

روغی II

در تهریز، راز و نه

هون ۱۳۸۰

ADVANCED MATHEMATICS II

References:

- Advanced Engineering Mathematics ; C.R. Wylie.
Advanced Calculus for Applications ; Francis B. Hildebrand.
Advanced Mathematics for Engineers ; W. Kaplan.
Applied Complex Variables ; J. W. Dettman.
Complex Variables and Applications ; R. V. Churchill.
Conformal Mapping ; Zev Nehari
Introduction to Partial Differential Equations with
Application ; E. C. Zachmanoglou and D. W. Thoe.
special Functions with Applications ; V. N. Lebedev.
Kellog - "Potential Theory" (in Green Functions)
and "Theoretical Physics." by Mos. bakh.

دستورالعمل
ریاضی II

دستورالعمل
ریاضی II

۱۳۸۰ هجری

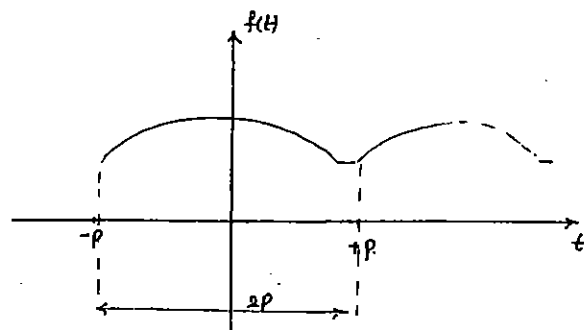
صفحه	عنوان	صفحه	عنوان
۱	اشکال فصول اول	۱۲۸	معارف زوایا و باره ای رسته اول
۵	قضایای نامشروعی	۱۲۸	مقی اشکال یک میدان براری
۱۴	اصل آوند	۱۳۴	معارف رسته خطی با شرط ابتدایی
۲۰	معیار پایداری نامشروعیت	۱۳۴	قضیه نوشی - کلافی
۲۸	قضیه درسته	۱۶۰	معارف زوایا و باره ای رسته دوم
۳۶	مقاله نابع هارمونیک	۱۶۴	فراتعارف معارف رسته دوم
۴۸	نقشه همدیس	۱۸۴	جدا کردن متغیرها در رسته
۵۶	مسئله دیرید در ایر	۱۹۵	جدا کردن متغیر آ در رسته
۵۰	مسئله نیرین در ایر	۲۱۴	معارف زوایا و باره ای رسته دوم
۵۲	مسئله دیرید در نیم صفحه توپا	۲۲۵	توابع خاص
۵۴	مسئله نیرین در نیم صفحه توپا	۲۳۶	توابع گاما
۵۸	توابع گسترش دیرید و نیرین	۲۴۲	عکس توابع گاما
۶۶	نقشه متوازن - کرید و نیرین	۲۴۵	توابع دایگاما
۹۲	تبدیل ژورگادسکی	۲۵۰	توابع پیل
۹۹	حرکت غیرگراشی پیل - ژورگادسکی	۲۶۱	توابع هیکل - توابع پیل - توابع ایری
۱۰۴	جراحیهای ساده	۲۷۱	تعارف در رسته ای توابع پیل و ژورگادسکی
۱۲۰	بیل لاسیت در رسته	۲۹۱	توابع لژاند

(الف) سیر اعداد

خرد نتوان خورد از این قل که رستم
 بر لوح معانی خط غریب ملکیم
 ما نشسته نسیم و سحر آید که بر آید
 انستول بر این غرور گمانی که بگذشت
 دنیا که در ادراک خود غافل نشسته
 ایشان جو علی در پس زانوی نیست
 سیری و جهانی می هم چون کشف در روزه
 و اما ننگی اندر دس و بار طبیعت
 چون مرغ بر این کفره تابی بدو تواند
 مارا حجب ارسیت دنیا می بود آنروز
 گر خطا و شفاعت ننگه روز نیامد
 باشد که غنایت بر سر در نه پندار
 سعدی مگر از خرس اقبال نیرنگان
 دنیا نتوان کرد از این چشم که رستم
 چو کبوتر کبابی، حنای نذر رستم
 از مایه نیامد که در نفس ملکیم
 ما از ستر قصه و خطا در گذشتیم
 نامر که ما نسیم چرا دل بر رستم
 مأمور میان بسته در این بر رستم
 ما سب شد روز آید در بیار ننگیم
 حینست، در عینا که در طالع جستم
 یک روز ننگ کن که بر این کفره خستم
 که امروز، کسی ما ندانیم نه رستم
 شاید که ز مایه نیریم که ز رستم
 بالین عمل در زخمان کامل جستم
 یک خورشید بیند که ما نغمه ملکیم

Complex Inversion Integral.

انما الـ قلم اسلوس :



$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\pi t/p}$$

$$C_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{+p} f(t) e^{-i n \pi t / p} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$f(t) = \frac{1}{2p} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-p}^{+p} f(t) e^{-i n \pi t / p} dt \right) e^{i n \pi t / p}$$

$$p \longrightarrow \infty$$

$$\frac{n\pi}{\rho} \triangleq \omega_n, \quad \Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{\rho}$$

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega$$

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-(\sigma+i\omega)t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\sigma + i\omega = s \rightarrow d\omega = ds/i$$

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right) e^{st} ds e^{-\sigma t}$$

$$\mathcal{L} f(t) = P(s) \triangleq \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \text{تبدیل لاپلاس } f(t)$$

$$\rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} P(s) e^{st} ds$$

سریعاً به تبدیل لاپلاس این $\frac{1}{s}$: $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt$ به دو حالت تقسیم می‌شود

1. $\sigma = \text{Re}(s)$ ، بنابراین $P(s)$ یعنی تبدیل لاپلاس $f(t)$ برای $\text{Re}(s) > \sigma$ معنی‌دار است.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-p}^{+p} f(t) e^{-i\omega_n t} dt \right) e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n$$

تبدیل فوریه را یادآور شدیم : $\omega_n \sim \omega$ ، $\Delta\omega_n \sim d\omega$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad : \text{تبدیل فوریه}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad : \text{تبدیل معکوس فوریه}$$

فرض کردیم انتقال فوریه این $\frac{1}{s}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$

اگر $f(t)$ تابع $f(t) e^{-\sigma t}$ را در بازه $[0, \infty)$ فقط بگیریم و فرض کنیم $f(t)$ برای مقادیر $t < 0$ برابر صفر است در این صورت

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega$$

Limiting Contours.

کانتورهای محدود:

تعریف: اگر برای قوس C_R به مرکز مبدأ و شعاع R ، $|f(z)| < K_R$ و یا بر قوس C_R به شعاع r ، $|f(z)| < K_r$ باشد، چنانچه وقتی که $R \rightarrow \infty$ ، $K_R \rightarrow 0$ یا اگر وقتی که $r \rightarrow 0$ ، $K_r \rightarrow 0$ ، گوییم $f(z)$ بحد بی‌نهایت بر روی C_R یا C_r به سمت صفر میل می‌کند.

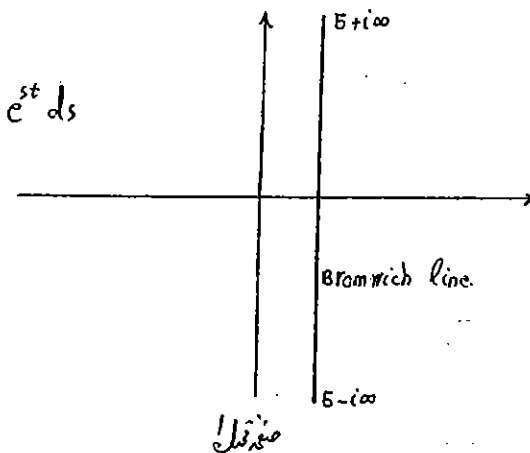
قضیه I: چنانچه $f(z)$ بر روی قوس C_R به مرکز مبدأ و شعاع R و در نیمه R به سمت $R \rightarrow \infty$ بحد بی‌نهایت صفر شود در آنصورت

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

قضیه II: چنانچه تابع $f(z)$ بر روی قوس C_R و در نیمه $R \rightarrow \infty$ بحد بی‌نهایت صفر شود در آنصورت

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{imz} dz = 0 \quad m > 0 \quad (A-II)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \varphi(s) e^{st} ds$$

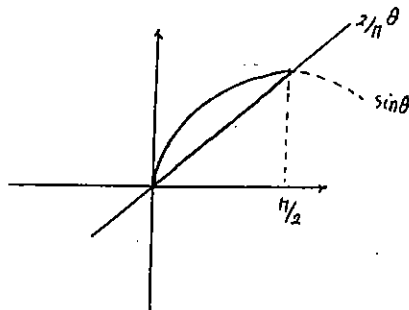


تعریف: خط: «Bromwich» یعنی است که $\varphi(s)$ سمت راست آن میل می‌کند.

$$I = \int_{C_R} f(z) e^{imR(\cos\theta + i\sin\theta)} R i e^{i\theta} d\theta$$

$$|I| \leq \int_0^\pi K_R e^{-mR\sin\theta} R d\theta = 2K_R \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta} R d\theta$$

$$\text{for } 0 < \theta < \pi/2 \quad \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$$



$$\therefore |I| \leq 2RK_R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2mR}{\pi}\theta} d\theta$$

$$= 2RK_R \frac{\pi}{2mR} (1 - e^{-m\pi}) \xrightarrow{\text{as } R \rightarrow \infty} 0$$

دلیل: اگر $f(z)$ در ربع اول و دوم محدود باشد، آنگاه $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{-imz} dz = 0$ (b-II)

