه و هیچه این عملگر را محاسبه کنید

۸. اگر عملگر خطی T بر $V = \mathbb{R}^3$ توسط رابطه زیر تعریف شده باشد اولاً بررسی کنید که آیا معکوس پذیر است و سپس قاعده‌ای برای T^{-1} مشابه T بیابید؛ و همچنین ثابت کنید $(T^2 - I)(T - 3I) = 0$

$$T\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle 3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3 \rangle$$

۹. اگر فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ و $T: V \rightarrow V$ عملگری خطی در آن باشد به قسمی که $T^2 = 0$ ، اولاً درباره رابطه R_T برد این عملگر و N_T فضای پوچ آن چه می‌توان گفت سپس یک عملگر خطی در $V = \mathbb{R}^2$ مثال بزنید که برای آن $T^2 = 0, T \neq 0$ بوده لیکن $T \neq 0$ باشد ثانیاً اگر $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ویژگی $T^2 = 0, T \neq 0$ ثابت کنید پایه $\mathcal{B}$ برای $\mathbb{R}^3$ وجود دارد به قسمی که نمایش ماتریسی T نسبت به آن ماتریسی به صورت $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ است به قسمی $b \in \mathbb{R}$ که یک عدد دلخواه حقیقی است

۱۰. اگر عملگر خطی T بر $V = \mathbb{R}^3$ با ویژگی‌های $T^3 = I$, $T^2 \neq I$ تعریف شده باشد ثابت کنید پایه $\mathcal{B}$ برای V وجود دارد به قسمی که نمایش ماتریسی T

$$\text{نسبت به آن ماتریسی به صورت } [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ است}$$

۱۱. اگر $T: V \rightarrow W$ تبدیل خطی از فضای متناهی‌البعد V به فضای متناهی‌البعد W و $A = [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}$ نمایش ماتریسی آن نسبت به پایه‌های $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1$ باشد در این صورت نمایش ماتریسی T را نسبت به پایه‌های $\mathcal{B}', \mathcal{B}'_1$ تعیین کنید؛ فرض کنید P ماتریس تبدیل بین پایه‌های $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ بوده و Q ماتریس تبدیل بین پایه‌های $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$ باشد

۱۲. تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ در فضای تابعی از $V = C^2(0, \infty)$ به $W = C^0(0, \infty)$ توسط معادله دیفرانسیل رسته دوم $T(x) = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ با شرط ابتدائی $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ تعریف شده را در نظر بگیرید، ثابت کنید چنانچه λ_1, λ_2 ریشه‌های متمایز معادله جبری $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$ باشند تبدیل خطی U که توسط رابطه زیر تعریف شده در رابطه $TU = I$ صدق می‌کند به بیان دیگر تبدیل خطی T برابر با معکوس تبدیل خطی U است

$$U(f) \triangleq \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^t [e^{\lambda_1(t-\tau)} - e^{\lambda_2(t-\tau)}] f(\tau) d\tau \quad \left. \begin{array}{l} U: C^0(0, \infty) \rightarrow C^2(0, \infty) \end{array} \right\}$$

۱۳. فصل مشترک صفحات زیر در $\mathbb{R}^3$ را به دست آورید

$$x_{(\alpha, \beta)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} + \alpha \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} + \beta \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, x_{(\gamma, \mu)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \gamma \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \mu \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

۱۴. اگر $V = \text{Span}\{1, x, x^2, x^3\}$ فضای کلیه توابع چندجمله‌ای درجه سه و عملگر $T: V \rightarrow V$ توسط رابطه $T(u) \triangleq u'' + \int_0^1 u(t) dt$ تعریف شود در این صورت پایه‌ای برای R_T برد این عملگر و N_T فضای پوچ آن تعیین کنید و سپس با

استفاده از آن حلی برای معادله $T(u) = 9x + 5$ بنویسید و بررسی کنید که آیا این حل منحصر به فرد است

۱۵. اگر $V = f(x)$ فضای کلیه توابع چندجمله‌ای و $Tf = x^2 f'' + xf' + f$ یک عملگر خطی بر آن باشد بررسی کنید آیا T غیرمنفرد است؛ آیا T پوششی است و در صورت احراز شرایط اخیر معکوس آن $T^{-1}(\sum a_k x^k)$ را به دست آورید

۱۶. اگر V فضای کلیه توابع در گستره $V = \text{Span}\{\sinh x, \cosh x, \exp x\}$ باشد در این صورت $Tf = f^{(n)}$ یعنی مشتق مرتبه n ام، یک عملگر خطی بر V است نشان دهید این عملگر وارون پذیر است و آن را به دست آورید

۱۷. اگر $V = \text{Span}\{1, x, \sin x, \cos x\}$ و زیرمجموعه W با شرط $f_{(0)} = f_{(\pi/2)} = 0$ زیرفضای آن و T تبدیلی خطی با مشخصات زیر باشد با مشخص کردن آن نمایش ماتریسی T را نسبت به پایه‌هایی که برای V, W تعیین می‌کنید بنویسید

$$\left. \begin{aligned} T(x) &= x + \frac{\pi}{2}(\cos x - 1) \\ T(1 + \sin x) &= \sin x + \cos x - 1 \\ N_{(T)} &= \text{Span}\{1 + x, \sin x + \cos x\} \end{aligned} \right\}$$

فصل چهارم

دترمینان

۱-۴ مقدمه و تعریف دترمینان

شاید دقیقاً از لحاظ تاریخی نتوان گفت شروع و یا مبنای تعریف دترمینان یک ماتریس مربع از کجا است لیکن با توجه به مفهوم ضرب ماتریسها و تعریف ماتریس معکوس و همچنین یادآوری قضیه ۱-۲ در فصل اول که اگر ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ را به شکل افزوده با ماتریس همانی $[A_{N \times N} \parallel I_N]$ در کنار هم قرار دهیم و عملیات سطری متعددی انجام دهیم به قسمی که $[I_N \parallel B_{N \times N}] \sim [A_{N \times N} \parallel I_N]$ در این صورت $B = A^{-1}$ خواهد بود، حال اگر به عنوان مثال ماتریس $A_{2 \times 2}$ دلخواه زیر را قرار دهیم خواهیم داشت

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{D} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) \Bigg\}$$

$$D = ad - bc$$

همانطور که مشاهده می‌شود یک تابع دوخطی $D = ad - bc$ از درایه‌های این ماتریس در معکوس آن ظاهر می‌شود که در واقع همان دترمینان است و با نماد $\det(A) = |A|$ نیز نمایش داده می‌شود؛ با الهام‌گیری از فوق اگر $A_{N \times N}$ یک ماتریس مربعی دلخواه باشد دترمینان آن تابعی خطی از سطرها و N خطی از درایه‌های آن

می‌باشد که اگر جای دو سطر ماتریس عوض شوند علامت آن تغییر می‌کند لذا اگر دو سطر یک ماتریس برابر باشند دترمینان آن صفر است؛ از این ویژگیها در برخی مراجع به عنوان متناوب بودن ذکر شده و اینچنین بیان می‌شود که دترمینان یک ماتریس تابعی خطی و متناوب از سطرهای آن است. کلی‌ترین تابع خطی از سطرهای یک ماتریس و N خطی از درایه‌های آن را می‌توان بر حسب یک تانسور مرتبه N به صورت زیر نوشت

$$\det(\mathbf{A}) \triangleq \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \cdots \sum_{i_N=1}^N \mathcal{E}_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{Ni_N} \quad (۱-۴)$$

حال اگر بخواهد رابطه فوق خواص متناوب بودن را در بر داشته باشد بایستی این تانسور نسبت به جابجائی هر دو اندیسش پادمتقارن باشد که منجر به تعریف تانسور معروفی به نام نماد جایگشت^۱ به صورت زیر خواهد شد

$$\mathcal{E}_{i_1 i_2 \dots i_N} \triangleq \begin{cases} +1 & \text{اگر } i_1 i_2 \dots i_N \text{ ترتیب زوجی از } 12 \dots N \text{ باشند} \\ -1 & \text{اگر } i_1 i_2 \dots i_N \text{ ترتیب فردی از } 12 \dots N \text{ باشند} \\ 0 & \text{اگر دو یا بیشتر از دو اندیس آن برابر باشند} \end{cases} \quad (۲-۴)$$

اولاً نماد جایگشت از N^N مؤلفه دارای $N!$ مقدار غیر صفر است یعنی حالتی که کلیه اندیسها مخالف باشند به عنوان مثال در حالت $N = 2$ خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_{12} &= -\mathcal{E}_{21} = +1 \\ \mathcal{E}_{11} &= \mathcal{E}_{22} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \det(\mathbf{A}) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \mathcal{E}_{\alpha\beta} a_{1\alpha} a_{2\beta}$$

و یا در حالت $N = 3$ خواهیم داشت

^۱ Permutation Symbol

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1 \\ \varepsilon_{213} &= \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1 \\ \varepsilon_{111} &= \varepsilon_{112} = \dots = \varepsilon_{333} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

با ترانهاده گرفتن از رابطه $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ نتیجه می‌شود $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$ بنابراین واضح است که $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$ و لذا روابط بسط سطری دترمینان را می‌توان به صورت ستونی نیز نوشت

$$\det(\mathbf{A}) \triangleq \sum_{i_1=1}^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_N N} \quad (3-4)$$

همانطور که مشاهده می‌شود با این تعریف دترمینان ماتریس همانی برابر واحد خواهد بود و متعاقباً می‌توان هر یک از روابط زیر را برای محاسبه دترمینان مورد استفاده قرار داد

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{i_1=1}^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_N j_N} \\ \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{i_1=1}^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{j_1 i_1} a_{j_2 i_2} \dots a_{j_N i_N} \\ \det(\mathbf{A}) &= \frac{1}{N!} \sum_{i_1=1}^N \sum_{j_1=1}^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_N j_N} \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

البته روابط فوق که برای تعریف تابع دترمینان یک ماتریس مربع ارائه شدند عمده‌تاً برای اثبات قضایای موجود در مورد آن به کار می‌روند و نه برای محاسبات عددی چرا که اگر به عنوان مثال بخواهیم دترمینان یک ماتریس $\mathbf{A}_{100 \times 100}$ را به روش فوق محاسبه کنیم با توجه به اینکه نماد جایگشت دارای $10^{158} \approx 100! = N!$ مقدار غیر صفر است لذا بایستی به تعداد 10^{158} عملیات ضرب انجام دهیم حال تصور کنید که در حال حاضر سرعت جمع ابررایانه‌های دنیا در حدود انجام 223×10^{15} عملیات

ممیز شناور در هر ثانیه است بنابراین کل زمان لازم برای محاسبه این دترمینان برابر است با 4.5×10^{140} ثانیه و یا 1.4×10^{133} سال که لزوماً غیر منطقی است. در ادامه این فصل تأثیر عملیات مقدماتی سطری بر روی دترمینان مورد بررسی قرار گرفته و قضایای موجود در این خصوص ارائه می‌شوند.

۲-۲-۴ تأثیر عملیات مقدماتی سطری بر دترمینان

۲-۲-۴-۱ عملیات نوع اول

فرض کنید ماتریس $A_{N \times N}$ با انجام عملیات مقدماتی سطری نوع اول به ماتریس $B_{N \times N}$ بدل شده باشد یعنی حاصلضرب اسکالر مخالف صفر در یک سطر، مثلاً سطر اول آن در اسکالر $\alpha \neq 0$ ضرب شده است در این صورت اگر E_1 ماتریس مقدماتی نظیر آن باشد داریم

$$\left. \begin{aligned} B &= E_1 A \\ \det(B) &= \sum_{i_1^s=1}^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} b_{1 i_1} b_{2 i_2} \dots b_{N i_N} \\ \det(B) &= \sum_{i_1^s=1}^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} (\alpha a_{1 i_1}) (a_{2 i_2}) \dots (a_{N i_N}) = \alpha \det(A) \\ \det(E_1) &= \alpha \\ \det(B) &= \det(E_1) \det(A) \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

۲-۲-۴-۲ عملیات نوع دوم

فرض کنید ماتریس $A_{N \times N}$ با انجام عملیات مقدماتی سطری نوع دوم به ماتریس $B_{N \times N}$ بدل شده باشد یعنی جابجایی دو سطر مثلاً سطر اول و دوم آن با هم عوض شده باشد در این صورت اگر E_2 ماتریس مقدماتی نظیر آن باشد داریم

$$\left. \begin{aligned}
 & \mathbf{B} = \mathbf{E}_2 \mathbf{A} \\
 & \det(\mathbf{B}) = \sum_{i_r^S=1}^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} b_{1i_1} b_{2i_2} \dots b_{Ni_N} \\
 & = \sum_{i_r^S=1}^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} (a_{2i_1}) (a_{1i_2}) \dots (a_{Ni_N}) \\
 & = - \sum_{i_r^S=1}^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} (a_{1i_1}) (a_{2i_2}) \dots (a_{Ni_N}) \\
 & \det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A}) \\
 & \det(\mathbf{E}_2) = -1 \\
 & \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_2) \det(\mathbf{A})
 \end{aligned} \right\} \quad (۴-۶)$$

۳-۲-۴ عملیات نوع سوم

فرض کنید ماتریس $\mathbf{A}_{N \times N}$ با انجام عملیات مقدماتی سطری نوع سوم به ماتریس $\mathbf{B}_{N \times N}$ بدل شده باشد یعنی جابجائی یک سطر با مجموع همان سطر و حاصلضرب اسکالر در سطر دیگر مثلاً به جای سطر دوم، سطر دوم به اضافه α برابر سطر اول قرار گرفته است در این صورت اگر $\mathbf{E}_3$ ماتریس مقدماتی نظیر آن باشد داریم

$$\left. \begin{aligned}
 & \mathbf{B} = \mathbf{E}_3 \mathbf{A} \\
 & \det(\mathbf{B}) = \sum_{i_r^S=1}^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} b_{1i_1} b_{2i_2} \dots b_{Ni_N} \\
 & = \sum_{i_r^S=1}^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} (a_{1i_1}) (a_{2i_2} + \alpha a_{1i_2}) \dots (a_{Ni_N}) \\
 & = \sum_{i_r^S=1}^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} (a_{1i_1}) (a_{2i_2}) \dots (a_{Ni_N}) = \det(\mathbf{A}) \\
 & \det(\mathbf{E}_3) = 1 \\
 & \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_3) \det(\mathbf{A})
 \end{aligned} \right\} \quad (۴-۷)$$

همانطور که مشاهده می‌شود عملیات نوع اول دترمینان را با ضریب $\alpha \neq 0$ و تغییر داده و عملیات نوع دوم و یا سوم مقدار دترمینان را تغییر نمی‌دهد بنابراین اگر ماتریس A طی انجام متعدد عملیات مقدماتی سطری نوع دوم و یا سوم به ماتریس B بدل شده باشد می‌توان نوشت $\det(B) = (-1)^K \det(A)$ به قسمی که K تعداد بارهائی است که جای سطرها عوض شده‌اند. از طرفی دترمینان یک ماتریس بالامثلثی حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن است چراکه اگر ماتریس U بالامثلثی باشد در این صورت داریم $(u_{ij} = 0 \text{ for } i > j)$ در نتیجه می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} \det(U) &= \sum_{i_1^s=1}^N \mathcal{E}_{i_1 i_2 \dots i_N} u_{i_1 1} u_{i_2 2} \dots u_{i_N N} \\ \det(U) &= \mathcal{E}_{12 \dots N} u_{11} u_{22} \dots u_{NN} = u_{11} u_{22} \dots u_{NN} \end{aligned} \right\} \quad (۸-۴)$$

از طرفی می‌دانیم که با انجام متعدد عملیات مقدماتی سطری نوع دوم و یا سوم می‌توان هر ماتریس مربعی را به یک ماتریس بالامثلثی بدل کرد به عنوان مثال برای ماتریس زیر داریم

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1$$

این روش یکی از روشهای برنامه نویسی رایانه‌ای برای محاسبه دترمینان یک ماتریس است. همچنین می‌توان قضایای زیر را در مورد دترمینان مورد توجه قرار داد.

قضیه (۱-۴) شرط لازم و کافی برای اینکه یک ماتریس مربع مانند $A_{N \times N}$ غیرمنفرد باشد آن است که $\det(A) \neq 0$ چراکه می‌دانیم هر ماتریس غیرمنفرد معادل سطری است با ماتریس همانی $A \sim I$ در نتیجه $\det(A) = K \det(I) = K \neq 0$

قضیه (۲-۳) اگر ماتریس $C = AB$ باشد در این صورت $\det(C) = \det(A)\det(B)$ لذا اگر یکی از دو ماتریس منفرد باشد حاصلضرب نیز منفرد است؛ چراکه اگر مثلاً A غیرمنفرد باشد در این صورت می‌توان آنرا به صورت حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی نوشت و با توجه به شرکتپذیری ضرب ماتریسی داریم

$$\left. \begin{aligned} A &= E_1 E_2 \cdots E_N \\ \det(A) &= \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_N) \\ C &= AB = (E_1 E_2 \cdots E_N) B = (E_1)(E_2 \cdots E_N B) \\ \det(C) &= \det(E_1) \det(E_2 \cdots E_N B) \\ \det(C) &= \det(E_1) \det(E_2) \det(E_3 \cdots E_N B) \\ \det(C) &= \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_N) \det(B) \\ \det(C) &= \det(A) \det(B) \end{aligned} \right\} \quad (۹-۴)$$

۳-۴ گهاد و همسازه

۳-۴-۱ گهاد یا دترمینان جز.

اگر $A_{N \times N}$ یک ماتریس مربع باشد در این صورت هر آرایش داخلی از این ماتریس که فی‌مابین سطرهای $i_1 i_2 \cdots i_m$ و ستونهای $j_1 j_2 \cdots j_m$ قرار دارد یک زیرماتریس $m \times m$ و دترمینان آن یک گهاد^۱ یا دترمینان جزء مرتبه m است؛ که لزوماً این سطرها و ستونها به ترتیب نیستند لیکن بایستی $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ و همینطور $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$ باشد. لازم به ذکر است که گهاد مرتبه اول همان درایه ماتریس است. واضح است که تعداد گهادهای مرتبه m در m سطر برابر است با

^۱ Minor

$$\binom{N}{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!} \quad (۱۰-۴)$$

همچنین کهادی که قطر اصلی آن بر روی قطر اصلی ماتریس قرار دارد را کهاد اصلی آن ماتریس گویند به عنوان مثال کلیه کهادهای مرتبه دوم موجود در سطرهای اول و سوم ماتریس

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

عبارتند از

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

همچنین کلیه کهادهای مرتبه اول اصلی همان درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس یعنی a_{11}, a_{22}, a_{33} هستند و کهادهای مرتبه دوم اصلی عبارتند از

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

و در نهایت کهاد مرتبه سوم که اصلی نیز هست همان دترمینان ماتریس است.

۲-۳-۴ کهاد مکمل و همساز

اگر $A_{N \times N}$ یک ماتریس مربع باشد در این صورت با حذف سطرهای $i_1 i_2 \dots i_m$ و ستونهای $j_1 j_2 \dots j_m$ یک زیر ماتریس $(N-m) \times (N-m)$ حاصل می‌شود که دترمینان آن کهاد مکمل^۱ یا دترمینان جزء مکمل نامیده شده و با نماد $M_{i_1 i_2 \dots i_m, j_1 j_2 \dots j_m}$ نمایش داده می‌شود همچنین مکمل جبری $A^{i_1 i_2 \dots i_m, j_1 j_2 \dots j_m}$ آن عبارت است از

^۱ Complementary Minor

$$\left. \begin{aligned} A^{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_m} &= (-1)^{i_1 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_m} M_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_m} \\ A^{ij} &= (-1)^{i+j} M_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (۱-۴)$$

مکمل جبری هر درایه $A^{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ همساز^۱ آن درایه نامیده می‌شود به قسمی که M_{ij} کهاد مکمل درایه a_{ij} است. یکی از فرمولهای دیگر برای محاسبه دترمینان استفاده از بسط لاپلاس است که در ادامه تحت عنوان یک قضیه بیان شده و اثبات آن به عهده خواننده محترم واگذار می‌شود.

قضیه (۳-۴) دترمینان یک ماتریس برابر است با مجموع حاصلضرب کهادهای مرتبه m در m سطر در مکمل جبری آنها که به بسط لاپلاس برای دترمینان معروف است.

به عنوان یک کاربرد از بسط لاپلاس مثلاً در ماتریس $(m+n) \times (m+n)$ زیر اگر $A_{m \times m}$ ، $B_{n \times m}$ و $C_{n \times n}$ زیرماتریسهای دلخواه و $0_{m \times n}$ ماتریس صفر یعنی با درایه های صفر باشد در این صورت می‌توان نوشت

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} = \det(A) \det(C)$$

برای اثبات آن در بسط لاپلاس اگر m سطر اول در نظر گرفته شود در این صورت تنها کهاد غیر صفر در این m سطر همان $\det(A)$ می‌باشد چراکه بقیه کهادها حداقل یک ستون صفر خواهند داشت و همچنین کهاد مکمل آن $\det(C)$ است و مکمل جبری آن نیز عبارت است از

$$A^{12 \dots m, 12 \dots m} = (-1)^{1 + \dots + m + 1 + \dots + m} \det(C) = \det(C)$$

به عنوان کاربرد دیگر از بسط لاپلاس اگر $m = 1$ در نظر گرفته شود بر حسب سطرهای مختلف آن می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{j=1}^N a_{ij} A^{ij} \quad i = 1, 2, \dots, N \\ i = 1 &\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = a_{11} A^{11} + a_{12} A^{12} + \dots + a_{1N} A^{1N} \end{aligned} \right\} \quad (12-4)$$

از طرفی در بسط لاپلاس اگر درایه از یک سطر و همسازه از سطر دیگری باشد در این صورت این مجموع حاصلضرب برابر صفر می‌شود به عنوان مثال مجموع حاصلضرب درایه‌های سطر دوم در همسازه‌های سطر اول $a_{21} A^{11} + a_{22} A^{12} + \dots + a_{2N} A^{1N} = 0$ چرا که مانند بسط دترمینان ماتریسی است که دو سطر اول و دوم آن برابر باشند؛ بنابراین ترکیب روابط فوق را می‌توان بر حسب بسط سطری و یا ستونی به صورت زیر نوشت

$$\det(\mathbf{A}) \delta_{mn} = \sum_{j=1}^N a_{jm} A^{jn} = \sum_{j=1}^N a_{mj} A^{nj} \quad (13-4)$$

۴-۴ معکوس یک ماتریس

اگر $\mathbf{A}_{N \times N}$ یک ماتریس مربع و $\mathbf{B}_{N \times N}$ معکوس آن باشد در این صورت می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{AB} &= \mathbf{I} \\ \sum_{j=1}^N a_{mj} b_{jn} &= \delta_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (14-4)$$

با مقایسه رابطه (۱۳-۴) با رابطه (۱۲-۴) نتیجه می‌شود

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^N a_{mj} b_{jn} &= \delta_{mn} \\ \sum_{j=1}^N a_{mj} A^{nj} &= \det(\mathbf{A}) \delta_{mn} \end{aligned} \right\} \Rightarrow b_{ij} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} A^{ji} \quad (15-4)$$

ماتریس C با درایه‌هائی به صورت $c_{ij} = A^{ji}$ اصطلاحاً الحاقی کلاسیک^۱ ماتریس A نامیده شده و با نماد $C = adj(A)$ نمایش داده می‌شود و در نهایت می‌توان نوشت

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A^{11} & \dots & A^{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{1N} & \dots & A^{NN} \end{bmatrix} \quad (۱۶-۴)$$

حال به عنوان یک کاربرد قاعده کرامر در حل دستگاه معادلات خطی را به دست می‌آوریم؛ واضح است که حل دستگاه معادلات $Ax = b$ عبارت است از $x = A^{-1}b$ که با جایگذاری رابطه (۱۶-۴) خواهیم داشت

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A^{11} & \dots & A^{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{1N} & \dots & A^{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{Bmatrix} b_1 A^{11} + \dots b_N A^{N1} \\ \vdots \\ b_1 A^{1N} + \dots b_N A^{NN} \end{Bmatrix}$$

حال با دقت در روابط فوق نتیجه می‌شود که به عنوان مثال اولین مجهول x_1 برابر است با دترمینان ماتریس A که به جای ستون اولش بردار b قرار گرفته باشد تقسیم بر دترمینان A و به همین ترتیب بقیه مجهولات و می‌توان نوشت

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_N & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & b_N & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}} \quad \dots \quad x_N = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & b_N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}}$$

۴-۵ تعریف ها

۱. ثابت کنید دترمینان ماتریس واندرموند $A_{3 \times 3}$ زیر برابر است با

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

سپس برای ماتریس واندرموند $A_{N \times N}$ که درایه‌های آن توسط رابطه $a_{ij} = (a_j)^{i-1}$ تعریف می‌شود $a_j \neq 0$ ثابت کنید

$$\det(A) = \begin{vmatrix} (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \cdots (a_N - a_1) \\ (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \cdots (a_N - a_2) \\ (a_4 - a_3) \cdots (a_N - a_3) \\ \vdots \\ (a_N - a_{N-1}) \end{vmatrix}$$

۲. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ و معادل سطری آن $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ را در نظر

بگیرید ماتریس معکوس پذیر P با شرط زیر را چنان به دست آورید که $R = PA$

$$\sum_{j=1}^3 p_{ij} = i \quad i = 1, 2, 3$$

۳. اگر A, B, C, D ماتریسهای مربع باشند به قسمی که در ضرب با یکدیگر از خاصیت جابجائی تبعیت کنند ثابت کنید

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC)$$

۴. برای ماتریس مربع $A = \langle a_1 \ \cdots \ a_N \rangle$ که به صورت ستونی تقسیم بندی شده است یعنی a_i ستون i ام آن است و همچنین درایه‌های آن تابع متغیر مستقل t هستند ثابت کنید

$$\frac{d}{dt}|A| = \langle \dot{a}_1 \ \cdots \ a_N \rangle + \cdots + \langle a_1 \ \cdots \ \dot{a}_N \rangle$$

به قسمی که $\dot{a}_i = \frac{d}{dt}a_i$ و با استفاده از این نتیجه نشان دهید

$$\frac{d}{dt} \ln|A| = \text{trace}(\dot{A}A^{-1})$$

۵. اگر $f_1, f_2, \dots, f_N$ توابع دلخواهی از متغیر مستقل x باشند و به صورت زیر در ستونهای یک ماتریس مربع قرار گیرند ثابت کنید

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_N \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_N' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(N-1)} & f_2^{(N-1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_N \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_N' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(N)} & f_2^{(N)} & \cdots & f_N^{(N)} \end{vmatrix}$$

۶. فرض کنید $A_{2 \times 2}$ و در رابطه $A^2 = 0$ صدق کند ثابت کنید به ازای هر اسکالر دلخواهی مانند α داریم $\det(A - \alpha I) = \alpha^2$

۷. ثابت کنید اولاً اگر ماتریس مربع $A_{N \times N}$ با N فرد پادمتقارن باشد در این صورت دترمینان آن برابر صفر است. ثانیاً اگر ماتریس A متعامد باشد $\det(A) = \pm 1$ ثالثاً اگر ماتریس A یکانی باشد در این صورت $\det(A) = e^{i\alpha}$, $|\det(A)| = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

۸. اگر $V = \mathbb{F}^{N \times N}$ فضای برداری کلیه ماتریسهای مربع بر روی میدان $\mathbb{F}$ و B ماتریس مشخصی در آن باشد در این صورت اگر عملگر خطی $T: V \rightarrow V$ به صورت رابطه $\forall A \in V \quad TA \triangleq AB - BA$ تعریف شود ثابت کنید $\det(T) = 0$

که منظور دترمینان نمایش ماتریسی این عملگر خطی نسبت به یک پایه دلخواه است. همچنین برای عملگرهای خطی U, L, M که به صورت جداگانه با روابط

$$UA \triangleq BA, \quad LA \triangleq AB, \quad MA \triangleq BAB^*$$

تعریف می‌شوند ثابت کنید $\det(U) = \det(L) = |B|^N$ و $\det(M) = |B|^{2N}$

۹. می‌دانیم ماتریسهای A, B متشابه به صورت رابطه $B \triangleq P^{-1}AP$ به هم مربوط هستند؛ تابعی از مؤلفه‌های یک ماتریس که بین ماتریسهای متشابه یکسان است اصطلاحاً ناوردای آن ماتریس نامیده می‌شود در ابتدا ثابت کنید رد هر توانی از یک ماتریس ناوردا است یعنی $tr(A^n) = tr(B^n)$ و سپس نشان دهید رد هر تابع دلخواهی از این ماتریس $tr(f(A)) = tr(f(B))$ و همچنین دترمینان آن نیز $\det(A) = \det(B)$ ناوردا است. آیا می‌توانید رابطه دترمینان یک ماتریس را بر حسب این ردها بیان کنید.

فصل پنجم

مقادیر ویژه و توابع ماتریسی

۱-۵ مقادیر ویژه و فضاهای ویژه عملگرهای خطی

۱-۱-۵ مقدمه

تحلیل بسیاری از مسائل مهندسی منجر به محاسبه مقادیر ویژه شده و یا معادلات حاکم بر رفتار آنها منجر به یک معادله مشخصه می‌شود؛ به عنوان مثال مقادیر ویژه ماتریس تنش در یک نقطه مبین تنشهای اصلی و بردارهای ویژه راستای آنها را نمایش می‌دهند؛ و یا مثلاً اگر عملگر دوران را در فضای سه بعدی اقلیدسی در نظر بگیریم محور دوران، بردار ویژه آن خواهد بود. اگر V فضای برداری متناهی‌البعد بر میدان $\mathbb{F}$ و $T: V \rightarrow V$ یک عملگر خطی در آن باشد در این صورت اگر پایه مرتب $B = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_N \rangle$ وجود داشته باشد به قسمی که نمایش ماتریسی این عملگر نسبت به آن یک ماتریس قطری به صورت

$$[T]_B = \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_N \end{bmatrix} \quad (۱-۵)$$

شود بدان معنا است که $T\alpha_i = c_i \alpha_i$ برای $i = 1:N$ و در این حالت به این عملگر قابل قطری شدن اطلاق می‌شود؛ ممکن است c_i ها تکراری باشند لیکن تعداد c_i های برابر صفر با احتساب درجه تکرار آنها معادل هیچ‌ T و تعداد c_i های مخالف صفر مبین رتبه T است.

۲-۱-۵ تعریف

اگر V فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ و $T: V \rightarrow V$ یک عملگر خطی باشد در این صورت $c \in \mathbb{F}$ یک مقدار ویژه^۱ آن است اگر بردار $\alpha \neq \vec{0} \in V$ وجود داشته باشد به قسمی که در رابطه $T\alpha = c\alpha$ صدق کند در این صورت α بردار ویژه^۲ نظیر مقدار ویژه c نامیده می‌شود؛ واضح است که در این صورت عملگر $T - cI$ بایستی یک عملگر منفرد باشد که در فضای متناهی‌البعد بدان معنا است که $f(c) = \det(T - cI) = 0$ که منجر به یک معادله جبری درجه N به نام معادله مشخصه عملگر T می‌شود همچنین هسته عملگر $T - cI$ فضای ویژه نظیر مقدار ویژه c می‌باشد.

اگر پایه مرتب $B = \langle \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_N \rangle$ وجود داشته باشد به قسمی که نمایش ماتریسی عملگر خطی نسبت به آن یک ماتریس قطری شود و اگر $c_1, c_2, \dots, c_k$ مقادیر ویژه متمایز با درجه تکرار به ترتیب $d_1, d_2, \dots, d_k$ باشند در این صورت

$$[T]_B = \begin{bmatrix} c_1 I_{d_1} & & & \\ & c_2 I_{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_k I_{d_k} \end{bmatrix} \quad (۲-۵)$$

به قسمی که I_{d_i} ماتریس همانی $d_i \times d_i$ است در این صورت معادله مشخصه این عملگر عبارت است از

^۱ Eigenvalue

^۲ Eigenvector

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) = \det(T - xI) &= (c_1 - x)^{d_1} (c_2 - x)^{d_2} \dots (c_k - x)^{d_k} \\ d_1 + d_2 + \dots + d_k &= N \\ \dim(W_1) + \dim(W_2) + \dots + \dim(W_k) &= \dim(V) \\ W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k &= V \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

به قسمی که $W_i \triangleq \text{Ker}(T - c_i I)$ یعنی فضای ویژه نظیر مقدار ویژه c_i در این صورت $\dim(W_i) = d_i$ و بنابراین مجموع مستقیم فضاهای ویژه کل فضای برداری V را پوشش می‌دهد. درجه تکرار یک مقدار ویژه در معادله مشخصه اصطلاحاً درجه تکرار جبری و بُعد فضای ویژه نظیر، درجه تکرار هندسی آن مقدار ویژه نامیده می‌شود.

قضیه (۱-۵) اگر c مقدار ویژه عملگر T باشد در این صورت $f(c)$ مقدار ویژه $f(T)$ است به قسمی که f هر تابع دلخواه است.

چون c مقدار ویژه عملگر T است لذا بردار $\alpha \in V$ وجود دارد به قسمی که $T\alpha = c\alpha$ در این صورت می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} T\alpha &= c\alpha \\ T^2\alpha &= c^2\alpha \\ T^3\alpha &= c^3\alpha \\ &\vdots \\ T^n\alpha &= c^n\alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_{(T)}\alpha = f_{(c)}\alpha \quad (4-5)$$

قضیه (۲-۵) فضاهای ویژه نظیر مقادیر ویژه متمایز یک عملگر خطی از یکدیگر استقلال دارند. به بیان دیگر اگر $c_1, c_2, \dots, c_k$ مقادیر ویژه متمایز عملگر خطی T باشند و $W_1, W_2, \dots, W_k$ فضاهای ویژه نظیر آنها و اگر $W \triangleq W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ در این صورت $\dim(W_1) + \dim(W_2) + \dots + \dim(W_k) = \dim(W)$ که بدان معنی است که این فضاهای ویژه هیچ فصل مشترکی ندارند.

اثبات: اگر از رابطه $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = \vec{0}$ به عنوان فرض مسئله به قسمی که $\alpha_i \in W_i$ نتیجه شود که تمامی α_i ها برابر با بردار صفر هستند قضیه اثبات شده است. با اعمال عملگر $f_{(T)}$ به طرفین این رابطه خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} f_{(T)}\alpha_1 + f_{(T)}\alpha_2 + \dots + f_{(T)}\alpha_k &= \vec{0} \\ f_{(c_1)}\alpha_1 + f_{(c_2)}\alpha_2 + \dots + f_{(c_k)}\alpha_k &= \vec{0} \\ \sum_{j=1}^k f_{(c_j)}\alpha_j &= \vec{0} \end{aligned} \right\}$$

دقت شود که رابطه فوق کماکان به منزله همان فرض اولیه مسئله است به قسمی که $f_{(x)}$ هر تابع دلخواهی از x می تواند باشد؛ حال اگر به عنوان مثال توابع لاگرانژ $f_{(x)}^i$ را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$\left. \begin{aligned} f_{(x)}^1 &= \frac{(x - c_2)(x - c_3) \dots (x - c_k)}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3) \dots (c_1 - c_k)} \\ f_{(x)}^k &= \frac{(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_{k-1})}{(c_k - c_1)(c_k - c_2) \dots (c_k - c_{k-1})} \end{aligned} \right\}$$

به بیان دیگر با اعمال مجموعه توابع لاگرانژ $f_{(x)}^i$ با ویژگی $f_{(c_j)}^i = \delta_{ij}$ نتیجه می شود $\alpha_i = \vec{0}$ به ازای $i = 1, 2, \dots, k$ یعنی هیچ ترکیبی از بردارهای موجود در فضاهای ویژه متمایز برابر بردار صفر نخواهد شد که به معنای استقلال آنها است.

قضیه [۳-۵] اگر T عملگر خطی در فضای متناهی البعد و $c_1, c_2, \dots, c_k$ مقادیر ویژه متمایز آن باشند و $W_1, W_2, \dots, W_k$ فضاهای ویژه نظیر آنها در این صورت گزاره های زیر معادل یکدیگرند

- معادله مشخصه عملگر T برابر $\varphi_{(x)} = (c_1 - x)^{d_1}(c_2 - x)^{d_2} \dots (c_k - x)^{d_k}$ بوده و داریم $\dim(W_i) = d_i$
- $\dim(W_1) + \dim(W_2) + \dots + \dim(W_k) = \dim(V)$
- عملگر T قابل قطری شدن است

قضیه (۴-۵) ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ با یک ماتریس قطری متشابه است اگر دارای N بردار ویژه باشد که اگر آنها را در ستونهای ماتریس $P = \langle p_1 \ p_2 \ \dots \ p_N \rangle$ قرار دهیم در این صورت حاصل $P^{-1}AP = \Lambda$ به صورت زیر برابر با یک ماتریس قطری از مقادیر ویژه آن خواهد بود

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix}$$

به قسمی که p_i ستون i ام ماتریس P بوده و در واقع بردار ویژه نظیر مقدار ویژه λ_i است.