دلیل: اگر $f(z)$ در ربع اول و دوم محدود باشد، آنگاه $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{\eta z} dz = 0$ (c-II)

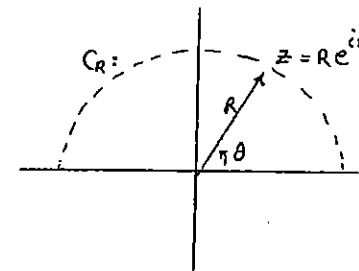
دلیل: اگر $f(z)$ در ربع اول و دوم محدود باشد، آنگاه $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{-mz} dz = 0$ (d-II)

(a-II) اثبات

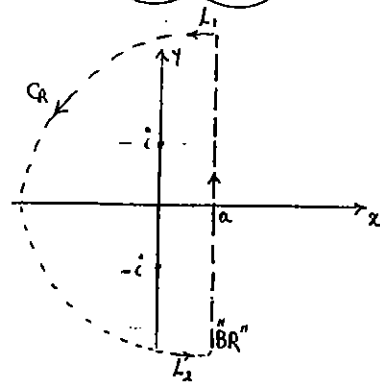
$$I = \int_{C_R} f(z) e^{imz} dz$$

$$dz = R i e^{i\theta} d\theta$$

$$|f(z)|_{C_R} < K_R$$



مثال ۱: تابع متعلق به کدام ناحیه است؟ $\mathcal{L}^{-1} \varphi(s) = ?$ $\varphi(s) = \frac{s}{s^2+1}$



$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \varphi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_R} \varphi(s) e^{st} ds$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{B_R} \varphi(s) e^{st} ds = \sum \text{Res} \{ \varphi(s) e^{st}, \pm i \}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \varphi(s) e^{st} ds = 0$$

$$R \rightarrow \infty$$

طبق قضیه II - c داریم:

قضیه III: چنانچه $f(z)$ در ناحیه $|z-a| < \rho$ به مرکز $z=a$ متعلق باشد و در آنجا $\rho \rightarrow 0$ به قدریکه $f(z)$ متعلق به ناحیه $|z-a| < \rho$ باشد، داریم:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = 0$$

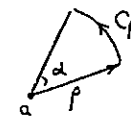
$$|z-a| < \rho \Rightarrow |f(z)| \leq K_\rho$$

$$|f(z)| \leq K_\rho / \rho$$

قضیه IV: چنانچه $f(z)$ در ناحیه $|z-a| < \rho$ به مرکز $z=a$ متعلق باشد و در آنجا $\rho \rightarrow 0$ به قدریکه $f(z)$ متعلق به ناحیه $|z-a| < \rho$ باشد، داریم:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = \alpha i \text{Res}(a)$$

که α مقداری به مرکز a متعلق باشد و $\text{Res}(a)$ مانده $f(z)$ در $z=a$ است. α زاویه مرکزی قوس C_ρ به حسب زاویه α (اگر $\alpha > 0$ اگر جهت اشکال گیری مثبت باشد، و اگر $\alpha < 0$ اگر جهت اشکال گیری منفی باشد).

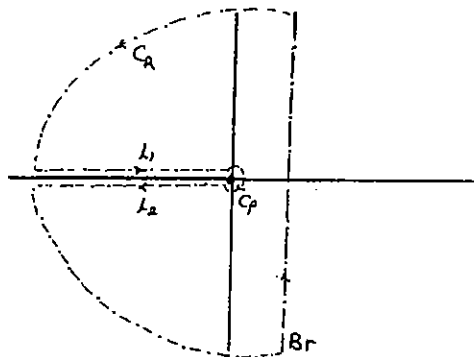


$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = \alpha i \text{Res}(a)$$

$$\varphi(s) = 1/\sqrt{s} \quad \mathcal{L}^{-1} \varphi(s) = ?$$

• 2 pts

$$-\pi < \theta < \pi$$



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{e^{st}}{\sqrt{s}} ds = 0$$

$$Br = C_R + L_1 + C_r + L_2$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{st}}{\sqrt{s}} ds = 0$$

$$R \rightarrow \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{st}}{\sqrt{s}} ds = 0$$

$$r \rightarrow 0$$

$$L: s = x + iR \quad ds = dx$$

$$\left| \int_{L_1} \varphi(s) e^{st} ds \right| \leq \int_0^a |\varphi(s)| e^{(x+iR)t} dx$$

$$\leq \int_0^a K_R e^{xt} dx \rightarrow 0 \quad \text{as } R \rightarrow \infty$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{s}{s^2+1} = \sum \text{Res} \left\{ \frac{s e^{st}}{s^2+1}, \pm i \right\}$$

$$= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-rt} / \sqrt{r} dr$$

$$rt = u^2 \quad dr = 2u du / t \quad \sqrt{r} = u / \sqrt{t}$$

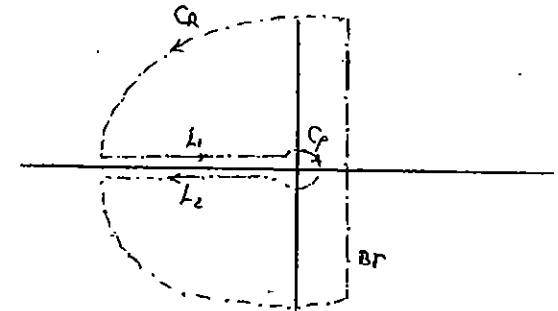
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{\sqrt{s}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u^2/t} / (u/\sqrt{t}) \cdot 2u du / t \\ &= \frac{2}{\pi \sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \end{aligned}$$

مثال: مقلوب كاسية عكس تحويل لابلاس:

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$L_1: \theta = \pi$$

$$L_2: \theta = -\pi$$



$$s = re^{i\theta}$$

$$L_1: s = re^{i\pi} \quad ds = -dr$$

$$L_2: s = re^{-i\pi} \quad ds = -dr$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{\sqrt{s}} e^{st} ds = 0$$

$$BR + CR + L_1 + CR + L_2$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{BR} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} e^{i\pi/2} e^{-rt} (-dr) +$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-i\pi/2} e^{-rt} (-dr) = 0$$

اثبات: فرض کنید z صفر مرتبه m_i از $f(z)$ باشد در این صورت داریم:

$$f(z) = (z - z_i)^{m_i} g(z)$$

که $g(z)$ در این همگی خیلی بوده و صفری هم ندارد

$$f'(z)/f(z) = \frac{m_i}{z - z_i} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$$\text{Res} \left\{ \frac{f'(z)}{f(z)}, z = z_i \right\} = m_i$$

از رابطه فوق نتیجه می شود که z برای $f'(z)/f(z)$ قطب ساده است. همچنین فرض کنید p_i قطب مرتبه n_i از $f(z)$ باشد در این صورت داریم:

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - p_i)^{n_i}} = \frac{h(z)}{(z - p_i)^{n_i}}$$

که $h(z)$ در این همگی خیلی بوده و صفری هم ندارد

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{n_i}{z - p_i} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

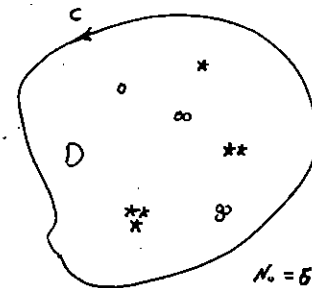
Argument Principle.

"اصل آرگند"

قضیه: چنانچه تابع $f(z)$ در حوزه D و مرز آن C خیلی بوده (البته بشرط تعدادی قطب در D و از C از صفرهای تابع عبور نکند در این صورت):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_o - N_p$$

که N_o تعداد صفرهای $f(z)$ در D و N_p تعداد قطبهای $f(z)$ در D باشد با شمارش جهت تکرار آنگاه باشد.

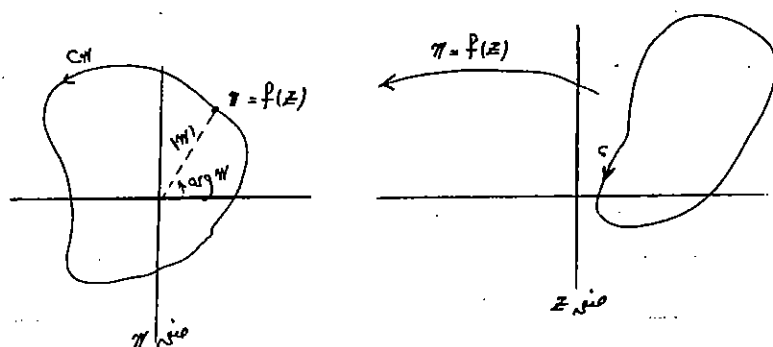


o : صفرهای تابع
* : قطبهای تابع

$$N_o = 5, N_p = 6$$

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{d}{dz} \ln f(z) \\ &= \frac{d}{dz} \{ \ln |f(z)| + i \arg f(z) \}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_c \frac{d}{dz} \ln |f(z)| dz + \int_c \frac{d}{dz} (i \arg f(z)) dz \right\}$$



چون $\int_c \frac{d}{dz} \ln |f(z)| dz = 0$ (از آنجا که $\ln |f(z)|$ یک مقدار اسکالر است و در یک دور کامل تغییر نمی‌دهد)

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg f(z)$$

نتیجه: در $\arg f(z)$ وقتی $f(z)$ را در طول مسیر C می‌گردانیم، تغییر آن برابر با 2π ضرب در تعداد قطب‌ها منهای تعداد صفرهاست.

لذا p_i قطب ساده است برای $f'(z)/f(z)$ و داریم:

$$\text{Res} \left\{ \frac{f'(z)}{f(z)}, p_i \right\} = -n_i$$

با توجه به اینکه:

$$\sum n_i = N_0 \quad \sum n_i = N_p$$

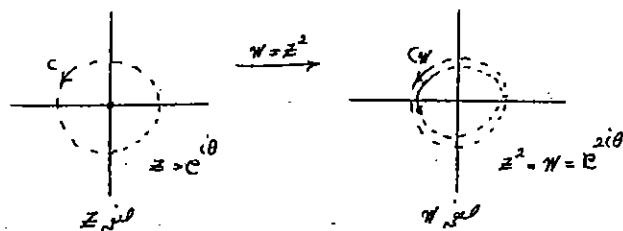
$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0 - N_p$$

نتیجه:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = N_a - N_p$$

که N_a تعداد مرتبه‌های $f(z)$ است که در D برابر با a می‌شود. در واقع اصل آندرا در مختصات تابع $f(z) - a$ اعمال می‌شود.

مثال: تابع $w = f(z) = z^2$ را از نو ببینیم.

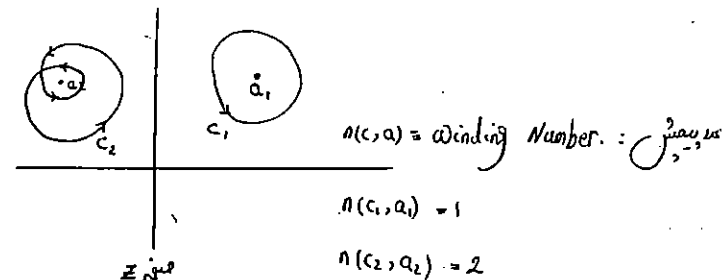


$$\therefore n(C_w, 0) = 2$$

تبدیل لورین بودن نتیجه آنکه مستقل از مسیر تابع $f(z)$ کاملاً در حال
فرض مشاهده می شود.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$$

= تعداد دورهای C_w حول مبدأ در صفحه w



$$n(C, a) \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = n(C_w, 0)$$

$$\Rightarrow n(C_w, 0) = N_0 - N_p \quad (\text{در واقع نتیجه تبدیل لورین است})$$

C_w : تصویر کانتر C تحت نگاشت $f(z)$.

$$\therefore A(C_r, 0) = 0$$

قصه: خدیجه

$$Y(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

صنعتی ندارد که برای آن

$$|S| \geq 1 + \frac{M}{|Q|}$$

$$M = M_{QX} \{ |q_1\rangle, |q_2\rangle, \dots, |q_n\rangle \}$$

اجابات : فرض کیں δ کی یہ معادلات $\gamma(s) = 0$ ، γ شدہ دہرائی
آن (151) است در انحصار :

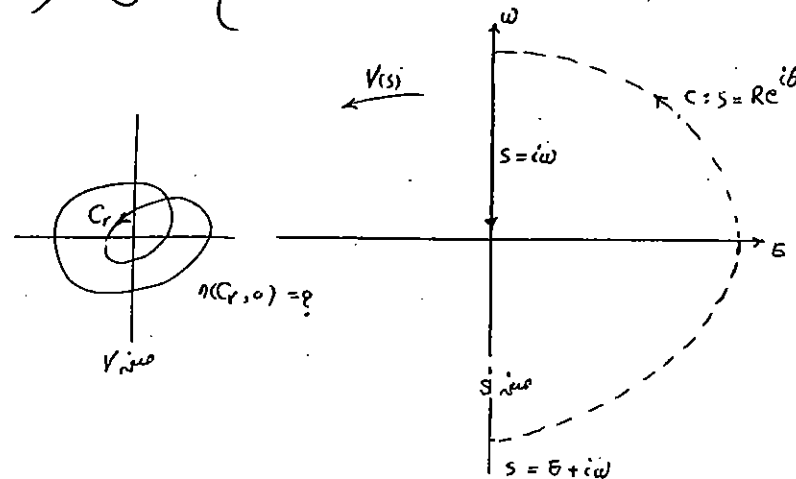
$$Q_0 S^n = -(Q_1 S^{n-1} + Q_2 S^{n-2} + \dots + Q_{n-1} S + Q_n) -$$

$$I = - \frac{1}{a_n s} (a_1 + \frac{a_2}{s} + \dots + \frac{a_n}{s^{n-1}})$$

معيار پادشاهی نایکوست.

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$$

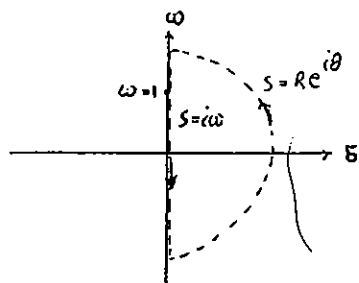
اگر معادله زیر را به فرم $\frac{d^2 x}{dt^2} + \dots = 0$ بنویسیم، معادله مشخصه $V(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$ می‌باشد. شرط پایداری آنست که $V(s)$ صفری سمت راست در ربع مجانبه S نداشته باشد (یعنی: $\text{Res}(s) < 0$) و هر چه واقع در ربع مجانبه باشد.



حال اگر تبدیل تصویر را نتوانست (۱۵) بدست آوریم:

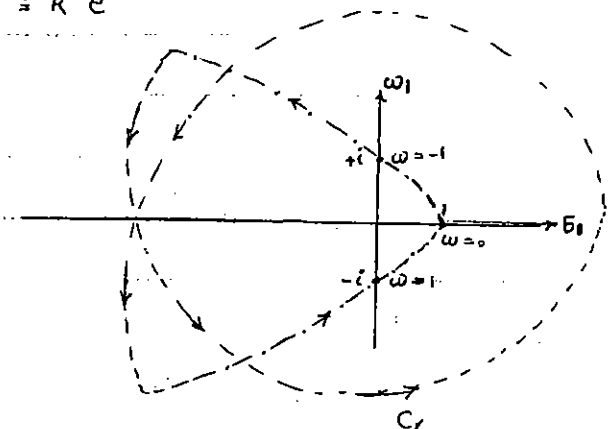
$$Y(s) = s^3 + s^2 + 1 = 0$$

$$Y(\sigma + i\omega) = \sigma + i\omega,$$



$$Y(i\omega) = 1 - \omega^2 - i\omega^3$$

$$Y(Re^{i\theta}) = R^3 e^{3i\theta}$$



$$n(C_r, \infty) = 2$$

المسألة

$$1 \ll \frac{1}{|a_0||s|} \left(|a_1| + \frac{|a_2|}{|s|} + \dots + \frac{|a_n|}{|s|^{n-1}} \right)$$

$$1 \ll \frac{M}{|a_0||s|} \left(1 + \frac{1}{|s|} + \dots + \frac{1}{|s|^{n-1}} \right)$$

$$1 \ll \frac{M}{|a_0||s|} \left(1 + \frac{1}{|s|} + \dots \right)$$

$$1 < \frac{M}{|a_0||s|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{|s|}} = \frac{M}{|a_0|(|s| - 1)}$$

$$1 < \frac{M}{|a_0|(|s| - 1)}$$

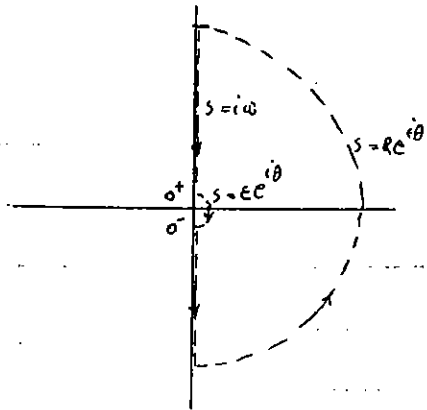
$$\therefore |s| < 1 + \frac{M}{|a_0|}$$

مثال ۳ اگر تابع تبدیل مدار باز سیستمی

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2\zeta s + 1)} \quad \zeta > 0, K > 0$$

با سطر پایداری مدار بسته را بررسی کنید.

با توجه به وجود قطب بزرگی در موهومی، گانتز ناایستایی را در مدار پیدا می‌کنیم.



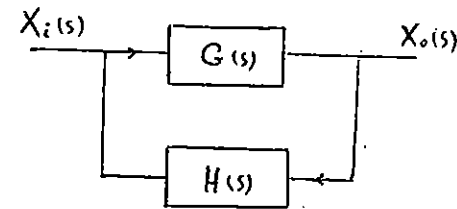
$$\epsilon \rightarrow 0 \quad \& \quad R \rightarrow \infty$$

$$N_p = 0$$

حال تصمیم می‌گیریم گانتز ناایستایی را در $G.H$ پیدا کنیم.

$$G(i\omega)H(i\omega) = \frac{K}{(i\omega)(-\omega^2 + 2i\zeta\omega + 1)}$$

مثال ۲



$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

معادله مشخصه سیستم:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s)$$

برای بررسی پایداری مدار بسته، کافی است تصمیم بگیریم گانتز ناایستایی تحت گانتز $G(s)H(s)$ را پیدا کنیم در نیمه راست $\sigma > 0$ را چند داریم. شرط پایداری این است که $N_0 = 0$ باشد.

$$n(C_{GH}, -1) = N_0 - N_p$$

که N_p معلوم است، C_{GH} نیز معلوم است.

نتیجه: اگر $K > 25$ باشد در این صورت $n(C_{GH}, -1) = 2$ چون $N_p = 0$ است. نتیجه می‌گیریم $N_0 = 2$ و نهایتاً سیستم مدار بسته ناپایدار است.
 اگر $K < 25$ در این صورت $n(C_{GH}, -1) = 0 = N_0$ و نهایتاً سیستم مدار بسته پایدار است.