مثال ۴-۵

مطلوب است محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس به صورت زیر

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه و متعاقباً مقادیر ویژه این ماتریس عبارتند از

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

حال بردارهای ویژه نظیر را از فضای حل دستگاه معادلات همگن $(A - \lambda I)x = 0$ به دست می آوریم لذا نظیر مقدار ویژه $\lambda_1 = 1$ که درجه تکرار جبری آن برابر یک است خواهیم داشت

$$(A - I)p_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow p_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

واضح است که درجه تکرار هندسی نظیر این مقدار ویژه برابر هیچه $(A - I)$ است که برابر یک است و همانطور که مشاهده شد یک بردار ویژه نظیر آن به دست آمد لیکن نظیر مقدار ویژه $\lambda_2 = 2$ که درجه تکرار جبری آن برابر دو است خواهیم داشت

$$(A - 2I)p_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow p_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

واضح است که درجه تکرار هندسی نظیر این مقدار ویژه برابر هیچه $(A - 2I)$ است که برابر یک است و همانطور که مشاهده شد یک بردار ویژه نظیر آن به دست آمد در نتیجه بردارهای ویژه این ماتریس کامل نیست و لذا قابل قطری شدن نمی‌باشد

مثال ۴-۲

مطلوب است محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس به صورت زیر

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه و متعاقباً مقادیر ویژه این ماتریس عبارتند از

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4 - \lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2$$

حال بردارهای ویژه نظیر را از فضای حل دستگاه معادلات همگن $(A - \lambda I)x = 0$ به دست می‌آوریم لذا نظیر مقدار ویژه $\lambda_1 = 1$ که درجه تکرار جبری آن برابر یک است خواهیم داشت

$$(A - I)p_1 = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow p_1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

واضح است که درجه تکرار هندسی نظیر این مقدار ویژه برابر هیچه $(A - I)$ است که برابر یک است و همانطور که مشاهده شد یک بردار ویژه نظیر آن به دست آمد به همین ترتیب نظیر مقدار ویژه $\lambda_2 = 2$ که درجه تکرار جبری آن برابر دو است خواهیم داشت

$$(A - 2I)p_2 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow p_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, p_3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

واضح است که درجه تکرار هندسی نظیر این مقدار ویژه برابر هیچه $(A - 2I)$ است که در این مثال برابر دو است و همانطور که مشاهده شد دو بردار ویژه نظیر آن به دست آمد در نتیجه بردارهای ویژه این ماتریس کامل بوده و لذا قابل قطری شدن می باشد و می توان نوشت

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

از بررسی مثالهای اخیر می توان چنین نتیجه گرفت که اگر تمام مقادیر ویژه یک ماتریس، متمایز باشند در این صورت لزوماً قابل قطری شدن است لیکن اگر مقدار ویژه تکراری داشته باشد نمی توان اظهار نظر کرد و بایستی بردارهای ویژه آن را به دست آورده که اگر کامل بود قابل قطری شدن و در غیر این صورت قابل قطری شدن نمی باشد. همچنین اگر c یک مقدار ویژه ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ باشد و اگر α بردار ویژه نظیر آن را در ستون i ام یک ماتریس معکوس پذیر مانند $S = \langle s_1 \cdots \alpha \cdots s_N \rangle$ قرار دهیم در این صورت ستون i ام ماتریس $S^{-1}AS$ برابر ce_i یعنی c برابر ستون i ام ماتریس همانی خواهد شد. چراکه ماتریس S معکوس پذیر است لذا می توان نوشت

$$S^{-1}S = S^{-1}\langle s_1 \cdots \alpha \cdots s_N \rangle = I \Rightarrow S^{-1}\alpha = e_i$$

از طرفی با استفاده از رابطه $A\alpha = c\alpha$ خواهیم داشت

$$S^{-1}AS = S^{-1}\langle As_1 \cdots A\alpha \cdots As_N \rangle = S^{-1}\langle As_1 \cdots c\alpha \cdots As_N \rangle$$

لذا ستون i ام ماتریس $S^{-1}AS$ برابر $S^{-1}c\alpha = ce_i$ است.

قضیه (۵-۵) اگر c یک مقدار ویژه ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ باشد در این صورت درجه

تکرار جبری $a_{(c)}$ آن بزرگتر یا مساوی درجه تکرار هندسی $g_{(c)}$ آن است یعنی

$$a_{(c)} \geq g_{(c)}$$

اثبات: فرض کنید $g(c) = r$ باشد یعنی r بردار ویژه $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ نظیر این مقدار ویژه وجود دارد که اگر آنها را در r ستون اول ماتریس معکوس پذیر S قرار دهیم طبق نتیجه قبل خواهیم داشت

$$S^{-1}AS = S^{-1}\langle A\alpha_1 \dots A\alpha_r \dots As_N \rangle = S^{-1}\langle c\alpha_1 \dots c\alpha_r \dots As_N \rangle$$

و لذا می توان یک رابطه تشابه به شکل زیر نوشت

$$B = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} cI_r & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

به قسمی که I_r ماتریس همانی $r \times r$ است، 0 ماتریس صفر $r \times (n-r)$ است، و ماتریسهای C, D ماتریسهای ایجاد شده ناشی از انجام این عملیات هستند؛ با توجه به تشابه ماتریسهای لذا معادله مشخصه یکسان دارند و داریم

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} (c - \lambda)I_r & C \\ 0 & D - \lambda I \end{bmatrix} = (c - \lambda)^r |D - \lambda I|$$

در نتیجه احتمال دارد که در $|D - \lambda I|$ ریشه $c = \lambda$ وجود داشته باشد و لذا $a(c) \geq r$

۲-۵ توابع یک ماتریس مربع

۲-۵-۱ مقدمه

اگر $A_{N \times N}$ یک ماتریس مربع و $f(\lambda)$ کثیرال جمله با ضرایب ثابت باشد در این صورت می توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda) &= c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \dots + c_n\lambda^n \\ f(A) &= c_0I + c_1A + c_2A^2 + \dots + c_nA^n \end{aligned} \right\} \quad (5-5)$$

با در نظر گرفتن توابع مختلف، ماتریسهای متعددی ایجاد می شود که در ضرب با یکدیگر از خاصیت جابجائی تبعیت می کنند به عنوان مثال اگر $g(\lambda)$ کثیرال جمله دیگری باشد در این صورت $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ همچنین اگر ماتریس $g(A)$ معکوس

پذیر باشد با ضرب طرفین این رابطه نتیجه می‌شود $g_{(A)}^{-1}f_{(A)} = f_{(A)}g_{(A)}^{-1}$ که امکان می‌دهد تابع کسری به صورت

$$\left. \begin{aligned} h_{(x)} &= \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} \\ h_{(A)} &= g_{(A)}^{-1}f_{(A)} = f_{(A)}g_{(A)}^{-1} \end{aligned} \right\}$$

را محاسبه کرد.

مثال ۳-۵

برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه توابع زیر

$$\left. \begin{aligned} f_{(\lambda)} &= \lambda + 1 \\ g_{(\lambda)} &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ h_{(\lambda)} &= \frac{f_{(\lambda)}}{g_{(\lambda)}} = \frac{\lambda + 1}{\lambda^2 - 2\lambda + 1} \end{aligned} \right\}$$

با جایگذاری داریم

$$\left. \begin{aligned} f_{(A)} &= A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ g_{(A)} &= A^2 - 2A + I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ h_{(x)} &= g_{(A)}^{-1}f_{(A)} = f_{(A)}g_{(A)}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}$$

۲-۲-۵ کثیرالجمله با ضرایب ماتریسی

کثیرالجمله با ضرایب ماتریسی یا اصطلاحاً ماتریسهای لاندا ماتریسهائی به صورت

$$F_{(\lambda)} = C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \dots + C_n\lambda^n \quad (۴-۵)$$

هستند که در واقع ماتریسی است که داریهای آن تابعی جبری از λ است به عنوان

مثال ماتریس زیر

$$F_{(\lambda)} = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & \lambda - 1 \\ 2\lambda^2 + \lambda & -\lambda^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

هرچند در اثبات قضیه معروفی که در ادامه بیان می‌شود تأثیری ندارد لیکن فرض کنید قرارداد شود منظور از $F_{(A)}$ ماتریس

$$F_{(A)} = C_0 + C_1 A + C_2 A^2 + \dots + C_n A^n \quad (7-5)$$

باشد؛ در این حالت اگر $H_{(\lambda)} = F_{(\lambda)} G_{(\lambda)}$ باشد در این صورت $H_{(A)} \neq F_{(A)} G_{(A)}$ چراکه به عنوان مثال اگر داشته باشیم

$$\begin{cases} F_{(\lambda)} = C_0 + C_1 \lambda \\ G_{(\lambda)} = D_0 + D_1 \lambda \end{cases}$$

با توجه به قراردادی که شد می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} H_{(\lambda)} &= F_{(\lambda)} G_{(\lambda)} \\ H_{(\lambda)} &= (C_0 D_0) + (C_0 D_1 + C_1 D_0) \lambda + (C_1 D_1) \lambda^2 \\ H_{(A)} &= (C_0 D_0) + (C_0 D_1 + C_1 D_0) A + (C_1 D_1) A^2 \end{aligned} \right\}$$

در صورتی که

$$F_{(A)} G_{(A)} = (C_0 + C_1 A)(D_0 + D_1 A) = C_0 D_0 + C_0 D_1 A + C_1 A D_0 + C_1 A D_1 A$$

و با توجه به اینکه ماتریسهای فوق لزوماً در ضرب با یکدیگر از ویژگی جابجائی تبعیت نمی‌کنند لذا $H_{(A)} \neq F_{(A)} G_{(A)}$ خواهد بود.

قضیه [۶-۵] اگر $H_{(\lambda)} = F_{(\lambda)} G_{(\lambda)}$ و داشته باشیم $G_{(\lambda)} = A - I\lambda$ در این صورت

ماتریس $H_{(A)} = 0$ یعنی ماتریس صفر است

اثبات: فرض کنید

$$F_{(\lambda)} = C_0 + C_1 \lambda + C_2 \lambda^2 + \dots + C_n \lambda^n$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned} H_{(\lambda)} &= (C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \dots + C_n\lambda^n)(A - I\lambda) \\ &= (C_0A + C_1A\lambda + C_2A\lambda^2 + \dots + C_nA\lambda^n) \\ &\quad - (C_0\lambda + C_1\lambda^2 + C_2\lambda^3 + \dots + C_n\lambda^{n+1}) \end{aligned}$$

و در نتیجه $H_{(A)} = 0$

قضیه (۷-۵) هر ماتریس مربع در معادله مشخصه خودش صدق میکند (این قضیه

معروف کیلی-همیلتن^۱ است) یعنی اگر $A_{N \times N}$ یک ماتریس مربع باشد $\varphi_{(\lambda)} = |A - \lambda I|$ معادله مشخصه آن است که یک کثیرالجمله با ضرایب ثابت بر حسب متغیر λ خواهد بود؛ در این صورت خواهیم داشت

$$\varphi_{(\lambda)} = |A - \lambda I| \quad \varphi_{(A)} = 0 \quad (۸-۵)$$

اثبات: اگر $adj(A - \lambda I)$ الحاقی کلاسیک ماتریس $(A - \lambda I)$ باشد در این صورت مطابق رابطه (۴-۱۳) می توان نوشت

$$adj(A - \lambda I)(A - \lambda I) = |A - \lambda I|I = I\varphi_{(\lambda)} \quad (۹-۵)$$

به قسمی که $I\varphi_{(\lambda)}$ یک چندجمله ای با ضرایب ماتریسی تلقی می شود همچنین الحاقی کلاسیک $adj(A - \lambda I)$ نیز همینطور چراکه

$$adj(A - \lambda I) = adj \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{N1} & a_{N2} & & a_{NN} - \lambda \end{bmatrix} = F_{(\lambda)}$$

به این ترتیب طبق قضیه قبل نتیجه می شود $I\varphi_{(A)} = 0$ که لزوماً بایستی $\varphi_{(A)} = 0$ باشد.

۳-۲-۴ معادله مشخصه یک ماتریس مربع

اگر $A_{N \times N}$ یک ماتریس مربع باشد در این صورت $\varphi(\lambda) = |A - \lambda I|$ معادله مشخصه آن یک چند جمله‌ای درجه N خواهد شد به عنوان مثال برای ماتریس $A_{3 \times 3}$ اگر آن را بسط دهیم خواهیم داشت

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

با ادامه تجزیه شاخه‌ای بیشتر به $2^3 = 8$ دترمینان تبدیل می‌شود و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) = |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a_{13} \\ 0 & -\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & -\lambda & 0 \\ a_{31} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & -\lambda & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \varphi(\lambda) &= -\lambda^3 + \beta_1 \lambda^2 - \beta_2 \lambda + \beta_3 \end{aligned}$$

که اگر $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ریشه‌های این معادله باشند می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \beta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 \\ \beta_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned} \right\}$$

به طور مشابه اگر $A_{N \times N}$ باشد با تجزیه شاخه‌ای $|A - \lambda I|$ در حالت کلی به 2^N دترمینان تبدیل می‌شود و می‌توان نوشت

$$\varphi_{(\lambda)} = (-1)^N (\lambda^N - \beta_1 \lambda^{N-1} + \beta_2 \lambda^{N-2} - \dots + (-1)^N \beta_N) \quad (۱۰-۵)$$

به قسمی که β_i مجموع کهادهای اصلی مرتبه i ام است

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= tr(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_N \\ \beta_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \dots + \lambda_{N-1} \lambda_N \\ &\vdots \\ \beta_{N-1} &= A^{11} + \dots + A^{NN} \\ \beta_N &= det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N \end{aligned} \right\} \quad (۱۱-۵)$$

و از آنجائی که ماتریسهای متشابه $B = P^{-1}AP$ معادله مشخصه یکسانی دارند لذا ضرایب این معادله را اصطلاحاً ناوردهای^۱ ماتریس می‌نامند همچنین به سادگی ثابت می‌شود که رد هر توانی از یک ماتریس نیز ناوردا است یعنی $S_m = tr(A^m)$ که منجر به روابط بوشر^۲ به صورت زیر می‌شود

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{(\lambda)} &= (-1)^N (\lambda^N + C_1 \lambda^{N-1} + C_2 \lambda^{N-2} + \dots + C_N) \\ C_1 &= -S_1 \\ C_2 &= -\frac{1}{2} (C_1 S_1 + S_2) \\ C_3 &= -\frac{1}{3} (C_2 S_1 + C_1 S_2 + S_3) \\ &\vdots \\ C_N &= -\frac{1}{N} (C_{N-1} S_1 + C_{N-2} S_2 + \dots + S_N) \end{aligned} \right\} \quad (۱۲-۵)$$

به عنوان مثال برای ماتریس $A_{3 \times 3}$ می‌توان ناوردهای آن را به صورت زیر نوشت

^۱ Invariants

^۲ Bocher

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\lambda) &= -(\lambda^3 - \beta_1 \lambda^2 + \beta_2 \lambda - \beta_3) \\ \beta_1 &= \text{tr} \mathbf{A} \\ \beta_2 &= \frac{1}{2}[(\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr} \mathbf{A}^2] \\ \beta_3 &= \frac{1}{6}((\text{tr} \mathbf{A})^3 - 3(\text{tr} \mathbf{A})\text{tr} \mathbf{A}^2 + 2\text{tr} \mathbf{A}^3) = \det \mathbf{A} \end{aligned} \right\} \quad (۱۳-۵)$$

۳-۵ روشهای محاسبه توابع ماتریسی

۳-۵-۱ اگر ماتریس قابل قطری شدن باشد

اگر ماتریسهای $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ متشابه باشند در این صورت توسط رابطه $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ به هم مربوط هستند؛ به سادگی می توان نشان داد که هر توان دلخواهی از این ماتریسها نیز با هم متشابه هستند چراکه

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \\ \mathbf{B}^2 &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{P} \\ \mathbf{B}^3 &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^3 \mathbf{P} \\ \mathbf{B}^m &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^m \mathbf{P} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_{(\mathbf{B})} = \mathbf{P}^{-1} f_{(\mathbf{A})} \mathbf{P} \quad (۱۴-۵)$$

و با توجه به بسط تیلور هر تابع دلخواه، نتیجه می شود که هر تابع دلخواهی از این ماتریسها نیز با هم متشابه هستند؛ اگر ماتریس $\mathbf{A}_{N \times N}$ قابل قطری شدن باشد یعنی دارای N بردار ویژه است و مطابق قضیه ۴ همین فصل اگر آنها را در ستونهای ماتریس معکوس پذیر $\mathbf{P}$ قرار دهیم خواهیم داشت

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_N \end{bmatrix} \Rightarrow A = P\Lambda P^{-1} \quad (۱۵-۵)$$

به بیان دیگر متشابه با یک ماتریس قطری است و متعاقباً هر تابع دلخواهی از این ماتریس نیز به صورت $f(A) = Pf(A)P^{-1}$ است؛ حال با توجه به اینکه ماتریس Λ یک ماتریس قطری است در نتیجه هر توانی از آن Λ^m و همچنین هر تابع دلخواهی از آن $f(A)$ نیز به صورت زیر یک ماتریس قطری است

$$\Lambda^m = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^m & & \\ & (\lambda_2)^m & \\ & & \ddots \\ & & & (\lambda_N)^m \end{bmatrix} \Rightarrow f(A) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & f(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & f(\lambda_N) \end{bmatrix}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$f(A) = P \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & f(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & f(\lambda_N) \end{bmatrix} P^{-1} \quad (۱۶-۵)$$

مثال ۴-۵

برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه $f(A)$ در حالت کلی و سپس در حالت خاص توابع $f(x) = x^{100}$, $g(x) = e^x$

حل: در ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس را به دست می‌آوریم؛ معادله مشخصه آن عبارت است از $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ ریشه متمایز $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ و الزاماً دو بردار ویژه $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ بوده و قابل قطری شدن است در نتیجه $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ بوده و می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} f_{(A)} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{(1)} & 0 \\ 0 & f_{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2f_{(1)} - f_{(2)} & f_{(1)} - f_{(2)} \\ 2f_{(2)} - 2f_{(1)} & 2f_{(2)} - f_{(1)} \end{bmatrix} \\ f_{(A)} &= A^{100} = \begin{bmatrix} 2 - 2^{100} & 1 - 2^{100} \\ 2^{101} - 2 & 2^{101} - 1 \end{bmatrix} \\ g_{(A)} &= e^A = \begin{bmatrix} 2e - e^2 & e - e^2 \\ 2e^2 - 2e & 2e^2 - e \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}$$

۴-۲-۳ دستور العمل سیلستر

اگر ماتریس $A_{N \times N}$ بوده و $\varphi_{(x)} = \det(A - xI)$ معادله مشخصه آن باشد در این صورت با توجه به اینکه یک معادله جبری درجه N است لذا باقیمانده تقسیم هر تابع دلخواه $f_{(x)}$ بر آن برابر $P_{(x)}$ یعنی یک چند جمله‌ای درجه $N - 1$ خواهد بود و می توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} f_{(x)} &= \varphi_{(x)} q_{(x)} + P_{(x)} \\ P_{(x)} &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{N-1} x^{N-1} \end{aligned} \right\} \quad (۱۷-۵)$$

به قسمی که $q_{(x)}$ خارج قسمت و $P_{(x)}$ باقیمانده این تقسیم هستند؛ از طرفی با توجه به قضیه کیلی-همیلتن $\varphi_{(A)} = 0$ بوده و لذا $f_{(A)} = P_{(A)}$ که نتیجه می شود

$$f_{(A)} = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_{N-1} A^{N-1} \quad (۱۸-۵)$$

یعنی هر تابع دلخواه از یک ماتریس را می توان به صورت یک چند جمله‌ای درجه $N - 1$ از آن نوشت حال بایستی به دنبال روشی برای محاسبه ضرایب c_i باشیم؛ می دانیم که مقادیر ویژه این ماتریس نیز در معادله مشخصه صدق کرده $\varphi_{(\lambda_i)} = 0$ و در نتیجه به ازای هر مقدار ویژه منجر به معادله به صورت

$$f_{(\lambda_i)} = c_0 + c_1 (\lambda_i) + c_2 (\lambda_i)^2 + \dots + c_{N-1} (\lambda_i)^{N-1} \quad (۱۹-۵)$$

بر حسب ضرایب مجهول c_i می‌شود؛ حال اگر کلیه مقادیر ویژه یک ماتریس متمایز باشند به N معادله مستقل و N مجهول منجر شده که با حل آن

$$P(x) = \left. \begin{aligned} & f_{(\lambda_1)} \frac{(x - \lambda_2)(x - \lambda_3) \cdots (x - \lambda_N)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \cdots (\lambda_1 - \lambda_N)} \\ & + f_{(\lambda_2)} \frac{(x - \lambda_1)(x - \lambda_3) \cdots (x - \lambda_N)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) \cdots (\lambda_2 - \lambda_N)} \\ & \vdots \\ & + f_{(\lambda_N)} \frac{(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_{N-1})}{(\lambda_N - \lambda_1)(\lambda_N - \lambda_2) \cdots (\lambda_N - \lambda_{N-1})} \end{aligned} \right\}$$

ضرایب به دست می‌آیند و در نتیجه می‌توان دستورالعمل سیلوستر^۱ را به صورت زیر ارائه کرد

$$f_{(A)} = \sum_{k=1}^N \left(f_{(\lambda_k)} \prod_{j=1, j \neq k}^N \frac{(A - \lambda_j I)}{(\lambda_k - \lambda_j)} \right) \quad (۵-۲)$$

مثال ۵-۵

برای همان ماتریس مثال قبل $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه $f_{(A)}$ در حالت کلی

حل: از مثال قبل می‌دانیم که این ماتریس دارای دو مقدار ویژه متمایز $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ است از طرفی $A_{2 \times 2}$ بوده و در نتیجه هر تابع دلخواه از آن را می‌توان به صورت یک چند جمله‌ای خطی $f_{(A)} = c_0 I + c_1 A$ یا درجه یک از آن نوشت لذا خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} f_{(A)} &= c_0 I + c_1 A \\ c_0 + c_1 &= f_{(1)} \\ c_0 + 2c_1 &= f_{(2)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 2f_{(1)} - f_{(2)} \\ c_1 = f_{(2)} - f_{(1)} \end{cases}$$

در نهایت با جایگذاری نتیجه می‌شود

$$f_{(A)} = (2f_{(1)} - f_{(2)})I + (f_{(2)} - f_{(1)})A = \begin{bmatrix} 2f_{(1)} - f_{(2)} & f_{(1)} - f_{(2)} \\ 2f_{(2)} - 2f_{(1)} & 2f_{(2)} - f_{(1)} \end{bmatrix}$$

و یا با استفاده از دستورالعمل سیلستر خواهیم داشت

$$f_{(A)} = f_{(1)} \frac{(A - 2I)}{(1 - 2)} + f_{(2)} \frac{(A - I)}{(2 - 1)}$$

که همان نتیجه مثال قبل را به دست می‌دهند.

۳-۳-۴ محاسبه $f_{(A)}$ در حالت کلی

دو روشی که در قبل برای محاسبه $f_{(A)}$ ارائه شد در حالتی بود که ماتریس $A_{N \times N}$ قابل قطری شدن بوده و یا دارای مقادیر ویژه متمایز باشد؛ حال فرض کنید λ_i ریشه مکرر مرتبه r ام معادله مشخصه باشد لذا $\varphi_{(\lambda)} = (\lambda - \lambda_i)^r \psi_{(\lambda)}$ به قسمی که $\psi_{(\lambda)}$ یک چند جمله‌ای درجه $N - r$ است در این صورت می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} f_{(\lambda_i)} &= P_{(\lambda_i)} \\ f'_{(\lambda_i)} &= P'_{(\lambda_i)} \\ f_{(\lambda_i)}^{r-1} &= P_{(\lambda_i)}^{r-1} \end{aligned} \right\} \quad (۲۱-۵)$$

یعنی به ازای λ_i تا مشتق مرتبه $r - 1$ آن در معادلات فوق صدق می‌کند؛ به این ترتیب همواره می‌توان دستگاه N معادله و مجهول بر حسب ضرایب c_i ایجاد کرد. همچنین لازم به ذکر است که اگر تابع $f_{(x)}$ یک سری بی‌نهایت باشد شرط آنکه بتوان $f_{(A)}$ را محاسبه کرد آن است که مقادیر ویژه ماتریس در دایره تقارب سری باشند.

مثال ۶-۵

برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه $f_{(A)}$ در حالت کلی و سپس محاسبه جذر مثبت آن $f_{(A)} = \sqrt{A}$

حل: معادله مشخصه این ماتریس عبارت است از $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2$ در نتیجه دارای یک ریشه مکرر $\lambda_{1,2} = 4$ و یک بردار ویژه $\mathbf{p}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ بوده و قابل قطری شدن نیست؛ از طرفی $A_{2 \times 2}$ بوده و هر تابع دلخواه از آن را می‌توان به صورت یک چند جمله‌ای خطی $f(A) = c_0 I + c_1 A$ یا درجه یک از آن نوشت لذا خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} f(A) &= c_0 I + c_1 A \\ f(x) &= c_0 + c_1 x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = f(4) - 4f'(4) \\ c_1 = f'(4) \end{cases}$$

در نهایت با جایگذاری نتیجه می‌شود

$$f(A) = (f(4) - 4f'(4))I + f'(4)A = \begin{bmatrix} f(4) - f'(4) & -f'(4) \\ f'(4) & f(4) + f'(4) \end{bmatrix}$$

در حالت خاص $f(x) = \sqrt{x}$ تابع دو مقداری است یعنی $f(2) = \pm 2$ می‌تواند باشد لیکن از آنجائی که می‌خواهیم جذر مثبت را محاسبه کنیم لذا $f(4) = 2$ و $f'(4) = 0.25$ قرار می‌دهیم در نتیجه خواهیم داشت

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} 2 - 0.25 & -0.25 \\ 0.25 & 2 + 0.25 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

مثال ۷-۵

مطلوب است محاسبه $\tan \begin{bmatrix} \pi/4 & \pi/2 \\ 0 & \pi/4 \end{bmatrix}$

حل: با توجه به اینکه این ماتریس بالامتثلی است لذا مقادیر روی قطر اصلی، همان مقادیر ویژه هستند و خواهیم داشت $\varphi(\lambda) = (\lambda - \pi/4)^2$ در نتیجه $\lambda_{1,2} = \pi/4$ دارای یک ریشه مکرر بوده و قابل قطری شدن نیست؛ از طرفی $A_{2 \times 2}$ بوده و هر تابع دلخواه از آن را می‌توان به صورت یک چند جمله‌ای خطی $f(A) = c_0 I + c_1 A$ از آن نوشت لذا خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} \tan(A) &= c_0 I + c_1 A \\ \tan(x) &= c_0 + c_1 x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 1 - \frac{\pi}{2} \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

در نهایت با جایگذاری نتیجه می شود

$$\tan(A) = \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)I + 2A = \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۸-۴ چند جمله ای می نیمال

اگر $A_{N \times N}$ یک ماتریس مربع و $\varphi(x) = \det(A - xI)$ معادله مشخصه آن باشد طبق قضیه کیلی همبالتن می دانیم که $\varphi(A) = 0$ هر ماتریس مربع در معادله مشخصه خودش صدق می کند که یک معادله جبری درجه N است حال فرض کنید به دنبال چند جمله ای دیگری با درجه کمتر از N بگردیم مانند $p(x)$ که این ماتریس در آن صدق کند یعنی $p(A) = 0$ آیا این چند جمله ای وجود دارد. به عنوان مثال فرض کنید $A = I$ باشد در این صورت برای ماتریس همانی معادله مشخصه $\varphi(x) = (x - 1)^N$ بوده لیکن در معادله $p(x) = x - 1$ نیز صدق می کند بنابراین امکان وجود چند جمله ای با درجه کمتر از N وجود دارد که ماتریس در آن صدق کند و اصطلاحاً به آن چند جمله ای می نیمال^۱ گفته می شود.

تعریف: چند جمله ای با حداقل درجه که ضریب بزرگترین توان آن برابر واحد بوده و ماتریس $A_{N \times N}$ در آن صدق کند چند جمله ای می نیمال این ماتریس نامیده می شود؛ با این تعریف چند جمله ای می نیمال منحصر به فرد است.

قضیه (۸-۵) ماتریسهای متشابه چند جمله ای می نیمال یکسان دارند یعنی اگر ماتریسهای A, B متشابه باشند و $p(A) = 0$ باشد بلافاصله از رابطه تشابه $B = P^{-1}AP$ نتیجه می شود $p(B) = P^{-1}p(A)P$ در این صورت $p(B) = 0$ خواهد بود.

^۱ Minimal Polynomial

قضیه (۹-۵) چندجمله‌ای می‌نیمال یک ماتریس و معادله مشخصه آن ریشه‌های یکسانی دارند؛ به بیان دیگر اگر $\varphi(x) = \det(A - xI)$ معادله مشخصه و $p(x)$ چندجمله‌ای می‌نیمال باشند در این صورت c یک مقدار ویژه است $\varphi(c) = 0$ اگر و فقط اگر ریشه چندجمله‌ای می‌نیمال باشد $p(c) = 0$

اثبات: در ابتدا فرض کنید $p(x)$ چندجمله‌ای می‌نیمال و c یک مقدار ویژه باشد در این صورت خواهیم داشت $A\alpha = c\alpha$ به قسمی که α بردار ویژه نظیر است لذا $p(A)\alpha = p(c)\alpha$ و چون $p(A) = 0$ است نتیجه می‌شود که $p(c) = 0$ یعنی ریشه چندجمله‌ای می‌نیمال است؛ از طرف دیگر فرض کنید $p(x)$ چندجمله‌ای می‌نیمال و c یک ریشه آن باشد می‌خواهیم نشان دهیم که c مقدار ویژه نیز هست، چون $p(c) = 0$ می‌توان نوشت $p(x) = (x - c)q(x)$ و چون $p(A) = 0$ لذا نتیجه می‌شود $(A - cI)q(A)\beta = 0$ می‌توان دلخواه $\beta \neq \vec{0}$ را بردار $\alpha \triangleq q(A)\beta$ نتیجه می‌شود $(A - cI)\alpha = 0$ یعنی $A\alpha = c\alpha$ بنابراین c یک مقدار ویژه ماتریس A است و همچنین α بردار ویژه نظیر آن است. بنابراین با توجه به این قضیه نتیجه می‌شود اگر تمامی مقادیر ویژه یک ماتریس، متمایز باشند در این صورت معادله مشخصه و چندجمله‌ای می‌نیمال آن یکسان هستند $p(x) = \varphi(x)$ و اگر ماتریسی دارای مقدار ویژه تکراری باشد در این صورت احتمال دارد چندجمله‌ای با درجه کمتر از معادله مشخصه وجود داشته باشد به قسمی که $p(A) = 0$ در هر صورت اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ مقادیر ویژه متمایز ماتریس با درجه تکرار جبری به ترتیب $d_1, d_2, \dots, d_k$ باشند در این صورت معادله مشخصه چندجمله‌ای می‌نیمال عبارتند از

$$\begin{cases} \varphi(x) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{d_k} \\ p(x) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{r_k} \end{cases}$$

به قسمی که $r_i \leq d_i$ به ازای $i = 1, 2, \dots, k$

قضیه (۵-۱۰) شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس $A_{N \times N}$ قابل قطری شدن باشد آن است که $p(x)$ چندجمله‌ای می‌نیمال آن حاصلضرب فاکتورهای خطی از مقادیر ویژه متمایزش باشد به عبارت دیگر ماتریس $A_{N \times N}$ قابل قطری شدن است اگر و فقط اگر معادله مشخصه و چندجمله‌ای می‌نیمال عبارت باشند از

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= (x - \lambda_1)^{d_1} (x - \lambda_2)^{d_2} \dots (x - \lambda_k)^{d_k} \\ p(x) &= (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_k) \end{aligned} \right\}$$

اثبات: قضیه به صورت شرط لازم و کافی است لیکن در این کتاب فقط شرط لازم اثبات شده و شرط کافی به عنوان تحقیق به عهده خواننده محترم گذاشته می‌شود؛ فرض کنید ماتریس A قابل قطری شدن باشد یعنی دارای N بردار ویژه است حال ثابت می‌کنیم تحت این شرایط ماتریس $p(A)$ به صورت

$$p(A) = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_k I)$$

برابر ماتریس صفر است. اگر α_1 بردار ویژه نظیر λ_1 باشد یعنی $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$ و یا به عبارت دیگر می‌توان نوشت $(A - \lambda_1 I)\alpha_1 = \vec{0}$ و چون هر یک از عبارتهای داخل پرانتز در $p(A)$ در ضرب با یکدیگر از قاعده جابجائی تبعیت می‌کنند لذا $p(A)\alpha_1 = \vec{0}$ به استدلال مشابه اگر α_i هر بردار ویژه دلخواه ماتریس A باشد در این صورت $p(A)\alpha_i = \vec{0}$ بنابراین اگر تمام بردارهای ویژه را در ستونهای ماتریس معکوس پذیر P قرار دهیم خواهیم داشت $p(A)P = 0$ که لزوماً نتیجه می‌دهد $p(A) = 0$

مثال ۵-۸

به عنوان مثال ماتریس ارائه شده در مثال ۵-۱ به صورت زیر قابل قطری شدن نیست و لذا معادله مشخصه و چندجمله‌ای می‌نیمال آن یکسان بوده و عبارتند از

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \varphi(x) &= (1-x)(2-x)^2 \\ p(x) &= (1-x)(2-x)^2 \end{aligned} \right\}$$

در حالی که ماتریس ارائه شده در مثال ۵-۲ به صورت زیر قابل قطری شدن بوده و لذا معادله مشخصه و چندجمله‌ای می‌نیمال آن عبارتند از

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) = (1-x)(2-x)^2 \\ p(x) = (1-x)(2-x) \end{cases}$$

لذا این ماتریس در یک معادله درجه دو به صورت $p(A) = A^2 - 3A + 2I = 0$ صدق می کند این بدان معنا است که برای این ماتریس می توان هر تابع دلخواهی را به صورت یک چندجمله ای خطی $f(A) = (2f_{(1)} - f_{(2)})I + (f_{(2)} - f_{(1)})A$ نوشت.

مثال ۹-۵

برای ماتریس A به صورت زیر عبارت کسری $f(x) = \frac{x}{x+1}$ را به صورت یک چندجمله ای با حداقل درجه بر حسب A بنویسید

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow p(A) = A^2 - 3A + 2I = 0$$

در ابتدا عبارت داخل مخرج این کسر را بر حسب ماتریس A بیان می کنیم

$$G = A + I = \begin{bmatrix} 6 & -6 & -6 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow G^3 - 8G^2 + 21G - 18I = 0$$

در نتیجه G^{-1} عبارت است از

$$G^{-1} = \frac{1}{18}(G^2 - 8G + 21I) = \frac{1}{18}(A^2 - 6A + 14I) = \frac{1}{6}(4I - A)$$

در نهایت می توان نوشت

$$f(A) = G^{-1}A = \frac{1}{6}(4A - A^2) = \frac{1}{6}(2I + A)$$

البته واضح است که برای $A \neq B$ در حالت کلی $f(A) \neq f(B)$ خواهد بود.

مثال ۱۰-۵

معادله مشخصه و چندجمله ای می نیمال هر یک از ماتریسهای زیر عبارتند از

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{(x)} = (x-1)^4 \\ p_{(x)} = (x-1)^4 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{(x)} = (x-1)^4 \\ p_{(x)} = (x-1)^3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{(x)} = (x-1)^4 \\ p_{(x)} = (x-1)^2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{(x)} = (x-1)^4 \\ p_{(x)} = x-1 \end{cases}$$

۵-۵ تمرین ها

۱. ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ قطری بوده و معادله مشخصه آن به صورت زیر است به قسمی که $c_1, c_2, \dots, c_k$ مقادیر ویژه متمایز آن هستند؛ اگر V فضای کلیه ماتریسهای مربع $B_{N \times N}$ باشد که در ضرب با A از قاعده جابجائی تبعیت می کنند بعد آن را به دست آورید $\varphi(x) = (x - c_1)^{d_1} (x - c_2)^{d_2} \dots (x - c_k)^{d_k}$

۲. اگر $A_{N \times N}$ و $B_{N \times N}$ ماتریسهای مربع بوده و ماتریس $I - AB$ معکوس پذیر باشد در ابتدا ثابت کنید ماتریس $I - BA$ نیز معکوس پذیر بوده و می توان معکوس آن را به صورت $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$ نوشت سپس نشان دهید ماتریسهای AB و BA مقادیر ویژه یکسان دارند آیا می توانید رابطه بین بردارهای ویژه آنها را بیان کنید

۳. آیا ماتریس $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ بر روی میدان اعداد حقیقی با یک ماتریس قطری متشابه است.

۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $f(x) = \frac{x}{x+1}$ باشد اولاً $f(A)$ را بر حسب یک چندجمله ای با حداقل درجه از ماتریس A بنویسید؛ ثانیاً بررسی کنید آیا این ماتریس $f(A)$ قابل قطری شدن است

۵. کلیه ماتریسهای $A_{3 \times 3}$ را تعیین کنید که معادله مشخصه آنها $\varphi(x) = x^2(x - 1)$ و بردارهای ویژه آنها $\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ باشند

۶. به ازای چه مقادیر α ماتریسهای A و B متشابه هستند

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

۷. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ باشد در این صورت a, b در چه شرایطی صدق کنند تا $\lim_{n \rightarrow \infty} (A)^n$ وجود داشته باشد (n عدد صحیح مثبت است) سپس در صورت احراز شرایط این حد را محاسبه کنید

۸. معادله ماتریسی $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & -7 & -7 \\ -9 & 10 & 11 \\ 9 & -9 & -10 \end{bmatrix}$ را حل کرده و بگوئید چند جواب دارد

۹. ثابت کنید اگر ماتریس $A_{N \times N}$ بوده $g(\lambda) = |\lambda I - A|$ و $g(\mu) =$ $adj(\lambda I - A) = f(\lambda, \mu)(\lambda - \mu)$ قرار داده شود در این صورت $f(\lambda, \mu)$ سپس با استفاده از این نتیجه $adj(\lambda I - A)$ را برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ محاسبه کنید

۱۰. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ باشد به قسمی که a, b اعداد حقیقی هستند در این صورت A^n را محاسبه کرده (n عدد صحیح مثبت است) نشان دهید درایه‌های آن حقیقی است

۱۱. اولاً اگر مقادیر ویژه ماتریس $A_{3 \times 3}$ برابر باشند $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ در این صورت هر تابع دلخواهی $f(A)$ از این ماتریس را به چه شکلی می‌توان نوشت؛ ثانیاً اگر کلیه مقادیر ویژه ماتریس $A_{N \times N}$ برابر باشند $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N$ در این صورت هر تابع دلخواهی $f(A)$ از این ماتریس را به چه شکلی می‌توان نوشت

۱۲. فضای تهی عملگر T در $\mathbb{R}^3$ توسط بردارهای $\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ گسترده شده است اگر $T \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{Bmatrix}$ باشد نمایش ماتریسی عملگر e^T را نسبت به پایه استاندارد بنویسید

۱۳. چندجمله‌ای می‌نیمال عملگر مشتق‌گیری D را در فضای چندجمله‌ایهای درجه $N-1$ تعیین کنید

۱۴. اگر ماتریس $A_{5 \times 5}$ در معادله $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$ صدق کند اولاً معادله مشخصه A را تعیین کنید ثانیاً چند جمله‌ای می‌نیمال A^{-1} را به دست آورید

۱۵. عملگر T در $\mathbb{R}^3$ توسط روابط $Te_1 = e_2, Te_2 = -e_1, Te_3 = 0$ تعریف شده است اگر ماتریس $A_{3 \times 3}$ نمایش ماتریسی این عملگر نسبت به پایه استاندارد باشد ثابت کنید $\exp(A\theta)e_1, \exp(A\theta)e_2$ بردارهای یکه هستند و به ترتیب با بردارهای e_1, e_2 زاویه θ می‌سازند

۱۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$ باشد در این صورت A^n را محاسبه کرده (n عدد صحیح مثبت است)

۱۷. عملگر T در $\mathbb{R}^3$ توسط رابطه زیر تعریف شده است

$$T\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = x_1\langle 2, -1, 2 \rangle + x_2\langle 1, 0, 2 \rangle + x_3\langle 2, -2, 5 \rangle$$

در این صورت عملگر $U = f(T)$ را بر حسب یک چندجمله‌ای با حداقل درجه از T بنویسید و به خصوص نشان دهید اگر $f(1) + f(5) = 0$ باشد در این صورت عملگر U^2 ضربی از عملگر همانی است

۱۸. اگر $A_{3 \times 3}, B_{3 \times 3}$ ماتریسهای با رتبه واحد باشند ثابت کنید $\det(A+B) = 0$

۱۹. اگر ماتریسهای $A_{3 \times 3}, B_{3 \times 3}$ بوده و $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ دو مقدار ویژه متمایز ماتریس بوده و درجه تکرار هندسی آنها به ترتیب $g_{(1)} = 1, g_{(2)} = 2$ باشد در این صورت ثابت کنید به ازای هر تابع دلخواه $f(x)$ داریم $f(AB) - f(BA) = k(AB - BA)$ و همچنین مقدار k را محاسبه کنید

۲۰. اگر $A = \begin{bmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{bmatrix}$ باشد در این صورت A^n و همچنین $\ln(A)$ را محاسبه کرده نشان دهید $\ln(A^n) = n \ln(A)$

۲۱. اگر V فضای چندجمله‌ایهای درجه سه و عملگر T توسط رابطه زیر تعریف شده باشد

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0 + a_1 + a_3 + a_1x + (a_2 + a_3)x^2$$

اولاً ثابت کنید T یک عملگر خطی است و چندجمله‌ای می‌نیمال آن را تعیین کنید ثانیاً ثابت کنید اگر برای تابع $f(x)$ رابطه $f'(1) = f(1) - f(0)$ برقرار باشد در این صورت $f(T) = f(0)I + f'(0)T$ خواهد بود که I عملگر همانی است

فصل ششم

فضای برداری با ضرب داخلی

۱-۶ ضرب داخلی

۱-۶-۱ تعریف

اگر V فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ (اعداد مختلط، حقیقی و یا گویا) باشد منظور از یک ضرب داخلی بر آن وجود اسکالرهای در میدان $\mathbb{F}$ است که به هر زوج بردار $x, y \in V$ نسبت داده می‌شود آن را با نماد (x, y) نمایش داده و بایستی به ازای هر بردار دلخواه $x, y, z \in V$ و به ازای هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{F}$ ویژگی‌های سه‌گانه زیر را ارضا کند

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &= \overline{(y, x)} \\ ((\alpha x + y), z) &= \alpha(x, z) + (y, z) \\ x \neq \vec{0} \quad (x, x) &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

واضح است که ضرب داخلی بردار صفر در هر بردار دلخواهی بایستی برابر عدد صفر باشد چنین ملاحظاتاتی که از این ویژگی‌ها منتج می‌شوند از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد

$$\left. \begin{aligned} (\alpha x, y) &= \alpha(x, y) \\ (x, \alpha y) &= \bar{\alpha}(x, y) \\ (x, \bar{0}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (۲-۶)$$

ضرب داخلی مبنای تعریف مفاهیمی مانند طول^۱ یک بردار و یا زاویه بین دو بردار است؛ طول یا اندازه یک بردار با نماد $\|x\|$ نمایش داده شده و عبارت است از

$$\left. \begin{aligned} \|x\|^2 &= (x, x) \\ x \perp y &\Rightarrow (x, y) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (۳-۶)$$

بنابراین بردار یگه با طول واحد است همچنین اگر طول یک بردار برابر صفر شود لزوماً آن بردار صفر است همچنین دو بردار $x \perp y$ بر یکدیگر عمود هستند اگر ضرب داخلی آنها برابر عدد صفر شود بنابراین بردار صفر بر هر بردار دلخواهی عمود است. در فضای اقلیدسی زاویه بین دو بردار یگه x, y در میدان اعداد حقیقی به صورت $\cos(x, y) \in \mathbb{R}$ تعریف می‌شود.

۲-۱-۶ ضربهای داخلی استاندارد

هر چند تعریف ضرب داخلی در یک فضای برداری دلخواه است و صرفاً بایستی ویژگی‌های رابطه (۱-۶) را ارضاء کند لیکن در فضاهای برداری معروف و پرکاربرد مانند فضای بردارها، ماتریسها و توابع ضرب داخلی استاندارد متناسب با مفاهیم هندسی تعریف می‌شود به عنوان مثال در فضای بردارها $V = \mathbb{C}^N$ ضرب داخلی استاندارد بین دو بردار x, y به صورت زیر تعریف می‌شود

^۱ Norm of Vector

$$(x, y) \triangleq y^* x = \langle \bar{y}_1 \quad \bar{y}_2 \quad \cdots \quad \bar{y}_N \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N x_i \bar{y}_i \quad (۴-۶)$$

واضح است که این تعریف، هر سه ویژگی ۱-۵ را ارضا می‌کند بنابراین طول یک بردار به صورت زیر خواهد بود که لزوماً یک عدد حقیقی مثبت است

$$\|x\|^2 = x^* x = \sum_{i=1}^N \bar{x}_i x_i = \sum_{i=1}^N |x_i|^2 \in \mathbb{R}^+ \quad (۵-۶)$$

در میدان اعداد حقیقی یعنی حالت خاص $V = \mathbb{R}^N$ ضرب داخلی استاندارد به صورت $(x, y) = y^T x$ قابل بیان است.

به عنوان مثال دیگر در فضای ماتریسها $V = \mathbb{C}^{M \times N}$ ضرب داخلی استاندارد بین دو ماتریس دلخواه A, B به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(A, B) \triangleq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij} \bar{b}_{ij} = \text{tr}(AB^*) = \text{tr}(B^*A) \quad (۶-۶)$$

واضح است که این تعریف، ویژگی‌های رابطه ۱-۶ را ارضا می‌کند و بنابراین طول یک ماتریس به صورت زیر خواهد بود که لزوماً یک عدد حقیقی مثبت است

$$\|A\|^2 = \text{tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij} \bar{a}_{ij} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |a_{ij}|^2 \in \mathbb{R}^+ \quad (۷-۶)$$

در میدان اعداد حقیقی یعنی حالت خاص $V = \mathbb{R}^{M \times N}$ ضرب داخلی استاندارد به صورت $(A, B) = \text{tr}(AB^T)$ قابل بیان است.

و به عنوان آخرین تعریف از ضربهای داخلی استاندارد اگر V فضای برداری کلیه توابع یک متغیره $f(x)$ با مقدار مختلط در بازه حقیقی $x \in (a, b)$ باشد در این صورت ضرب داخلی استاندارد بین دو تابع دلخواه $f(x), g(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f, g) \triangleq \int_a^b f_{(x)} \bar{g}_{(x)} dx \quad (۸-۶)$$

متعاقباً واضح است که این تعریف، ویژگی‌های رابطه ۶-۱ را ارضا می‌کند و بنابراین نرم یک تابع به صورت زیر خواهد بود که لزوماً یک عدد حقیقی مثبت است

$$\|f_{(x)}\|^2 = \int_a^b f_{(x)} \bar{f}_{(x)} dx = \int_a^b |f|^2 dx \in \mathbb{R}^+ \quad (۹-۶)$$

به همین ترتیب اگر V فضای برداری کلیه توابع دومتغیره $f_{(x,y)}$ با مقدار مختلط در بازه حقیقی $(x,y) \in \Omega$ باشد که Ω محدوده دوبعدی داخلی هر خم بسته دلخواهی در صفحه xy است در این صورت ضرب داخلی استاندارد بین دو تابع $f_{(x,y)}, g_{(x,y)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f, g) \triangleq \iint_{\Omega} f_{(x,y)} \bar{g}_{(x,y)} dx dy \quad (۱۰-۶)$$

برای توابع سه متغیره انتگرال روی حجم گرفته شده و الی آخر یعنی برای توابع چند متغیره $f_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ با مقدار مختلط در بازه حقیقی $a_i < x_i < b_i$ به ازای $i = 1:n$ ضرب داخلی استاندارد بین دو تابع $f_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}, g_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f, g) \triangleq \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \bar{g}_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (۱۱-۶)$$

در مثالهای اخیر توابعی از یک و یا چند متغیره مستقل حقیقی بودند حال اگر V فضای برداری کلیه توابع یک متغیره مختلط $f_{(z)}$ بر روی خم باز و یا بسته Γ در صفحه مختلط z باشد در این صورت ضرب داخلی استاندارد بین دو تابع دلخواه $f_{(z)}, g_{(z)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f, g) \triangleq \oint_{\Gamma} f_{(z)} \bar{g}_{(z)} |dz| \quad (۱۲-۶)$$

واضح است که این تعریف، ویژگی‌های رابطه ۱-۶ را ارضا می‌کند و متعاقباً طول تابعی از یک متغیر مختلط به صورت زیر خواهد بود که لزوماً یک عدد حقیقی مثبت است

$$\|f_{(z)}\|^2 = \oint_{\Gamma} f_{(z)} \bar{f}_{(z)} |dz| = \oint_{\Gamma} |f_{(z)}|^2 |dz| \in \mathbb{R}^+ \quad (۱۳-۶)$$

به طور مشابه اگر V فضای برداری کلیه توابع چند متغیره مختلط $f_{(z_1, z_2, \dots, z_n)}$ بر روی خمهای باز و یا بسته Γ_i در صفحه مختلط z_i باشد ضرب داخلی استاندارد بین دو تابع $f_{(z_1, z_2, \dots, z_n)}$ و $g_{(z_1, z_2, \dots, z_n)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f, g) \triangleq \oint_{\Gamma_n} |dz_n| \cdots \oint_{\Gamma_2} |dz_2| \oint_{\Gamma_1} f_{(z_1, z_2, \dots, z_n)} \bar{g}_{(z_1, z_2, \dots, z_n)} |dz_1| \quad (۱۴-۶)$$

$$\|f\|^2 \triangleq \oint_{\Gamma_n} |dz_n| \cdots \oint_{\Gamma_2} |dz_2| \oint_{\Gamma_1} |f_{(z_1, z_2, \dots, z_n)}|^2 |dz_1| \in \mathbb{R}^+$$

تعریف: مجموعه‌ای از بردارهای دو به دو عمود بر هم یک مجموعه متعامد^۱ نامیده شده و یک مجموعه متعامد که طول بردارهای آن برابر واحد باشد متعامد یکه^۲ یا ارتونرمال نامیده می‌شود بنابراین مجموعه $\mathcal{S} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle$ ارتونرمال است اگر

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij} \quad \text{به ازای } i, j = 1, 2, \dots, N$$

قضیه [۱-۶] هر مجموعه متعامد غیر صفر از بردارها مستقل خطی است (یعنی این مجموعه شامل بردار صفر نباشد)

^۱ Orthogonal

^۲ Orthonormal

اثبات: ثابت می‌کنیم هر زیرمجموعه $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \rangle$ دلخواه از آن مستقل است؛ برای این کار با تعریف بردار $\beta \triangleq c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_k \alpha_k$ بایستی از $\beta = \vec{0}$ نتیجه شود کلیه ضرایب c_i برابر صفر هستند از طرفی با توجه به ویژگی دوم ضرب داخلی در رابطه (۶-۱) و تعامد این مجموعه بردارها می‌توان نوشت

$$(\beta, \alpha_j) = \left(\sum_{i=1}^k c_i \alpha_i, \alpha_j \right) = \sum_{i=1}^k c_i (\alpha_i, \alpha_j) = c_j (\alpha_j, \alpha_j)$$

این بدان معنا است که اگر بردار $\beta \in \text{Span}\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \rangle$ در گستره بردارهای این مجموعه باشد مختصات آن نسبت به این پایه برابر است با $c_j = (\beta, \alpha_j) / \|\alpha_j\|^2$ اگر $\beta = \vec{0}$ باشد نتیجه می‌شود $c_j = 0$ به ازای $j = 1, 2, \dots, k$ یعنی کلیه ضرایب برابر صفرند و در نتیجه این مجموعه مستقل خطی است.

۲-۶ تصویر عمودی و زیرفضای عمودی

۱-۲-۶ فرآیند گرام اشعیت

فرض کنید V فضای برداری با ضرب داخلی و $\langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \rangle$ مجموعه مستقلی از بردارهای آن باشد در این صورت می‌توان مجموعه متعامد $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ را در V بنا نهاد به قسمی که

$$\text{Span}\langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \rangle = \text{Span}\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \rangle \quad 1 \leq k \leq n$$

یعنی $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$ پایه‌ای باشد برای زیرفضائی که توسط $\langle \beta_1, \dots, \beta_k \rangle$ گسترده می‌شود؛ فرآیندی که توسط آن α_i ها از روی β_i ها ساخته می‌شوند یک فرآیند استقرائی است که به نام فرآیند گرام-اشمیت^۱ معروف است.

فرض کنید مجموعه $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$ را تشکیل داده‌ایم در این صورت α_{m+1} را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$\alpha_{m+1} = \beta_{m+1} - \sum_{j=1}^m \frac{(\beta_{m+1}, \alpha_j)}{\|\alpha_j\|^2} \alpha_j \quad (۱۵-۶)$$

به عنوان نمونه برای $m = 1:4$ خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 \\ \alpha_2 &= \beta_2 - \frac{(\beta_2, \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 \\ \alpha_3 &= \beta_3 - \frac{(\beta_3, \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 - \frac{(\beta_3, \alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2} \alpha_2 \\ \alpha_4 &= \beta_4 - \frac{(\beta_4, \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 - \frac{(\beta_4, \alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2} \alpha_2 - \frac{(\beta_4, \alpha_3)}{\|\alpha_3\|^2} \alpha_3 \end{aligned} \right\}$$

با دقت در روند تولید این بردارهای متعامد مشاهده می‌شود که α_2 بر α_1 عمود است چراکه

$$(\alpha_2, \alpha_1) = \left(\left(\beta_2 - \frac{(\beta_2, \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 \right), \alpha_1 \right) = (\beta_2, \alpha_1) - \frac{(\beta_2, \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} (\alpha_1, \alpha_1) = 0$$

به همین ترتیب α_3 بر α_1, α_2 عمود بوده و الی آخر؛ اولاً α_{m+1} مخالف صفر است چراکه در غیر این صورت β_{m+1} در گستره $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$ و در نتیجه در گستره $\langle \beta_1, \dots, \beta_m \rangle$ قرار گرفته که خلاف فرض استقلال است ثانیاً $(\alpha_{m+1}, \alpha_i) = 0$ به ازای $1 \leq i \leq m$ زیرا

$$(\alpha_{m+1}, \alpha_i) = \left(\left(\beta_{m+1} - \sum_{j=1}^m \frac{(\beta_{m+1}, \alpha_j)}{\|\alpha_j\|^2} \alpha_j \right), \alpha_i \right)$$

با بهره‌گیری از ویژگی دوم ضرب داخلی در رابطه (۱-۶) می‌توان نوشت

$$(\alpha_{m+1}, \alpha_i) = (\beta_{m+1}, \alpha_i) - \sum_{j=1}^m \frac{(\beta_{m+1}, \alpha_j)}{\|\alpha_j\|^2} (\alpha_j, \alpha_i)$$

حال با توجه به فرض استقراء که m بردار متعامد $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$ تشکیل شده یعنی به ازای $j \neq i$ ضرب داخلی $(\alpha_j, \alpha_i) = 0$ است لذا تنها یک جمله از مجموع فوق مخالف صفر است یعنی فقط به ازای $i = j$ که نتیجه می‌شود

$$(\alpha_{m+1}, \alpha_i) = (\beta_{m+1}, \alpha_i) - \frac{(\beta_{m+1}, \alpha_i)}{\|\alpha_i\|^2} (\alpha_i, \alpha_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq m$$

متعاقباً با یک‌ه کردن بردارهای حاصل به صورت $q_i = \alpha_i / \|\alpha_i\|$ می‌توان طبق فرآیند گرام-اشمیت مجموعه ارتونرمال $\langle q_1, q_2, \dots, q_m \rangle$ را تشکیل داد یعنی $(q_i, q_j) = \delta_{ij}$ در ادامه و همچنین در مثالهای زیر سعی می‌شود تعبیر هندسی این فرآیند مورد بحث و بررسی قرار گیرد؛ فرض کنید W_m زیرفضائی از V باشد که توسط بردارهای $\langle \beta_1, \dots, \beta_m \rangle$ و متعاقباً پایه ارتونرمال $\langle q_1, \dots, q_m \rangle$ گسترده شده است و عملگر $E: V \rightarrow W$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\forall \beta \in V \quad E\beta \triangleq \sum_{j=1}^m (\beta, q_j) q_j$$

اولاً واضح است که $E\beta \in W_m$ بوده و $\beta - E\beta$ بر کلیه بردارهای W_m و اصطلاحاً بر این زیرفضا عمود است بنابراین از نظر هندسی $E\beta$ در واقع تصویر عمودی بردار β در زیرفضای W_m است لذا با بازنویسی فرآیند گرام-اشمیت می‌توان نتیجه گرفت

$$\alpha_{m+1} = \beta_{m+1} - \sum_{j=1}^m (\beta_{m+1}, q_j) q_j = \beta_{m+1} - E\beta_{m+1} \quad (۱۶-۶)$$

یعنی برای تولید هر بردار به ترتیب آن را از تصویر عمودیش در زیرفضای ماقبل کم می‌کنیم در این صورت بردار حاصل بر این زیرفضا و یا همه بردارهای ماقبلش عمود می‌شود.

قضیه [۲-۶] اگر مجموعه ارتونرمال $B = \langle q_1, q_2, \dots, q_N \rangle$ پایه‌ای برای فضای برداری V بوده و T یک عملگر خطی در آن باشد و اگر $A = [T]_B$ یعنی نمایش ماتریسی این عملگر نسبت به پایه B باشد در این صورت می‌توان نوشت

$$a_{ij} = (Tq_j, q_i) \quad (۱۷-۶)$$

اثبات: با توجه به تعریف نمایش ماتریسی یک عملگر خطی مطابق رابطه

$$Tq_j = \sum_{m=1}^N a_{mj} q_m$$

و قرار دادن آن در رابطه (۱۷-۶) با استفاده از ویژگیهای ضرب داخلی و با توجه به تعامد بردارهای پایه نتیجه می‌شود

$$(Tq_j, q_i) = \left(\sum_{m=1}^N a_{mj} q_m, q_i \right) = \sum_{m=1}^N a_{mj} (q_m, q_i) = \sum_{m=1}^N a_{mj} \delta_{mi} = a_{ij}$$

مثال [۱-۶]

فرض کنید $V = \mathbb{R}^3$ با ضرب داخلی استاندارد و مجموعه بردارهای $\langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ به صورت $\beta_1 = \langle 3, 0, 4 \rangle, \beta_2 = \langle -1, 0, 7 \rangle, \beta_3 = \langle 2, 9, 11 \rangle$ باشد حال طبق فرآیند گرام-اشمیت مجموعه متعامد $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ را می‌توان از روی این بردارها به صورت زیر تشکیل داد

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 = \langle 3, 0, 4 \rangle \\ \alpha_2 &= \beta_2 - \frac{(\beta_2, \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 = \langle -1, 0, 7 \rangle - \frac{25}{25} \langle 3, 0, 4 \rangle = \langle -4, 0, 3 \rangle \\ \alpha_3 &= \beta_3 - \frac{(\beta_3, \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 - \frac{(\beta_3, \alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2} \alpha_2 \\ \alpha_3 &= \langle 2, 9, 11 \rangle - \frac{50}{25} \langle 3, 0, 4 \rangle - \frac{25}{25} \langle -4, 0, 3 \rangle = \langle 0, 9, 0 \rangle \end{aligned} \right\}$$

همانطور که مشاهده می‌شود در تشکیل دومین بردار یعنی α_2 عبارت

$$\frac{(\beta_2, \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1$$

تصویر عمودی β_2 در زیرفضائی است که توسط α_1 گسترده می‌شود؛ همچنین در تشکیل سومین بردار یعنی α_3 عبارت

$$\frac{(\beta_3, \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 + \frac{(\beta_3, \alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2} \alpha_2$$

تصویر عمودی β_3 در زیرفضائی است که توسط α_1, α_2 گسترده می‌شود. همچنین با یکه کردن این بردارها مجموعه ارتونرمال

$$q_1 = \begin{Bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{Bmatrix}, q_2 = \begin{Bmatrix} -0.8 \\ 0 \\ 0.6 \end{Bmatrix}, q_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

تشکیل خواهد شد.

مثال (۶-۲)

فرض کنید $V = f(x)$ فضای کلیه چندجمله‌ایهای درجه دو و پایین تر در بازه $x \in (0, 1)$ با ضرب داخلی استاندارد باشد؛ پایه متعامد $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ را برای این فضا تشکیل دهید

حل: مجموعه‌ای از سه تابع $\langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ به صورت $\langle 1, x, x^2 \rangle$ پایه‌ای برای این فضا هستند، حال با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= g_1 = 1 \\ f_2 &= g_2 - \frac{(g_2, f_1)}{\|f_1\|^2} f_1 = (x) - \frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 dx} (1) = x - \frac{1}{2} \\ f_3 &= g_3 - \frac{(g_3, f_1)}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{(g_3, f_2)}{\|f_2\|^2} f_2 \\ f_3 &= (x^2) - \frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 dx} (1) - \frac{\int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx}{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx} \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6} \end{aligned} \right\}$$

همچنین با یک‌گه کردن این توابع می‌توان یک پایه ارتونرمال نیز تشکیل داد

۲-۲-۶ بهترین تقریب

فرض کنید V فضای برداری با ضرب داخلی و W زیرفضائی از آن باشد حال چنانچه بردار $\beta \in V$ باشد منظور از بهترین تقریب برای آن از بردارهای W بردار $\alpha \in W$ است به قسمی که

$$\forall \gamma \in W \quad \|\beta - \alpha\| \leq \|\beta - \gamma\| \quad (۱۸-۶)$$

قضیه [۳-۶] اولاً شرط لازم و کافی برای اینکه بردار $\alpha \in W$ بهترین تقریب برای بردار $\beta \in V$ باشد آن است که $\beta - \alpha$ بر زیرفضای W عمود باشد. ثانیاً بهترین تقریب در صورت وجود منحصر به فرد است. ثالثاً اگر $\langle q_1, \dots, q_m \rangle$ پایه ارتونرمالی برای W باشد می‌توان نوشت

$$\alpha = \sum_{j=1}^m (\beta, q_j) q_j$$

اثبات: قبل از اثبات این قضیه اتحاد زیر را که به ازای هر دو بردار دلخواه a, b برقرار است در نظر بگیرید

$$\|a + b\|^2 = (a + b, a + b) = \|a\|^2 + 2\operatorname{Re}(a, b) + \|b\|^2 \quad (۱۹-۶)$$

که به سادگی با بسط دادن و استفاده از ویژگی‌های ضرب داخلی قابل اثبات است حال با جایگذاری $\beta - \gamma = (\beta - \alpha) + (\alpha - \gamma)$ خواهیم داشت

$$\|\beta - \gamma\|^2 = \|\beta - \alpha\|^2 + 2\operatorname{Re}((\beta - \alpha), (\alpha - \gamma)) + \|\alpha - \gamma\|^2 \quad (۲۰-۶)$$

از طرفی می‌دانیم که بردارهای α, γ هر دو در زیرفضای W هستند لذا تفاضل آنها $\alpha - \gamma$ نیز در W است.

حال برای اثبات شرط کافی این قضیه یعنی اگر $\beta - \alpha$ بر W عمود باشد خواهیم داشت $0 = ((\beta - \alpha), (\alpha - \gamma))$ در نتیجه

$$\left. \begin{aligned} \|\beta - \gamma\|^2 &= \|\beta - \alpha\|^2 + \|\alpha - \gamma\|^2 \\ \|\beta - \gamma\| &\geq \|\beta - \alpha\| \end{aligned} \right\} \quad (۲۱-۶)$$

که تعبیر هندسی آن همان قضیه معروف فیثاغورث است و تساوی برای حالتی است که این دو بردار $\alpha = \gamma$ با هم برابر باشند. برای اثبات شرط لازم این قضیه بایستی با فرض اینکه α بهترین تقریب باشد یعنی داشته باشیم

$$\forall \gamma \in W \quad \|\beta - \alpha\| \leq \|\beta - \gamma\|$$

نتیجه شود که $\beta - \alpha$ بر W عمود است؛ با توجه به اتحاد (۱۹-۶) به ازای هر بردار دلخواه $\gamma \in W$ می‌توان نوشت

$$2\operatorname{Re}((\beta - \alpha), (\alpha - \gamma)) + \|\alpha - \gamma\|^2 \geq 0 \quad (۲۲-۶)$$

با تعریف بردار $\tau \triangleq \alpha - \gamma$ می‌توان چنین گفت که به ازای هر بردار دلخواه $\tau \in W$ داریم

$$2\operatorname{Re}((\beta - \alpha), \tau) + \|\tau\|^2 \geq 0 \quad (۲۳-۶)$$

حال این بردار دلخواه را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$\tau = -\frac{((\beta - \alpha), (\alpha - \gamma))}{\|\alpha - \gamma\|^2}(\alpha - \gamma) \quad (۲۴-۶)$$

در این صورت داریم

$$\left. \begin{aligned} \|\tau\|^2 &= \frac{|((\beta - \alpha), (\alpha - \gamma))|^2}{\|\alpha - \gamma\|^2} \\ \operatorname{Re}((\beta - \alpha), \tau) &= -\frac{|((\beta - \alpha), (\alpha - \gamma))|^2}{\|\alpha - \gamma\|^2} \end{aligned} \right\} \quad (۲۵-۶)$$

که با جایگذاری در رابطه (۲۳-۶) نتیجه می‌شود

$$-\frac{|((\beta - \alpha), (\alpha - \gamma))|^2}{\|\alpha - \gamma\|^2} \geq 0 \Rightarrow ((\beta - \alpha), (\alpha - \gamma)) = 0 \quad (۲۶-۶)$$

لذا $\beta - \alpha$ بر زیرفضای W عمود است و به این ترتیب شرط لازم نیز اثبات می‌شود. در خصوص اثبات منحصر به فرد بودن بهترین تقریب فرض کنید α, γ هر دو بهترین تقریب برای بردار β باشند در این صورت می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} \forall \gamma \in W \quad \|\beta - \alpha\| &\leq \|\beta - \gamma\| \\ \forall \alpha \in W \quad \|\beta - \gamma\| &\leq \|\beta - \alpha\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|\beta - \alpha\| = \|\beta - \gamma\| \quad (۲۷-۶)$$

در نتیجه $\|\alpha - \gamma\|^2 = 0$ که لزوماً بایستی $\alpha = \gamma$ باشد. در نهایت با توجه به فرایند گرام-اشمیت و رابطه (۱۶-۶) واضح است که چنانچه

$$\alpha = \sum_{j=1}^m (\beta, q_j) q_j$$

در این صورت $\beta - \alpha$ بر زیرفضای W عمود است.

۱-۲-۳ مکمل عمودی

تعریف: فرض کنید V فضای برداری با ضرب داخلی و $\mathcal{S} = \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \rangle$ مجموعه ای از بردارهای آن باشد در این صورت منظور از مکمل عمودی $\mathcal{S}$ که آن را با $\mathcal{S}^\perp$ نمایش می‌دهیم مجموعه‌ای از بردارهای V است که بر $\mathcal{S}$ عمود هستند. مکمل عمودی هر مجموعه دلخواه، زیرفضائی از V است چراکه به ازای هر دو بردار دلخواه $\forall x, y \in \mathcal{S}^\perp$ و به ازای هر بردار دلخواه $\forall z \in \mathcal{S}$ داریم $(x, z) = (y, z) = 0$ در این صورت

$$((cx + y), z) = c(x, z) + (y, z) = 0$$

یعنی $cx + y \in \mathcal{S}^\perp$ ترکیب خطی آنها نیز بر $\mathcal{S}$ عمود است؛ لذا به طور کلی اگر زیرفضائی که توسط $\mathcal{S}$ گسترش می‌یابد را W بنامیم در این صورت مکمل عمودی آن $W^\perp$ نیز زیرفضای V است؛ به این ترتیب مکمل عمودی بردار صفر $\vec{0} = \{ \vec{0} \}^\perp$ خود فضای V است و همچنین $V^\perp = \{ \vec{0} \}$

قضیه (۱-۳) اگر E عملگر تصویر عمودی در زیرفضای W باشد در این صورت $I - E$ عملگر تصویر عمودی در $W^\perp$ است به بیان دیگر اگر $E\beta$ تصویر عمودی بردار $\beta \in V$ در زیرفضای W باشد $\beta - E\beta$ تصویر عمودی آن در $W^\perp$ است.

اثبات: فرض کنید $\gamma \in W^\perp$ باشد در این صورت می‌توان نوشت

$$\beta - \gamma = (E\beta) + (\beta - E\beta - \gamma)$$

و چون $E\beta$ تصویر عمودی بردار β بر W است لذا $\beta - E\beta$ لزوماً در $W^\perp$ قرار دارد در نتیجه $(\beta - E\beta - \gamma)$ در $W^\perp$ قرار دارد بنابراین مطابق اتحاد (۱-۶) می‌توان نوشت

$$\|\beta - \gamma\|^2 = \|E\beta\|^2 + \|\beta - E\beta - \gamma\|^2$$

در نتیجه

$$\|\beta - \gamma\|^2 \geq \|E\beta\|^2 = \|\beta - (\beta - E\beta)\|^2$$

این رابطه بدان معنا است که $\beta - E\beta$ بهترین تقریب برای بردار β در زیرفضای $W^\perp$ است که همان تصویر عمودی آن است.

مثال (۶-۳)

فرض کنید $V = \mathbb{R}^3$ با ضرب داخلی استاندارد و زیرفضای W صفحه $x_1 + x_3 = 0$ باشد مطلوب است تصویر عمودی $\beta = \langle 1, 2, 2 \rangle$ در این زیرفضا

ابتدا تصویر عمودی بردار β را در $W^\perp$ به دست می‌آوریم به قسمی که $W^\perp = \text{Span}\{\alpha\}$ و $\alpha = \langle 1, 0, 1 \rangle$ است در این صورت خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} (I - E)x &= \frac{(x, \alpha)}{\|\alpha\|^2} \alpha = \frac{x_1 + x_3}{2} \langle 1, 0, 1 \rangle \\ (I - E)\beta &= \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} \alpha = \frac{3}{2} \langle 1, 0, 1 \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow [I - E] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

واضح است که عملگر $I - E$ یک عملگر خطی است و همانطور که از نمایش ماتریسی آن مشخص است دارای رتبه یک و هیچ‌دو است؛ در نتیجه

$$\left. \begin{aligned} Ex &= \langle x_1, x_2, x_3 \rangle - \frac{x_1 + x_3}{2} \langle 1, 0, 1 \rangle \\ E\beta &= \langle 1, 2, 2 \rangle - \frac{3}{2} \langle 1, 0, 1 \rangle = \frac{1}{2} \langle -1, 4, 1 \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow [E] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همچنین واضح است که عملگر E یک عملگر خطی با رتبه دو و هیچ‌یک است.

مثال (۶-۴)

فرض کنید $V = f_{(x)}$ فضای کلیه چندجمله‌ایهای درجه دو و پایین تر در بازه $x \in (0, 1)$ با ضرب داخلی استاندارد و $W = \text{Span}\{x\}$ باشد مطلوب است بهترین تقریب برای توابع $x + 1$ و x^3 در $W, W^\perp$

حل: تابع $x + 1$ چون در فضای V قرار دارد لذا می‌توان تصویر عمودی آن را در زیرفضای W به صورت زیر نوشت

$$E(x+1) = \frac{\int_0^1 x(x+1)dx}{\int_0^1 (x)^2 dx}(x) = \frac{5}{2}x$$

به قسمی E عملگر تصویر عمودی در W است در نتیجه تصویر عمودی این تابع در $W^\perp$ برابر است با

$$(I - E)(x+1) = x+1 - \frac{5}{2}x = 1 - \frac{3}{2}x$$

همچنین برای محاسبه تصویر عمودی تابع x^3 در W می‌توان نوشت

$$E(x^3) = \frac{\int_0^1 x^4 dx}{\int_0^1 (x)^2 dx}(x) = \frac{3}{5}x$$

لیکن چون این تابع در فضای V قرار ندارد لذا نمی‌توان تصویر عمودی آن را در $W^\perp$ با استفاده از عملگر $I - E$ نوشت و بایستی پایه متعامدی برای $W^\perp$ تشکیل داد لذا با فرض اینکه مجموعه توابع $\langle x, 1, x^2 \rangle$ پایه‌ای برای V هستند با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت داریم

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= x \\ f_2 &= 1 - \frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 x^2 dx} x = 1 - \frac{3}{2}x \\ f_3 &= x^2 - \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} x - \frac{\int_0^1 x^2 \left(1 - \frac{3}{2}x\right) dx}{\int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}x\right)^2 dx} \left(1 - \frac{3}{2}x\right) \\ f_3 &= x^2 - x + \frac{1}{6} \end{aligned} \right\}$$

لذا $W^\perp$ گستره دو تابع $1 - \frac{3}{2}x$ و $x^2 - x + \frac{1}{6}$ است و در نتیجه می‌توان تصویر عمودی تابع x^3 را در آن به صورت زیر نوشت

$$E'(x^3) = \frac{\int_0^1 x^3 \left(1 - \frac{3}{2}x\right) dx}{\int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}x\right)^2 dx} \left(1 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{\int_0^1 x^3 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) dx}{\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{1}{20}$$

به قسمی E' عملگر تصویر عمودی در $W^\perp$ است.

قضیه [۵-۶] اگر E عملگر تصویر عمودی از فضای V در زیرفضای متناهی‌البعد W باشد در این صورت دارای خواص زیر است

$$E^2 = E \quad \text{(i) } E \text{ خودتوانی است یعنی}$$

$$E \text{ یک عملگر خطی است} \quad \text{(ii)}$$

$$N_E = W^\perp \text{ برابر است با} \quad \text{(iii)}$$

$$V = W \oplus W^\perp \quad \text{(iv)}$$

اثبات (i) واضح است که به ازای هر بردار دلخواه $\beta \in V$ خواهیم داشت $E\beta = \alpha \in W$ از طرفی $E\alpha = E^2\beta = \alpha = E\beta$ در نتیجه $(E^2 - E)\beta = \vec{0}$ و لذا عملگر $E^2 - E$ یک عملگر صفر است.

اثبات (ii) برای اثبات اینکه E یک عملگر خطی است بایستی به ازای هر $\beta_1, \beta_2 \in V$ نشان دهیم که $E(c\beta_1 + \beta_2) = cE\beta_1 + E\beta_2$ حال عبارت زیر را که یک اتحاد است در نظر بگیرید

$$c(\beta_1 - E\beta_1) + (\beta_2 - E\beta_2) = (c\beta_1 + \beta_2) - (cE\beta_1 + E\beta_2)$$

از طرفی می‌دانیم سمت چپ اتحاد فوق برداری در $W^\perp$ است

$$\left. \begin{aligned} (\beta_1 - E\beta_1) &\in W^\perp \\ (\beta_2 - E\beta_2) &\in W^\perp \\ (cE\beta_1 + E\beta_2) &\in W \\ (c\beta_1 + \beta_2) &\in V \end{aligned} \right\}$$

با این نحوه جداسازی اینچنین برداشت می‌شود که $(cE\beta_1 + E\beta_2)$ تصویر عمودی $(c\beta_1 + \beta_2)$ است در نتیجه می‌توان نوشت $E(c\beta_1 + \beta_2) = (cE\beta_1 + E\beta_2)$ که به مفهوم خطی بودن عملگر E است.