روش دوم:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

در این صورت معادله مشخصه را می‌نویسیم:

$$s^3 + 25s^2 + s + K = 0$$

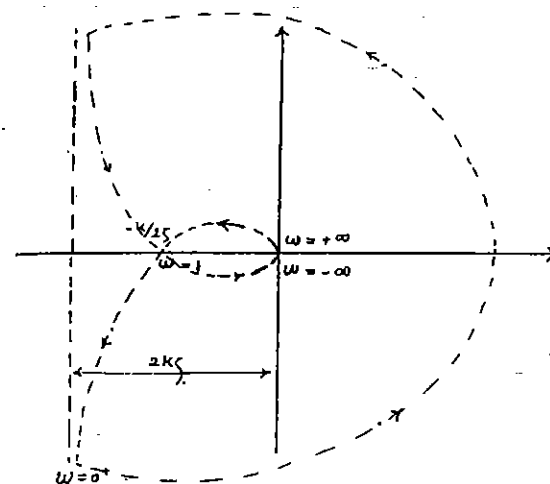
تعداد درگیری مبدأ را می‌توانیم بدست آوریم.

$$G(i\omega)H(i\omega) = \frac{K[1 - \omega^2 - 2i5\omega]}{(i\omega)[(1 - \omega^2)^2 + 45^2\omega^2]}$$

$$GH = \frac{-2K5}{(1 - \omega^2)^2 + 45^2\omega^2} - i \frac{K(1 - \omega^2)}{\omega[(1 - \omega^2)^2 + 45^2\omega^2]}$$

$$GH \Big|_{s = \varepsilon e^{i\theta}} \approx \frac{K}{\varepsilon} e^{-i\theta}$$

$$GH \Big|_{s = R e^{i\theta}} \approx \frac{K}{R^3} e^{-3i\theta}$$



قضیه روشه (Rouche)

اگر توابع $f(z)$ و $g(z)$ در حوزه D بردی و مرز آن C یکپارچه باشند و بر روی C $|f(z)| > |g(z)|$ داشته باشیم، آنگاه عدد صفرهای $f(z)$ و $f(z) + g(z)$ در D با هم برابرند.

اثبات: اولاً $f(z)$ و $f(z) + g(z)$ بر روی C صفری ندارند زیرا: $f(z) \neq 0$ و $|f(z)| > |g(z)| \Rightarrow |f(z) + g(z)| > 0$ پس $f(z) + g(z) \neq 0$ بر روی C باشد، همچنین اگر $f(z) + g(z) = 0$ باشد در اینصورت $f(z) = -g(z)$ و در نتیجه $|f(z)| = |g(z)|$ در باره شرط اولی نقض می شود. حال اگر تعداد صفرهای $f(z)$ در D ، N و تعداد صفرهای $f(z) + g(z)$ را N' بنامیم:

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$$

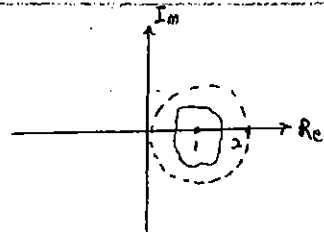
$$N' = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg [f(z) + g(z)]$$

از قضیه آندره دانیکه f و g در D قطب ندارند استناد می دهیم " باید نشان دهیم $N = N'$ "

$$N' = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg (f+g) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg [f(1+g/f)] = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f + \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg (1+g/f) = N + \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg (1+g/f)$$

$$w = 1 + g/f \rightarrow w - 1 = g/f$$

هنگامیکه $z \in C$ باشد، مطابق فرض $|g/f| < 1$ ، نتیجه می شود $|w - 1| < 1$ ، یعنی w در داخل دایره دبروی می میرد. در نتیجه برای w امکان



ندارد بتواند مبدأ را در برزند، پس مطابق اصل آندره

$$\Delta_C \arg w = 0$$

$$\therefore N = N'$$

کما بر روی این قضیه ساده مواردی است که نوعاً الملاحظات در مورد صفرهای f داریم می بینیم. الملاحظات درباره تابع جدیدی که ترکیبی از f است (صفرهای این تابع) دوست داریم.

مثال: نشان دهید معادله $z^5 + 3z - 1 = 0$ دارای ۵ ریشه در حلقه $1 < |z| < 2$ است.

الف) $f(z) = z^5$ و $g(z) = 3z - 1$

$$|f(z)| = 2^5 = 32, |g(z)| = |3z - 1| < 3|z| + 1 = 7$$

پس روی $|z| = 2$ داریم: $|f(z)| > |g(z)|$ بنابراین عدد صفرهای $f(z)$ و $f(z) + g(z)$ هر دو داخل $|z| = 2$ با هم برابر است. یعنی هر پنج صفر در داخل $|z| = 2$ تکرار دارد.

ب) $f(z) = 3z - 1$ و $g(z) = z^5$

$$2 < |f(z)| = 1, |g(z)| = 1$$

$|f(z)| > |g(z)|$ چون عدد صفرهای f در $|z| = 1$ برابر ۱ است، لذا معادله مربوط تنها ۱ صفر در داخل $|z| = 1$ دارد. پس چهار صفر بقیه $|z| = 1$ تکرار دارد.

اثبات نتیجه ۲. فرض کنید $f(z) = u + iv$ تابع تحلیلی باشد، بدیهی است که $\nabla u = 0$ در هچین $\exp f(z)$ نیز تحلیلی است. با توجه به قضیه "Max/Min" $| \exp f(z) | = e^u$ مقدار Max/Min خود را بررسی می‌افزاید. u در نتیجه Max/Min خود را بررسی می‌افزاید.

قضیه اصلی جبر: هر معادله n درجه n ، n ریشه دارد:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad a_n \neq 0$$

$$f(z) \triangleq a_n z^n$$

$$g(z) \triangleq a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

$$\left| \frac{g}{f} \right|_{|z|=R} = \left| \frac{1}{a_n z} \left(a_{n-1} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-2}} + \frac{a_0}{z^{n-1}} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{|a_n| |z|} \left| a_{n-1} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-2}} + \frac{a_0}{z^{n-1}} \right|$$

می داریم $|z| = R > 1$:

"Maximum Principle"

قضیه ماکزیمم

توابع تحلیلی Max مقدار قدر مطلق خود را بررسی می‌افزاید.

اثبات: فرض کنید $\varphi(z)$ در D بررسی می‌افزاید، $z_0 \in D$ فرض کنید $\varphi(z_0) \neq 0$ و $|\varphi(z_0)| > |\varphi(z)|$ در $z \in C$

$$f(z) \triangleq \varphi(z)$$

$$g(z) \triangleq -\varphi(z)$$

$$z \in C \quad |g(z)| < |f(z)|$$

با توجه به قضیه درجه مقدار صغری $f(z) = \varphi(z)$ و $f(z) + g(z) = \varphi(z) - \varphi(z) = 0$ در D با هم برابرند. اما $\varphi(z) \neq 0$ در D در $z \in D$ صغری شود در نتیجه فرض $|\varphi(z_0)| > |\varphi(z)|$ فرض ناممکنی است.

نتیجه ۱: اگر تابع تحلیلی $\varphi(z)$ در D صغری شود، می‌توانیم قدر مطلق خود را نیز بررسی می‌افزاید. زیرا $1/\varphi(z)$ تحلیلی است و طبق قضیه ماکزیمم می‌توانیم مقدار $|\varphi(z)|$ بررسی می‌افزاید.

نتیجه ۲: توابع هارمونیک Max/Min مقدار خود را بررسی می‌افزاید.

"Analytic Continuation"

"ارائه تیلری"

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (|z| < 1)$$

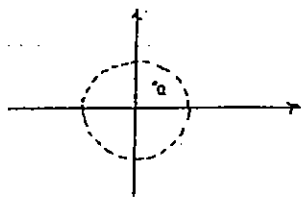
$$g(z) = \frac{1}{1-z} \quad (z \neq 1)$$

دایره $|z| < 1$ حوزه مشترک تریب دو تابع f و g است. تابع g را
به عنوان ارائه تیلری تابع $f(z)$ می گویند.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (|z| < \infty)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < R)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$



اگر شعاع هدرانی سری فوق بزرگتر از $R - |a|$ باشد برخی است که تریب
 $f(z)$ به خارج دایره $|z-a| = R$ توسعه می یابد.

$$|g/f| < \frac{1}{|a_n| R} (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|)$$

دس کافی است R را صبر

$$R > \frac{|a_{n-1}| + \dots + |a_0|}{|a_n|}$$

انتخاب کنیم در نتیجه:

$$|g/f| < 1 \quad |z| = R$$

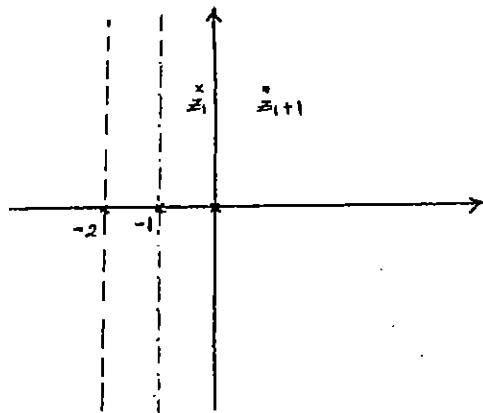
تعداد منتهی $f = a_0 z^n$ و $f+g = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ را قابل
 $|z| = R$ با هم مساوی هستند، چون f در هر دایره ای دایره n صفر است
(n تا کمتر z دارد) پس معادله n در n دایره n صفر است.

$$f(z) = \sin 2z - 2 \sin z \cos z$$

بررسی نمودار حقیقی متغیرهای معادله در نیمه

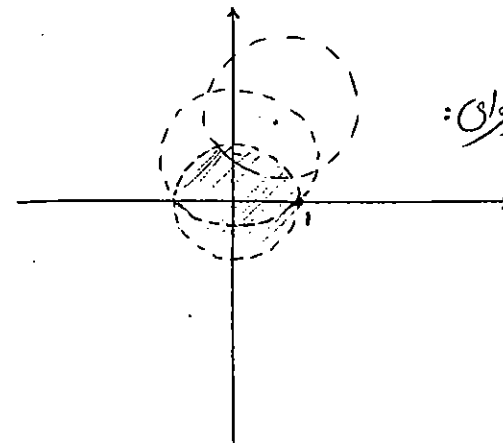
$\Gamma(z) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \operatorname{Re} z > 0.$ بنو اقبال سوسائٹی

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad z \neq 0, \operatorname{Re} z > -1$$



$$f(z_1) = \frac{f(z_{i+1})}{z_i}$$

$$\int (z+1) = \frac{f'(z+2)}{z+1} \Rightarrow \int (z) = \frac{f'(z+2)}{z(z+1)} \quad \begin{matrix} z \neq 0, -1 \\ \text{Re } z > -2 \end{matrix}$$



- تفتیش و دایره خبرهای :

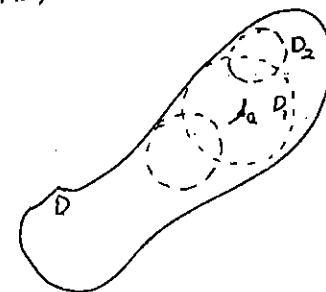
مثال اگر مرز سری تماماً نقاط منفرد بود در این صورت = نامیده می‌شود مرز برای تابع
غیر یکنوا بود در این صورت = مرز سری با "national boundary" گوئیم. (مرز طبیعی)

قضیه: اگر تابع $f(z)$ در حوزۀ D تحلیلی باشد و در روی مؤلفی در داخل D (هفتۀ بیارکوف) صفر شود " $f(z) \equiv 0, z \in D$ " و از آنکه اگر مؤلفی صفر باشد:

$$f(a) = f'(a) = \dots = 0 \Rightarrow f(z) = 0 \quad z \in D,$$

$$f(z) \equiv 0 \quad z \in D_2$$

$$\therefore f(z) \equiv 0 \quad z \in D$$



با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_D \nabla \cdot \underline{z} \, dx \, dy = \int_C \underline{n} \cdot \underline{z} \, ds$$

حال اگر $\underline{z}$ به صورت

$$\underline{z} = \nabla \varphi$$

انتخاب کنیم در این صورت

$$\iint_D \nabla^2 \varphi \, dx \, dy = \int_C \underline{n} \cdot \nabla \varphi \, ds = \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds$$

$$\text{فرض: } \nabla^2 \varphi = 0 \quad (x, y) \in D$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds = \int_C g(s) \, ds = 0$$

$$\underline{z} = u \nabla v \Rightarrow \nabla \cdot \underline{z} = (u \cdot v_{,i})_{,i} = u_{,i} v_{,i} + u \cdot v_{,ii} = u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v$$

$$\iint_D (u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx \, dy = \int_C \underline{n} \cdot u \nabla v \, ds$$

$$\iint_D (u \nabla^2 v + \nabla v \cdot \nabla u) \, dx \, dy = \int_C \underline{n} \cdot v \nabla u \, ds$$

مطالعه در مورد توابع هارمونیک در تئوری پتانسیل

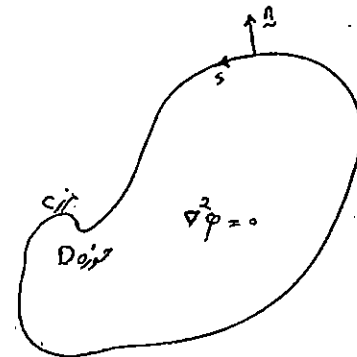
$$\nabla^2 \varphi = 0$$

مسئله دیریش "Dirichlet" یا مسئله نوع اول: حالتی است که تابع φ در حوضه D با مرز C هارمونیک باشد و روی مرز مقدار φ معلوم باشد.

$$\varphi|_C = f(s)$$

مسئله نویمن "Neumann" حالتی است که تابع φ در حوضه D با مرز C هارمونیک باشد و روی مرز داریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_C = g(s) \quad , \quad \int_C g(s) \, ds = 0$$



$$J_z = (u_x v_y - u_y v_x)_{(x,y)} = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right)_{(x,y)} = |f'(z)|^2$$

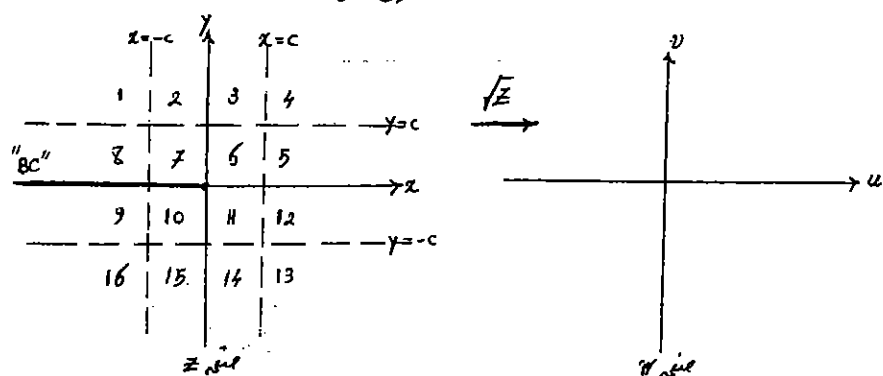
$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$J_z \neq 0 \longrightarrow f'(z_0) \neq 0$$

تعریف: تابع تحلیلی $f(z)$ را در نقطه z ما مقدار $f'(z) \neq 0$ را بررسی می‌کنیم.

خاصیت: تابع تحلیلی $f(z)$ را در حوزه D $f'(z) \neq 0$ را بررسی می‌کنیم.

مثال: نگاشت $w = f(z) = \sqrt{z}$ را بررسی کنید.

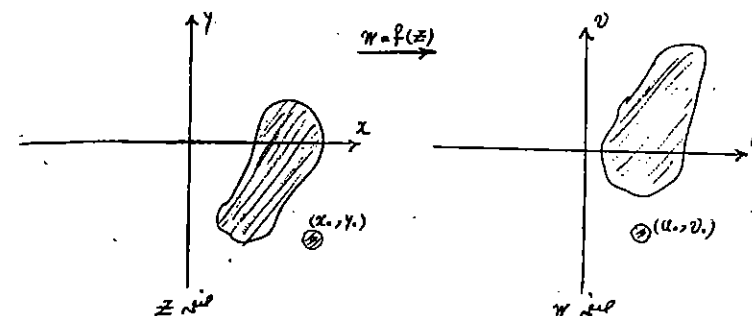


"Conformal Mapping"

نگاشت هم‌انگیز

$$w = f(z) \quad z(x,y) \longrightarrow w(u,v)$$

$$w = f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$$

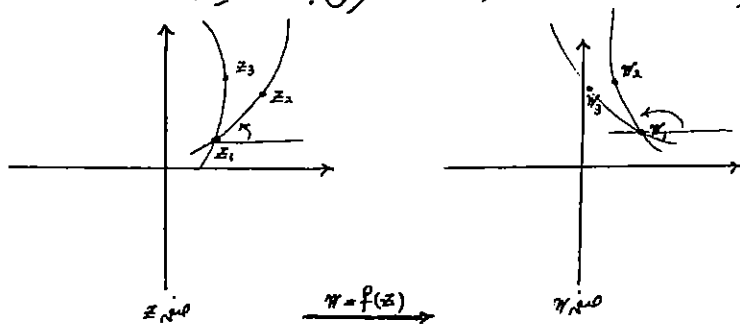


$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \xrightarrow{?} \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

خطات متوازی در z به خطات متوازی در w تبدیل می‌شوند.

$$J_z = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x,y)} \neq 0$$

اگر نگاشت $w = f(z)$ در z_1 مانتفراتال باشد، داریم:



$$f'(z) = \frac{dw}{dz} \approx \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \quad \text{as } z_2 \rightarrow z_1$$

$$\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z)| \quad \text{نسبت طول دایره های } \Delta z, \Delta w$$

$$\text{از این محاسبه نسبت انقباض بر } \Delta w$$

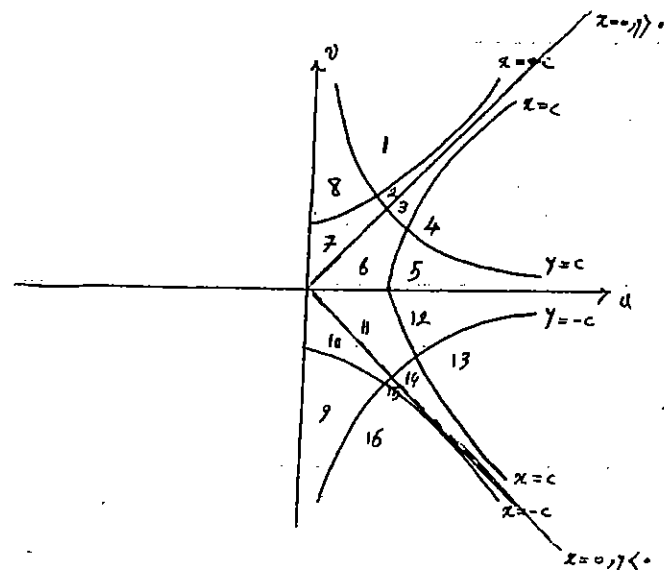
چنانچه نگاشت $w = f(z)$ در z_0 مانتفراتال باشد، اشکال کوچک حول z_0 به اشکالی متناسب به خودشان حول w_0 نگاشت می شوند.