اثبات (iii) فرض کنید $\langle q_1, q_2, \dots, q_m \rangle$ پایه ارتونرمالی برای زیرفضای W باشد در این صورت به ازای هر بردار دلخواه $\forall \beta \in V$ می‌توان نوشت

$$E\beta = \sum_{j=1}^m (\beta, q_j) q_j$$

حال اگر $\beta \in W^\perp$ باشد $(\beta, \alpha_j) = 0$ و در نتیجه $E\beta = \vec{0}$ یعنی $N_E = W^\perp$ و برعکس اگر $E\beta = \vec{0}$ با توجه به استقلال بردارهای پایه نتیجه می‌شود $(\beta, q_j) = 0$ یعنی $\beta \in W^\perp$ اثبات (iv) واضح است که $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$ و به ازای هر بردار $\forall \beta \in V$ می‌توان به صورت منحصر به فرد نوشت $\beta = (E\beta) + (\beta - E\beta)$

ویژگی‌های فوق برای هر عملگر تصویر عمودی برقرار است به عنوان مثال می‌دانیم که $I - E$ عملگر تصویر عمودی در $W^\perp$ است لذا داریم $(I - E)^2 = I - E$ و همچنین $N_{I-E} = W$

۶-۲-۴ نامساوی بسل

نامساوی بسل از نظر هندسی به این معنی است که طول هر بردار از طول تصویر عمودیش بزرگتر است؛ فرض کنید V فضای برداری با ضرب داخلی و $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$ مجموعه‌ای متعامد از بردارهای آن باشد در این صورت به ازای هر بردار دلخواه $\forall \beta \in V$ داریم

$$\|\beta\|^2 \geq \sum_{j=1}^m \frac{|(\beta, \alpha_j)|^2}{\|\alpha_j\|^2} \quad (۶-۲۸)$$

و تساوی در حالتی برقرار است که این بردار در گستره آن مجموعه قرار گیرد. با تعریف زیر فضای $W = \text{Span}\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$ و اگر E عملگر تصویر عمودی در آن باشد در این صورت $\forall \beta \in V$ می توان نوشت

$$\|\beta\|^2 = \|E\beta\|^2 + \|\beta - E\beta\|^2 \Rightarrow \|\beta\|^2 \geq \|E\beta\|^2 \quad (29-6)$$

از طرفی

$$\|E\beta\|^2 = \left(\sum_{i=1}^m \frac{(\beta, \alpha_i)}{\|\alpha_i\|^2} \alpha_i, \sum_{j=1}^m \frac{(\beta, \alpha_j)}{\|\alpha_j\|^2} \alpha_j \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{(\beta, \alpha_i) \overline{(\beta, \alpha_j)}}{\|\alpha_i\|^2 \|\alpha_j\|^2} (\alpha_i, \alpha_j)$$

و با توجه به تعامد این مجموعه بردارها داریم

$$\|E\beta\|^2 = \sum_{j=1}^m \frac{|(\beta, \alpha_j)|^2}{\|\alpha_j\|^2} \quad (30-6)$$

به عنوان مثال در فضای تابعی با ضرب داخلی استاندارد فرض کنید $V = f(t)$ فضای کلیه توابع با مقدار مختلط در بازه $t \in (0,1)$ باشد در این صورت مجموعه $\{e^{2knit}\}$ به ازای مقادیر صحیح $k \in \mathbb{Z}$ یک مجموعه ارتونرمال است در نتیجه مطابق نامساوی بسل داریم

$$\int_0^1 |f|^2 dt \geq \sum_{-n}^n \left| \int_0^1 f(t) e^{-2knit} dt \right|^2 \quad (31-6)$$

و تساوی در حالتی برقرار است که تابع $f(t)$ در گستره این مجموعه قرار گیرد.

۵-۲-۶ قضیه تجزیه QR

ماتریس حقیقی $Q_{M \times N}$ ارتونرمال است اگر بردارهای ستونی آن یکه و متعامد باشند در این صورت $Q^T Q = I$ و ماتریس ارتونرمال مربعی متعامد نامیده می شود حال اگر

بردارهای مستقل $\langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N \rangle$ ستونهای ماتریس $A_{M \times N}$ را تشکیل دهند در این صورت ماتریس ارتونرمال $Q_{M \times N}$ و ماتریس بالامثلثی غیرمنفرد $R_{N \times N}$ را می‌توان تشکیل داد به قسمی که $A = QR$ به این ترتیب که با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت می‌توان مجموعه متعامدی از روی ستونهای ماتریس A تشکیل داد به عنوان مثال برای چهار ستون اول داریم

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 \\ \alpha_2 &= \beta_2 - (\beta_2, q_1)q_1 \\ \alpha_3 &= \beta_3 - (\beta_3, q_1)q_1 - (\beta_3, q_2)q_2 \\ \alpha_4 &= \beta_4 - (\beta_4, q_1)q_1 - (\beta_4, q_2)q_2 - (\beta_4, q_3)q_3 \end{aligned} \right\} \quad (۳۲-۶)$$

حال با تعریف

$$r_{ii} = \|\alpha_i\|, \quad q_i = \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}, \quad r_{ij} = (\beta_j, q_i)$$

داریم

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= r_{11}q_1 \\ \beta_2 &= r_{22}q_2 + r_{12}q_1 \\ \beta_3 &= r_{33}q_3 + r_{23}q_2 + r_{13}q_1 \\ \beta_n &= r_{nn}q_n + \dots + r_{2n}q_2 + r_{1n}q_1 \end{aligned} \right\} \quad (۳۳-۶)$$

و یا به صورت ماتریسی

$$A = \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N \rangle = \langle q_1, q_2, \dots, q_N \rangle \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & r_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & r_{nn} \end{bmatrix} = QR \quad (۳۴-۶)$$

۶-۲-۶ درون‌یابی خطی و بهترین حل

فرض کنید دستگاه معادلات $Ax = b$ ناسازگار باشد در این صورت برای آن حل وجود ندارد؛ حال فرض کنید بخواهیم بهترین تقریب از بردارهای x را برای این دستگاه بیابیم؛ اگر x_m بهترین تقریب باشد آن را به این صورت تعریف می‌کنیم که

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad \|b - Ax_m\| \leq \|b - Ax\| \quad (۳۵-۶)$$

در نتیجه $Ax_m = b_{\perp}$ یعنی تصویر عمودی بردار b در فضای ستونی ماتریس A خواهد بود که با توجه به تجزیه $A = QR$ گستره ستونهای A با گستره ستونهای Q یکسان است و لذا می‌توان نوشت

$$b_{\perp} = \sum_{j=1}^m (b, q_j) q_j = (q_1)(q_1)^T b + \dots + (q_N)(q_N)^T b = QQ^T b \quad (۳۶-۶)$$

در نتیجه با جایگذاری $b_{\perp} = QQ^T b$ در دستگاه معادله داریم

$$Ax_m = QRx_m = QQ^T b \quad (۳۷-۶)$$

با ضرب طرفین دستگاه فوق از سمت چپ به ترتیب در Q^T و سپس در R^{-1} نتیجه می‌شود

$$x_m = R^{-1}Q^T b \quad (۳۸-۶)$$

حال به سادگی و با جایگذاری ثابت می‌شود که این نتیجه را می‌توان با ضرب کردن دستگاه معادله از سمت چپ در A^T نیز به دست آورد

$$\left. \begin{aligned} A^T Ax_m &= A^T b \Rightarrow x_m = (A^T A)^{-1} A^T b \\ R^T Rx_m &= R^T Q^T b \Rightarrow x_m = R^{-1} Q^T b \end{aligned} \right\} \quad (۳۹-۶)$$

مثال (۵-۶)

برای درک بیشتر مطالب فوق به عنوان ساده‌ترین مثال از یک دستگاه ناسازگار، دو معادله و یک مجهول را به صورت $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ در نظر بگیرید؛ با یک قضاوت منطقی می‌توان گفت بهترین جواب دستگاه فوق $x = 1.5$ یعنی متوسط جواب دو معادله است در این حالت ماتریس دستگاه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ بوده که با ضرب طرفین آن در A^T داریم

$$\langle 1 \ 1 \rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x = \langle 1 \ 1 \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow 2x = 3$$

که منجر به معادله $2x = 3$ شده و در نتیجه $x = 1.5$ خواهد شد. حال فرض کنید یکی از معادلات دستگاه اخیر را در یک اسکالر مخالف صفر ضرب کنیم مثلاً دومین معادله را دو برابر کنیم یعنی دستگاه به صورت $\begin{cases} x = 1 \\ 2x = 4 \end{cases}$ باشد؛ به نظر می‌رسد این دستگاه معادله با دستگاه معادلات قبل هم‌ارز باشند چون ماتریسهای افزوده آنها هم ارزند و قاعدتاً بایستی جواب یکسانی داشته باشند لیکن اینطور نیست چراکه با ضرب طرفین آن در A^T داریم

$$\langle 1 \ 2 \rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x = \langle 1 \ 2 \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix} \Rightarrow 5x = 9$$

که منجر به معادله $5x = 9$ شده و در نتیجه $x = 1.8$ خواهد شد؛ این اختلاف جواب به این صورت قابل توجیه است که در واقع $x = 1.5$ بهترین جواب دستگاه قبلی $x \rightarrow 1$ یعنی مجهول x را به سمت عدد یک ۱ و همچنین به سمت عدد دو $x \rightarrow 2$ نزدیک کرده در حالی که بهترین جواب این دستگاه $x = 1.8$ به گونه‌ای است که $x \rightarrow 1$ و $x \rightarrow 2$ نزدیک می‌شود

مثال (۶-۶)

فرض کنید بخواهیم بهترین معادله خطی در صفحه xy را که از سه نقطه به مختصات $\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$ عبور می‌کند به دست آوریم؛ در حل این گونه مسائل باید به این نکته

توجه کرد که بسته به نوع معادله‌ای که برای یک خط در نظر گرفته می‌شود جوابهای متفاوتی به دست می‌آید به عنوان مثال فرض کنید اگر معادله بهترین خط به صورت $ax + by = 1$ مورد نظر باشد با قرار دادن مختصات هر سه نقطه در آن دستگاه

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

حاصل شده که یک دستگاه ناسازگار است و با ضرب طرفین آن در A^T به صورت

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

به دستگاه سازگار زیر می‌رسیم

$$\begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 14 & -11 \\ -11 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

و در نهایت بهترین خط به معادله $0.8x - 0.2y = 1$ منجر می‌شود. حال اگر بخواهیم معادله خط به صورت $y = ax + b$ را به دست آوریم مجدداً با قرار دادن مختصات نقاط در آن دستگاه

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

حاصل شده که با ضرب طرفین آن در A^T به صورت

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

به دستگاه سازگار زیر می‌رسیم

$$\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 11 \\ 6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

و در نهایت به معادله $y = 1.5x - 0.5$ منجر می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود جوابهای متفاوتی به دست می‌آید لذا بایستی به این نکته توجه کرد که محاسبه کدام مجهول اهمیت بیشتری دارد، در این مثال اولین جواب به صورتی است که $ax +$

$by \rightarrow 1$ به سمت عدد یک نزدیک شده در حالی که در حالت دوم $ax + b \rightarrow y$ نزدیک می‌شود.

۳-۶ عملگرهای خودالحاقی و یکانی

۱-۳-۶ عملگر الحاقی

اگر V فضای برداری و T یک عملگر خطی در آن باشد در این صورت الحاقی آن را با T^* نمایش داده و مطابق رابطه زیر تعریف می‌کنیم؛ که به ازای هر دو بردار دلخواه $x, y \in V$

$$\forall x, y \in V \quad (Tx, y) = (x, T^*y) \quad (۴۰-۶)$$

اولاً عملگر الحاقی T^* یک عملگر خطی است چرا که به ازای هر دو بردار $y_1, y_2 \in V$ و به ازای هر اسکالر $c \in \mathbb{F}$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} (Tx, cy_1 + y_2) &= \bar{c}(Tx, y_1) + (Tx, y_2) = \bar{c}(x, T^*y_1) + (x, T^*y_2) \\ &= (x, cT^*y_1) + (x, T^*y_2) = (x, cT^*y_1 + T^*y_2) \end{aligned}$$

از طرفی نیز می‌توان نوشت

$$(Tx, cy_1 + y_2) = (x, T^*(cy_1 + y_2))$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$T^*(cy_1 + y_2) = cT^*y_1 + T^*y_2$$

یعنی عملگر الحاقی T^* یک عملگر خطی است. با توجه به تعریف فوق بلافاصله بعد از تعریف هر عملگر خطی در یک فضای برداری، الحاقی آن مشخص می‌شود به عنوان مثال موارد زیر را می‌توان مورد توجه قرار داد.

مثال (۷-۶)

فرض کنید $V = \mathbb{C}^N$ با ضرب داخلی استاندارد و عملگر خطی T در آن به این صورت تعریف شود که به ازای هر بردار دلخواه $\forall x \in V$ داشته باشیم $Tx \triangleq Mx$ به قسمی که $M_{N \times N}$ یک ماتریس مربع مشخص باشد. در این صورت برای تعریف الحاقی آن با توجه به تعریف ضرب داخلی می توان نوشت

$$(Tx, y) = (Mx, y) = y^* Mx = (M^* y)^* x = (x, M^* y) = (x, T^* y)$$

در نتیجه عملگر الحاقی به صورت $\forall x \in V \Rightarrow T^* x = M^* x$ مشخص می شود.

مثال (۸-۶)

فرض کنید $V = \mathbb{C}^{M \times N}$ با ضرب داخلی استاندارد و عملگر خطی T در آن به این صورت تعریف شود که به ازای هر ماتریس دلخواه $\forall A \in V$ داشته باشیم $TA \triangleq MA$ به قسمی که $M_{M \times M}$ یک ماتریس مربع مشخص باشد. در این صورت برای تعریف الحاقی آن با توجه به تعریف استاندارد ضرب داخلی می توان نوشت

$$(TA, B) = (MA, B) = \text{tr}(B^* MA) = \text{tr}((M^* B)^* A) = (A, M^* B) = (A, T^* B)$$

در نتیجه عملگر الحاقی به صورت $\forall A \in V \Rightarrow T^* A = M^* A$ مشخص می شود.

قضیه (۶-۶) اگر مجموعه ارتونرمال $\mathcal{B} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle$ پایه ای برای فضای برداری V بوده و T یک عملگر خطی در آن باشد در این صورت اگر $A = [T]_{\mathcal{B}}$ یعنی نمایش ماتریسی این عملگر نسبت به پایه $\mathcal{B}$ باشد در این صورت $[T^*]_{\mathcal{B}} = A^*$ یعنی نمایش ماتریسی T^* نسبت به پایه $\mathcal{B}$ برابر با مقلوب هرمیتی ماتریس A است.

اثبات: فرض کنید $B = [T^*]_{\mathcal{B}}$ باشد در این صورت با توجه به رابطه (۶-۱۷) می توان نوشت $b_{ij} = (T^* \alpha_j, \alpha_i)$ در نتیجه

$$b_{ij} = (T^* \alpha_j, \alpha_i) = (\alpha_j, T \alpha_i) = \overline{(T \alpha_i, \alpha_j)} = \bar{a}_{ji}$$

که به آن معنی است که ماتریس $B = A^*$ می‌باشد.

۶-۳-۲ عملگر خود الحاقی

اگر V فضای برداری و T یک عملگر خطی در آن باشد به قسمی که $T = T^*$ یعنی با الحاقی خودش برابر باشد در این صورت آن را یک عملگر خودالحاقی گویند؛ با توجه به قضیه قبل (۶-۶) بدیهی است که نمایش ماتریسی یک عملگر خود الحاقی نسبت به یک پایه ارتونرمال برابر یک ماتریس هرمیتی $A = A^*$ خواهد شد. همچنین می‌توان گفت عملگر خود الحاقی المثنی و یا تعمیم عملگر تصویر عمودی در فضای اقلیدسی به یک فضای برداری دلخواه است و می‌توان ثابت کرد که در حالت کلی هر عملگر تصویر عمودی، خود الحاقی است.

قضیه (۷-۶) اگر V فضای برداری بر روی میدان $\mathbb{C}$ و $T = T^*$ یک عملگر خود الحاقی در آن باشد در این صورت اولاً مقادیر ویژه آن همگی حقیقی بوده و ثانیاً بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه متمایزش بر هم عمود هستند.

اثبات: فرض کنید $c \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه این عملگر و $\alpha \in V$ بردار ویژه نظیرش باشد در این صورت $T\alpha = c\alpha$ و می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} (T\alpha, \alpha) &= (c\alpha, \alpha) = c(\alpha, \alpha) = c\|\alpha\|^2 \\ (T\alpha, \alpha) &= (\alpha, T\alpha) = (\alpha, c\alpha) = \bar{c}(\alpha, \alpha) = \bar{c}\|\alpha\|^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (c - \bar{c})\|\alpha\|^2 = 0$$

از طرفی با توجه به اینکه $\alpha \neq \vec{0}$ بردار ویژه مخالف صفر است در نتیجه $\|\alpha\| \neq 0$ طول آن نیز مخالف صفر بوده و لذا بایستی $c = \bar{c}$ باشد یعنی $c \in \mathbb{R}$ بنابراین مقدار ویژه یک عملگر خود الحاقی لزوماً حقیقی است. همچنین اگر $d \neq c$ یک مقدار ویژه دیگر عملگر T بوده و $\beta \in V$ بردار ویژه نظیرش باشد در این صورت $T\beta = d\beta$ و می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} (T\alpha, \beta) &= (c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta) \\ (T\alpha, \beta) &= (\alpha, T\beta) = (\alpha, d\beta) = \bar{d}(\alpha, \beta) = d(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (c - d)(\alpha, \beta) = 0$$

از طرفی با توجه به اینکه $d \neq c$ مقادیر ویژه متمایز هستند در نتیجه لزوماً بایستی $(\alpha, \beta) = 0$ باشد که به معنای تعامد بردارهای ویژه متمایز است.

نتیجه اینکه اگر ماتریس $A = A^*$ هرمیتی باشد در این صورت کلیه مقادیر ویژه آن حقیقی بوده و بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه متمایزش بر هم عمودند همچنین اگر ماتریس حقیقی $A = A^T$ متقارن باشد در این صورت کلیه مقادیر ویژه آن حقیقی بوده و بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه متمایزش بر هم عمودند.

۶-۳-۳ عملگر یکانی

عملگر یکانی المثنی و یا تعمیم عملگر دوران در فضای اقلیدسی به یک فضای برداری دلخواه است به قسمی که زاویه بین دو بردار و همچنین طول یک بردار را تغییر نمی دهد؛ اگر V فضای برداری با ضرب داخلی باشد عملگر خطی U در این فضا را یکانی گویند اگر به ازای هر دو بردار دلخواه $x, y \in V$

$$\forall x, y \in V \quad \left. \begin{aligned} (Ux, Uy) &= (x, y) \\ \|Ux\| &= \|x\| \end{aligned} \right\} \quad (۴۱-۶)$$

واضح است که عملگر یکانی غیرمنفرد است چراکه اگر $Ux = \vec{0}$ باشد خواهیم داشت $\|Ux\| = 0$ و به تبع $\|x\| = 0$ که نتیجه می شود $x = \vec{0}$ در نتیجه معکوس پذیر است و همچنین معکوس آن U^{-1} نیز یک عملگر یکانی است چراکه

$$\left. \begin{aligned} Ux = y &\Rightarrow x = U^{-1}y \\ \|U^{-1}y\| &= \|x\| = \|Ux\| = \|y\| \end{aligned} \right\}$$

همچنین اگر U_1, U_2 دو عملگر یکانی باشند حاصلضرب آنها $(U_1 U_2)$ نیز یک عملگر یکانی است چراکه

$$\|(U_1 U_2)x\| = \|U_1(U_2x)\| = \|U_2x\| = \|x\|$$

بنابراین مجموعه عملگرهای یکانی تشکیل یک گروه می دهند.

قضیه [۸-۶] شرط لازم و کافی برای اینکه عملگر خطی U یکانی باشد آن است که

$$U^*U = UU^* = I \text{ اگر بیان دیگر}$$

اثبات: برای اثبات شرط کافی این قضیه فرض کنید عملگر U یکانی باشد لذا به ازای هر دو بردار دلخواه $\forall x, y \in V$ می توان نوشت

$$(Ux, y) = (Ux, UU^{-1}y) = (x, U^{-1}y) = (x, U^*y)$$

که نتیجه می شود $U^* = U^{-1}$ برای اثبات طرف دیگر این قضیه یعنی شرط لازم فرض کنید $U^*U = I$ باشد در نتیجه می توان نوشت

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, Iy) = (x, y)$$

که نتیجه می شود عملگر U یکانی است. برای اثبات شرط کافی این قضیه فرض کنید عملگر U یکانی باشد لذا به ازای هر دو بردار دلخواه $\forall x, y \in V$ می توان نوشت

$$(Ux, y) = (Ux, UU^{-1}y) = (x, U^{-1}y) = (x, U^*y)$$

که نتیجه می شود $U^* = U^{-1}$ برای اثبات طرف دیگر این قضیه یعنی شرط لازم فرض کنید $U^*U = I$ باشد در نتیجه می توان نوشت

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, Iy) = (x, y)$$

که نتیجه می شود عملگر U یکانی است. در نتیجه واضح است که نمایش ماتریسی هر عملگر یکانی مانند U نسبت به یک پایه ارتونرمال برابر یک ماتریس یکانی خواهد بود

$$A^*A = AA^* = I \text{ یعنی}$$

مثال [۹-۶]

فرض کنید $V = \mathbb{C}^N$ با ضرب داخلی استاندارد و عملگر یکانی U در آن به این صورت تعریف شود که به ازای هر بردار دلخواه $\forall x \in V$ داشته باشیم $Ux = Ax$ در این صورت با توجه به تعریف ضرب داخلی می توان نوشت

$$(Ux, Uy) = (Ax, Ay) = (Ay)^*(Ax) = y^*A^*Ax = y^*x$$

بنابراین برای ماتریس مربع $A_{N \times N}$ بایستی $A^*A = AA^* = I$ باشد یعنی یک ماتریس یکانی است و اندازه دترمینان آن برابر $|det A| = 1$ یعنی مقدار دترمینان در صفحه مختلط بر روی دایره واحد قرار دارد نمایش اندیسی روابط اخیر عبارت است از

$$\sum_{m=1}^N a_{im} \bar{a}_{jm} = \sum_{m=1}^N \bar{a}_{mi} a_{mj} = \delta_{ij}$$

یعنی سطرها و ستونهای یک ماتریس یکانی تشکیل یک مجموعه ارتونرمال می‌دهند همچنین ماتریس یکانی با درایه‌های حقیقی را یک ماتریس متعامد گویند که برای آن رابطه به صورت $A^T A = AA^T = I$ برقرار خواهد بود در این حالت قدر مطلق دترمینان برابر واحد است و $det A = \pm 1$

مثال (۶-۱)

فرض کنید بخواهیم شکل کلی ماتریسهای $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یکانی را به دست آوریم در این صورت داریم

$$A^* = A^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

با اعمال شرط $|ad - bc| = 1$ به صورت $ad - bc = e^{i\alpha}$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$ خواهیم داشت

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b}e^{i\alpha} & \bar{a}e^{i\alpha} \end{bmatrix} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad a, b \in \mathbb{C}$$

همچنین فرض کنید بخواهیم شکل کلی ماتریسهای $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ متعامد را به دست آوریم در این صورت داریم

$$A^T = A^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

با اعمال شرط $ad - bc = \pm 1$ به دو شکل کلی زیر خواهیم رسید

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \quad a^2 + b^2 = 1$$

قضیه [۹-۶] اگر مجموعه بردارهای $B = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle$ و $B' = \langle \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_N \rangle$ دو پایه ارتونرمال برای فضای برداری V باشند در این صورت عملگر خطی U منحصر به فرد که توسط رابطه $U\alpha_i = \alpha'_i$ تعریف می‌شود یک عملگر یکانی است

اثبات: برای درک بهتر تعبیر هندسی این قضیه در فضای اقلیدسی همان دوران مختصات دکارتی به دکارتی است که توسط یک ماتریس متعامد صورت می‌گیرد. در حالت کلی داریم

$$(U\alpha_i, U\alpha_j) = (\alpha'_i, \alpha'_j) = \delta_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$$

لذا واضح است که یک عملگر یکانی است از طرفی اگر P ماتریس ارتباط بین بردارهای این دو پایه باشد می‌توان نوشت

$$\alpha'_i = \sum_{j=1}^N p_{ji} \alpha_j = U\alpha_i$$

که نتیجه می‌شود این ماتریس برابر $P = [U]_B$ یعنی نمایش ماتریسی عملگر U نسبت به پایه B است و لذا یک ماتریس یکانی است $P^*P = PP^* = I$ و بنابراین اگر T یک عملگر خطی دلخواه در فضای برداری V باشد و $[T]_B = A$ و $[T]_{B'} = B$ در این صورت می‌توان نوشت $B = P^{-1}AP = P^*AP$ و گوئیم ماتریسهای A, B به صورت یکانی با یکدیگر متشابه^۱ هستند در فضای حقیقی رابطه به صورت $B = P^TAP$ در می‌آید که در این صورت گوئیم ماتریسهای A, B متعامداً با یکدیگر متشابه^۲ هستند.

^۱ Unitarily Similar

^۲ Orthogonally Similar

قضیه (۱۰-۶) اولاً اینکه زیرفضای W از فضای برداری V تحت عملگر خطی T نامتغیر است اگر به ازای هر $\forall x \in W$ داشته باشیم $Tx \in W$ ثانیاً اگر زیرفضای W تحت عملگر T نامتغیر باشد در این صورت $W^\perp$ تحت T^* نامتغیر است.

اثبات: با توجه به اینکه زیرفضای W تحت عملگر T نامتغیر است واضح است که به ازای هر $\forall x \in W$ و $\forall y \in W^\perp$ داریم $(Tx, y) = (x, T^*y) = 0$ بنابراین $T^*y \in W^\perp$ است یعنی $W^\perp$ تحت T^* نامتغیر است.

قضیه (۱۱-۶) اگر V فضای برداری متناهی البعد $\dim(V) = N$ و $T = T^*$ یک عملگر خود الحاقی در آن باشد در این صورت پایه ارتونرمالی برای V می توان یافت به قسمی که بردارهایش بردارهای ویژه T باشند.

اثبات: به طریق استقراء بر روی بُعد فضا؛ یعنی فرض می شود این قضیه برای فضا یا زیرفضای $N-1$ بُعدی صادق است. اگر $\alpha \in V$ بردار ویژه عملگر T باشد واضح است که زیرفضای با بُعد واحد که توسط بردار α یکّه $\alpha_1 \triangleq \alpha / \|\alpha\|$ گسترش می یابد $W = \text{Span}\{\alpha_1\}$ تحت عملگر T نامتغیر است در نتیجه $W^\perp$ با بُعد $\dim(W^\perp) = N-1$ تحت $T = T^*$ نامتغیر است و طبق فرض استقراء پایه ارتونرمال $\langle \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N \rangle$ برای $W^\perp$ وجود دارد به قسمی که بردارهایش بردارهای ویژه T باشند از طرفی می دانیم که $W \oplus W^\perp = V$ بنابراین مجموعه $B = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle$ پایه ارتونرمالی برای فضای V است به قسمی که بردارهایش بردارهای ویژه T هستند و لذا نمایش ماتریسی آن نسبت به این پایه عبارت است از

$$[T]_B = \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_N \end{bmatrix}$$

به قسمی که c_i ها که همگی حقیقی هستند مقادیر ویژه این عملگر خطی T هستند که ممکن است تکراری باشند. نتیجه اینکه اگر ماتریس $A^* = A$ هرمیتی باشد در این صورت $P^*AP = \Lambda$ یعنی به صورت یکانی متشابه است با Λ که یک ماتریس قطری حقیقی است و ستونهای ماتریس P بردارهای ویژه یکّه شده ماتریس A هستند و

$P^T P = I$ همچنین اگر ماتریس حقیقی $A^T = A$ متقارن باشد در این صورت $P^T A P = A$ یعنی به صورت متعامد و یا اصطلاحاً متعامداً متشابه است با A که یک ماتریس قطری حقیقی است و نیز ستونهای ماتریس P بردارهای ویژه یگانه شده ماتریس A هستند و $P^T P = I$ به عنوان مثال موارد زیر می تواند مورد بررسی قرار گیرد.

مثال (۶-۱۱)

ماتریس هرمیتی $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه آن منجر به معادله مشخصه $\varphi(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2$ شده که دارای ریشه های زیر است و متعاقباً بردارهای ویژه یگانه نظیر

$$\lambda_1 = 1, p_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \lambda_2 = \sqrt{2}, p_2 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1+i \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} \quad \lambda_3 = -\sqrt{2}, p_3 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -1-i \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

در این صورت داریم $P^* A P = A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ به قسمی که

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1+i & -1-i \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad P^* = P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1-i & 0 & \sqrt{2} \\ -1+i & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

مثال (۶-۱۲)

ماتریس متقارن حقیقی $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه آن منجر به معادله مشخصه $\varphi(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$ شده که دارای ریشه های زیر است و متعاقباً بردارهای ویژه یگانه نظیر

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{p}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \lambda_2 = 1, \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \lambda_3 = -1, \mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

در این صورت داریم $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ به قسمی که

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}^* = \mathbf{P}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

قضیه (۶-۱۲) هر ماتریس مربع به صورت یکانی متشابه است با یک ماتریس بالامثلثی^۱ به بیان دیگر اگر $\mathbf{A}_{N \times N}$ یک ماتریس مربع باشد در این صورت ماتریس یکانی $\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{I}$ را می‌توان به گونه‌ای یافت که $\mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{T}$ که $\mathbf{T}$ یک ماتریس بالامثلثی باشد.

اثبات: به طریق استقراء بر روی بُعد ماتریس، یعنی فرض می‌کنیم این قضیه برای ماتریس مربعی $\mathbf{B}_{(N-1) \times (N-1)}$ صادق است سپس آن را برای ماتریس $\mathbf{A}_{N \times N}$ اثبات می‌کنیم. فرض کنید $\alpha \in \mathbb{C}^N$ یک بردار ویژه نظیر مقدار ویژه λ برای ماتریس $\mathbf{A}$ باشد ضمن تعریف بردار یکه $\mathbf{p}_1 \triangleq \alpha / \|\alpha\|$ می‌توان ماتریس یکانی $\mathbf{P} = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N \rangle$ را تشکیل داد به قسمی که $\mathbf{p}_1$ ستون اول آن بوده و بقیه ستونها دلخواه صرفاً متعامد و یکه باشند طبق قضیه (؟؟) ستون اول ماتریس $\mathbf{P}^* \mathbf{A} \mathbf{P}$ برابر $\lambda \mathbf{e}_1$ یعنی λ برابر ستون اول ماتریس همانی خواهد شد و لذا می‌توان نوشت

$$\mathbf{P}^* \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{C}_{1 \times (N-1)} \\ \mathbf{0}_{(N-1) \times 1} & \mathbf{B}_{(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix}$$

به قسمی که $\mathbf{0}_{(N-1) \times 1}$ یک بردار ستونی با عدد صفر بوده و $\mathbf{C}_{1 \times (N-1)}$ یک بردار سطری و $\mathbf{B}_{(N-1) \times (N-1)}$ یک ماتریس مربع دلخواه هستند که با توجه به فرض استقرا

^۱ Schur Theorem

برای این ماتریس مربعی ماتریس یکانی $Q^*Q = I$ وجود دارد به قسمی که $Q^*BQ = T$ بالامثلشی به این ترتیب ماتریس $S_{N \times N}$ با تعریف زیر یکانی است

$$S_{N \times N} = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس $U = PS$ یکانی است و داریم

$$U^*AU = (PS)^*A(PS) = S^*P^*APS = S^*DS$$

و می توان نوشت

$$U^*AU = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & CQ \\ 0 & Q^*BQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & CQ \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

که یک ماتریس بالامثلشی است. برای درک بیشتر از روند اثبات این قضیه توجه خواننده را به مثال زیر جلب می کنیم.

مثال (۶-۱۳)

فرض کنید بخواهیم برای ماتریس $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس یکانی U را به گونه ای تشکیل دهیم که U^*AU برابر یک ماتریس بالامثلشی شود. با توجه به اینکه دترمینان این ماتریس برابر صفر است لذا دارای یک مقدار ویژه $\lambda = 0$ است و بردار ویژه نظیر آن عبارت است از $\alpha^T = \langle 1 \ 2 \ 2 \rangle$ با یگه کردن و قرار دادن آن در ستون اول ماتریس P و نوشتن دو بردار یگه دلخواه دیگر صرفاً به صورت متعامد در ستونهای دیگر خواهیم داشت

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس فوق یکانی بوده و داریم

$$P^*AP = D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

حال بایستی برای ماتریس $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ یکانی تشکیل دهیم با توجه به اینکه این ماتریس دارای یک مقدار ویژه $\lambda = 3$ است و بردار ویژه نظیر آن عبارت است از $\beta^T = \langle 1 \quad -1 \rangle$ با یکّه کردن و قرار دادن این بردار در ستون اول ماتریس Q و نوشتن ستون دیگر به صورت یکّه و متعامد خواهیم داشت

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس $U = PS$ یکانی است و داریم

$$U = PS = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -4 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

و در نهایت خواهیم داشت

$$U^*AU = \begin{bmatrix} 0 & 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

که یک ماتریس بالامثلثی است.

مثال (۶-۱۳)

با استفاده از قضیه قبل می‌توان به سادگی اثبات کرد که هر ماتریس هرمیتی $A^* = A$ به صورت یکانی متشابه است با یک ماتریس قطری حقیقی چراکه با توجه به این قضیه می‌دانیم که A به صورت یکانی متشابه است با یک ماتریس بالامثلثی $U^*AU = T$ حال اگر از طرفین این رابطه ترانهاده مزدوج بگیریم داریم $U^*A^*U = T^*$ که با توجه به هرمیتی بودن ماتریس A نتیجه می‌شود ماتریس $T = T^*$ یعنی بایستی ماتریس T بالامثلثی و هرمیتی باشد که نتیجه می‌شود لزوماً یک ماتریس قطری حقیقی است. در واقع در وجود اثبات اخیر اینکه مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیتی حقیقی هستند

و اینکه بردارهای ویژه متمایزش بر هم عمودند و هم اینکه قابل قطری شدن است نهفته است.

۴-۶ ماتریسهای ساده و نرمال

۱-۴-۶ ماتریسهای ساده

ماتریسهائی که قابل قطری شدن باشند و یا بردارهای ویژه آنها کامل باشد را طبقه ماتریسهای ساده می‌نامند به بیان دیگر هر ماتریسی که متشابه با یک ماتریس قطری باشد ساده است. بنابراین می‌توان چنین گفت که ماتریس A ساده است اگر ماتریس معکوس پذیر P وجود داشته باشد به قسمی که $P^{-1}AP = \Lambda$ که Λ یک ماتریس قطری است.

۲-۴-۶ ماتریسهای نرمال

ماتریسهای نرمال حالت خاصی از طبقه ماتریسهای ساده بوده به قسمی که به صورت یکانی متشابه با یک ماتریس قطری هستند به بیان دیگر ماتریسهای ساده و یا قابل قطری شدن که بردارهای ویژه آنها بر یکدیگر عمود باشد طبقه ماتریسهای نرمال را تشکیل می‌دهند بنابراین می‌توان چنین گفت که ماتریس A نرمال است اگر ماتریس یکانی U وجود داشته باشد به قسمی که $U^*AU = \Lambda$ که Λ یک ماتریس قطری است.

قبل از بیان قضایای مربوط به ماتریسهای نرمال به این لَمّ اشاره می‌شود که اگر ماتریس بالامثلثی T در ضرب با T^* از قاعده جابجایی تبعیت کند $TT^* = T^*T$ در این صورت T یک ماتریس قطری است که اثبات آن بسیار ساده بوده و به عهده خواننده محترم قرار داده می‌شود.

قضیه (۱۳-۶) شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ نرمال باشد آن است که داشته باشیم $AA^* = A^*A$

اثبات: فرض کنید ماتریس A نرمال است یعنی ماتریس یکانی U وجود دارد به قسمی که $U^*AU = A$ یک ماتریس قطری است در نتیجه $A = UAU^*$ و نتیجه می‌شود

$$\left. \begin{aligned} AA^* &= UAU^*UA^*U^* = UAA^*U^* \\ A^*A &= UA^*U^*UAU^* = UA^*AU^* \end{aligned} \right\}$$

چون A یک ماتریس قطری است لذا $A^*A = AA^*$ در نتیجه $AA^* = A^*A$ خواهد بود؛ از طرف دیگر اگر این رابطه برقرار باشد با توجه به قضیه (۶-۱۲) ماتریس A به صورت یکانی $U^*AU = T$ متشابه با یک ماتریس بالامثلثی است و خواهیم داشت $A = UTU^*$ به قسمی که یک ماتریس بالامثلثی است در نتیجه با فرض $AA^* = A^*A$ خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} AA^* &= UTU^*UT^*U^* = UTT^*U^* \\ A^*A &= UT^*U^*UTU^* = UT^*TU^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow TT^* = T^*T$$

و طبق لَم قبل نتیجه می‌شود که T یک ماتریس قطری است و بنابراین ماتریس A نرمال است. بنابراین کلیه ماتریسهای معروف مانند ماتریسهای هرمیتی، پادهرمیتی، متقارن حقیقی، پادمتقارن حقیقی، یکانی و متعامد حقیقی، نرمال هستند یعنی بردارهای ویژه آنها کامل بوده و بر هم عمودند.