$$f: f'(z_0) = k \cdot e^{i\alpha}$$

رشته z ابتدا به نسبت k انقباض یافته و خطوط به اندازه α می چرخند.

$$\begin{cases} -\pi < \theta < \pi \\ z = re^{i\theta} \end{cases} \quad \begin{cases} w = u + iv = \sqrt{r} e^{i\theta/2} & -\pi/2 < \theta/2 < \pi/2 \\ z = w^2 = u^2 - v^2 + 2iuv \Rightarrow \begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c \\ u^2 - v^2 = c \end{cases} \quad , u > 0 \quad \begin{cases} y = c \\ uv = c \end{cases} \quad , u > 0$$



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2 \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} (u_x^2 + u_y^2) + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} (u_x v_x + u_y v_y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} (v_x^2 + v_y^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} (u_{xx} + u_{yy}) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} (v_{xx} + v_{yy})$$

$$\therefore \nabla_z^2 = |f'(z)|^2 \nabla_w^2$$

$$\therefore \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = |f'(z)|^2 (\varphi_{uu} + \varphi_{vv})$$

$$\therefore \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \iff \varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0$$

اگر $w = f(z)$ در z 'ناقطه' نباشد، z 'منفرجه' n در $f'(z)$ در این صورت تابع $f(z)$ را می توان بصورت زیر نوشت:

$$f(z) = f(z_0) + a(z-z_0)^{n+1} + b(z-z_0)^{n+2} + \dots$$

$$\frac{\Delta w}{a(\Delta z)^{n+1}} = 1 + \frac{b}{a} \Delta z + \dots$$

$$\arg \Delta w = \arg a + (n+1) \arg \Delta z$$

در نتیجه زاویه بین دو منحنی در نقطه z $n+1$ برابر می شود.

نکته: 'ناقطه' معادل 'لاگاس' ندارد است.

$$\nabla^2 \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} \quad \varphi = \varphi(x, y)$$

$$\varphi(x, y) = \varphi(x(u, v), y(u, v)) = \varphi(u, v)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

&

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad z \in D$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_c = 0$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad w \in D'$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_c = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \phi \cdot \underline{n} = 0 \Rightarrow \nabla \phi \perp \underline{n}$$

$\nabla \phi$ بر شیبی کی مرکز $\phi(x, y) = cte$ عمود است. با توجه به اینکه
 $\phi = cte$ یعنی $w = f(z)$ که انتقال است، آنرا c تغییر هم عمودند.

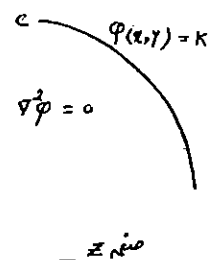
$$\nabla^2 \phi = 0 \quad z \in D$$

$$\phi|_c \text{ مقدار}$$

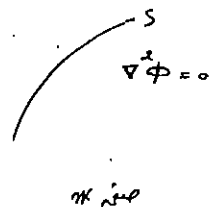
$$\phi|_c = f(u)$$

$$w = f(z)$$

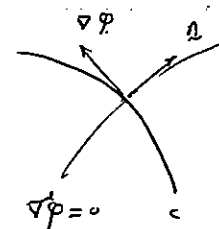
نقطه انتقال



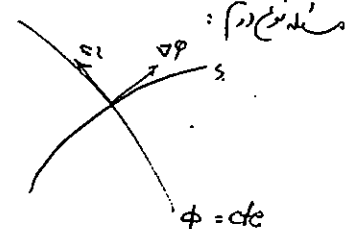
$$w = f(z)$$



$$\phi(x(u, v), y(u, v)) = \phi(u, v) = K$$



$$w = f(z)$$



مسئله اول:

مسئله دوم:

$$\begin{aligned}
 f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(ae^{i\varphi}) \left[\frac{1}{ae^{i\varphi} - re^{i\theta}} - \frac{1}{ae^{i\varphi} - \frac{a^2}{r}e^{i\theta}} \right] aie^{i\varphi} d\varphi \\
 &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \left[\frac{\frac{a}{r}e^{-i(\theta-\varphi)}}{\frac{a}{r}e^{-i(\theta-\varphi)} - 1} + \frac{1}{\frac{a}{r}e^{i(\theta-\varphi)} - 1} \right] d\varphi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ae^{i\varphi}) \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta-\varphi)} d\varphi
 \end{aligned}$$

$$\therefore u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a, \varphi) \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta-\varphi)} d\varphi$$

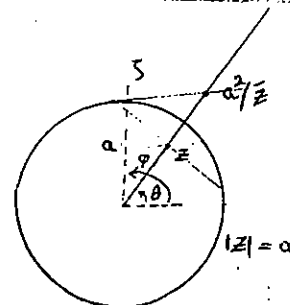
u هارمونیک است، چون چند حقیقی تابع تیلری است. و رابطه دلتون'د به نوبت
انتقال بواسون معروف است. مثله بررید در رابطه عمل کنید.

$$P(a, r; \theta - \varphi) \triangleq \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \varphi)} : \text{Poisson's Kernel.}$$

$$\nabla^2 u = 0 \quad r = a \text{ در رابطه}$$

$$u(a, \varphi) = f(\varphi)$$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(a, r, \theta - \varphi) f(\varphi) d\varphi$$



"مثله بررید بررید"

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{در داخل دایره}$$

$$u(a, \varphi) = f(\varphi) \text{ معلوم}$$

$$z = re^{i\theta}$$

$$\zeta = ae^{i\varphi} \rightarrow d\zeta = aie^{i\varphi} d\varphi$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$z = re^{i\theta}$$

$$\frac{a^2}{\bar{z}} = \frac{a^2}{re^{-i\theta}} = \frac{a^2}{r}e^{i\theta}$$

$$|z| = \overline{op} = r$$

$$|a^2/\bar{z}| = \overline{op'} = a^2/r$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \frac{a^2}{\bar{z}}} \right] d\zeta$$

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(ae^{i\varphi}) \left[\frac{1}{ae^{i\varphi} - re^{i\theta}} - \frac{1}{ae^{i\varphi} - \frac{a^2}{r}e^{i\theta}} \right] d\zeta$$

CA

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left[-\frac{1}{2} + R_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k e^{ik(\theta-\varphi)} \right] d\varphi$$

نوع $r < a$: $\frac{r}{a} < 1$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left[-\frac{1}{2} + R_0 \frac{1}{1 - \frac{r}{a} e^{i(\theta-\varphi)}} \right] d\varphi$$

$$R_0 \frac{1}{1 - \frac{r}{a} e^{i(\theta-\varphi)}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \frac{r}{a} e^{i(\theta-\varphi)}} + \frac{1}{1 - \frac{r}{a} e^{-i(\theta-\varphi)}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2 - \frac{2r}{a} \cos(\theta-\varphi)}{1 + \frac{r^2}{a^2} - \frac{2r}{a} \cos(\theta-\varphi)}$$

$$\therefore u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta-\varphi)} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(a, r, \theta-\varphi) f(\varphi) d\varphi$$

CA

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$u(a, \theta) : \text{مطلوب}$$

$$u(a, \varphi) = f(\varphi)$$

$$u(r, \theta) = R(r) \cdot \theta(\theta)$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = -\frac{\theta''}{\theta} = K^2 \quad \text{متناسب بـ } \theta \text{ با درجه } 2\pi$$

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi \quad k=0, 1, 2, \dots$$

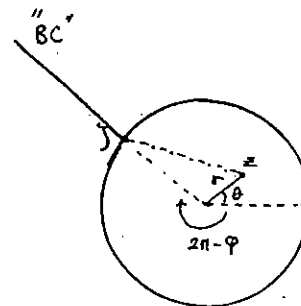
$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi \quad k=1, 2, \dots$$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k [\cos k\theta \cos k\varphi + \sin k\theta \sin k\varphi] \right\} d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k \cos k(\theta-\varphi) \right\} d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left[\frac{1}{2} + R_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k e^{ik(\theta-\varphi)} \right] d\varphi$$

"مسئله نوین برای دایره"



$$Q \triangleq -2a \ln |z-w| \quad \nabla^2 Q = 0$$

تابع $\ln |z-w|$ در داخل دایره تحلیلی است و نسبت به مشتق آن هارمونیک است.

$$Q = -a \ln (a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi))$$

$$\nabla^2 Q = 0$$

$$\nabla^2 u = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial r} \Big|_{r=a} = g(\varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = g(\varphi)$$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(a, r, \theta - \varphi) g(\varphi) d\varphi + u_0$$

حالت نوین می بینیم $u(r, \theta)$ به صورت رابطه زیر حل مسئله نوین است.