مثال (۶-۱۵)

ماتریس $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$ متقارن غیر حقیقی با دو مقدار ویژه $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ و با رتبه واحد لذا غیر ساده است

$$\left. \begin{aligned} AA^* &= \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{bmatrix} \\ A^*A &= \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AA^* \neq A^*A$$

ماتریس $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ متقارن غیر حقیقی با دو مقدار ویژه متمایز لذا ساده بوده و با توجه به

$$\left. \begin{aligned} AA^* &= \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ A^*A &= \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AA^* = A^*A$$

نتیجه می‌شود که نرمال است که ماتریس بردارهای ویژه عبارت است از

$$P^*AP = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i+1 & 0 \\ 0 & i-1 \end{bmatrix}$$

ماتریس $A = \begin{bmatrix} 6 & 2i \\ 2i & 1 \end{bmatrix}$ متقارن غیر حقیقی با دو مقدار ویژه متمایز لذا ساده بوده و با توجه به

$$\left. \begin{aligned} AA^* &= \begin{bmatrix} 6 & 2i \\ 2i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2i \\ -2i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -10i \\ 10i & 5 \end{bmatrix} \\ A^*A &= \begin{bmatrix} 6 & -2i \\ -2i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2i \\ 2i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 10i \\ -10i & 5 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AA^* \neq A^*A$$

نتیجه می‌شود که نرمال نیست و ماتریس بردارهای ویژه عبارت است از

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3i} \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -2 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2i \\ 2i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & -2i \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

قضیه (۱۳-۶) اگر ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ نرمال باشد و کلیه مقادیر ویژه آن حقیقی باشند در این صورت A یک ماتریس هرمیتی است.

اثبات: فرض کنید ماتریس A نرمال است یعنی ماتریس یکانی U وجود دارد به قسمی که $U^*AU = A$ که یک ماتریس قطری است و یا می‌توان نوشت $A = UAU^*$ حال

با توجه به اینکه مقادیر ویژه حقیقی هستند یعنی $A = A^*$ یک ماتریس قطری حقیقی است که نتیجه می شود $A^* = UA^*U^* = UAU^* = A$ یعنی هرمیتی است.

قضیه (۱۵-۶) می دانیم که هر ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ با درایه های مختلط را می توان منحصر به فرد $A = H_1 + iH_2$ به دو صورت مجموع دو ماتریس هرمیتی $H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ و پادهرمیتی $iH_2 = \frac{1}{2}(A - A^*)$ نوشت که البته H_1, H_2 هر دو هرمیتی هستند؛ شرط لازم و کافی برای اینکه این ماتریس مربعی مختلط، نرمال باشد آن است که $H_1H_2 = H_2H_1$ یعنی جزء هرمیتی و جزء پادهرمیتی آن در ضرب با یکدیگر از قاعده جابجائی تبعیت کنند.

اثبات: فرض کنید ماتریس $A = H_1 + iH_2$ و داشته باشیم $H_1H_2 = H_2H_1$ در این صورت طبق قضیه (۵-۱۳) میتوان نوشت

$$\left. \begin{aligned} AA^* &= (H_1 + iH_2)(H_1 - iH_2) = (H_1)^2 - (H_2)^2 \\ A^*A &= (H_1 - iH_2)(H_1 + iH_2) = (H_1)^2 - (H_2)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AA^* = A^*A$$

در نتیجه ماتریس A نرمال است. برای اثبات طرف دوم قضیه فرض می کنیم ماتریس A نرمال است یعنی ماتریس یکانی U وجود دارد به قسمی که $U^*AU = A$ که یک ماتریس قطری مختلط است لذا می توان آن را به صورت $A = A_1 + iA_2$ نوشت به این ترتیب داریم

$$\left. \begin{aligned} A &= UAU^* = U(A_1 + iA_2)U^* = UA_1U^* + iUA_2U^* \\ A &= H_1 + iH_2 \\ H_1 &= UA_1U^* = (A_1)^* \\ H_2 &= UA_2U^* = (A_2)^* \end{aligned} \right\}$$

طبق قضیه (۵-۱۴) قبل واضح است که A_1, A_2 حقیقی به ترتیب مقادیر ویژه ماتریسهای لزوماً هرمیتی H_1, H_2 هستند و واضح است که در ضرب با یکدیگر از قاعده جابجائی تبعیت می کنند لذا با تعریف جزء هرمیتی $A_s = H_1$ و جزء پادهرمیتی $A_a = iH_2$ نتیجه حاصل می شود و همانطور که مشاهده میشود هر دو جزء بردارهای ویژه یکسانی دارند.

از طرفی می‌دانیم که هر ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ با درایه‌های حقیقی را می‌توان منحصر به فرد $A = A_s + A_a$ به دو صورت مجموع دو ماتریس متقارن $A_s = \frac{1}{2}(A + A^T)$ و پادمتقارن $A_a = \frac{1}{2}(A - A^T)$ نوشت که با تعریف ماتریسهای هرمیتی $H_1 = A_s$ و $H_2 = -iA_a$ مشاهده می‌شود که حالت خاصی از قضیه قبل است در نتیجه شرط لازم و کافی برای اینکه یک ماتریس حقیقی مربعی، نرمال باشد آن است که داشته باشیم $A_s A_a = A_a A_s$ یعنی دو جزء متقارن و پادمتقارن آن در ضرب با یکدیگر از قاعدهٔ جابجائی تبعیت کنند.

قضیه (۱۶-۱۷) ماتریس حقیقی $A_{2 \times 2}$ نرمال است اگر و فقط اگر یا متقارن باشد، یا ضربی از یک ماتریس متعامد باشد.

اثبات: در حالت کلی یک ماتریس $A_{2 \times 2}$ را می‌توان به صورت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ نوشت بر اساس قضیه (۵-۱۳) با اعمال شرط $AA^* = A^*A$ به صورت زیر

$$\left. \begin{aligned} AA^* &= AA^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix} \\ A^*A &= A^T A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b = c \\ b = -c, a = d \end{cases}$$

نتیجه می‌شود که یا بایستی $b = c$ یعنی ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ باید متقارن باشد و یا اینکه $b = -c, a = d$ یعنی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ باید ضربی از یک ماتریس متعامد باشد.

۵-۶ تمرین‌ها

۱. ثابت کنید مقادیر ویژه یک ماتریس پادمتقارن حقیقی، موهومی محض بوده و بردارهای ویژه متمایزش بر هم عمودند
۲. فرض کنید $V = f(x)$ فضای کلیه توابع پیوسته در بازه $x \in (a, b)$ با ضرب داخلی استاندارد با شرط $f(a) = f(b) = 0$ باشد حال اگر عملگر خطی T در این فضا را توسط رابطه $Tf = df/dx$ تعریف کنیم مطلوب است ارائه رابطه‌ای برای محاسبه الحاقی آن یعنی T^*f
۳. مجموعه بردارهای $B = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle$ در یک فضای برداری را در نظر بگیرید با تعریف $g_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$ یک ماتریس مربع شکل می‌گیرد ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه مجموعه B مستقل خطی باشد آن است که $\det(g_{ij}) \neq 0$ و همچنین نشان دهید اگر یکی از کهادهای اصلی ماتریس (g_{ij}) برابر صفر شود در این صورت کل مجموعه B وابسته است و متعاقباً $\det(g_{ij})$ برابر صفر خواهد شد
۴. فرض کنید $V = \mathbb{C}^N$ با ضرب داخلی استاندارد و T یک عملگر خطی در آن باشد به قسمی که اگر $[T]_B = A$ نمایش ماتریسی آن نسبت به پایه استاندارد برابر ماتریس A باشد در این صورت داشته باشیم $a_{mn} = i^{m+n}$ به قسمی که $i^2 = -1$ است مطلوب است تشکیل پایه‌ای برای فضای تهی عملگر T^k
۵. ثابت کنید اولاً عملگر تصویر عمودی خودالحاقی است ثانیاً نشان دهید حاصلضرب دو عملگر خودالحاقی، خودالحاقی است اگر و فقط اگر این دو عملگر در ضرب با یکدیگر از ویژگی جابجائی تبعیت کنند
۶. فرض کنید $V = f(x)$ فضای کلیه چندجمله‌ای‌های درجه دو در بازه $x \in (0, 1)$ با ضرب داخلی استاندارد باشد حال اگر t یک عدد حقیقی بوده در این صورت

چندجمله‌ای g_t در این فضا را به گونه‌ای به دست آورید که به ازای هر تابع دلخواه $f_{(x)}$ در این فضا داشته باشیم $(f, g_t) = f_{(t)}$

۷. فرض کنید $V = f_{(x)}$ فضای کلیه چندجمله‌ای‌های درجه دو در بازه $x \in (0,1)$ با ضرب داخلی استاندارد و $W = \text{Span}\{x + x^2\}$ باشد مطلوب است بهترین تقریب برای توابع $f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^3$ در دو زیرفضای $W, W^\perp$

۸. اگر $V = f_{(x)}$ فضای کلیه چندجمله‌ای‌های درجه دو در بازه $x \in (0,2)$ با ضرب داخلی استاندارد و فانکشنال یا تبدیل خطی $T: V \rightarrow \mathbb{R}$ توسط رابطه $Tf = f_{(1)}$ تعریف شده باشد در این صورت تابع $g_{(x)} \in V$ را چنان به دست آورید که داشته باشیم $Tf = (f, g)$

۹. اگر $V = \text{Span}\{\sin x, \cos x\}$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^\pi f g dx$ و عملگر مشتق‌گیری باشد در این صورت T^* را تعیین کرده و نشان دهید پادهرمیتی است

۱۰. اگر $V = \text{Span}\{1, \sin x, \cos x\}$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^\pi f g dx$ و عملگر خطی T در آن توسط رابطه $Tf = f'' + 2f$ تعریف شده باشد اولاً مقادیر ویژه آن را تعیین کرده و نشان دهید وارون‌پذیر است و داریم $2T^{-1} = 3I - T$ ثانیاً الحاقی آن یعنی T^* را تعیین کرده و به خصوص نشان دهید حاصل عبارت زیر، تابع ثابتی است $(\pi^2 - 16)T^*(1) + 4\pi T^*(\sin x)$ و آن را به دست آورید

۱۱. فرض کنید $V = f_{(x)} \in C^2(0,1)$ فضای کلیه توابع دوبار مشتق‌پذیر با ضرب داخلی استاندارد در بازه $x \in (0,1)$ با شرط $f_{(0)} = f_{(1)} = 0$ و تبدیلی باشد که توسط رابطه $Tf = f'' + \int_0^x f_{(t)} dt$ تعریف شده است اولاً ثابت کنید T یک

عملگر خطی غیرمنفرد بوده و فاقد مقدار ویژه است ثانیاً رابطه‌ای برای الحاقی آن یعنی T^* در صورت وجود به دست آورید

۱۲. فرض کنید $V = C^2(0,1)$ با شرط $f(1) = 0$ با ضرب داخلی استاندارد و عملگر خطی T توسط رابطه $Tf = (x^2 f')'$ تعریف شده باشد اولاً ثابت کنید T یک عملگر خودالحاقی است و ثانیاً مقادیر ویژه و توابع ویژه آن را تعیین کنید

۱۳. اگر $V = \mathbb{C}^{N \times N}$ با ضرب داخلی استاندارد و W زیرفضای ماتریس‌های قطری باشد $W^\perp$ را تعیین کرده و بُعد آنرا به دست آورید

۱۴. اگر $V = \mathbb{R}^4$ ، $W \triangleq \{ \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle^T \mid x_1 + x_2 + x_3 = x_4 = 0 \}$ ، زیرفضای آن بوده و عملگر خطی T_V در V توسط رابطه زیر تعریف شده باشد

$$T \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \end{Bmatrix}$$

اولاً نشان دهید زیرفضای W تحت عملگر T نامغیر است. ثانیاً پایه‌ای برای V به گونه‌ای تشکیل دهید که دو بردار اولش پایه‌ای برای W باشد و سپس نمایش ماتریسی عملگر T_V, T_W را نسبت به این پایه‌ها نوشته و چندجمله‌ای می‌نیمال آنها را به دست آورید

۱۵. اگر تبدیل U یکانی باشد (ضرب داخلی را حفظ کند) با استفاده از اصول فضای برداری با ضرب داخلی و اثبات روابط زیر نشان دهید U یک عملگر خطی است

$$\|U(x+y) - (Ux + Uy)\| = \|U(cx) - c(Ux)\| = 0$$

۱۶. اگر E عملگر تصویر عمودی از فضای برداری $V = \mathbb{R}^3$ به زیر فضای $W \triangleq \text{Span}\{\langle 1,1,-1 \rangle^T, \langle 2,0,-1 \rangle^T\}$ باشد اولاً نمایش ماتریسی E را نسبت به پایه استاندارد نوشته و ثانیاً نشان دهید عملگر $\sin\left(\frac{\pi}{2}T\right)$ نیز عملگر تصویر عمودی از V بر W است

۱۷. فرض کنید $V = \mathbb{R}^{2 \times 3}$ با ضرب داخلی $(A, B) = 0.5 \text{tr}(AB^T)$ و W زیرفضای آن بوده به قسمی که به ازای هر ماتریس $A \in W$ داشته باشیم

$$a_{11} + a_{23} = a_{12} + a_{22} = a_{21} + a_{13} = 0$$

اگر فانگشنال یا تبدیل خطی $T: W \rightarrow \mathbb{R}$ توسط رابطه $TA = a_{11} + a_{12} + a_{13}$ تعریف شده باشد ابتدا پایه ارتونرمالی برای زیر فضای W تشکیل داده و سپس ماتریس $B \in W$ را طوری تعیین کنید که $TA = (A, B)$

۱۸. اگر V فضای برداری با ضرب داخلی و β, γ بردارهای ثابت و مستقلی در آن باشند، اولاً ثابت کنید رابطه $T\alpha \triangleq (\alpha, \beta)\gamma + (\alpha, \gamma)\beta$ مبین یک عملگر خطی خودالحاقی بر فضای V است. ثانیاً اگر فضای V متناهی‌البعد باشد مقادیر و بردارهای ویژه این عملگر T را مشخص کنید

۱۹. اگر V فضای برداری متناهی‌البعد با ضرب داخلی و β, γ بردارهای ثابتی در آن باشند، ثابت کنید رابطه $T\alpha \triangleq (\alpha, \beta)\gamma$ عملگری خطی بر فضای V را تعریف می‌کند سپس رابطه‌ای مشابه برای الحاقی آن یعنی T^* بیان کنید، چنانچه $V = \mathbb{C}^N$ با ضرب داخلی استاندارد $\beta = \langle y_1, y_2, \dots, y_N \rangle$ و $\gamma = \langle x_1, x_2, \dots, x_N \rangle$ باشند نمایش ماتریسی عملگر T را نسبت به پایه استاندارد نوشته، رتبه و مقادیر ویژه آن را تعیین کنید

۲۰. اگر V فضای برداری متناهی‌البعد با ضرب داخلی و W زیرفضائی از آن باشد می‌دانیم که $V = W + W^\perp$ یعنی هر بردار دلخواه $\forall \alpha \in V$ را می‌توان به صورت منحصر به فرد به شکل $\alpha = \beta + \gamma$ نوشت که $\beta \in W$ و $\gamma \in W^\perp$ باشد. حال اگر عملگر خطی U در این فضا را توسط رابطه $U\alpha \triangleq \beta - \gamma$ تعریف کنیم ثابت کنید که اولاً این عملگر هم یکانی است و هم خودالحاقی ثانیاً چنانچه $V = \mathbb{R}^3$ با ضرب داخلی استاندارد و W زیرفضائی باشد که توسط بردار $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

گسترش یافته است نمایش ماتریسی U را نسبت به پایه استاندارد بنویسید، آیا می‌توانید تعبیر هندسی این عملگر خطی را در یک فضای برداری بیان کنید

۲۱. فرض کنید $V = \text{Span}\{1, x\}$ فضای کلیه چندجمله‌ای‌های خطی در بازه $x \in (0,1)$ با ضرب داخلی استاندارد باشد ثابت کنید عملگر U که توسط روابط زیر تعریف شده است یک عملگر یکانی است و مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آن را به دست آورید

$$U(1) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + \sqrt{6}x, \quad U(x) = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}x$$

۲۲. مطلوب است بهترین معادله تابع نمایی به صورت $y = ax^b$ در صفحه xy که از سه نقطه به مختصات $\{1\}, \{2\}, \{e^2\}$ عبور می‌کند

۲۳. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد در این صورت ماتریس متعامد Q و بالامثلثی R را بیابید به قسمی که $A = QR$ باشد سپس بهترین حل x_m دستگاه $Ax = b$ را به ازای $b = \langle 1 \ 1 \ 1 \rangle^T$ به دست آورید

۲۴. ثابت کنید اگر ماتریس بالامثلثی $T_{N \times N}$ در ضرب با الحاقی خودش از قاعده جابجائی تبعیت کند $TT^* = T^*T$ در این صورت یک ماتریس قطری خواهد بود

۲۵. ثابت کنید ماتریس $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ بر میدان اعداد حقیقی با یک

ماتریس بالامثلثی متشابه است سپس ماتریس معکوس پذیر P و بالامثلثی T را بیابید به قسمی که داشته باشیم $P^{-1}AP = T$

۲۶. ثابت کنید برای ماتریس بالامثلثی $T_{4 \times 4}$ که همه درایه‌های غیر صفر آن برابر واحد هستند می‌توان ماتریس معکوس‌پذیر P را طوری یافت که حاصل $P^{-1}TP = B$ به صورت زیر باشد و نشان دهید ماتریس P منحصر به فرد نیست

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۷. اگر $V = \mathbb{R}^3$ با ضرب داخلی استاندارد و U عملگری باشد که هر بردار دلخواه را حول محوری با بردار $\mathbf{n} = \langle n_1 \ n_2 \ n_3 \rangle^T$ به اندازه زاویه θ دوران دهد مطلوب است محاسبه $\mathbf{Q} = [U]_{\mathcal{B}}$ یعنی نمایش ماتریسی U نسبت به پایه استاندارد بر حسب مؤلفه‌های بردار $\mathbf{n}$ و زاویه θ سپس در حالت خاصی که $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 1 \ 1 \ 1 \rangle^T$ باشد ماتریس دوران $\mathbf{Q}$ را به دست آورید

۲۸. ثابت کنید اگر ماتریس حقیقی $A_{N \times N}$ پادمتقارن باشد $A^T = -A$ در این صورت ماتریس $\mathbf{Q} = \exp(A)$ یک ماتریس متعامد است یعنی $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = I$ سپس در حالت خاص $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس $\mathbf{Q} = \exp(A)$ را محاسبه کرده، محور و زاویه دوران را مشخص کنید

۲۹. ثابت کنید اگر ماتریس H هرمیتی باشد $U = (iI - H)(iI + H)^{-1}$ یکانی است سپس نتیجه را برای ماتریس هرمیتی $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix}$ تأیید کنید

۳۰. اگر ماتریس $A_{3 \times 3}$ یکانی بوده و $\det(A) = 1$ باشد در این صورت در ابتدا مقادیر $\det(A^2 + I)$ ، $\text{tr}(A^2 + I)$ را محاسبه کرده و سپس نشان دهید به ازای مقادیر صحیح $m \geq 1$ داریم $(A^2 + I)^m = 2^{m-1}(A^2 + I)$

۳۱. ثابت کنید اگر ماتریس U یکانی بوده و مقدار ویژه -1 نداشته باشد در این صورت $H = i(I - U)(I + U)^{-1}$ هرمیتی است سپس نتیجه را برای یک حالت خاص تأیید کنید

۳۲. ثابت کنید اگر $\text{tr}(A^*A) = 0$ در این صورت کلیه مقادیر ویژه A^*A برابر صفر است

فصل هفتم

معادلات دیفرانسیل خطی

۱-۷ مقدمه

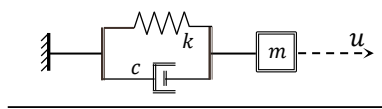
در این فصل به بررسی و نحوه حل دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی مرتبه اول پرداخته می شود. به طور کلی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول شامل N متغیر وابسته $x(t)$ بر حسب یک متغیر مستقل t را می توان به صورت زیر نوشت

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = Ax + F \quad (۱-۷)$$

به قسمی که $A_{N \times N}$ ماتریس ضرایب و $F_{N \times 1}$ مبین تحریک خارجی است لازم به ذکر است که هر معادله دیفرانسیل عادی مرتبه N شامل یک متغیر وابسته را می توان به صورت یک دستگاه معادلات مرتبه یک بر حسب N متغیر وابسته نوشت به عنوان مثال معادله دیفرانسیل حاکم بر تعادل دینامیکی یک سیستم جرم فنر مستهلک کننده مطابق شکل (۱-۷) را بر حسب جابجائی u به عنوان تابعی از زمان t در نظر بگیرید

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t) \quad (۲-۷)$$

به قسمی که m جرم جسم، c ضریب استهلاک و k سختی فنر می باشد



شکل (۷-۱) ارتعاش آزاد یک سیستم جرم، فنر و مستهلک کننده

در این صورت با تغییر متغیر $u = x_1$ و $\dot{u} = x_2$ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم فوق به دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر تبدیل خواهد شد

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{u} = \dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + f(t) \end{cases}$$

که می توان آن را به صورت ماتریسی زیر نوشت

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f(t) \end{Bmatrix} \quad (۷-۳)$$

لازم به ذکر است که مطابق رابطه (۷-۲) همانطور که حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$ نظیر $f(t) = 0$ حل عمومی بوده که شامل دو جواب مستقل است بنابراین حل دستگاه معادلات $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ نظیر $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ حل همگن نامیده شده که شامل دو بردار جواب مستقل است و برای به دست آوردن جواب کامل، بایستی دو شرط ابتدائی اعم از $u, \dot{u}$ یعنی x_1, x_2 در زمان اولیه t_0 مشخص باشد بنابراین با تعمیم این استدلال می توان گفت دستگاه همگن $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ به ازای $\mathbf{A}_{N \times N}$ دارای N بردار جواب مستقل است و برای حل آن بایستی بردار $\mathbf{x}$ در یک زمان ابتدائی t_0 معلوم باشد که به آن شرط ابتدائی گفته می شود.

۲-۷ دستگاه معادلات همگن

۲-۷-۱ ماتریس انتقال حالت

در حالت کلی همانطور که در قبل توضیح داده شد اگر $x \in \mathbb{R}^N$ دستگاه معادلات همگن $\dot{x} = Ax$ دارای N بردار حل مستقل $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ است که اگر آنها را در ستونهای یک ماتریس قرار دهیم

$$\Psi = \langle \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N \rangle \quad (۴-۷)$$

در این صورت ماتریس مربع غیر منفرد $\Psi_{N \times N}$ حاصل شده که آن را یک ماتریس اصلی برای این دستگاه گویند و واضح است که در رابطه $\dot{\Psi} = A\Psi$ صدق می‌کند؛ حال اگر دستگاه معادلات همگن $\dot{x} = Ax$ به همراه شرط ابتدائی $x(t_0)$ در زمان $t = t_0$ معلوم باشد در این صورت ماتریس مربع غیر منفرد $\Phi_{(t, t_0)}$ یک ماتریس انتقال حالت^۱ برای این دستگاه نامیده می‌شود اگر در رابطه $x(t) = \Phi_{(t, t_0)} x(t_0)$ صدق کند و بایستی دارای ویژگی‌های اصلی زیر باشد

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A\Phi \\ \Phi_{(t_0, t_0)} = I \end{cases} \quad (۵-۷)$$

چرا که باید همزمان معادله دیفرانسیل و شرط ابتدائی را ارضاء کند همچنین می‌توان ویژگی‌های دیگری مانند روابط زیر را نیز برای آن اثبات کرد

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_{(t_0, t_0)} = A \\ \Phi_{(t_2, t_0)} = \Phi_{(t_2, t_1)} \Phi_{(t_1, t_0)} \\ \Phi_{(t_2, t_1)} = \Phi_{(t_1, t_2)}^{-1} \\ \Phi_{(t, t_0)} = \Psi_{(t)} \Psi_{(t_0)}^{-1} \end{cases} \quad (۶-۷)$$

که اثبات آنها به عنوان تمرین به عهده خواننده محترم واگذار می‌شود.

مثال (۱-۷)

برای دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر ابتدا ماتریس اصلی و انتقال حالت را به دست آورده و سپس به ازای $t_0 = 0$ و شرط ابتدائی داده شده پاسخ نهائی را به دست آورید

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{t_0=0} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

با ادغام دستگاه معادلات فوق خواهیم داشت

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 = \dot{x}_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 - x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 - x_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

در نتیجه دو جواب مستقل این دستگاه عبارتند از

$$\psi_1 = \begin{Bmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{Bmatrix}, \psi_2 = \begin{Bmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{Bmatrix}$$

و متعاقباً ماتریس اصلی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\Psi_{(t)} = \begin{bmatrix} \sinh t & \cosh t \\ \cosh t & \sinh t \end{bmatrix} \Rightarrow \Psi_{(t_0)} = \begin{bmatrix} \sinh(t_0) & \cosh(t_0) \\ \cosh(t_0) & \sinh(t_0) \end{bmatrix}$$

در نهایت بر اساس رابطه (۶-۷) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \Phi_{(t,t_0)} &= \Psi_{(t)} \Psi_{(t_0)}^{-1} = \begin{bmatrix} \sinh t & \cosh t \\ \cosh t & \sinh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sinh(t_0) & \cosh(t_0) \\ \cosh(t_0) & -\sinh(t_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh(t-t_0) & \sinh(t-t_0) \\ \sinh(t-t_0) & \cosh(t-t_0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

و با توجه به شرط ابتدائی داده شده می‌توان پاسخ نهائی مسئله را به صورت زیر نوشت

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{Bmatrix} = e^{-t} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

مثال (۲-۷)

برای دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر به ازای $t_0 = 1$ و شرط ابتدائی داده شده ماتریسهای اصلی و انتقال حالت و متعاقباً جواب نهائی را به دست آورید

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t^2 \\ -2/t^4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{t_0=1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

مشابه مثال قبل با ادغام دستگاه معادلات فوق خواهیم داشت

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = t^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1/t^4 \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}_1}{t^2} \right) = -\frac{2x_1}{t^4} \Rightarrow t^2 \ddot{x}_1 - 2t\dot{x}_1 + 2x_1 = 0$$

همانطور که مشاهده می‌شود بر روی متغیر x_1 به معادله اویلر منجر شده که دو جواب مستقل آن عبارتند از $x_1 = t$ و $x_1 = t^2$ در نتیجه می‌توان دو جواب مستقل و اصلی دستگاه را به صورت زیر نوشت

$$\psi_1 = \begin{Bmatrix} t \\ 1/t^2 \end{Bmatrix}, \psi_2 = \begin{Bmatrix} t^2 \\ 2/t \end{Bmatrix}$$

و متعاقباً ماتریس اصلی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\Psi_{(t)} = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ 1/t^2 & 2/t \end{bmatrix} \Rightarrow \Psi_{(t_0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

در نهایت بر اساس رابطه (۷-۶) برای ماتریس انتقال حالت خواهیم داشت

$$\Phi_{(t,t_0)} = \Psi_{(t)} \Psi_{(t_0)}^{-1} = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ 1/t^2 & 2/t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t - t^2 & t^2 - t \\ \frac{2}{t^2} - \frac{2}{t} & \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \end{bmatrix}$$

و با توجه به شرط ابتدائی می‌توان پاسخ مسئله را به صورت زیر نوشت

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t - t^2 & t^2 - t \\ \frac{2}{t^2} - \frac{2}{t} & \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t \\ 1/t^2 \end{Bmatrix}$$

مثال (۷-۳)

اگر بخواهیم برای دستگاه معادلات دیفرانسیل همگن $\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t & 1 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ به ازای $t_0 = 0$ ماتریس اصلی و متعاقباً ماتریس انتقال حالت را به دست آوریم می‌توان مشابه مثال قبل با تفکیک معادلات به صورت زیر

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2tx_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2tx_2 - x_1 \end{cases}$$

دریافت که تابع e^{-t^2} یک فاکتور انتگرال برای این معادلات بوده و با ضرب در طرفین آن خواهیم داشت

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(e^{-t^2} x_1) = e^{-t^2} x_2 \\ \frac{d}{dt}(e^{-t^2} x_2) = -e^{-t^2} x_1 \end{array} \right\}$$

که همانطور که مشاهده می‌شود بر روی متغیر $e^{-t^2} x_1$ به معادله مرتبه دوم منجر شده که دو جواب مستقل آن عبارتند از $e^{-t^2} x_1 = \cos t$ و $e^{-t^2} x_1 = \sin t$ در نتیجه می‌توان دو جواب مستقل و اصلی دستگاه را به صورت زیر نوشت

$$\psi_1 = \begin{Bmatrix} e^{t^2} \sin t \\ e^{t^2} \cos t \end{Bmatrix}, \psi_2 = \begin{Bmatrix} e^{t^2} \cos t \\ -e^{t^2} \sin t \end{Bmatrix}$$

و متعاقباً ماتریس اصلی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\Psi_{(t)} = e^{t^2} \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{bmatrix} \Rightarrow \Psi_{(t_0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در نهایت بر اساس رابطه (۶-۷) برای ماتریس انتقال حالت خواهیم داشت

$$\Phi_{(t,t_0)} = \Psi_{(t)} \Psi_{(t_0)}^{-1} = e^{t^2} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

۲-۲-۷ دستگاه با ضرایب ثابت

برای دستگاه معادلات همگن $\dot{x} = Ax$ در حالتی که ماتریس ضرایب A ثابت باشد ماتریس انتقال حالت عبارت است از

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{(t,t_0)} = \exp(A(t-t_0)) = e^{A(t-t_0)} \\ x_{(t)} = \exp(A(t-t_0))x_{(t_0)} \end{array} \right\} \quad (۷-۷)$$

چرا که با نوشتن بسط تیلور تابع ماتریسی فوق داریم

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{(t,t_0)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k (t-t_0)^k \\ \Phi_{(t,t_0)} &= I + A(t-t_0) + \frac{1}{2!} A^2 (t-t_0)^2 + \frac{1}{3!} A^3 (t-t_0)^3 + \dots \end{aligned} \right\}$$

از فصل قبل می‌دانیم که هر عدد به توان ماتریس صفر برابر ماتریس همانی خواهد شد در نتیجه $\Phi_{(t_0,t_0)} = \exp(\mathbf{0}) = I$ از طرفی با مشتق گیری از بسط فوق داریم

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_{(t,t_0)} &= \frac{d}{dt} \Phi_{(t,t_0)} = A + A^2(t-t_0) + \frac{1}{2!} A^3(t-t_0)^2 + \dots \\ \dot{\Phi}_{(t,t_0)} &= A \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k (t-t_0)^k \right) = A \Phi \end{aligned} \right\}$$

بنابراین دو ویژگی اصلی ماتریس انتقال حالت را ارضاء می‌کند و می‌توان ویژگی‌های دیگر را نیز برای آن اثبات کرد.

مثال (۷-۴)

برای دستگاه معادلات دیفرانسیل ارائه شده در مثال ۷-۱ به صورت زیر با شرط ابتدائی داده شده به ازای $t_0 = 0$ ماتریس انتقال حالت و پاسخ نهائی را به دست آورید

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{t_0=0} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

با استفاده از رابطه (۷-۷) به ازای $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ خواهیم داشت

$$\Phi_{(t,t_0)} = e^{A(t-t_0)} = \exp \left(\begin{bmatrix} 0 & (t-t_0) \\ (t-t_0) & 0 \end{bmatrix} \right)$$

با تعریف ماتریس $B = \begin{bmatrix} 0 & (t-t_0) \\ (t-t_0) & 0 \end{bmatrix}$ با مقادیر ویژه $\lambda_{1,2} = \pm(t-t_0)$ به محاسبه تابع ماتریسی فوق به روش چندجمله‌ای خواهیم پرداخت

$$e^B = \alpha_0 I + \alpha_1 B$$

که با جایگذاری مقادیر ویژه به معادلات زیر می‌رسیم

$$\left. \begin{aligned} e^{(t-t_0)} &= \alpha_0 + \alpha_1(t-t_0) \\ e^{-(t-t_0)} &= \alpha_0 - \alpha_1(t-t_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \cosh(t-t_0) \\ \alpha_1 &= (\sinh(t-t_0))/(t-t_0) \end{aligned} \right\}$$

و در نتیجه ماتریس انتقال حالت برابر است با

$$\Phi_{((t,t_0))} = \begin{bmatrix} \cosh(t-t_0) & \sinh(t-t_0) \\ \sinh(t-t_0) & \cosh(t-t_0) \end{bmatrix}$$

۷-۲-۳ دستگاه با ضرایب متغیر

برای دستگاه معادلات همگن $\dot{x} = Ax$ در حالتی که ماتریس ضرایب $A(t)$ ثابت نباشد یعنی تابع زمان t باشد با الهام گیری از حالت قبل بررسی می‌کنیم که تحت چه شرایطی ماتریس انتقال حالت را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Phi_{(t,t_0)} = \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right) \quad (۸-۷)$$

واضح است که رابطه فوق یکی از ویژگیهای اصلی ماتریس انتقال حالت یعنی شرط ابتدائی را ارضاء می‌کند چرا که $\Phi_{(t_0,t_0)} = \exp(0) = I$ حال با نوشتن بسط تیلور این تابع ماتریسی مانند قبل خواهیم داشت

$$\Phi_{(t,t_0)} = \left. \begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^k \\ & \Phi_{(t,t_0)} = I + \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{2!} \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^3 + \dots \end{aligned} \right\}$$

با مشتق گیری از بسط فوق داریم

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= A(t) + \frac{1}{2!} A(t) \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{2!} \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) A(t) + \frac{1}{3!} A(t) \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^2 \\ &+ \frac{1}{3!} \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) A(t) \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{3!} \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^2 A(t) + \dots \end{aligned}$$

بنابراین شرط ارضای ویژگی اصلی دیگر ماتریس انتقال حالت $\dot{\Phi} = A\Phi$ یا ارضای معادله دیفرانسیل، آن است که ماتریسهای فوق در ضرب از ویژگی جابجائی تبعیت کنند یعنی

$$\mathbf{A}_{(t)} \left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}_{(\tau)} d\tau \right) = \left(\int_{t_0}^t \mathbf{A}_{(\tau)} d\tau \right) \mathbf{A}_{(t)}$$

تا بتوان از ماتریس $\mathbf{A}$ فاکتور گرفته و به رابطه $\dot{\Phi} = \mathbf{A}\Phi$ رسید سپس با مشتق گیری از طرفین رابطه فوق نسبت به متغیر t_0 رابطه زیر نتیجه می شود

$$\mathbf{A}_{(t)} \mathbf{A}_{(t_0)} = \mathbf{A}_{(t_0)} \mathbf{A}_{(t)} \quad (9-7)$$

که شرط ارضای تمامی شرایط فوق است؛ حال آیا می توانید فرم کلی ماتریس های دوبعدی و سه بعدی که شرط ۹-۷ را ارضا می کنند به دست آورید. برای یک دستگاه معادلات با ضرایب متغیر در حالاتی غیر از ارضای رابطه ۹-۷ نمی توان فرمول کلی برای محاسبه ماتریس انتقال حالت ارائه کرد و بایستی در صورت امکان با حل دقیق معادلات و به دست آوردن N بردار جواب مستقل و تشکیل ماتریس اصلی $\Psi_{(t)}$ و سپس استفاده از فرمول $\Phi_{(t,t_0)} = \Psi_{(t)} \Psi_{(t_0)}^{-1}$ ماتریس انتقال حالت را محاسبه کرد و یا از روشهای عددی استفاده کرد.

مثال (۷-۸)

به عنوان مثال برای دستگاه معادلات دیفرانسیل همگن $\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t & 1 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ به ازای $t_0 = 0$ که در مثال ۷-۳ مورد بررسی قرار گرفت داریم

$$\begin{bmatrix} 2t_0 & 1 \\ -1 & 2t_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t & 1 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t & 1 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t_0 & 1 \\ -1 & 2t_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2tt_0 - 1 & 2t + 2t_0 \\ -2t - 2t_0 & 2tt_0 - 1 \end{bmatrix}$$

لذا با ارضای شرط ۹-۷ می توان ماتریس انتقال حالت را با استفاده از رابطه ۷-۸ به صورت زیر به دست آورد

$$\Phi_{(t,t_0)} = \exp \left(\int_0^t \mathbf{A}_{(\tau)} d\tau \right) = \exp \left(\begin{bmatrix} t^2 & t \\ -t & t^2 \end{bmatrix} \right)$$

که برای محاسبه آن می توان آن را به صورت حاصل ضرب دو ماتریس زیر نوشت

$$\exp \left(\begin{bmatrix} t^2 & t \\ -t & t^2 \end{bmatrix} \right) = \left(\exp \begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} \right) \left(\exp \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix} \right)$$

که با محاسبه هر یک از توابع نمائی ماتریسی فوق خواهیم داشت

$$\Phi_{(t,0)} = \begin{bmatrix} e^{t^2} & 0 \\ 0 & e^{t^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = e^{t^2} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

۷-۲-۴ دستگاه همگن و ماتریزان

برای دستگاه معادلات همگن $\dot{x} = Ax$ با ضرایب متغیر $A(t)$ اگر $\Phi(t, t_0)$ ماتریس انتقال حالت باشد در این صورت دو ویژگی اساسی ارضای شرط ابتدائی $\Phi(t_0, t_0) = I$ و ارضای معادله دیفرانسیل $\dot{\Phi} = A\Phi$ را می‌توان در قالب اتحاد زیر بیان کرد

$$\Phi = I + \int_{t_0}^t A\Phi d\tau \quad (۷-۱۰)$$

حال فرض کنید t متعلق به بازه $t \in (t_0, t_1)$ و ماتریس $A(t)$ در این بازه پیوسته و کراندار بوده در این صورت دنباله

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(1)} &= I \\ \Phi^{(2)} &= I + \int_{t_0}^t A\Phi^{(1)} d\tau \\ \Phi^{(3)} &= I + \int_{t_0}^t A\Phi^{(2)} d\tau \\ &\vdots \\ \Phi^{(r+1)} &= I + \int_{t_0}^t A\Phi^{(r)} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (۷-۱۱)$$

در صورت همگرایی به ماتریس انتقال حالت منجر می‌شود؛ سری بینهایتی که به صورت فوق ایجاد می‌شود را اصطلاحاً ماتریزان^۱ ماتریس $A(t)$ گویند و با جایگذاری می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \Phi &= I + \int_{t_0}^t A_{(\tau)} d\tau + \int_{t_0}^t A_{(\tau)} \int_{t_0}^{\tau} A_{(n)} dn d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t A_{(\tau)} \int_{t_0}^{\tau} A_{(n)} \int_{t_0}^n A_{(s)} ds dn d\tau + \dots \end{aligned} \quad (۷-۱۲)$$

که در حالتی که ماتریس A ثابت باشد می‌توان به سادگی نشان داد که فرم ماتریزان فوق به بسط تیلور تابع $\exp(A(t - t_0))$ تبدیل می‌شود.