اولاً: $u(r, \theta)$ هارمونیک است چون Q هارمونیک است.
ثانیاً:

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = -a \frac{2r - 2a \cos(\theta - \varphi)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi)} = \frac{a}{r} [P(a, r; \theta - \varphi) - 1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{r} \int_0^{2\pi} [P(a, r; \theta - \varphi) - 1] g(\varphi) d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 0 \quad \text{باتوجه به اینکه}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = g(\varphi)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \bar{z}} \right] d\zeta$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{t - (x+iy)} - \frac{1}{t - (x-iy)} \right] dt$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

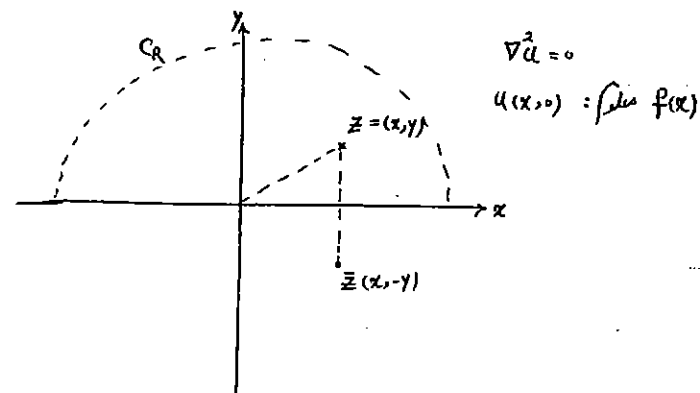
$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

$$\nabla^2 u = 0 \quad \& \quad \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = f(x)$$

"مسئله نیم صفحه فوقانی"

مسئله دیریش در نیم صفحه فوقانی

فرض کنید تابع $f(z)$ برای $\text{Im } z > 0$ کلی با شرط دارد برای $|z|^k |f(z)| < M$ با توجه به فرض استرال کوچی $(k > 0)$ و M, k موجود داشته باشد



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

تابع $u(x, y)$ به نمره افیر حل مسئله نوین برای نیم صفحه فوقانی است. محله:

$$\nabla^2 u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$$

باقی به مسئله میرسد:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = g(x)$$

مسئله نوین در نیم صفحه فوقانی

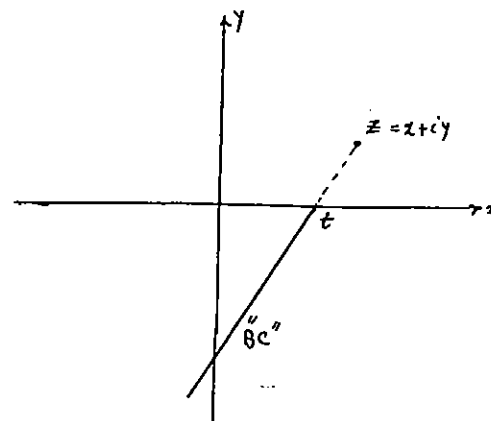
$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{Im } z > 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = g(x)$$

حال اگر تابع گاریتی هارمونیک را به صورت زیر بنویسیم:

$$h[(x-t)^2 + y^2]$$

باقی به آنکه تابع $h(z-t)$ قبلی است در این صورت تابع فوق هارمونیک است.



$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h[(x-t)^2 + y^2] g(t) dt + A$$

باقی به هارمونیک بودن تابع زاردی، تابع زیر هارمونیک است.

$$u = A\theta_1 + B\theta_2 + C$$

در تحقیق داریم:

$$u = A \operatorname{Im}(\ln(z-1)) + B \operatorname{Im}(\ln(z+1)) + C$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم

$$\theta_1 = \theta_2 = 0 \Rightarrow u = u_2 \Rightarrow C = u_2$$

$$\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0 \Rightarrow u = u_1 \Rightarrow A = \frac{1}{\pi}(u_1 - u_2)$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \pi \Rightarrow u = u_0 \Rightarrow B = \frac{1}{\pi}(u_0 - u_1)$$

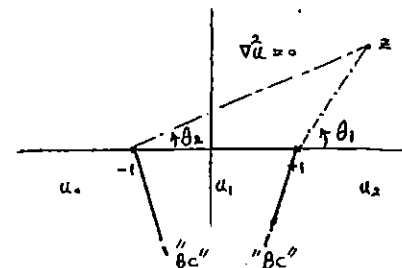
$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\pi}(u_1 - u_2)\theta_1 + \frac{1}{\pi}(u_0 - u_1)\theta_2 + u_2 \\ &= \frac{1}{\pi}(u_1 - u_2)\tan^{-1}\frac{y}{x-1} + \frac{1}{\pi}(u_0 - u_1)\tan^{-1}\frac{y}{x+1} + u_2 \\ &= \frac{1}{\pi}(u_1 - u_2)\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{1-x}{y}\right) + \frac{1}{\pi}(u_0 - u_1)\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{-1-x}{y}\right) + u_2 \\ &= \frac{1}{\pi}\left(u_0\left(\tan^{-1}\frac{-1-x}{y} + \frac{\pi}{2}\right) + u_1\left(\tan^{-1}\frac{1-x}{y} - \tan^{-1}\frac{-1-x}{y}\right) + \right. \\ &\quad \left. u_2\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{1-x}{y}\right)\right) \end{aligned}$$

مثال: مسئله دیریش را حل کنید.

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} u_0 & -\infty < x < -1 \\ u_1 & -1 < x < 1 \\ u_2 & 1 < x < \infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{y}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{-1} \frac{u_0}{(t-x)^2 + y^2} dt + \int_{-1}^1 \frac{u_1}{(t-x)^2 + y^2} dt + \int_1^{\infty} \frac{u_2}{(t-x)^2 + y^2} dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \tan^{-1} \frac{t-x}{y} \Big|_{-\infty}^{-1} u_0 + \tan^{-1} \frac{t-x}{y} \Big|_{-1}^1 u_1 + \tan^{-1} \frac{t-x}{y} \Big|_1^{\infty} u_2 \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ u_0 \left(\tan^{-1} \frac{-1-x}{y} + \frac{\pi}{2} \right) + u_1 \left(\tan^{-1} \frac{1-x}{y} - \tan^{-1} \frac{-1-x}{y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + u_2 \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1-x}{y} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\left(\theta = \operatorname{Im}(\ln z) = \arg z, \quad \ln z = \ln r + i\theta \right)$$

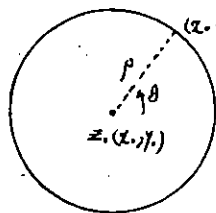


* اگر در رابطه افیسر $u=1$ ، v هارمونیک باشد داریم:

$$\int_C \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0$$

که در واقع شرط خطی بودن مسئله نوعی است.

* دایره زیر را در نظر بگیرید در اینصورت داریم:



$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} v(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} v(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) d\theta = 2\pi v(x, y)$$

$$\therefore v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) d\theta$$

رابطه فوق را تعمیم می‌دهیم که از فرمول انتگرال بواسون نیز قابل استخراج است.

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(a, \varphi)(a^2 - r^2)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi)} d\varphi$$

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a, \varphi) d\varphi$$

Green's Functions.

توابع گرین

قضیه گرین: اگر در قضیه ریورانس

$$\iint_D \nabla \cdot \underline{g} \, dx dy = \int_C \underline{g} \cdot \underline{n} \, ds$$

به جای $\underline{g} = u \nabla v$ قرار دهیم:

$$\nabla \cdot \underline{g} = \nabla \cdot (u \nabla v) = u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v$$

در نتیجه:

$$\iint_D (u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx dy = \int_C u \nabla v \cdot \underline{n} \, ds = \int_C u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds$$

حال بار دیگر قضیه ریورانس را به ∇u اعمال می‌کنیم، نتایج حاصله را از یکدیگر کم می‌کنیم.

$$\iint_D (v \nabla^2 u + \nabla v \cdot \nabla u) \, dx dy = \int_C v \nabla u \cdot \underline{n} \, ds = \int_C v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds$$

$$\therefore \iint_D (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \, dx dy = \int_C (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) \, ds$$

رابطه فوق را تعمیم می‌دهیم که نتایج زیر از آن قابل استخراج است:

قضیه: حل مسئله نوین ناحیه یک ثابت منحصر بفرد است.

$$\nabla^2 u_1 = \nabla^2 u_2 = 0 \quad z \in D$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_c = \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_c = g(s) \quad \int_C g(s) ds = 0 \quad \text{شرط لازم دگانی برای وجود حل}$$

$$v \triangleq u_1 - u_2 \rightarrow \nabla^2 v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_c = 0$$

و مسئله قضیه تبدیل داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = cte' = u.$$

حل مسئله نوین با فرض $\int_C u ds = 0$ منحصر بفرد است.

$$\int_C u \cdot ds = 0 \Rightarrow u \cdot l = 0, \quad l \neq 0 \Rightarrow u = 0$$

قضیه: حل مسئله نیز یکتا منحصر بفرد است.

اگر قضیه دیورانس را به $v \nabla^2 v$ اعمال کنیم، داریم:

$$\iint_D (v \nabla^2 v + |\nabla v|^2) dx dy = \int_C v \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

حال بچنین کنیم u_1, u_2 در حل مسئله نیز یکتا باشد.

$$\nabla^2 u_1 = \nabla^2 u_2 = 0 \quad z \in D$$

$$u_1 \Big|_c = u_2 \Big|_c = f(s)$$

رابطه فرق را به تابع $u = u_1 - u_2$ اعمال می کنیم

$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0 \\ v \Big|_c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint_D |\nabla v|^2 dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = cte'$$

چون می خواهیم منفرات دس $v = 0$ داشته باشیم

$$\therefore u_1 = u_2$$

تابع گرین برای مسئله دیریش:

تعریف: تابع $G(z; z_0) = G(x, y; x_0, y_0)$ نامکدر شرایط زیر
 صدق می کند، تابع گرین-دیریش برای $R = D \cup C$ گویند.

$$G(x, y; x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0| + H(x, y; x_0, y_0) \quad (1)$$

H در D هارمونیک است. $\nabla^2 H = 0 \quad z \in D$

(۲) G به جزء در نقطه z_0 در کلیه نقاط D پیوسته و مشتق پذیر است.