۳-۷ دستگاه غیر همگن

۳-۷-۱ دستگاه غیر همگن با ضرایب ثابت

برای دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر همگن $\dot{x} = Ax + F$ در حالتی که ماتریس ضرایب A ثابت باشد با ضرب طرفین آن در $\exp(-At)$ به دیفرانسیل کامل تبدیل شده و داریم

$$\left. \begin{aligned} e^{-At} \dot{x} - e^{-At} Ax &= e^{-At} F \\ \frac{d}{dt}(e^{-At} x) &= e^{-At} F \end{aligned} \right\} \quad (۱۳-۷)$$

به بیان دیگر $\exp(-At)$ یک فاکتور انتگرال برای این معادله است حال با انتگرال گیری از طرفین رابطه (۱۳-۷) بین t_0, t نتیجه می‌شود

$$e^{-At} x(t) - e^{-At_0} x(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} F d\tau$$

و در نهایت با ضرب طرفین رابطه فوق در ماتریس $\exp(At)$ خواهیم داشت

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} F d\tau \quad (۱۴-۷)$$

که در حالت خاصی که بردار F ثابت باشد خواهیم داشت

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + A^{-1}(e^{A(t-t_0)} - I)F$$

۳-۷-۱ دستگاه غیر همگن با ضرایب متغیر

برای دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر همگن $\dot{x} = Ax + F$ در حالتی که ماتریس ضرایب $A(t)$ ثابت نباشد یعنی تابع زمان t باشد با الهام گیری از حالت قبل که $\exp(-At)$ معکوس

ماتریس انتقال حالت به عنوان فاکتور انتگرال برای آن معادله بود اگر $\Phi_{(t,t_0)}$ ماتریس انتقال حالت این معادله باشد با مشتق گیری از طرفین رابطه $\Phi_{(t,t_0)}\Phi_{(t,t_0)}^{-1} = I$ نسبت به زمان داریم

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Phi_{(t,t_0)}\Phi_{(t,t_0)}^{-1}) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\Phi_{(t,t_0)}\Phi_{(t,t_0)}^{-1} + \Phi_{(t,t_0)}\frac{d}{dt}\Phi_{(t,t_0)}^{-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}A \quad (۱۵-۷)$$

واضح است که $\Phi_{(t,t_0)}^{-1}$ یک فاکتور انتگرال برای معادله اخیر تلقی می شود در نتیجه با ضرب طرفین معادله در آن خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{-1}\dot{x} - \Phi^{-1}Ax &= \Phi^{-1}F \\ \frac{d}{dt}(\Phi^{-1}x) &= \Phi^{-1}F \end{aligned} \right\} \quad (۱۶-۷)$$

حال با انتگرال گیری از طرفین رابطه (۱۶-۷) بین t_0, t نتیجه می شود

$$\Phi_{(t,t_0)}^{-1}x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t \Phi_{(\tau,t_0)}^{-1}F d\tau$$

و در نهایت با ضرب طرفین رابطه فوق در ماتریس $\Phi_{(t,t_0)}$ و همچنین استفاده از ویژگی $\Phi_{(t,t_0)}\Phi_{(t,t_0)}^{-1} = \Phi_{(t,\tau)}$ خواهیم داشت

$$x(t) = \Phi_{(t,t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_{(t,\tau)}F d\tau \quad (۱۷-۷)$$

۴-۷ روشهای عددی

یکی از روشهای تقریبی محاسبه ماتریس انتقال حالت تقسیم بندی بازه زمانی (t, t_0) به تعداد زیادی بازه زمانی کوچک است؛ فرض کنید این بازه زمانی به n قسمت تقسیم شده به قسمی که $t = t_n$ در این صورت با استفاده از ویژگی ماتریس انتقال حالت می توان نوشت

$$\Phi_{(t,t_0)} = \Phi_{(t_n,t_{n-1})}\Phi_{(t_{n-1},t_{n-2})}\cdots\Phi_{(t_3,t_2)}\Phi_{(t_2,t_1)}\Phi_{(t_1,t_0)} \quad (۱۸-۷)$$

حال اگر این بازه زمانی بسیار کوچک باشد در این صورت می‌توان ماتریس $A(t)$ را در این بازه ثابت در نظر گرفت و در نتیجه با صرف نظر از توانهای بالای Δt خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{(t_{k+1}, t_k)} &= e^{A(\Delta t_k)} \\ \Delta t_k &= (t_{k+1} - t_k) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi_{(t_{k+1}, t_k)} \approx I + A(\Delta t_k) \quad (۱۹-۷)$$

که با جایگذاری در رابطه (۱۸-۷) نتیجه می‌شود

$$\Phi_{(t, t_0)} \approx (I + A_{(t_n)}(\Delta t_n)) \dots (I + A_{(t_2)}(\Delta t_2)) (I + A_{(t_1)}(\Delta t_1)) \quad (۲۰-۷)$$

۵-۷ تمرین‌ها

۱. اولاً رابطه $\det[\Phi_{(t, t_0)}] = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}[A(\tau)] d\tau\right)$ را برای ماتریس انتقال حالت

اثبات کرده و سپس $\Phi_{(t, \pi/2)}$ برای حالت خاص $A(t) = \begin{bmatrix} -t & \cos t - \sin t/t \\ 0 & 1/t \end{bmatrix}$ ، $t > 0$ نوشته و صحت رابطه قسمت اول را تأیید کنید

۲. ماتریسهای اصلی $\Psi(t)$ و انتقال حالت $\Phi_{(t, t_0)}$ را برای دستگاه همگن $\dot{x} = Ax$ در هر یک از حالت‌های خاص زیر به ازای $t_0 = 0$ به دست آورید

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} \\ -e^t & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2t & 1 \\ 1 & 2t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ -2t & 1 \end{bmatrix}$$

۳. ماتریسهای اصلی $\Psi(t)$ و انتقال حالت $\Phi_{(t, t_0)}$ را برای دستگاه همگن $\dot{x} = Ax$ در هر یک از حالت‌های خاص زیر به ازای $t_0 = 1$ به دست آورید

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1/t^2 \\ -1 & 1/t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/t^2 & -1/t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/t & 1 \\ 1 & 1/t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1/t \\ -1/t & 1 \end{bmatrix}$$

۴. اگر $A_{N \times N}$ یک ماتریس مربع با درایه‌های حقیقی باشد ابتدا دستگاه معادلات مرتبه

دوم $\ddot{x} + A^2 x = 0$ با شرایط ابتدائی $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x'_0$ را حل کنید سپس با

کمک از این حل، برای حالت خاص $B_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ C & 0_2 \end{bmatrix}$, $C = -\pi^2/4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

ماتریس $\exp(B)$ را محاسبه کنید

۵. دستگاه معادلات همگن $\dot{x} = Ax$ برای حالت خاص $A_{(t)} = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha \cos t \\ \alpha \cos t & -1 \end{bmatrix}$ به قسمی که $\alpha \in \mathbb{R}$, $t > 0$ با شرط ابتدائی $x_{(0)} = x_0$ حل کرده و به طور خاص نشان دهید اگر $\|x_0\| < \infty$ باشد در این صورت داریم $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_{(t)}\| = 0$

۶. دستگاه معادلات همگن $\dot{x} = Ax$ را در نظر بگیرید اگر $A_{N \times N}$ بوده و صرفاً دارای دو مقدار ویژه متمایز λ_1, λ_2 باشد و اگر چند جمله‌ای می‌نیمال آن از درجه دو باشد ثابت کنید حل این معادله با شرط ابتدائی $x_{(0)} = x_0$ را می‌توان به صورت

$$x_{(t)} = (A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}) x_0$$

نوشت ماتریسهای A_1, A_2 محاسبه کرده و ثابت کنید $rank(A_1) + rank(A_2) = N$ و سپس در حالت خاص زیر معادله همگن را حل کنید

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

۷. دستگاه معادلات همگن $\dot{x} = Ax + bu$ را برای $y_{(t)} = c^T x$ با شرایط $y_{(1)} = 0$ و $y'_{(1)} = 0$ برای حالت خاص زیر حل کنید

$$A_{(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2/t^2 & -4/t \end{bmatrix}, c = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, u = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ t-1 & t \geq 1 \end{cases}$$

فصل هشتم

فرمهای درجه دوم

۱-۸ مقدمه

اگر بردار $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_N \rangle^T \in \mathbb{R}^N$ شامل N متغیر حقیقی باشد در این صورت می‌توان کلی‌ترین فرم درجه r ام از آن را با نماد $F_r^T(x)$ به صورت زیر نوشت

$$\left. \begin{aligned} F_{(x)}^1 &= \sum_{i=1}^N a_i x_i \\ F_{(x)}^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i x_j \\ &\vdots \\ F_{(x)}^r &= \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \cdots \sum_{i_r=1}^N a_{i_1 i_2 \dots i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

به قسمی که $a_i \in \mathbb{R}$ با N مؤلفه یک تانسور مرتبه اول، $a_{ij} \in \mathbb{R}$ با N^2 مؤلفه یک تانسور مرتبه دوم و به همین ترتیب الی آخر $a_{i_1 i_2 \dots i_r} \in \mathbb{R}$ با N^r مؤلفه یک تانسور

مرتبه r ام است. از میان این موارد، فرم درجه دوم با نماد $F(x)^2 = Q(x)$ در تحلیل مسائل مهندسی کاربرد بیشتری دارد و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$Q(x) = \left. \begin{aligned} &a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1N}x_1x_N \\ &\quad + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2N}x_2x_N \\ &\quad + a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3N}x_3x_N \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_{NN}x_N^2 \end{aligned} \right\} \quad (۲-۸)$$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}x_i x_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$Q(x) = \langle x_1, \dots, x_N \rangle \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix}$$

به قسمی که $\mathbf{A}_{N \times N}$ یک ماتریس حقیقی بوده و اصطلاحاً ماتریس نظیر این فرم درجه دوم نامیده می‌شود و از آنجائی که به ازای هر بردار دلخواه $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ حاصل عبارت درجه دوم $Q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \in \mathbb{R}$ همواره یک عدد حقیقی است و $Q = Q^T$ در نتیجه خواهیم داشت

$$Q(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x} \quad (۳-۸)$$

یعنی بدون اینکه از کلیت موضوع کم شود می‌توان قسمت متقارن ماتریس $\mathbf{A}$ را جایگزین کرد، بنابراین هر فرم درجه دوم در تناظر یک به یک است با یک ماتریس متقارن حقیقی.

در اکثر قریب به اتفاق مسائل مهندسی که با کمیت‌های برداری سر و کار داریم فرمهای درجه دوم ظاهر می‌شوند که بسته به نوع مسئله، مفهوم هندسی متفاوتی دارند به عنوان ساده ترین مثال، طول هر بردار $\|\mathbf{x}\| = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x}$ یک فرم درجه دوم

است که ماتریس نظیرش $A = I$ ماتریس همانی است؛ به عنوان مثال دیگر در یک مسئله اجزاء محدود با بردار درجات آزادی Δ اگر ماتریس سختی سیستم K باشد داریم $K\Delta = F$ به قسمی که F بردار نیروهای گره‌ای است حال عبارت $\Delta^T F = \Delta^T K \Delta$ متناسب با میزان انرژی ذخیره شده در این سیستم است که یک فرم درجه دوم بر حسب بردار درجات آزادی Δ بوده و ماتریس نظیرش همان ماتریس سختی K است و می‌دانیم که ماتریس سختی هر سیستمی یک ماتریس متقارن حقیقی است؛ همچنین به عنوان مثال دیگر در مسائل مکانیک محیط پیوسته اگر در مختصات دکارتی ماتریس تنش کوشی در یک نقطه از جسمی برابر T باشد در این صورت σ_n مؤلفه عمودی تنش بر روی سطحی با قائم یکه $n = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle^T$ برابر خواهد بود با $\sigma_n = n^T T n$ که در واقع یک فرم درجه دوم بر حسب بردار n است و ماتریس تنش کوشی که یک ماتریس متقارن حقیقی است همان ماتریس نظیر این فرم درجه دوم است.

۸-۲ فرمهای درجه دوم

۸-۲-۱ تعاریف مربوط به فرمهای درجه دوم

طبقه‌بندی و معیار تفکیک فرمهای درجه دوم و به تبع ماتریسهای نظیر، بر اساس علامت آنها است اعم از اینکه مثبت و یا منفی باشند به عنوان مثال طول هر بردار که با فرم درجه دوم $Q(x) = x^T I x$ بیان شد به ازای هر بردار دلخواه $\forall x \in \mathbb{R}^N$ بدیهی است که همواره یک عدد مثبت است همینطور میزان انرژی ذخیره شده در یک سیستم چند درجه آزادی با فرم درجه دوم $Q(\Delta) = \Delta^T K \Delta$ نیز همواره یک عدد مثبت است لیکن تنش نرمال در یک نقطه از یک جسم مادی بر روی یک سطح که با فرم درجه دوم $Q(n) = n^T T n$ بیان شد می‌تواند مثبت و یا منفی باشد. بر این اساس، تعاریف مربوط به فرمهای درجه دوم و همچنین ماتریسهای نظیر آنها در ذیل بیان شده و مثالهای خاصی در حالت ساده $x \in \mathbb{R}^2$ دو متغیره ارائه شده است.

- فرم درجه دوم و به تبع ماتریس نظیر آن را مثبت نیمه معین^۱ گوئیم اگر به ازای هر بردار دلخواه $\forall x \in \mathbb{R}^N$ داشته باشیم $Q(x) \geq 0$ یعنی همواره بزرگتر یا مساوی صفر باشد به عنوان مثال در حالت خاص دو متغیره زیر فرم درجه دوم و ماتریس نظیرش مثبت نیمه معین است

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- فرم درجه دوم و به تبع ماتریس نظیر آن را مثبت معین^۲ گوئیم اگر به ازای هر بردار دلخواه $\forall x \in \mathbb{R}^N$ داشته باشیم $Q(x) > 0$ یعنی مطلقاً بزرگتر از صفر باشد و صرفاً به ازای بردار صفر $x = 0$ داشته باشیم $Q(x) = 0$ به عنوان مثال در حالت خاص دو متغیره زیر فرم درجه دوم و ماتریس نظیرش مثبت معین است

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- فرم درجه دوم و به تبع ماتریس نظیر آن را منفی نیمه معین^۳ گوئیم اگر به ازای هر بردار دلخواه $\forall x \in \mathbb{R}^N$ داشته باشیم $Q(x) \leq 0$ یعنی کوچکتر یا مساوی

^۱ Positive Semidefinite

^۲ Positive Definite

^۳ Negative Semidefinite

صفر باشد به عنوان مثال در حالت خاص دو متغیره زیر فرم درجه دوم و ماتریس

نظیرش منفی نیمه معین است

$$Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 = -(x_1 - x_2)^2 \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- فرم درجه دوم و به تبع ماتریس نظیر آن را منفی معین^۱ گوئیم اگر به ازای هر بردار دلخواه $\forall x \in \mathbb{R}^N$ داشته باشیم $Q(x) < 0$ یعنی مطلقاً کوچکتر از صفر باشد و صرفاً به ازای بردار صفر $x = 0$ داشته باشیم $Q(x) = 0$ به عنوان مثال در حالت دو متغیره زیر فرم درجه دوم و ماتریس نظیرش منفی معین است

$$Q(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- فرم درجه دوم و به تبع ماتریس نظیر آن را نامعین^۲ گوئیم اگر علامت آن به ازای برخی مقادیر $\exists x \in \mathbb{R}^N$ مثبت، منفی و یا صفر شود به عنوان مثال در حالت دو متغیره زیر فرم درجه دوم و ماتریس نظیرش نامعین است

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

همچنین یک فرم درجه دوم $Q(x)$ منفرد نامیده می شود اگر $|A| = 0$ یعنی ماتریس نظیر آن منفرد باشد حال چنانچه یک فرم درجه دوم منفرد باشد معادله $Ax = 0$ دارای حل غیربدیهی بوده یعنی می توان $x \neq 0$ پیدا کرد به قسمی که $Q(x) = 0$ در نتیجه فرم منفرد نمی تواند معین باشد به بیان دیگر فرمهای معین حتماً غیر منفرد هستند البته عکس این جمله لزوماً صادق نیست یعنی فرمهای غیر منفرد لزوماً معین

^۱ Negative Definite

^۲ Indefinite

نیستند چراکه امکان دارد یک فرم درجه دوم غیرمنفرد و نامعین باشد به عنوان مثال در حالت خاص دو متغیره فرم درجه دوم زیر غیرمنفرد لیکن نامعین است

$$Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2 \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲-۲-۸ قضایای مربوط به فرمهای درجه دوم

با توجه به اینکه ماتریس نظیر هر فرم درجه دوم، متقارن حقیقی است لذا مطابق نتیجه قضیه ۶-۱۱ اولاً کلیه مقادیر ویژه آن حقیقی بوده و ثانیاً بردارهای ویژه‌اش بر هم عمودند یعنی متعامداً متشابه با یک ماتریس قطری حقیقی است و می‌توان نوشت

$$\Lambda = P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix}$$

حال با تغییر متغیر $y \triangleq P^T x$ داریم

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^T A x = x^T P \Lambda P^T x = y^T \Lambda y \\ &= \lambda_1 (y_1)^2 + \dots + \lambda_N (y_N)^2 \end{aligned} \quad (۴-۸)$$

حال می‌توان نتیجه روابط فوق را به صورت قضیه زیر مطرح کرد

قضیه [۱-۸] شرط لازم و کافی برای اینکه $Q(x) \geq 0$ یک فرم درجه دوم مثبت باشد

آن است که $\lambda_i \geq 0$ کلیه مقادیر ویژه ماتریس نظیرش مثبت باشند و همچنین شرط لازم و کافی برای اینکه یک فرم درجه دوم مثبت معین باشد آن است که کلیه مقادیر ویژه ماتریس نظیرش مثبت غیرصفر باشند و به همین ترتیب برای فرمهای منفی نیز استدلال مشابهی بیان می‌شود (Wiley, 1990) و به طور خلاصه می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} Q(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \\ Q(x) > 0 &\Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad i = 1, \dots, N \\ Q(x) \leq 0 &\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, N \\ Q(x) < 0 &\Leftrightarrow \lambda_i < 0 \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \right\}$$

می‌دانیم که $r < N$ تعداد مقادیر ویژه غیر صفر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ مبین رتبه یک ماتریس است حال چنانچه از این مقادیر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p > 0$ و بقیه منفی باشند در این صورت p شاخص^۱ ماتریس و $r - p$ علامت^۲ ماتریس نامیده می‌شود.

مثال (۸-۱)

فرض کنید بخواهیم ویژگی مثبت و یا منفی بودن ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را با استفاده از روش مقادیر ویژه مشخص کنیم در این صورت معادله مشخصه و مقادیر ویژه آن عبارتند از

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$$

چون این ماتریس، متقارن نیست و از آنجائی که مفاهیم مثبت و یا منفی بودن به فرم درجه دوم نسبت داده می‌شود لذا با نوشتن فرم درجه دوم نظیر آن خواهیم داشت

$$Q(x_1, x_2) = \langle x_1 \ x_2 \rangle \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$$

واضح است که این فرم درجه دوم مثبت نیمه معین است و ماتریس نظیرش عبارت

است از $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ که دارای معادله مشخصه و مقادیر ویژه به صورت زیر است

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$$

قضیه (۲-۸) ماتریسهای همنهشت ویژگی یکسانی از نظر مثبت و یا منفی بودن دارند.

ماتریس نظیر هر فرم درجه دوم یک ماتریس متقارن و حقیقی است لذا همانطور که در قبل بیان شد داریم $A = P^T A P$ یعنی متعامداً متشابه است با یک ماتریس قطری حقیقی از مقادیر ویژه اش حال اگر یک ماتریس قطری حقیقی دلخواهی مانند D را به صورت زیر در نظر گرفته و سپس با تعریف ماتریس غیرمنفرد $Q \triangleq PD$ خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{bmatrix} \quad d_i \neq 0 \\ B \triangleq Q^T A Q &= \begin{bmatrix} \lambda_1 d_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N d_N^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (۵-۸)$$

رابطه $B = Q^T A Q$ اصطلاحاً همنهشتی^۱ نامیده می شود و ماتریسهای A, B که به این صورت به هم مربوط می شوند همنهشت با یکدیگر هستند اولاً واضح است که رابطه همنهشتی یک رابطه هم ارزی است ثانیاً ماتریسهای همنهشت ویژگی یکسانی از نظر فرم درجه دوم نظیر دارند چرا که با تغییر متغیر $y \triangleq Q^{-1}x$ داریم

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^T A x = x^T Q^{-T} B Q^{-1} x = y^T B y \\ &= \lambda_1 (d_1 y_1)^2 + \dots + \lambda_N (d_N y_N)^2 \end{aligned} \quad (۶-۸)$$

برای درک بهتر روابط فوق یک مثال عددی ارائه می شود.

مثال (۲-۸)

با استفاده از رابطهٔ همنهشتی ویژگی فرم درجه دوم زیر و ماتریس نظیرش را مشخص کنید

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

با تغییر متغیر به صورت زیر داریم

$$y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = Q^{-1}x$$

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = y_1^2 - 3y_2^2$$

در نتیجه ماتریس A با ماتریس قطری $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ $B = Q^T A Q$ همنهشت است و چون این ماتریس نامعین است لذا ماتریس A و به تبع فرم درجه دوم مربوطه نیز نامعین است.

قضیه (۳-۸) اگر ماتریس $A_{M \times N}$ با ستونهای مستقل یعنی $rank(A) = N$ باشد در این صورت ماتریس $B_{N \times N} = A^T A$ متقارن و مثبت معین بوده و ماتریس $C_{M \times M} = A A^T$ متقارن و مثبت نیمه معین است

اثبات: با نوشتن فرم درجه دوم نظیر ماتریس B خواهیم داشت

$$Q_B(x) = x^T B x = x^T A^T A x = \|Ax\|^2 > 0$$

واضح است که این فرم درجه دوم لزوماً مثبت است همچنین با توجه به اینکه ماتریس A دارای ستونهای مستقل است لذا دستگاه $Ax = 0$ صرفاً دارای حل بدیهی $x = 0$ بوده و در نتیجه این فرم درجه دوم و ماتریس نظیرش یعنی $A^T A$ مثبت معین است به طور مشابه با نوشتن فرم درجه دوم نظیر ماتریس C خواهیم داشت

$$Q_C(x) = x^T C x = x^T A A^T x = \|A^T x\|^2 \geq 0$$

واضح است که این فرم درجه دوم نیز لزوماً مثبت است لیکن با توجه به اینکه ماتریس A^T دارای سطرهای مستقل است لذا دستگاه $A^T x = 0$ دارای جواب غیر بدیهی خواهد بود در نتیجه این فرم درجه دوم و ماتریس نظیرش یعنی AA^T مثبت نیمه معین است.

قضیه (۸-۴) اگر ماتریس مربع $N \times N$ یکانی و مثبت نیمه معین باشد در این صورت $U = I$ یعنی برابر ماتریس همانی خواهد بود

اثبات: چرا که اگر $Ux = \alpha x$ برای مقدار ویژه ماتریس یکانی داریم

$$\|x\|^2 = (Ux, Ux) = (\alpha x, \alpha x) = \alpha \bar{\alpha} (x, x) = \alpha \bar{\alpha} \|x\|^2$$

یعنی $|\alpha| = 1$ اندازه مقادیر ویژه برابر واحد است از طرفی اگر بخواهد U مثبت باشد بایستی مقادیر ویژه مثبت بوده $\alpha > 0$ و در نتیجه $\alpha = 1$ خواهد بود بنابراین داریم $P^{-1}UP = I$ که منجر به $U = I$ خواهد شد.

قضیه (۸-۵) شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس $A_{N \times N}$ مثبت معین باشد این است که کلیه زیرماتریسهای اصلی آن مثبت معین باشند. اگر ماتریس مربع $A_{N \times N}$ متقارن باشد در این صورت ماتریسهای زیر را زیرماتریسهای اصلی مقدم آن گویند

$$A_1 = a_{11} \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_r = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

اثبات: طرف اول قضیه یعنی اگر زیرماتریسهای اصلی $A_1, A_2, \dots, A_N$ مثبت معین باشند بدیهی است که $A = A_N$ نیز مثبت معین است طرف دوم قضیه یعنی با فرض اینکه A مثبت معین باشد واضح است که به ازای هر بردار دلخواه $\forall x \in \mathbb{R}^N$ داریم

$Q(x) = x^T A x > 0$ حال با تعریف $x_r = \langle x_1, x_2, \dots, x_r \rangle^T \in \mathbb{R}^r$ و سپس انتخاب

بردار x به صورت $x^T = \langle x_r, \mathbf{0}_{1 \times (N-r)} \rangle^T$ نتیجه می‌شود

$$Q(x) = x^T A x = x_r^T A_r x_r > 0$$

یعنی بایستی کلیه زیرماتریسهای A_r به ازای $r = 1, \dots, N$ مثبت معین باشند.

قضیه [۸-۷] شرط لازم و کافی برای ماتریس $A_{N \times N}$ مثبت معین باشد آن است که

کلیه کهادهای اصلی مقدم آن مثبت باشند یعنی $det(A_r) > 0$ به ازای $r = 1, \dots, N$

اثبات: اولاً اگر $det(A_r) \neq 0$ در این صورت تنها با انجام عملیات مقدماتی سطری

نوع سوم (که اثری روی دترمینان ندارد) می‌توان ماتریس A را به ماتریس بالامثلثی

U بدل کرد، در اولین عملیات مقدماتی سطری با توجه به اینکه $det(A_1) = a_{11} \neq 0$

0 منجر به ماتریس زیر می‌شود

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{N1} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{2N} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{N2} & b_{N3} & b_{NN} \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} det(A_2) = a_{11}b_{22} \\ b_{22} = \frac{det(A_2)}{a_{11}} = \frac{det(A_2)}{det(A_1)} \end{array} \right\}$$

در دومین عملیات مقدماتی سطری با توجه به اینکه $det(A_2) \neq 0$ منجر به ماتریس

زیر می‌شود

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{N1} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{2N} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{N3} & c_{NN} \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} det(A_3) = a_{11}b_{22}c_{33} \\ c_{33} = \frac{det(A_3)}{a_{11}b_{22}} = \frac{det(A_3)}{det(A_2)} \end{array} \right\}$$

به همین ترتیب الی آخر اگر در نهایت ماتریس A به ماتریس بالامثلثی U بدل شود

در این صورت درایه‌های روی قطر اصلی آن عبارتند از

$$A \sim U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & & u_{N1} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & & u_{2N} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & u_{NN} \end{bmatrix} \quad u_{nn} = \frac{\det(A_n)}{\det(A_{n-1})}$$

از طرفی اگر ماتریس مربعی $A_{N \times N}$ را به شکل افزوده با ماتریس همانی $[A_{N \times N} \ \vdots \ I_N]$ در کنار هم قرار دهیم و همان عملیات سطری مقدماتی متعدد قبل را انجام دهیم به قسمی که $[A_{N \times N} \ \vdots \ I_N] \sim [U_{N \times N} \ \vdots \ L_{N \times N}]$ در این صورت $LA = U$ خواهد بود به قسمی که L یک ماتریس معکوس پذیر پائین مثلثی به صورت زیر است

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & l_{N3} & & 1 \end{bmatrix}$$

که همه درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر واحد است در نتیجه با ضرب طرفین رابطه فوق در L^T خواهیم داشت $LAL^T = UL^T$ از طرفی سمت چپ این رابطه یعنی LAL^T یک ماتریس متقارن است لیکن سمت راست آن حاصلضرب دو ماتریس بالامثلثی است که حاصل یک ماتریس بالامثلثی خواهد شد در نتیجه UL^T بایستی یک ماتریس بالامثلثی متقارن باشد که منجر به یک ماتریس قطری می‌شود و چون درایه‌های روی قطر ماتریس L^T برابر واحد هستند در نتیجه درایه‌های روی قطر اصلی UL^T با ماتریس U برابر بوده و می‌توان نوشت

$$LAL^T = D = \begin{bmatrix} \frac{\det(A_n)}{\det(A_1)} & \frac{\det(A_2)}{\det(A_1)} & \frac{\det(A_3)}{\det(A_2)} & \cdots & \frac{\det(A_N)}{\det(A_{N-1})} \end{bmatrix} \quad (7-8)$$

بنابراین ماتریس A با ماتریس قطری D همبستگی بوده و ویژگی یکسانی از نظر فرم درجه دوم نظیر دارند در نتیجه شرط اینکه ماتریس A مثبت معین باشد آن است که کلیه درایه‌های قطری D مثبت باشند که منجر به رابطه $\det(A_r) > 0$ یا همان اثبات قضیه می‌شود.

نتیجه: شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس A منفی معین باشد آن است که کلیه درایه‌های قطری D منفی باشند که منجر به روابط یک در میانی زیر می‌شود

$$\left. \begin{array}{ll} \det(A_r) < 0 & r = 1, 3, 5, \dots \\ \det(A_r) > 0 & r = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\}$$

و در نهایت چنانچه علامت درایه‌های قطری D از حالات فوق تبعیت نکند یعنی برخی مثبت و برخی منفی باشند در این صورت ماتریس A نامعین است.

قضیه [۷-۸] تجزیه چولسکی: شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس $A_{N \times N}$ مثبت معین باشد این است که ماتریس بالامثلثی غیر منفرد $W_{N \times N}$ وجود داشته باشد

$$A = W^T W \quad \text{که}$$

اثبات: طرف اول قضیه یعنی با فرض اینکه اگر ماتریس $A_{N \times N}$ مثبت معین باشد طبق قضیه قبل داریم $LAL^T = D$ به قسمی که $d_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$ در نتیجه $A = L^{-1} D L^{-T}$ و می‌توان آن را به صورت $A = L^{-1} D^{1/2} D^{1/2} L^{-T}$ به قسمی که $D^{1/2}$ برابر جذر مثبت و یا منفی ماتریس D است در نتیجه با تعریف ماتریس $W = D^{1/2} L^{-T}$ که بالامثلثی و معکوس پذیر است نتیجه می‌شود $A = W^T W$ برای اثبات

طرف دوم قضیه یعنی با فرض اینکه $A = W^T W$ باشد فرم درجه دوم نظیر آن را می توان به صورت زیر نوشت

$$Q(x) = x^T A x = x^T W^T W x = \|Wx\|^2 > 0$$

در نتیجه A مثبت معین است.

مثال (۸-۳)

ماتریس بالامتثلی و غیر منفرد $W_{2 \times 2}$ را به گونه‌ای دست آورید که $A = W^T W$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

با تشکیل ماتریس افزوده $[A_{2 \times 2} \ \vdots \ I_2]$ در کنار هم و انجام عملیات سطری مقدماتی

متعدد نوع سوم تا تبدیل به $[U_{2 \times 2} \ \vdots \ L_{2 \times 2}]$ داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$LAL^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال با استفاده از رابطه $W = D^{1/2} L^{-T}$ ماتریس بالامتثلی W را به دست می‌آوریم

واضح است که به این روش ماتریس W منحصر به فرد نیست چراکه می‌توان جذر

مثبت و یا منفی ماتریس D را در آن قرار داد حال با چایگذاری $L^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, L^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ داریم}$$

$$W = D^{1/2} L^{-T} = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = D^{1/2} L^{-T} = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۸-۳ آزمون مشتق دوم

۸-۳-۱ اکستریم توابع چند متغیره

اگر بردار $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_N \rangle^T \in \mathbb{R}^N$ شامل N متغیر حقیقی بوده و $f(\mathbf{x})$ تابع دلخواهی از آن باشد در این صورت دستگاه معادلات $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ یا به صورت اندیسی زیر

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8-8)$$

منجر به محاسبه $\mathbf{x}_0$ مختصات نقطه اکستریم این تابع خواهد شد حال برای تشخیص وضعیت این نقطه از نظر ماکزیمم موضعی، مینیمم موضعی و یا نقطه زینی بودن با نوشتن بسط تیلور این تابع در همسایگی $\mathbf{x}_0$ به صورت زیر خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \Delta f = & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \\ & + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k \\ & + \dots \end{aligned} \quad (9-8)$$

حال اگر $\mathbf{x}_0$ مختصات نقطه اکستریم این تابع باشد جمله اول بسط فوق برابر صفر شده و لذا در همسایگی این نقطه میتوان با تقریب قابل قبولی نوشت

$$\left. \begin{aligned} \Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &\approx \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \\ f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &\approx \frac{1}{2!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{H} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \end{aligned} \right\} h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad (10-8)$$

به قسمی که ماتریس $H_{N \times N}$ اصطلاحاً ماتریس هسین^۱ نامیده شده و درایه‌های آن به صورت $h_{ij} = f_{,ij}$ خواهند بود که اگر در یک همسایگی x_0 به ازای هر x دلخواهی مقدار Δf مثبت باشد در این صورت آن نقطه یک می‌نیمم موضعی است، اگر Δf منفی باشد در این صورت آن نقطه یک ماکزیمم موضعی است و اگر Δf به ازای برخی از مقادیر x مثبت و به ازای برخی دیگر منفی باشد در این صورت یک نقطهٔ زینی خواهیم داشت و به طور خلاصه می‌توان شرایط کافی زیر را در خصوص یک نقطهٔ اکسترمم بیان کرد

- چنانچه ماتریس H در نقطه x_0 مثبت معین باشد در این صورت این نقطه یک مینیمم موضعی است
- چنانچه ماتریس H در نقطه x_0 منفی معین باشد در این صورت این نقطه یک ماکزیمم موضعی است
- چنانچه ماتریس H در نقطه x_0 نامعین باشد در این صورت این نقطه یک نقطهٔ زینی است
- چنانچه ماتریس H در نقطه x_0 نیمه معین و منفرد باشد هیچ اظهار نظری نمیتوان کرد

^۱ Hessian Matrix

مثال (۸-۴)

برای هر سه تابع f, g, h زیر مبدأ مختصات $x_0 = \langle 0, 0 \rangle^T \in \mathbb{R}^2$ یک نقطه اکسترمم است و همچنین برای هر سه تابع ماتریس هسین در این نقطه $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ نامعین است لیکن این نقطه برای تابع $f(x, y) = x^3 + y^2$ یک نقطه زینی برای تابع $g(x, y) = x^4 + y^2$ یک مینیمم موضعی و برای تابع $h(x, y) = -x^4 - y^2$ یک ماکزیمم موضعی است.

مثال (۸-۵)

برای تابع $f(x, y) = x^2 + x \sin y + xy + 2y^2$ مختصات $x_0 = \langle 0, 0 \rangle^T \in \mathbb{R}^2$ یک نقطه اکسترمم است چراکه یکی از جوابهای دستگاه معادلات زیر است

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + \sin y + y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x \cos y + x + 4y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 2 & 1 + \cos y \\ 1 + \cos y & 4 - x \sin y \end{bmatrix}$$

همچنین ماتریس هسین در این نقطه برابر $H = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ است که با انجام عملیات مقدماتی سطری نوع سوم به ماتریس بالامثلثی $H \sim U = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ بدل می شود لذا مثبت معین بوده و بنابراین این نقطه یک می نیمم موضعی است.

۸-۳-۲ شرایط جانبی و ضرایب لاگرانژ

اگر بردار $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_N \rangle^T \in \mathbb{R}^N$ شامل N متغیر حقیقی بوده و $f(x)$ تابع دلخواهی از آن باشد در این صورت اکسترمم این تابع به همراه شرایط جانبی $\varphi_j(x) = 0 \quad j = 1:r$ منجر به تعریف یک تابع تعمیم یافته $\hat{f}$ به صورت زیر خواهد

شد

$$\hat{f} = f + \sum_{j=1}^r \lambda_j \varphi_j \quad (۱۱-۸)$$

به قسمی که متغیرهای جدید $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ضرایب لاگرانژ نامیده می‌شوند اولاً واضح است که به ازای هر بردار دلخواه x مقادیر دو تابع $\hat{f} = f$ با هم برابر هستند ثانیاً اکسترمم تابع تعمیم یافته $\hat{f}$ نسبت به هر متغیر λ_j منجر به ارضای قید جانبی $\varphi_j(x) = 0$ مربوط به آن شده و لذا می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} &= 0 & i &= 1:N \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial \lambda_j} &= \varphi_j = 0 & j &= 1:r \end{aligned} \right\} \quad (۱۲-۸)$$

مثال (۸-۶)

یکی از مسائل پرکاربرد مهندسی محاسبه ماکزیمم می‌نیمم فرم درجه دوم $f(x) = x^T A x$ به همراه قید $x^T B x = 1$ می‌باشد که با تعریف تابع تعمیم یافته به صورت زیر با قرارداد جمع بندی روی اندیس تکراری می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}(x, \lambda) &= x^T A x + \lambda(1 - x^T B x) \\ \hat{f}(x, \lambda) &= a_{ij} x_i x_j + \lambda(1 - b_{ij} x_i x_j) \end{aligned} \right\}$$

بدون کاستن از کلیت موضوع می‌توان ماتریسهای A, B را متقارن در نظر گرفته و با مشتق گیری از تابع تعمیم یافته فوق نتیجه میشود

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} &= 2Ax - 2\lambda Bx = 2(A - \lambda B)x = 0 \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} &= 2a_{ij}x_j - 2\lambda b_{ij}x_j = 2(a_{ij} - \lambda b_{ij})x_j = 0 \end{aligned} \right\}$$

لذا شرط اینکه جواب $\vec{0} \neq x$ برای دستگاه معادلات فوق وجود داشته باشد آن است که دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد $|A - \lambda B| = 0$ که منجر به یک معادله جبری درجه N بر حسب متغیر λ خواهد شد. حال اگر λ_i یک ریشه این معادله و x_i بردار ویژه نظیرش باشد یعنی $Ax_i = \lambda Bx_i$ در این صورت مقدار عددی فرم درجه دوم در این نقطه برابر است با

$$f(x_i) = x_i^T Ax_i = \lambda x_i^T Bx_i = \lambda$$

به بیان دیگر دقیقاً ریشه‌های معادله دترمینانی $|A - \lambda B| = 0$ همان مقادیر اکسترمم فرم درجه دوم $x^T Ax$ به همراه قید $x^T Bx = 1$ خواهند بود و بیشترین مقدار ویژه برابر ماکزیمم فرم درجه دوم و کمترین مقدار ویژه برابر مینیمم فرم درجه دوم است.

مثال (۸-۷)

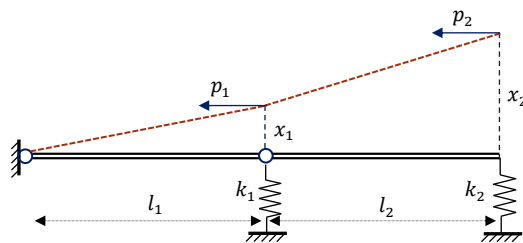
ریشه‌های معادله دترمینانی $|A - \lambda B| = 0$ برابر است با مقادیر ماکزیمم، مینیمم تابع کسری $f(x) = (x^T Ax)/(x^T Bx)$ چراکه با قرارداد جمع بندی روی اندیس تکراری می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{(2a_{ij}x_j)(x^T Bx) - (2b_{ij}x_j)(x^T Ax)}{(x^T Bx)^2} = 0 \\ (2a_{ij}x_j) - (2b_{ij}x_j) \frac{(x^T Ax)}{(x^T Bx)} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

روابط فوق عبارتند از دستگاه معادلات $(a_{ij} - fb_{ij})x_j = 0$ که شرط وجود جواب غیر بدیهی برای آن منجر به معادله دترمینانی $|A - fB| = 0$ خواهد شد.

۴-۸ قطری سازی همزمان با استفاده از همبستگی

در دو مثال اخیر با معادله دترمینانی به صورت $|A - \lambda B| = 0$ مواجه شدیم به قسمی که A, B ماتریسهای مربعی متقارن و حقیقی بودند، تحلیل برخی مسائل مهندسی نیز منجر به چنین حالتی از مسئله مقدار ویژه خواهد شد به عنوان یکی از مسائل پرکاربرد مهندسی که به اینچنین مسئله مقدار ویژه‌ای منجر می‌شود تحلیل پایداری و یا کمانش است



شکل (۸-۱) کمانش یک ستون دو درجه آزادی

به عنوان مثال معادلات تعادل حاکم در حالت تغییر شکل یافته ستون دو درجه آزادی مطابق شکل (۸-۲) با ارضای تعادل گشتاور حول دو مفصل این تیر عبارت است از

$$\left. \begin{aligned} k_1 x_1 l_1 + k_2 x_2 (l_1 + l_2) &= p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ k_2 x_2 l_2 &= p_2 x_2 - p_1 x_1 \end{aligned} \right\}$$

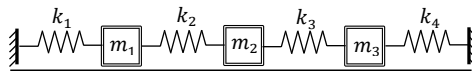
که با ترکیب این دو معادله به قسمی که ماتریس سختی این سیستم شکل گیرد می‌توان این معادلات را به صورت ماتریسی زیر نوشت

$$\begin{cases} Kx = K_G x \\ K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad K_G = \begin{bmatrix} \frac{p_1 + p_2}{l_1} + \frac{p_2}{l_2} & -\frac{p_2}{l_2} \\ -\frac{p_2}{l_2} & \frac{p_2}{l_2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

به قسمی که $x = \langle x_1, x_2 \rangle^T$ بردار جابجائی، K ماتریس سختی و K_G اصطلاحاً ماتریس سختی هندسی این ستون نامیده می‌شود که به صورت ساده می‌توان این معادلات را به صورت زیر نیز نوشت

$$\begin{cases} (\bar{K} - \lambda \bar{K}_G)x = 0 \\ \lambda = \frac{p_2}{k_2 l_2}, \quad \alpha = \frac{l_2}{l_1}, \quad \beta = \frac{p_1}{p_2} \\ \bar{K} = \begin{bmatrix} k_1/k_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{K}_G = \begin{bmatrix} \alpha\beta + \alpha + 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

به قسمی که λ پارامتر بدون بُعد بار کمانش است همچنین در حالت کلی معادلات تعادل حاکم بر تحلیل پایداری مسائلی که مانند مثال اخیر، ذاتاً ناپیوسته هستند و چه مسائل پیوسته‌ای مانند ستونها، صفحات و پوسته‌های تحت اثر نیروهای غشائی که به یکی از روشهای عددی مانند اجزای محدود و یا تفاضل‌های محدود، ناپیوسته شده‌اند به صورت ماتریسی فوق قابل بیان است. به عنوان نمونه دیگر از مسائل مهندسی می‌توان به تحلیل ارتعاش آزاد سیستم‌های چند درجه آزادی اشاره کرد



شکل (۸-۲) ارتعاش آزاد یک سیستم سه درجه آزادی جرم فنر

به عنوان مثال معادلات تعادل دینامیکی حاکم بر حرکت و یا ارتعاش یک سیستم سه درجه آزادی مانند شکل (۸-۲) بر حسب x_1, x_2, x_3 یعنی جابجائی هر یک از جرمهای m_1, m_2, m_3 عبارت است از

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_1 (x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_2 - x_3) = 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_3 (x_3 - x_2) + k_4 x_3 = 0 \end{cases}$$

که می‌توان این معادلات را به صورت ماتریسی زیر نوشت

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

به قسمی که $x = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle^T$ بردار جابجائی، M ماتریس جرم و K ماتریس سختی این سیستم جرم فنر است که با جداسازی متغیرهای زمان و مکان به صورت $\hat{x} = e^{-i\omega t} x$ که مبین ارتعاش آزاد با فرکانس ثابت ω می‌باشد نتیجه می‌شود $\ddot{x} = -\omega^2 x$ که با جایگذاری در معادلات فوق به مسئله مقدار ویژه $(K - \omega^2 M)\hat{x} = 0$ بر حسب پارامتر فرکانس منجر می‌شود.

حال در حالت کلی به بررسی مسئله مقدار ویژه $(A - \lambda B)x = 0$ پرداخته می‌شود همانطور که در مثالهای کاربردی اخیر نیز مشاهده شد اولاً ماتریسهای A, B متقارن و حقیقی هستند ثانیاً یکی از آنها لزوماً مثبت معین است لذا اگر ماتریس غیر منفرد T وجود داشته باشد به قسمی که

$$\left. \begin{array}{l} T^T B T = I \\ T^T A T = D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (۱۳-۸)$$

یعنی حاصل $T^T B T = I$ برابر ماتریس همانی شده و حاصل $T^T A T = D$ برابر یک ماتریس قطری شود در این صورت با تغییر متغیر $x = Ty$ خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} ATy - \lambda BTy &= 0 \\ (T^T AT)y - \lambda(T^T MT)y &= 0 \\ (D - \lambda I)y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \prod_{i=1}^N (\lambda - d_i) = 0 \quad (۱۴-۸)$$

اگر ماتریس B متقارن و مثبت معین باشد در نتیجه متعامداً متشابه است با یک ماتریس قطری حقیقی مثبت از مقادیر ویژه‌اش لذا $B^{1/2}$ جذر مثبت آن یک ماتریس حقیقی متقارن و مثبت معین خواهد بود متعاقباً با توجه به اینکه ماتریس A متقارن است ماتریس C به صورت $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$ نیز متقارن است لذا ماتریس متعامد $Q^T Q = I$ وجود دارد به قسمی که

$$Q^T C Q = D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{bmatrix} \quad (۱۵-۸)$$

حال با تعریف ماتریس به صورت $T = B^{-1/2}Q$ خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} T^T B T &= I \\ T^T A T &= D \end{aligned} \right\}$$

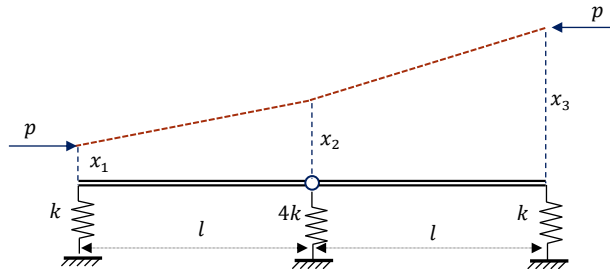
یعنی λ برابر مقدار ویژه ماتریس متقارن حقیقی C است بنابراین لزوماً حقیقی خواهد بود.

مثال (۸-۸)

مطلوب است محاسبه بار کمانش و شکل مودهای کمانشی ستون سه درجه آزادی مطابق شکل زیر که تحت اثر بار محوری ثابت p قرار دارد.

با ترسیم حالت تغییر شکل یافته ستون به ترتیب ماتریس سختی مماسی K و ماتریس سختی هندسی K_G عبارتند از

$$K = \begin{bmatrix} k & & \\ & 4k & \\ & & k \end{bmatrix} \quad K_G = \frac{p}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



شکل (۸-۳) کمانش یک ستون سه درجه آزادی تحت بار ثابت

معادلات تعادل این ستون در حالت تغییرشکل یافته منجر به دستگاه $Kx = K_G x$ می‌شود که با تعریف $\lambda = p/kl$ پارامتر بدون بُعد بار کمانش خواهیم داشت

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

همچنین با توجه به رابطه (۸-۱۴) داریم

$$(K^{-1/2} K_G K^{-1/2} - \lambda^{-1} I) y = 0$$

به قسمی که $x = K^{-1/2} y$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

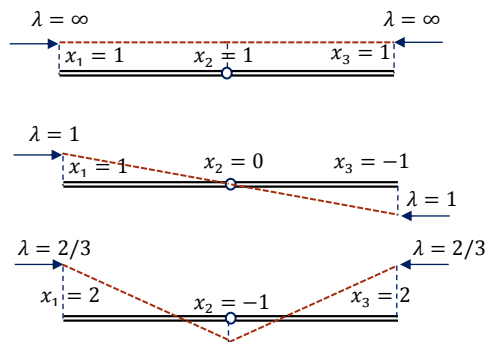
مقادیر ویژه ماتریس فوق در واقع مقادیر $\lambda^{-1} = kl/p$ هستند لذا سه مقدار ویژه به صورت $\lambda^{-1} = 0, 1, 1.5$ داریم که نظیر هر یک مود کمانش به صورت زیر به دست می‌آید

$$y_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad y_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad y_3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

و در نهایت می‌توان با استفاده از رابطه $x = K^{1/2}y$ داریم

$$x_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad x_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad x_3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

که این مودهای کماتش در شکل زیر به صورت شماتیک رسم شده‌اند



شکل (۸-۴) کماتش یک ستون سه درجه آزادی تحت بار ثابت

۸-۵ تمرین‌ها

۱. ویژگی مثبت و یا منفی بودن فرم درجه دوم نظیر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ را مشخص کنید

۲. فرم درجه دوم $Q(x) = x^T A x$ را در نظر بگیرید به قسمی A یک ماتریس است نشان دهید $Q(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 x^T A x + 2\lambda\mu x^T A y + \mu^2 y^T A y$ سپس رابطه زیر را برای فرم مثبت معین اثبات کنید و بگوئید تساوی در چه

حالتی برقرار است به ازای هر دو بردار دلخواه داریم $(x^T Ay)^2 \leq (x^T Ax)(y^T Ay)$

۳. تبدیلهائی را بیابید که هر یک از فرمهای درجه دوم زیر را به مجموع مربعات تقلیل دهد و سپس ویژگی مثبت و یا منفی بودن ماتریس نظیر هر یک را مشخص کنید

$$Q_1 = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4$$

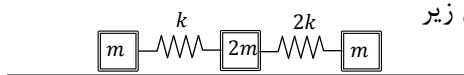
$$Q_2 = x_1x_2 + x_3x_4$$

۴. مقادیر ماکزیمم و می نیمم عبارت زیر را به دست آورید و همچنین مختصات نقطه ای که به ازای آن I اکسترمم است را نیز مشخص کنید

$$I = \frac{7x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz}{6x^2 + 3y^2 + 2z^2}$$

۵. مقدار کمترین فاصله مبدأ مختصات تا منحنی $8x^2 + 12xy + 17y^2 = 16$ در صفحه xy را به دست آورید

۶. مطلوب است محاسبه فرکانسها و مودهای ارتعاش آزاد نظیر سیستم سه درجه آزادی جرم فدر مطابق شکل زیر



فصل نهم

حساب تغییرات

۱-۹ مقدمه و مبانی حساب تغییرات

۱-۱-۹ اِلِمِ اساسی و ساده‌ترین مسئله در تئوری تغییرات

یکی از مباحث ریاضی پیرامون حساب دیفرانسیل، انتگرال محاسبه اکسترمم تابعی از یک و یا چند متغیر مستقل است به عنوان مثال می‌دانیم تعیین اکسترمم تابع $y(x)$ منجر به این رابطه خواهد شد که

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0$$

یعنی بایستی مشتق و یا تغییرات تابع $y(x)$ نسبت به متغیر مستقل x برابر صفر باشد که با حل این معادله، مقدار عددی x که به ازای آن تابع y ماکزیمم و یا می‌نیمم می‌شود و متعاقباً مقدار y اکسترمم نظیر به دست می‌آید همچنین می‌دانیم برای محاسبه اکسترمم تابعی از چند متغیر مستقل مانند $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ به همراه قیود جانبی به صورت

$$G_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}^j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m$$

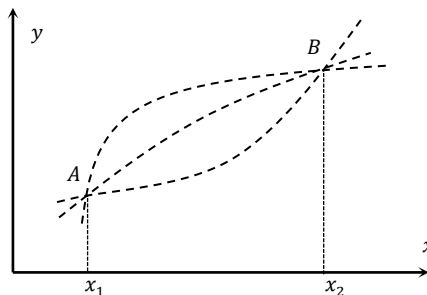
بایستی مشتق جزئی و یا تغییرات تابع تعمیم یافته

$$y^* = y + \sum_{j=1}^m \lambda_j G^j$$

نسبت به هر یک از متغیرهای مستقل x_i و همچنین ضرایب لاگرانژ λ_i برابر صفر باشد

$$\left. \begin{aligned} y_{,i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} &= 0 & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_j} = G^j &= 0 & j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\}$$

که منجر به یک دستگاه معادلات جبری شده و با حل آن مختصات x_i و همچنین مقادیر عددی ضرایب λ_j که به ازای آن تابع $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ به همراه آن قیود جانبی ماکزیمم و یا می‌نیمم می‌شود و متعاقباً مقادیر y اکسترمم نظیر به دست می‌آید؛ همانطور که مشاهده می‌شود در این گونه مسائل با توابعی از یک و یا چند متغیر مستقل سر و کار داشتیم لیکن اگر تابعی خودش تابعی از یک و یا چند متغیر وابسته باشد محاسبه اکسترمم آن چگونه است. قبل از شروع بحث پیرامون تئوری تغییرات بیان چند صورت مسئله، مفید خواهد بود؛ فرض کنید بخواهیم از بین تمام منحنی‌هایی که از دو نقطه مشخص A, B در صفحه xy مطابق شکل (۹-۱) عبور می‌کنند آن خمی را به دست آوریم که دارای کمترین طول باشد



شکل (۹-۱) منحنی‌های عبور کرده از دو نقطه مشخص در صفحه

با تعریف عمومی المان طول به صورت $ds^2 = dx^2 + dy^2$ بر روی یک منحنی مانند $y(x)$ خواهیم داشت $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ لذا طول یک خم مسطح دلخواه در حد فاصل این دو نقطه را می‌توان به صورت رابطه انتگرالی زیر نوشت

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (۱-۹)$$

در واقع تابعی از تابع $y(x)$ است که اصطلاحاً فانکشنال^۱ طول نامیده می‌شود و هدف اکسترمم کردن آن است اینکه این فانکشنال چگونه اکسترمم و یا به بیان دیگر ایستا می‌شود و با تغییر کردن تابع y به چه صورت تغییر می‌کند سؤالاتی هستند که پاسخ به آنها منجر به توسعه مبحثی به نام تئوری تغییرات یا تئوری وردشها^۲ خواهد شد (Wiley, 1990). در این بخش از این فصل، نگاه مختصری به مبانی حساب تغییرات می‌شود.

تئوری تغییرات بر یک لم^۳ اساسی استوار است؛ اگر $y(x)$ تابعی پیوسته در بازه $[x_1, x_2]$ و $\xi(x)$ تابعی $C^1(x_1, x_2)$ در این بازه باشد (یعنی خود تابع و مشتق آن پیوسته باشد) و انتگرال

$$\left. \begin{aligned} &\forall \xi(x) \in C^1(x_1, x_2) \\ &\int_{x_1}^{x_2} y(x) \xi(x) dx = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y(x) \equiv 0 \quad (۲-۹)$$

به ازای هر تابع دلخواه $\xi(x)$ برابر صفر باشد در این صورت در این بازه تابع $y(x) \equiv 0$ متحد با صفر است. حال ساده‌ترین مسئله در تئوری تغییرات که ماکزیمم می‌نیمم کردن فانکشنال

^۱ Functional

^۲ Calculus of Variation

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (۳-۹)$$

است مورد بررسی قرار می‌گیرد به قسمی که $y(x_1)$ و $y(x_2)$ مقادیر مشخصی هستند و فرض بر آن است که تابع $y(x)$ یک تابع $C^2(x_1, x_2)$ است. هرچند به نظر می‌رسد که اکسترمم کردن فانکشنال فوق، تحلیل یک مسئله موردی و خاص است لیکن روند حل آن که در زیر ارائه می‌شود منجر به بیان مبانی تئوری تغییرات خواهد شد.

فانکشنال I تابعی از $y(x)$ است لذا به ازای هر تابع دلخواه $\xi(x)$ ، یک تغییر یا نمو بسیار کوچک در این فانکشنال به ازای $y + \varepsilon \xi$ ایجاد می‌شود؛ به قسمی که ε یک عدد بسیار کوچک است

$$I(y + \varepsilon \xi) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \varepsilon \xi, y' + \varepsilon \xi') dx \quad (۴-۹)$$

حال فرض کنید که $y(x)$ پاسخ مسئله بوده یعنی I به ازای $y(x)$ اکسترمم است در نتیجه بایستی تغییرات یا مشتق $I(y + \varepsilon \xi)$ نسبت به پارامتر ε در $\varepsilon = 0$ برابر صفر باشد یعنی

$$\left(\frac{dI}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0 \quad (۵-۹)$$

با انجام عملیات مشتق گیری می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI}{d\varepsilon} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial (y + \varepsilon \xi)} \frac{d(y + \varepsilon \xi)}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial (y' + \varepsilon \xi')} \frac{d(y' + \varepsilon \xi')}{d\varepsilon} \right) dx \\ \left(\frac{dI}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \xi + \frac{\partial F}{\partial y'} \xi' \right) dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (۶-۹)$$

با جزء به جزء کردن جمله دوم انتگرال فوق و با انتخاب تابع $\xi(x)$ از مجموعه توابع $C^2(x_1, x_2)$ با شرط $\xi(x_1) = \xi(x_2) = 0$ خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \xi\right) dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \xi\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}\right) \xi dx = 0 \\ \left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}\right) \xi dx = 0 \quad \forall \xi(x) \in C^2 \end{aligned} \right\} \quad (۷-۹)$$

با توجه به لِم اساسی در تئوری تغییرات که در قبل بیان شد نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (۸-۹)$$

که یک معادله دیفرانسیل عادی غیرخطی مرتبه دوم است و به معادلهٔ اوایلر-لاگرانژ معروف است و در واقع ارضای آن به معنای ایستادن فانگشنال I بوده و شرط لازمی برای اکسترمم شدن آن است لیکن شرط کافی نیست و ممکن است اکسترمم موضعی باشد. انتخاب توابع $\xi(x)$ با شرط صفر بودن در نقاط مرزی، محدودیتی در اثبات لِم اساسی، ایجاد نمی‌کند چراکه کماکان بی‌نهایت تابع با این ویژگی وجود دارد که بتواند هستهٔ انتگرال را متحد با صفر کند. با بسط معادلهٔ اوایلر می‌توان آنرا به صورت زیر نیز نوشت

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (۹-۹)$$

مثال (۱-۹)

به عنوان مثال برای محاسبه مقدار می‌نیمم فانگشنال طول که در ابتدا مطرح شد داریم

$$F = \sqrt{1 + (y')^2}$$

یعنی F صرفاً تابع y' است لذا معادلهٔ اویلر به صورت

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} y'' = \frac{y''}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}} = 0$$

در می‌آید که در نهایت منجر به معادلهٔ خط می‌شود

$$\left. \begin{array}{l} y'' = 0 \\ y = ax + b \end{array} \right\}$$

۹-۱-۲ تعریف اپراتور تغییرات یا وردش

با توجه به توضیح داده شده در قبل، تغییرات یا وردش یک تابع به صورت

$$\delta y(x) \triangleq \varepsilon \xi(x) \quad (۹-۱۰)$$

تعریف می‌شود. حال با یک تغییر در تابع y می‌توان تغییر ایجاد شده در F یا هسته فانگشنال I را به صورت زیر نوشت

$$\Delta F = F(x, y + \varepsilon \xi, y' + \varepsilon \xi') - F(x, y, y') \quad (۹-۱۱)$$

با بسط تیلور این فانگشنال حول $\varepsilon = 0$ داریم

$$\left. \begin{aligned} \Delta F = & \left(\frac{\partial F}{\partial y} \xi + \frac{\partial F}{\partial y'} \xi' \right) \varepsilon \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} \xi^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \xi \xi' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} \xi'^2 \right) \varepsilon^2 \\ & + \dots \end{aligned} \right\} \quad (۹-۱۲)$$

حال تا مرتبهٔ خطی از ε را انتخاب کرده و به نام وردش تعریف می‌کنیم و به صورت زیر می‌نویسیم

$$\left. \begin{aligned} \delta F &\triangleq \left(\frac{\partial F}{\partial y} \xi + \frac{\partial F}{\partial y'} \xi' \right) \varepsilon \\ \delta y &= \varepsilon \xi, \quad \delta y' = \varepsilon \xi' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta F \triangleq \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \quad (۱۳-۹)$$

با توجه به نحوهٔ تعریف اپراتور تغییرات یا وردش به صورت فوق که در واقع همان جملهٔ خطی بسط تیلور است می‌توان نتیجه گرفت

$$\left. \begin{aligned} \delta(F_1 \pm F_2) &= \delta F_1 \pm \delta F_2 \\ \delta(F_1 F_2) &= F_1 \delta F_2 + F_2 \delta F_1 \\ \delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) &= \frac{F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2}{(F_2)^2} \\ \delta F^n &= n F^{n-1} \delta F \end{aligned} \right\} \quad (۱۴-۹)$$

یعنی از قوانینی مشابه با حساب دیفرانسیل معمولی تبعیت می‌کند. حال اگر به همان مسئلهٔ ساده در تئوری تغییرات بازگردیم داریم

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \quad (۱۵-۹)$$

با توجه به اینکه δy دلخواه است و می‌توان آنرا روی نقاط مرزی برابر صفر در نظر گرفت لذا با جزء به جزء کردن جملهٔ دوم انتگرال خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx \end{aligned} \quad (۱۶-۹)$$

در نتیجه شرط لازم و کافی برای اینکه $\delta I = 0$ باشد آنست که معادله دیفرانسیل اویلر برقرار باشد. وقتی تغییرات یا وردش یک فانگشنال برابر صفر باشد $\delta I = 0$ اصطلاحاً گویند که آن فانگشنال ایستا^۱ شده است و همانطور که مشاهده شد منجر به یک

معادله دیفرانسیل می‌شود یعنی به ازای تابعی که پاسخ معادله دیفرانسیل اوایلر باشد فانگشنال I به صورت موضعی اکسترمم است. اینچنین نیز می‌توان گفت که هر فانگشنال یک معادله دیفرانسیل نظیر دارد و برعکس هر معادله دیفرانسیل یک فانگشنال نظیر دارد که اصطلاحاً آن را فرم تغییراتی آن معادله دیفرانسیل گویند. اصل کار مجازی در مسائل مهندسی در واقع همان فرم تغییراتی معادلات دیفرانسیل تعادل یا همان اصول بقای اندازه حرکت است؛ به بیان دیگر شرط لازم و کافی برای اینکه فانگشنال انرژی پتانسیل کل ایستا شود آن است که معادلات دیفرانسیل تعادل ارضا شوند.

مثال (۹-۲)

از بین تمام منحنی‌های مسطح دو بعدی که از دو نقطه مشخص عبور می‌کنند خمی را تعیین کنید که از دوران آن حول یکی از محورهای مختصات رویه‌ای با کمترین مساحت پیرامونی حاصل شود

حل: فرض کنید تابع $y(x)$ را حول محور x دوران دهیم در این صورت مساحت جانبی رویه حاصل شده عبارت است از

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

لذا شرط لازم برای اکسترمم شدن S آن است که معادله اوایلر به ازای $F = y\sqrt{1 + (y')^2}$ برقرار باشد از طرفی به سادگی می‌توان ثابت کرد که

$$\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = y' \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{\partial F}{\partial x}$$

لذا در مواردی که هسته انتگرال F تابع متغیر x نباشد ارضای معادله اوایلر-لاگرانژ منجر به انتگرال اولی به صورت زیر خواهد شد

$$y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = k$$

به قسمی که k یک عدد ثابت است بنابراین در این مثال خاص داریم

$$\left. \begin{aligned} \frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} - y\sqrt{1+(y')^2} &= k \\ y^2 - k^2 &= k^2(y')^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow dx = \frac{\pm k}{\sqrt{y^2 - k^2}} dy$$

در نهایت می‌توان با حل معادله دیفرانسیل فوق جواب مسئله را به صورت زیر نوشت

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm k \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - k^2}} = \pm k \cosh^{-1} \left(-\frac{y}{k} \right) + h \\ y &= -k \cosh \left(\frac{x-h}{k} \right) \end{aligned} \right\}$$

مثال (۹-۳)

در ابتدا فانگشنال نظیر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $xy'' + 2y' - xy + 1 = 0$ در بازه $x \in [0,1]$ با شرایط مرزی $(y)_{x=0} = 0$, $(y' + y)_{x=1} = P$ را استخراج کرده و سپس بهترین تقریب از خانواده توابع $y = ax^2$ برای حل تقریبی این معادله دیفرانسیل را در حالت $P = 4$ به دست آورید.

حل: به طور کلی برای اینکه فانگشنال نظیر یک معادله دیفرانسیل را استخراج کنیم بهتر است در ابتدا مشتقات فرد را به گونه‌ای حذف کنیم و اگر مرتبه معادله دیفرانسیل فرد باشد لزوماً بایستی در صورت امکان با انتگرالگیری و یا در غیر این صورت با مشتق گیری آنرا به یک معادله دیفرانسیل با مرتبه زوج بدل کرد و سپس مشتقات فرد را حذف کرد. این روند می‌تواند با تغییر متغیر در حوزه متغیر مستقل و یا متغیر وابسته

باشد. در این مورد خاص فرض کنید تغییرمتغیر در حوزه متغیر وابسته به صورت $y = zf(x)$ در نظر گرفته شود که با مشتق گیری منجر می شود به

$$\left. \begin{aligned} y' &= z'f + zf' \\ y'' &= z''f + 2z'f' + zf'' \end{aligned} \right\}$$

و با جایگذاری در معادله دیفرانسیل نتیجه می شود

$$\left. \begin{aligned} xz''f + 2xz'f' + xzf'' + 2z'f + 2zf' - xzf + 1 &= 0 \\ (xf)z'' + 2(xf' + f)z' + (xf'' + 2f' - xf)z + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

حال ضریب z' را برابر صفر قرار می دهیم در این صورت تابع $f(x)$ مشخص می شود

$$xf' + f = 0 \Rightarrow \frac{f'}{f} = -\frac{1}{x} \Rightarrow f = \frac{1}{x}$$

در نتیجه با جایگذاری $y = z/x$ در معادله دیفرانسیل اولیه داریم

$$z'' - z + 1 = 0$$

حال با ضرب معادله دیفرانسیل در δz و انتگرالگیری در بازه مربوطه و نیز انجام عملیات جزء به جزء داریم

$$\left. \begin{aligned} \delta I &= \int_0^1 (z'' - z + 1) \delta z dx = 0 \\ &= z' \delta z \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (z' \delta z' + z \delta z - \delta z) dx \\ &= (xy' + y)x \delta y \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (z' \delta z' + z \delta z - \delta z) dx \\ &= P \delta y \Big|_{x=1} - \int_0^1 (z' \delta z' + z \delta z - \delta z) dx \end{aligned} \right\}$$

در نتیجه فانگشنال این معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی مربوطه را می توان به صورت زیر نوشت

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 ((z')^2 + z^2 - 2z) dx - Py]_{x=1} \\ I &= \frac{1}{2} \int_0^1 ((xy' + y)^2 + x^2 y^2 - 2xy) dx - Py]_{x=1} \end{aligned} \right\}$$

حال با قرار دادن تابع تقریبی $y = ax^2$ یا $z = ax^3$ در فانگشنال فوق داریم

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 ((3ax^2)^2 + (ax^3)^2 - 2ax^3) dx - Pa \\ I &= \frac{9}{10} a^2 + \frac{1}{14} a^2 - \frac{1}{4} a - 4a \end{aligned} \right\}$$

اکنون تغییرات فانگشنال را نسبت به تنها متغیر آن یعنی a برابر صفر قرار می‌دهیم

$$\left. \begin{aligned} \delta I &= \frac{\partial I}{\partial a} \delta a = \left(\frac{9}{5} a + \frac{1}{7} a - \frac{17}{4} \right) \delta a = 0 \\ a &= \frac{35}{16} = 2.1875 \end{aligned} \right\}$$

در واقع تابع $y = 35x^2/16$ معادله دیفرانسیل مربوطه را ارضا نمی‌کند لیکن بهترین تقریب ممکن برای یک چنین تابعی است به بیان مهندسی همان می‌نیمم کردن انرژی پتانسیل کل یا اصل کار مجازی است و $(y' + y)_{x=1} = P$ مبنی یک عامل یا نیروی خارجی متمرکز در انتهای عضو می‌باشد که با تغییر مقدار y کار انجام می‌دهد.

مثال (۹-۴)

معادله دیفرانسیل نظیر فانگشنال $I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'') dx$ را به دست آورید

حل: با ایستا کردن این فانگشنال خواهیم داشت

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' \right) dx$$

با انجام یک بار عملیات جزء به جزء کردن جمله دوم انتگرال خواهیم داشت

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

همچنین با انجام دو بار عملیات جزء به جزء کردن جمله سوم انتگرال خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' \right) dx &= \left. \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y' dx \\ &= \left. \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right|_{x_1}^{x_2} - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y dx \end{aligned}$$

با توجه به اینکه δy و به تبع $\delta y'$ دلخواه است و می‌توان آنها را روی نقاط مرزی برابر صفر در نظر گرفت در نتیجه با جایگذاری روابط فوق داریم

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y dx = 0$$

در نتیجه شرط ایستا کردن این فانگشنال منجر به معادله دیفرانسیل زیر خواهد شد

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0$$

۳-۱-۹ فانکشنالهای چند متغیره و قیود جانبی

فرض کنید بخواهیم فانگشنال طول را برای یک خم سه بُعدی فضائی در مختصات xyz نوشته و با اکسترمم کردن آن معادله خط را نتیجه بگیریم در این صورت با تعریف عمومی المان طول به صورت $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ بر روی یک خم دلخواه با بیان پارامتری $x(t), y(t), z(t)$ خواهیم داشت $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$ لذا طول یک خم فضائی دلخواه در حد فاصل دو نقطه را می‌توان به صورت فانگشنال زیر نوشت

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

که در واقع تابعی از سه تابع $x(t), y(t), z(t)$ است.

به طور کلی اگر یک فانکشنال تابعی از n متغیر وابسته x_i بر حسب یک متغیر مستقل t باشد به عنوان مثال به صورت

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x_i, \dot{x}_i) dt \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (۱۷-۹)$$

در این صورت به طور مشابه می‌توان ثابت کرد شرط لازم برای اکسترمم شدن I آن است که دستگاه معادلات اویلر به صورت زیر برقرار باشد

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (۱۸-۹)$$

و همچنین اگر در کنار فانکشنال، شرایط و قیود جانبی به صورت زیر داشته باشیم

$$\left. \begin{aligned} I &= \int_{t_1}^{t_2} F(t, x_i, \dot{x}_i) dt \quad i = 1, 2, \dots, n \\ G_j(t, x_i, \dot{x}_i) &= 0 \quad j = 1, 2, \dots, m < n \\ \int_{t_1}^{t_2} G_j(t, x_i, \dot{x}_i) dt &= 0 \quad j = 1, 2, \dots, m < n \end{aligned} \right\} \quad (۱۹-۹)$$

در این صورت شرط لازم برای اکسترمم شدن I آن است که دستگاه معادلات اویلر برای تابع تعمیم یافته به صورت زیر برقرار باشد

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \hat{F} &= F + \sum_{k=1}^m \lambda_k G_k \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial \lambda_k} &= G_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (۲۰-۹)$$

که در آن λ_k را اصطلاحاً ضرایب لاگرانژ گویند. کلیه روابط و مفاهیم اخیر قابل تعمیم به توابع با چندمتغیره مستقل نیز می‌باشد به عنوان مثال اگر $z = z(x, y)$ یک تابع

دو متغیره باشد در این صورت ساده‌ترین فانگشنال از این تابع و مشتقات مرتبه اولش را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I = \iint_{\mathfrak{R}} F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) da \quad (۲۱-۹)$$

به قسمی که $\mathfrak{R}$ هر حوزه بسته دلخواه با مرز $\partial\mathfrak{R}$ در صفحه xy است و $da = dxdy$ المان سطح می‌باشد حال با اکسترمم کردن فانگشنال فوق خواهیم داشت

$$\delta I = \iint_{\mathfrak{R}} \delta F dxdy = \iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial z_x} \delta z_x + \frac{\partial F}{\partial z_y} \delta z_y \right) da$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \delta I = & \oint_{\partial\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial F}{\partial z_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial z_y} n_y \right) \delta z ds \\ & - \iint_{\mathfrak{R}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial z_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial z_y} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} \right] \delta z da \end{aligned}$$

به قسمی که ds المان خط و n_x, n_y مؤلفه‌های بردار یکه عمود بر مرز $\partial\mathfrak{R}$ می‌باشند. حال با فرض اینکه بر روی مرز $\partial\mathfrak{R}$ داشته باشیم $\delta z = 0$ معادله فوق منجر به معادله اویلر دوبعدی به صورت زیر می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial z_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial z_y} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (۲۲-۹)$$

مثال (۹-۴)

در فضای سه بعدی x, y, z ذره‌ای به جرم واحد بر روی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ در مدت زمان T از نقطه‌ای به مختصات $\langle 0, 0, 1 \rangle$ به نقطه $\langle 0, 0, -1 \rangle$ می‌رسد مطلوب است تعیین مسیر حرکت این ذره به گونه‌ای که انرژی جنبشی آن می‌نیمم باشد.

حل: فانکشنال انرژی جنبشی این ذره به همراه قید حرکت بر روی کره واحد را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E = \frac{1}{2} \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dt - \frac{1}{2} \int_0^T \mu (x^2 + y^2 + z^2 - 1) dt \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{F} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \mu (x^2 + y^2 + z^2 - 1) \end{array} \right.$$

به قسمی که $\mu = \mu(t)$ ضریب لاگرانژ است که با قرار دادن در معادلات اوایلر-لاگرانژ داریم

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} + \mu x = 0 \\ \ddot{y} + \mu y = 0 \\ \ddot{z} + \mu z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\ddot{x}}{x} = \frac{\ddot{y}}{y} = \frac{\ddot{z}}{z}$$

که می‌توان آنها را به صورت معادلات دیفرانسیل زیر نوشت

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}y - \ddot{y}x = 0 \\ \ddot{x}z - \ddot{z}x = 0 \\ \ddot{y}z - \ddot{z}y = 0 \end{array} \right\}$$

با انجام عملیات انتگرال گیری خواهیم داشت

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}y - \dot{y}x = a \\ \dot{x}z - \dot{z}x = b \\ \dot{y}z - \dot{z}y = c \end{array} \right\}$$

به قسمی که a, b, c اعداد ثابت هستند حال با استفاده از مختصات کروی بر روی کره واحد $x = \sin\phi \cos\theta$, $y = \sin\phi \sin\theta$, $z = \cos\phi$ اولین معادله فوق به صورت زیر در می‌آید

$$-(\sin\phi)^2 \dot{\theta} = a$$

و چون در زمان $t = 0$ ذره در بالای کره یعنی در $\phi = 0$ قرار دارد لذا بایستی $a = 0$ باشد بنابراین معادله فوق منجر به $\dot{\theta} = 0$ و یا $\theta = cte'$ ثابت خواهد شد که به این معنی است که مسیر حرکت ذره بر روی دوایر عظیمه و یا همان نصف‌النهار می باشد با اعمال این نتیجه دو معادله دیفرانسیل دیگر منجر به

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{b}{\cos\theta} \\ \dot{\phi} &= \frac{c}{\sin\theta} \end{aligned} \right\}$$

یعنی $\dot{\phi} = cte'$ برابر مقدار ثابت خواهند شد که با اعمال شرط زمانی داریم $\phi = \pi t/T$ به این ترتیب می توان مقدار می نیم انرژی جنبشی را نیز در طول این حرکت به دست آورد

$$E = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\pi^2}{T^2} dt = \frac{\pi^2}{2T}$$

۲-۹ اصل کار مجازی

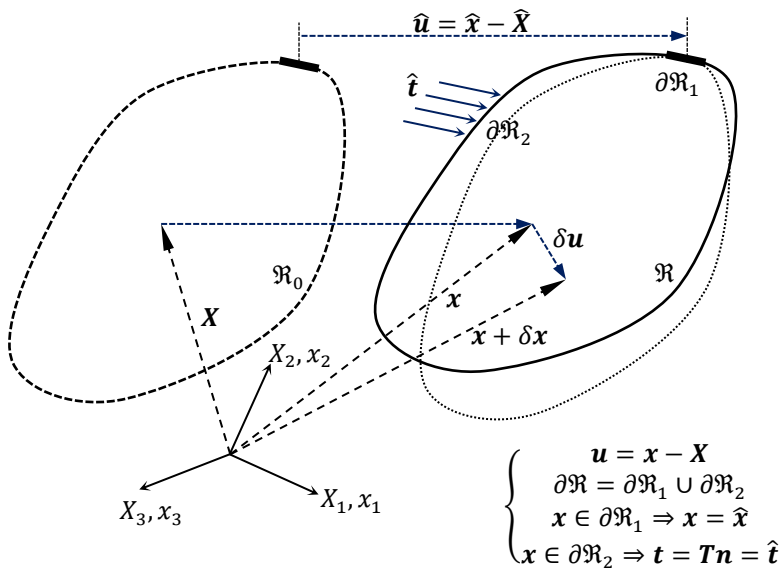
اصل کار مجازی برای مسائل استاتیکی و یا تعمیم آن برای مسائل دینامیکی از جمله روابط مفیدی هستند که به نحوی با تئوری تغییرات دارای قرابتند و برای تحلیل مسائل مهندسی به خصوص تحلیل های عددی مورد استفاده قرار می گیرد اصل کار مجازی از لحاظ ریاضی در واقع فرم تغییراتی معادلات بقاء است که همان معادلات دیفرانسیل تعادل موضعی یک نقطه مادی از یک محیط پیوسته است؛ اگر t_{ij} تانسور تنش کوشی، ρ چگالی این محیط پیوسته، b_i چگالی نیروی بدنه و a_i شتاب این جسم بر حسب مختصات دکارتی هیئت فعلی x_i باشند در این صورت فرم موضعی شش معادله تعادل منجر به روابط زیر می شود

$$\left. \begin{aligned} \sum F_1 = 0 &\Rightarrow \frac{\partial t_{1j}}{\partial x_j} + \rho b_1 = \rho a_1 \\ \sum F_2 = 0 &\Rightarrow \frac{\partial t_{2j}}{\partial x_j} + \rho b_2 = \rho a_2 \\ \sum F_3 = 0 &\Rightarrow \frac{\partial t_{3j}}{\partial x_j} + \rho b_3 = \rho a_3 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \sum M_1 = 0 &\Rightarrow t_{23} = t_{32} \\ \sum M_2 = 0 &\Rightarrow t_{13} = t_{31} \\ \sum M_3 = 0 &\Rightarrow t_{12} = t_{21} \end{aligned} \right\} \quad (۲۳-۹)$$

با جمع بندی روی اندیس تکراری که در واقع سه معادله دیفرانسیل پاره‌ای بر حسب شش مؤلفه تانسور تنش کوشی است. شکل (۷-۲) هندسه یک بدنه از یک محیط پیوسته را به همراه مرز آن در هیئت مرجع و در حالت تعادل (استاتیکی و یا دینامیکی) در هیئت فعلی نشان می‌دهد نیروهای خارجی اعمال شده به جسم شامل نیروهای بدنه و بردارهای تراکشن مرزی هستند مرز این بدنه، متناسب با شرایط مرزی به دو قسمت تقسیم شده است؛ $\partial \mathcal{R}_1$ قسمتی از مرز با شرایط مرزی هندسی است که جابجایی بر روی آن برابر مقدار مشخصی است و $\partial \mathcal{R}_2$ قسمتی از مرز با شرایط مرزی استاتیکی است که تراکشن بر روی آن برابر مقدار مشخصی است. حال اگر از وضعیت تعادل فعلی یک جابجایی مجازی به جسم اعمال کنیم در این صورت $\mathcal{R}_{ext}$ یعنی کل کار انجام شده توسط نیروهای خارجی به صورت زیر قابل بیان است به قسمی که da المان سطح و dv المان حجم می‌باشد (Washizu, 1982)

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_{ext} &= \int_{\mathcal{R}} \rho(b_i - a_i) \delta u_i dv + \int_{\partial \mathcal{R}_2} \hat{t}_i \delta u_i da \\ \mathcal{R}_{ext} &= \int_{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{u} dv + \int_{\partial \mathcal{R}_2} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} da \end{aligned} \right\} \quad (۲۴-۹)$$

گرچه معمولاً برای جابجایی مجازی از نماد تغییراتی $\delta \mathbf{u}$ استفاده می‌شود لیکن چنین استفاده‌ای اصولاً ضرورت نداشته بلکه جابجایی‌های مجازی را می‌توان توابعی هموار در حوزه برقراری معادلات تعادل انگاشت که ارتباطی با جابجایی‌های واقعی ندارند.



شکل [۹-۲] اعمال یک تغییر مکان مجازی به بدنه در مال تعادل در هیئت فعلی

حال با جایگذاری $\hat{t} = Tn$ و یا به صورت اندیسی $\hat{t}_i = t_{ij}n_j$ و با فرض اینکه جابجائی مجازی بر روی قسمتی از مرز که شرایط مرزی هندسی وجود دارد یعنی بر روی مرز ∂R_1 برابر صفر باشد و همچنین با استفاده از قضیه دیورژانس داریم

$$\mathcal{R}_{ext} = \int_{\mathcal{R}} (\rho b_i - \rho a_i + t_{ij,j}) \delta u_i dv + \int_{\mathcal{R}} t_{ij} \delta u_{i,j} dv \quad (۲۵-۹)$$

که با اعمال فرم موضعی اصل پایستگی تکانه خطی انتگرال اول عبارت فوق برابر صفر می‌شود و با در نظر گرفتن تقارن تانسور تنش کوشی نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{ext} &= \int_{\mathfrak{R}} \rho(b_i - a_i) \delta u_i dv + \int_{\partial \mathfrak{R}_2} \hat{t}_i \delta u_i da \\ &= \int_{\mathfrak{R}} t_{ij} \delta u_{i,j} dv = \mathcal{R}_{int} = \int_{\mathfrak{R}} t_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv\end{aligned}\quad (26-9)$$

به قسمی که $\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$ است. سمت راست رابطه فوق $\mathcal{R}_{int}$ مبین کار انجام شده توسط تانسور تنش بر کرنش مجازی است بنابراین برای جسمی که در حالت تعادل استاتیکی و یا دینامیکی است اگر یک جابجائی مجازی سازگار با شرایط مرزی هندسی، اعمال شود کار خارجی برابر کار داخلی است لازم به ذکر است که سازگار نبودن جابجائی مجازی با شرایط مرزی هندسی از اعتبار اصل کار مجازی نمی‌کاهد صرفاً کار خارجی مربوط به عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی بایستی در محاسبات وارد شوند؛ از لحاظ ریاضی این عکس‌العمل‌ها همان ضرائب لاگرانژ هستند همچنین لازم به ذکر است که هیچ گونه محدودیتی بر اصل کار مجازی مترتب نیست، اعم از تغییرشکلهای کوچک و یا بزرگ و اینکه ساختار داخلی ماده تشکیل دهنده جسم چگونه باشد اعم از ایزوتروپیک یا غیر ایزوتروپیک، خطی باشد و یا غیرخطی، الاستیک باشد و یا پلاستیک. اصل کار مجازی در رابطه (۲۶-۹) از لحاظ ریاضی در واقع فرم تغییراتی معادلات دیفرانسیل تعادل در روابط (۲۳-۹) است. همچنین می‌توان اثبات کرد که کار داخلی $\mathcal{R}_{int}$ را می‌توان در هیئت مرجع بر حسب تانسور تنش پیولای نوع اول P_{iA} و نوع دوم S_{AB} به صورت زیر نوشت (Naghdi, 1994) به قسمی که $F_{iA} = x_{i,A} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A}$ تانسور گرادیان تغییرفرم و E_{AB} تانسور کرنش گرین است

$$\mathcal{R}_{int} = \int_{\mathfrak{R}} t_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_{\mathfrak{R}_0} P_{iA} \delta F_{iA} dV = \int_{\mathfrak{R}_0} S_{AB} \delta E_{AB} dV \quad (27-9)$$

حال چنانچه بدون توجه به نحوه استخراج رابطه کار مجازی این رابطه به عنوان یک اصل پذیرفته شود می‌توان معادلات پایستگی را به همراه شرایط مرزی از آن نتیجه گرفت. فرض کنید رابطه (۲۶-۹) به ازای هر جابجائی مجازی دلخواه برقرار باشد با توجه به متقارن بودن کرنش مجازی بدیهی است که جزء پاد متقارن تانسور تنش

سهمی در سمت راست رابطه فوق نداشته و می‌توان تانسور تنش را متقارن در نظر گرفت با در نظر گرفتن این نکته، سمت راست رابطه فوق با استفاده از قضیه دیورژانس به نحو زیر ساده می‌شود

$$\left. \begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} t_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv &= \int_{\mathcal{R}} t_{ij} \delta u_{i,j} dv = \int_{\mathcal{R}} (t_{ij} \delta u_i)_{,j} dv - \int_{\mathcal{R}} t_{ij,j} \delta u_i dv \\ &= \int_{\partial \mathcal{R}_2} t_{ij} n_j \delta u_i da - \int_{\mathcal{R}} t_{ij,j} \delta u_i dv \end{aligned} \right\}$$

با جاگذاری در رابطه اصل کار مجازی نتیجه می‌شود

$$\int_{\mathcal{R}} (t_{ij,j} + \rho b_i - \rho a_i) \delta u_i dv + \int_{\partial \mathcal{R}_2} (\hat{t}_i - t_{ij} n_j) \delta u_i da \quad (28-9)$$

$$= 0$$

که در واقع اگر رابطه فوق بخواهد به ازای هر جابجائی مجازی، برقرار باشد بایستی هسته انتگرالهای فوق برابر صفر باشند. که در واقع همان معادلات دیفرانسیل تعادل و شرایط مرزی هستند (Washizu, 1982)

۳-۹ کاربرد اصل کار مجازی

اگر میدان دقیق و واقعی تنش کوشی در داخل یک محیط پیوسته در دست باشد به ازای هر تغییر مکان مجازی دلخواه رابطه (۹-۲۶) فوق برقرار است یکی از کاربردهای گسترده اصل کار مجازی در حل عددی معادلات دیفرانسیل تعادل است که توسعه روش اجزای محدود و یا گالرکین بر آن استوار است. روند کار به این صورت است که ابتدا متغیرهای وابسته که عمدتاً مؤلفه‌های تغییرمکان هستند بر روی دامنه جسم سازگار با شرایط مرزی هندسی بر حسب ضرائب مجهول، درونیابی شده و سپس با استفاده از اصل کار مجازی این ضرائب به دست می‌آیند نکته بسیار مهم در اینجا

است که اگر میدان جابجائی درونیایی شده میدان دقیق مسئله باشد مستقل از اینکه جابجائی مجازی چگونه باشد منجر به حل دقیق مسئله می‌شود و اگر میدان جابجائی درونیایی شده شامل کلیه توابع پاسخ دقیق مسئله نباشد در این صورت میزان دقت روش عددی وابسته به توابعی است که برای جابجائی مجازی در نظر گرفته می‌شود؛ پاسخ به این سؤال وابسته است به تعریفی که از میزان خطا داریم چون مبنای تحلیل عددی بر اساس کار و انرژی است لذا اگر تابع خطا را به صورت زیر تعریف کنیم با در نظر گرفتن رفتار خطی ماده $t_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ در یک بازه زمانی بسیار کوچک می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{error} &\triangleq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} (t_{ij}^{ext} - t_{ij}^{app})(\varepsilon_{ij}^{ext} - \varepsilon_{ij}^{app}) dv \Bigg\} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} C_{ijkl}(\varepsilon_{ij}^{ext} - \varepsilon_{ij}^{app})(\varepsilon_{kl}^{ext} - \varepsilon_{kl}^{app}) dv \Bigg\} \end{aligned} \quad (29-9)$$

به قسمی که $t_{ij}^{ext}, \varepsilon_{ij}^{ext}$ میدان تنش و کرنش دقیق و $t_{ij}^{app}, \varepsilon_{ij}^{app}$ میدان تنش و کرنش تقریبی که بر اساس میدان جابجائی درونیایی شده به دست می‌آیند باشد در این صورت با صفر قرار دادن تغییرات این تابع خطا به صورت

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathcal{E}_{error} &= \int_{\mathcal{R}} C_{ijkl}(-\delta \varepsilon_{ij}^{app})(\varepsilon_{kl}^{ext} - \varepsilon_{kl}^{app}) dv = 0 \\ \delta \mathcal{E}_{error} &= - \int_{\mathcal{R}} t_{ij}^{ext} \delta \varepsilon_{ij}^{app} dv + \int_{\mathcal{R}} t_{ij}^{app} \delta \varepsilon_{ij}^{app} dv = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

نتیجه می‌شود

$$\mathcal{R}_{ext} = \int_{\mathcal{R}} t_{ij}^{app} \delta \varepsilon_{ij}^{app} dv$$

یعنی از همان توابعی که برای محاسبه تنشها به کار رفته اگر به عنوان جابجائی مجازی استفاده شود به منزله می‌نیم کردن خطای روش عددی خواهد بود. در اکثر مسائل میدان جابجائی درونیایی شده دقیق نیست؛ در حالتی که میدان جابجائی دقیق نباشد

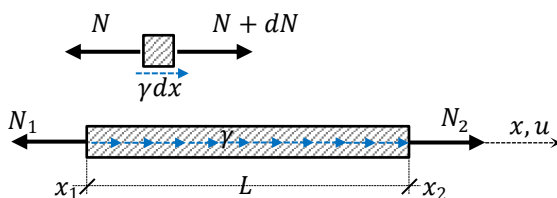
شرط اینکه خطای روش عددی می‌نیمم شود آنست که میدان جابجائی مجازی، همان میدان درونیابی شده برای محاسبه تنش باشد؛ با بسط تابع خطای تعریف شده در مسائل خطی و تغییر شکلهای کوچک می‌توان اصل می‌نیمم کردن انرژی پتانسیل کل را نتیجه گرفت در ادامه به ذکر چند مثال مختلف در خصوص نحوه کاربرد و توانائی اصل کار مجازی در تحلیل عددی مسائل مهندسی می‌پردازیم.

۴-۹ مسائل مهندسی در تغییر شکلهای کوچک

۴-۹-۱ میله تحت اثر بار محوری

یک میله یک بعدی با سطح مقطع A و مدول الاستیسیته E مطابق شکل (۶-۱) تحت اثر بار طولی با شدت γ را در نظر بگیرید در این جسم تنها مؤلفه غیر صفر تانسور تنش کوشی t_x بوده که برآیند آن برابر $N = At_x$ نیروی محوری میله خواهد شد حال اگر در یک بازه زمانی بسیار کوچک رفتار ماده را تک محوری خطی در نظر بگیریم می‌توان نیروی محوری میله را به صورت $N = AE\varepsilon_x$ بر حسب مؤلفه کرنش ε_x نوشت همچنین اگر تغییرشکل کوچک باشد $\varepsilon_x = du/dx$ یعنی ترم خطی مشتق جابجائی نسبت به مختصات فعلی خواهد شد لذا تعادل موضعی این میله منجر به معادله دیفرانسیل به همراه شرایط مرزی مربوطه زیر خواهد شد

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + \gamma &= 0 \\ AE \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_1} &= N_1 \\ AE \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_2} &= N_2 \end{aligned} \right\} \quad (۹-۳۰)$$



شکل [۳-۹] میله یک بعدی تحت اثر نیروی مموری

بنابراین فرم تغییراتی این معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} ((AEu')' + \gamma) \delta u dx = 0 \quad (۳۱-۹)$$

که با انجام انتگرال گیری جزء به جزء می توان فرم تغییراتی این معادله دیفرانسیل و همچنین اصل کار مجازی نظیر این مسئله را به صورت زیر نوشت

$$\left. \begin{aligned} \delta I &= AE \frac{du}{dx} \delta u \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} (AEu' \delta u' - \gamma \delta u) dx = 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} N \delta \varepsilon_x dx &= \int_{x_1}^{x_2} \gamma \delta u dx + N \delta u \Big|_{x_1}^{x_2} \end{aligned} \right\}$$

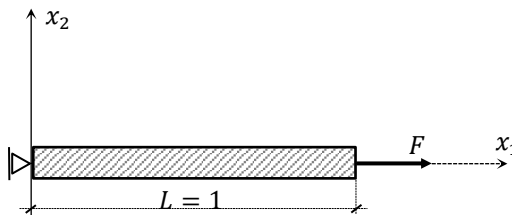
با اعمال شرایط مرزی مربوطه می توان فانگشنال این معادله دیفرانسیل که اصطلاحاً انرژی پتانسیل کل این میله نیز نامیده می شود را به صورت زیر نوشت

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2} AE (u')^2 - \gamma u \right) dx - Nu \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (۳۲-۹)$$

در واقع میدان جابجائی u که پاسخ مسئله است بایستی تابع فوق را می نیمم کند که اصطلاحاً چنین بیان می شود که تعادل در حداقل انرژی پتانسیل به وقوع می پیوندد لازم به ذکر است که این اصل، مستلزم تغییرشکلهای کوچک و رفتار خطی ماده است

مثال (۹-۷)

به عنوان یک مثال عددی میله یک بعدی با طول واحد و سطح مقطع یکنواخت A را مطابق شکل (۹-۴) که در انتها تحت اثر اعمال یک بار متمرکز قرار دارد در نظر بگیرید؛ فرض کنید تغییرشکلها کوچک بوده و قانون هوک برقرار باشد



شکل (۹-۴) میله یک بعدی تحت اثر نیروی مموری

با توجه به اینکه این مسئله از نظر استاتیکی معین بوده و نیز شدت بار طولی $\gamma = 0$ است لذا نیروی محوری در طول آن ثابت بوده

$$AE \frac{du}{dx} = F$$

و در نتیجه تغییر مکان دقیق این میله، تابعی خطی از x است. حال اگر درونیایی میدان جابجائی به صورت خطی $u = ax$ باشد در این صورت مستقل از اینکه میدان جابجائی مجازی چگونه در نظر گرفته شود همواره به حل دقیق مسئله که همان محاسبه دقیق ضریب a است منجر می شود در این صورت میدان تنش دقیق این میله را می توان به صورت زیر نوشت

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a \Rightarrow t_x = Ea$$

حال فرض کنید یک جابجائی سازگار با شرایط مرزی به صورت $u = bx^n$ به عنوان جابجائی مجازی $\delta u = \delta bx^n$ به این جسم اعمال شود به قسمی که b, n اعداد

دلخواه هستند در این صورت کار خارجی برابر $\mathcal{R}_{ext} = F\delta b$ خواهد شد و کار داخلی برابر است با

$$\mathcal{R}_{int} = \int_0^1 t_x \delta \varepsilon_x A dx = AEa \int_0^1 \delta b n(x)^{n-1} dx = AEa \delta b$$

تساوی کار داخلی و خارجی منجر به محاسبه $a = F/AE$ خواهد شد لازم به ذکر است با توجه به اینکه در این مسئله، میدان دقیق تنش داخلی جسم موجود بود اصل کار مجازی مستقل از نوع جابجائی مجازی یعنی مقدار n منجر به حل دقیق مسئله شد.

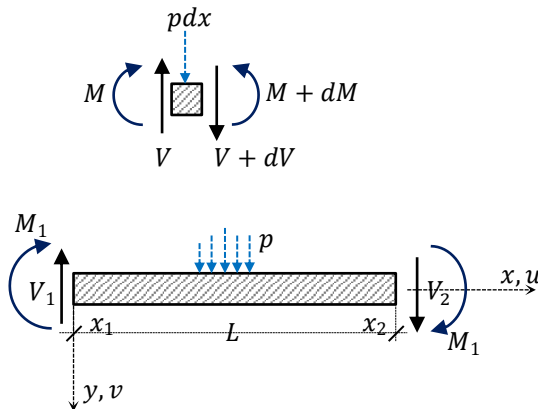
۹-۴-۲ تیر برنولی تحت اثر خمش و برش

یک تیر یک بعدی با سطح مقطع A و مدول الاستیسیته E مطابق شکل (۹-۵) تحت اثر بار عرضی با شدت p را در نظر بگیرید در این تیر مؤلفه‌های غیر صفر تانسور تنش کوشی t_x, t_{xy} هستند. تئوری تیر برنولی برای بررسی خمش خالص تیرهای کم عمق مورد استفاده قرار می‌گیرد و فرض اساسی آن این است که صفحات عمود بر محور تیر بعد از خمش کماکان به صورت صفحه و عمود باقی می‌مانند که منجر به این نتیجه می‌شود که تغییرات کرنش خمشی $\varepsilon_x = -\kappa y$ در راستای عمق مقطع به صورت خطی بوده و کرنش برشی ε_{xy} برابر صفر است به قسمی که κ انحنای تار خنثی تیر بعد از خمش می‌باشد. اگر تیر کم عمق باشد میزان کرنش خمشی کوچک بوده و لذا قانون هوک برقرار است و می‌توان نوشت $t_x = -E y \kappa$ بنابراین برآیند این تنشهای خمشی در مقطع تیر منجر به محاسبه لنگر خمشی M می‌شود

$$M = \iint_A t_x y dA = -E \kappa \left(\iint_A y^2 dA \right) = -EI \kappa \quad (۹-۳۳)$$

به قسمی که $I = \iint_A y^2 dA$ ممان اینرسی مقطع تیر است. تعادل موضعی این تیر منجر به معادلات دیفرانسیل زیر خواهد شد به قسمی که V نیروی برشی موجود در مقطع تیر است

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dx} + p &= 0 \\ \frac{dM}{dx} - V &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d^2 M}{dx^2} + p = 0 \quad (9-34)$$



شکل [۹-۵] میله یک بعدی تحت اثر نیروی مموری

در تغییر مکانهای کوچک می توان انحنای تیر را تقریباً برابر $\kappa \approx -v''$ در نظر گرفت به قسمی که v میدان جابجائی قائم تیر است در نتیجه لنگر خمشی برابر $M = -EIv''$ و نیروی برشی برابر $V = -(EIv'')'$ خواهد بود و بنابراین تعادل موضعی این تیر منجر به معادله دیفرانسیل به همراه شرایط مرزی مربوطه زیر خواهد شد

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - p &= 0 \\ -EI \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=x_i} &= M_i \\ -\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \Big|_{x=x_i} &= V_i \end{aligned} \right\} \quad (۳۵-۹)$$

به طور مشابه قبل فرم تغییراتی این معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} ((EIv'')'' - p) \delta v dx = 0 \quad (۳۶-۹)$$

که با انجام انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \delta I &= \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \delta v \Big|_{x_1}^{x_2} - \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \delta v' \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} (EIv'' \delta v'' - p \delta v) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

با اعمال شرایط مرزی مربوطه می توان فانگشنال این معادله دیفرانسیل که اصطلاحاً انرژی پتانسیل کل این تیر نیز نامیده می شود را به صورت زیر نوشت

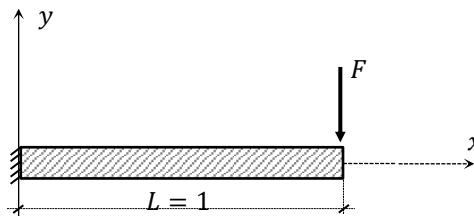
$$I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2} EI (v'')^2 - p v \right) dx - Vv \Big|_{x_1}^{x_2} + Mv' \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (۳۷-۹)$$

در واقع میدان جابجائی v که پاسخ مسئله است بایستی تابع فوق را می نیمم کند که اصطلاحاً چنین بیان می شود که تعادل در حداقل انرژی پتانسیل به وقوع می پیوندد لازم به ذکر است که استخراج فرم فانگشنال و یا اصل حداقل انرژی پتانسیل مستلزم تغییرشکلهای کوچک و رفتار خطی ماده است و در غیر این صورت می توان فرم تغییراتی معادلات دیفرانسیل را در قالب اصل کار مجازی به صورت زیر بیان کرد

$$\int_{x_1}^{x_2} M \delta \kappa dx = \int_{x_1}^{x_2} p \delta v dx + V \delta v \Big|_{x_1}^{x_2} - M \delta v' \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (۹-۳۸)$$

مثال (۹-۷)

تیر یک بعدی با یک تکیه‌گاه گیردار و سطح مقطع یکنواخت را مطابق شکل (۹-۶) تحت تأثیر یک بار متمرکز در انتهای آزاد آن در نظر بگیرید؛ فرض کنید تغییرشکلهای کوچک بوده، قانون هوک برقرار است.

**شکل (۹-۷) تیر یک بعدی تحت اثر بار عرضی**

با صرفنظر کردن از وزن تیر معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار خمشی آن به صورت

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d^4 v}{dx^4} = 0$$

می‌باشد و شرایط مرزی هندسی در تکیه‌گاه گیردار و شرایط مرزی استاتیکی در انتهای آزاد به ترتیب زیر خواهند بود

$$\left. \begin{aligned} v &= 0 \\ v' &= 0 \end{aligned} \right\}_{x=0} \quad \left. \begin{aligned} M &= -EIv'' = 0 \\ V &= -EIv''' = F \end{aligned} \right\}_{x=L}$$

واضح است که پاسخ دقیق مسئله یک چند جمله‌ای درجه سه می‌باشد؛ حال اگر برای تحلیل این تیر به جای حل معادله دیفرانسیل به همراه شرایط مرزی فوق از فرم تغییراتی آن یا همان اصل کار مجازی استفاده شود بایستی یک میدان جابجایی حقیقی و یک میدان جابجایی مجازی سازگار با شرایط مرزی هندسی برای این تیر درونیایی کنیم در ابتدا فرض کنید میدان جابجایی حقیقی به صورت زیر باشد

$$v = ax^2 + bx^3 + cx^4 \Rightarrow v'' = 2a + 6bx + 12cx^2$$

به قسمی که a, b, c مجهولات مسئله بوده و اصطلاحاً مختصات تعمیم یافته نامیده می‌شوند. حال اگر از یک تابع سازگار با شرایط مرزی هندسی مانند $v = \hat{a}x^n$ به عنوان جابجایی مجازی استفاده شود (به قسمی که n یک عدد صحیح و $\hat{a}$ یک عدد حقیقی دلخواه است) در این صورت یک جابجایی مجازی به صورت $\delta v = \delta \hat{a}x^n$ به تیر اعمال شده و با توجه به طول واحد تیر $L = 1$ و صرفاً تأثیر یک بار متمرکز، کار خارجی و همچنین کار داخلی انجام شده به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\mathcal{R}_{ext} = F\delta v)_{x=L} = \delta \hat{a}L^n)_{L=1} = F\delta \hat{a}$$

$$\mathcal{R}_{int} = \int_0^L M\delta \kappa dx = \int_0^1 EIv''\delta v''dx$$

$$= EI \int_0^1 (2a + 6bx + 12cx^2)\delta \hat{a}n(n-1)(x)^{n-2}dx$$

با تساوی کار داخلی و خارجی و حذف $\delta \hat{a}$ از طرفین آن نتیجه می‌شود

$$\left. \begin{aligned} \left[EI \left(\frac{2a}{n-1} + \frac{6b}{n} + \frac{12c}{n+1} \right) n(n-1) \right] \delta \hat{a} &= F\delta \hat{a} \\ 2an(n+1) + 6b(n^2-1) + 12cn(n-1) &= \frac{F}{EI}(n+1) \end{aligned} \right\}$$

که می‌توان رابطه فوق را به صورت زیر بر حسب توانهای مختلف n نوشت

$$-\left(6b + \frac{F}{EI}\right) + \left(2a - 12c - \frac{F}{EI}\right)n + (2a + 6b + 12c)n^2 = 0$$

واضح است مستقل از اینکه مقدار $n > 2$ چه عددی باشد معادله فوق منجر به محاسبه میدان جابجائی به صورت زیر می‌شود

$$a = \frac{F}{2EI} \quad b = -\frac{F}{6EI} \quad c = 0 \Rightarrow v = \frac{F}{6EI}(3x^2 - x^3)$$

که در واقع حل دقیق مسئله است. در روند تحلیل این تیر به صورت فوق و همچنین مثال (۹-۶) با درونیایی میدان جابجائی و استفاده از اصل کار مجازی و اعمال جابجائی مجازی کاملاً دلخواه، منجر به حل دقیق مسئله شد؛ به این دلیل که میدان جابجائی درونیایی شده میدان دقیق مسئله یا شامل کلیه ترمهای دقیق مسئله بود. حال فرض کنید میدان جابجائی درونیایی شده دقیق و یا کامل نباشد؛ به عنوان مثال برای تیر یکسرگیردار فوق اگر میدان جابجائی حقیقی به صورت $v = ax^m$ درونیایی شود بدیهی است که معادله دیفرانسیل را ارضا نمی‌کند و لذا به هر نتیجه‌ای که منجر شود تقریبی خواهد بود در این حالت اگر برای جابجائی مجازی از تابع $v = \hat{a}x^n$ استفاده شود با اعمال اصل کار مجازی خواهیم داشت

$$\mathcal{R}_{int} = aEI \int_0^1 m(m-1)(x)^{m-2} \delta \hat{a} n(n-1)(x)^{n-2} dx = F \delta \hat{a}$$

$$a = \frac{m+n-3}{m(m-1)n(n-1)} \frac{F}{EI}$$

بنابراین در این حالت جواب مسئله وابسته به تابع جابجائی مجازی است یعنی بایستی بررسی شود که برای یک m معلوم به ازای چه مقدار n این حل تقریبی به جواب دقیق نزدیکتر است؛ هرچند محاسبه میزان خطای این روش تقریبی وابسته به تعریفی است که از تابع خطا می‌شود لیکن برای نمونه در جدول زیر نسبت جابجائی انتهای تیر به جابجائی دقیق مسئله به ازای مقادیر مختلف آورده شده است

	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$m = 2$	0.750	2.000	2.667	3.333

$m = 3$		4.000	6.000	8.000
$m = 4$			9.600	13.333
$m = 5$				19.048

حال اگر تابع خطا را به صورت رابطه (۹-۲۹) یعنی اختلاف میزان انرژی تعریف کنیم داریم

$$\mathcal{E}_{error} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}} EI(\kappa^{ext} - \kappa^{app})^2 dv$$

که می‌نیمم کردن آن با توجه به اینکه $\delta\kappa^{ext} = 0$ یعنی تغییرات مقدار دقیق انحنا برابر صفر است منجر به رابطه زیر می‌شود

$$\delta\mathcal{E}_{error} = \int_{\mathfrak{R}} EI(\kappa^{ext} - \kappa^{app})(-\delta\kappa^{app})dv = 0$$

از طرفی اگر $M^{ext} = EI\kappa^{ext}$ تابع ممان دقیق تیر باشد اصل کار مجازی مبین رابطه

$$\mathcal{R}_{ext} = \int_{\mathfrak{R}} M^{ext}(\delta\kappa^{app})dv$$

است بنابراین می‌نیمم کردن تابع خطا به صورت فوق منجر به رابطه زیر خواهد شد

$$\int_{\mathfrak{R}} EI(\kappa^{app})(\delta\kappa^{app})dv = \mathcal{R}_{ext}$$

یعنی بایستی از هر تابعی که برای درونیایی میدان جابجائی حقیقی تیر استفاده می‌شود از همان تابع نیز برای اعمال جابجائی مجازی استفاده شود تا میزان خطا به فرم اختلاف انرژی به صورت رابطه فوق می‌نیمم شود؛ بنابراین در مثال قبل می‌نیمم خطا به ازای $m = n$ خواهد بود البته این نتیجه به صورت کمی در جدول نیز مشهود است.

۵-۹ تعریف ها

۱. معادله خم $y(x)$ مسطحی را به دست آورید که از دو نقطه مشخص عبور کرده و حاصل دروان آن حول محور y رویه‌ای با حداقل مساحت جانبی ایجاد شود
۲. ثابت کنید اگر $y(x)$ جوابی از معادله اویلر-لاگرانژ برای انتگرال زیر باشد در این صورت مقدار I متناظر با $y(x) \in C^2(x_1, x_2)$ که مقادیر انتهائی $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$ را اتخاذ می‌کنند یک می‌نیمم مطلق است (p, q) توابع مشخصی از x هستند

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (p^2(y')^2 + q^2 y^2) dx$$

۳. معادله خمی را تعیین کنید که نقاط $(0,1)$ و $(2,3)$ را به یکدیگر وصل کرده و بر روی آن مقدار انتگرال زیر می‌نیمم است

$$I = \int_0^2 \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} dx$$

۴. در صفحه xy فرض کنید محور y رو به پائین بوده، شتاب جاذبه g در این راستا باشد و از اصطکاک صرف‌نظر شود اولاً معادله خمی را تعیین کنید که ذره ای بر روی آن در کمترین زمان با سرعت اولیه صفر از مبدأ مختصات به نقطه $(1,1)$ می‌رسد ثانیاً معادله خمی را تعیین کنید که بر روی آن ذره‌ای با سرعت اولیه صفر از مبدأ مختصات بلغزد و به خط $x + 2y = 2$ برسد و همچنین محل تماس با این خط را نیز مشخص کنید

۵. مطلوب است معادله کوتاهترین فاصله بین دو نقطه یا اصطلاحاً ژئودزیک‌های واقع بر الف) روی یک استوانه به شعاع $r = a$ ب) بر روی یک کره به شعاع $r = a$ ج) بر روی یک مخروط با زاویه رأس θ

۶. ثابت کنید دستگاه معادلات اویلر لاگرانژ برای فانگشنال $I = \int_{t_1}^{t_2} F(x_i, \dot{x}_i) dt$ به قسمی که هسته انتگرال F تابع صریحی از متغیر مستقل t نیست دارای انتگرال اولی به صورت زیر است به قسمی که k یک عدد ثابت است و با توجه به شرایط ابتدائی و انتهائی مشخص می‌شود

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = k$$

۷. مطلوب است تعیین کلیه توابع $y(x)$ که در شرایط $y(0) = y(a) = 0$ صدق کرده و فانگشنال $I = \int_0^a (y')^2 dx$ را به همراه قید $\int_0^a y^2 dx = 1$ اکسترمم نمایند

۸. معادله خمی به طول $2l$ را که از نقاط $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ عبور کرده طوری به دست آورید که گرانیگاه آن در پائین ترین سطح ممکن قرار گیرد

۹. کابل انعطاف پذیری با طول و وزن ثابت بین دو نقطه $(0, 1)$ و $(1, 0)$ تحت اثر وزنش آویزان است با فرض اینکه در حالت تعادل پایدار استاتیکی انرژی پتانسیل کابل نسبت به محور افق می‌نیمم است شکلی که کابل به خود می‌گیرد را به دست آورید

۱۰. در ابتدا معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = 1$ به همراه شرایط انتهائی $y(0) = y(1) = 0$ را به فرم یک مسئله تغییراتی در آورده و سپس خانواده‌ای از توابع $y = a(x - x^2)$ را که بهترین جواب برای این معادله باشند تعیین کنید

۱۱. در ابتدا معادله دیفرانسیل و سپس فرم تغییراتی حاکم بر رفتار کمانش یک ستون یک سرگیردار که تحت اثر وزنش قرار داد را نوشته و سپس با در نظر گرفتن میدان جابجائی جانبی به صورت $v = ax^2$ طول بحرانی آن را به دست آورید

۱۲. فرم تغییراتی معادله دیفرانسیل تعادل یک تیر کم عمق را در تغییرشکلهای بسیار بزرگ نوشته و سپس برای یک تیر دوسر مفصل ثابت در مقابل جابجائی داخل سطح با طول l که تحت اثر بار عرضی با شدت یکنواخت p قرار دارد بهترین پاسخ را با استفاده از توابع درونیاب $v = a \sin(\pi x/l)$ برای جابجائی عرضی یا خارج سطح و $u = b \sin(2\pi x/l)$ برای جابجائی داخل سطح به دست آورید

۱۳. معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار خمش خالص صفحات نازک در تغییرشکلهای کوچک به صورت $D\nabla^4 w = p$ قابل بیان است به قسمی که D سختی خمشی ورق، w جابجائی و p شدت بار عرضی اعمال شده در واحد سطح ورق است با استخراج شرایط مرزی طبیعی، فرم تغییراتی و فانگشنال نظیر این معادله دیفرانسیل را که همان انرژی کرنشی ناشی از خمش ورق است به دست آورید