(۳) مقدار G بر مرز D یعنی C برابر صفر است $G|_C = 0$

قضیه: تابع گرین-دیریش، در صورت وجود منحصر به فرد است.

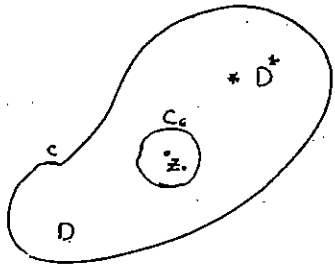
فرض کنید G_1, G_2 دو تابع گرین-دیریش برای $R = D \cup C$ باشند

$$G \triangleq G_1 - G_2 = H_1 - H_2$$

$$\nabla^2 G = 0 \quad G|_C = 0 \Rightarrow G \equiv 0 \Rightarrow G_1 = G_2$$

بدین ترتیب در تابع مسئله را به منحصر به فرد بدین مسئله دیریش منتهی گردیم.

قضیه: G در D مثبت است.



G در D^* پیوسته و هارمونیک است، با توجه
 به اینکه $G|_C = 0$ ، $G|_C > 0$ نتیجه می گیریم که
 G در D مثبت است. (طبق قضیه $M_{\max}$)

$$\int_0^{2\pi} (G_1 \frac{\partial G_2}{\partial r} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial r}) \rho_1 d\theta = \int_0^{2\pi} (G_2 \frac{\partial G_1}{\partial r} - G_1 \frac{\partial G_2}{\partial r}) \rho_2 d\theta$$

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow 0} G_2 \Big|_{r=\rho_1} = G_2(x_1, y_1) \quad \lim_{\rho_2 \rightarrow 0} G_1 \Big|_{r=\rho_2} = G_1(x_2, y_2)$$

$$G_1 = -\frac{1}{2\pi} \ln \rho_1 + \dots \quad G_2 = -\frac{1}{2\pi} \ln \rho_2 + \dots$$

$$\left(\frac{\partial G_1}{\partial r} \right)_{r=\rho_1} = \frac{\partial G_1}{\partial \rho_1} = -\frac{1}{2\pi \rho_1} + \dots \quad \left(\frac{\partial G_2}{\partial r} \right)_{r=\rho_2} = \frac{\partial G_2}{\partial \rho_2} = -\frac{1}{2\pi \rho_2} + \dots$$

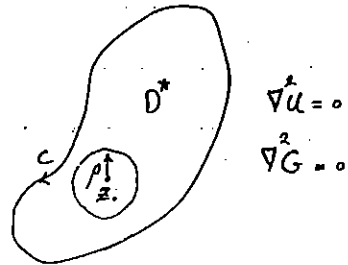
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \ln \rho = 0 \quad \therefore G_2(x_1, y_1) = G_1(x_2, y_2)$$

قضیه: اگر $G(x, y; x_1, y_1)$ تابع گرین-بیرس برای $R=DUC$ باشد و $G(x, y; x_2, y_2)$ تابع گرین-بیرس برای R باشد عبارت است از

$$u(x, y) = -\int_C g(s) \nabla G \cdot \underline{n} ds$$

$$\nabla^2 u = 0 \quad (x, y) \in D$$

$$u = g(s) \quad (x, y) \in C$$



$$\nabla^2 u = 0$$

$$\nabla^2 G = 0$$

"Reciprocity"

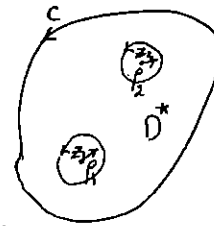
اصل تقابلی

$$G(x_1, y_1; x_2, y_2) = G(x_2, y_2; x_1, y_1)$$

$$G(z_1; z_2) = G(z_2; z_1)$$

$$G_1(x, y) \triangleq G_1(x, y; x_1, y_1) \quad G_2(x, y) \triangleq G_2(x, y; x_2, y_2)$$

$$G_1(x_2, y_2) = G_2(x_1, y_1) \quad \text{حال ثابت می کنیم:}$$



توابع G_1, G_2 در D^* هارمونیک هستند

$$\nabla^2 G_1 = \nabla^2 G_2 = 0$$

$$\iint_{D^*} (G_1 \nabla^2 G_2 - G_2 \nabla^2 G_1) dx dy = 0$$

$$\therefore \int_C (G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n}) ds - \int_0^{2\pi} (G_1 \frac{\partial G_2}{\partial r} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial r}) \rho d\theta \Big|_{r=\rho_1} =$$

$$\int_0^{2\pi} (G_1 \frac{\partial G_2}{\partial r} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial r}) \rho d\theta \Big|_{r=\rho_2} = 0$$

اثبات: $G = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0| + H \quad (\nabla^2 H = 0)$ بسیار مهم

$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z)$ و $f(z_0) = 0$

که $g(z)$ تابعی تحلیلی و مضاعف $g(z_0) \neq 0$

$|f(z)| = |z - z_0| |g(z)|$

$|f(z)| = |z - z_0| |g(z)| \Rightarrow -\frac{1}{2\pi} \ln |f(z)| = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0| - \frac{1}{2\pi} \ln |g(z)|$

$-\frac{1}{2\pi} \ln |f(z)| = -\frac{1}{2\pi} \ln |w| = -\frac{1}{2\pi} \ln 1 = 0 \quad (z \in \mathbb{C})$

اثبات: قضیه گرین را به تابع u ، G ، و D^* اعمال می کنیم

$$\iint_{D^*} (u \nabla^2 G - G \nabla^2 u) dx dy = \int_C (u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n}) ds - \int_0^{2\pi} (u \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial u}{\partial r}) r d\theta$$

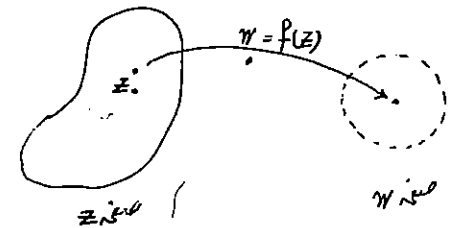
$\lim_{r \rightarrow 0} r G = \lim_{r \rightarrow 0} r \ln r = 0$

با اصل مریست مندرج را به فون داریم: $\int_C g(s) \frac{\partial G}{\partial n} ds + u(z_0) = 0$

$u(z_0) = u(x_0, y_0) = - \int_C g(s) \nabla G \cdot \eta ds$

قضیه: اگر نگاشت $w = f(z)$ صفحه همنه سازه D با مرکز c را به دایره R نگاشت کند به تنوعی که $f(z_0) = 0$ را برقرار دارد. تابع گرین - میرشد برای $R = D \cup C$ عبارت است از:

$G = -\frac{1}{2\pi} \ln |f(z)|$



دس امکان ندارد که $\nabla G \cdot \underline{n} \Big|_{z \in c} = 0$ شود. بنابراین قرار می دهیم

$$\nabla G \cdot \underline{n} \Big|_{z \in c} = K$$

$$\int_c K ds = -1 \rightarrow KL = -1 \rightarrow K = -1/L \quad L: \text{طول مرز } c$$

تعریف: تابع $G(x, y; x_0, y_0)$ که در مرز c زیر مقصود کند، تابع گرین برای مسئله نوین در $R = D \cup c$ گوئیم:

$$G(x, y; x_0, y_0) = -1/2\pi \ln |z - z_0| + H \quad (i)$$

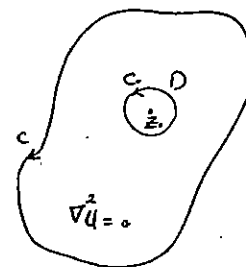
(ii) H در D تابعی مشتقات پیوسته بوده و هارمونیک است

$$\nabla G \cdot \underline{n} \Big|_c = -1/L \quad \text{که } L \text{ طول مرز } c \text{ است.} \quad (iii)$$

$$\int_c G ds = 0 \quad (iv) \quad (\text{برای مختصه فرمول گرین } G)$$

حال مختصه فرمول گرین-نوین را در شکل انداز مقصود کند و بررسی می کنیم.

تابع گرین-نوین برای مسئله نوین:



$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_c = g(s)$$

$$\int_c u ds = 0, \quad \int_c g(s) ds = 0$$

با اهمیت گرین از تابع گرین-نوین پیدا می شود. تابع $G = -1/2\pi \ln |z - z_0| + H$ همان تابع گرین برای مسئله نوین در مرز c و ابتدا تحقق می کنیم آیا این تابع دارد $\nabla G \cdot \underline{n} \Big|_c = 0$ شود.

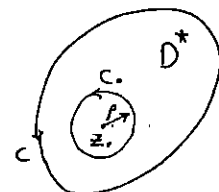
چون H در D هارمونیک است لذا انتگرال $\int_{c \cup c_0} \nabla H \cdot \underline{n} ds = 0$

چون G در D^* هارمونیک است لذا $\int_c \nabla G \cdot \underline{n} ds - \int_{c_0} \nabla G \cdot \underline{n} ds = 0$

$$\nabla \ln |z - z_0| \cdot \underline{n} \Big|_{z \in c} = 1/\rho$$

$$\int_0^{2\pi} (\nabla \ln |z - z_0| \cdot \underline{n}) \rho d\theta = 2\pi \Rightarrow \int_c \nabla G \cdot \underline{n} ds = -1$$

قضیه: اگر G تابع گرین-نویسن برای $R = D \cup C$ باشد در آن صورت
 $u(x, y) = \int_C g(s) G ds$



$$\nabla^2 u = 0 \quad (x, y) \in D$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_C = g(s)$$

$$\int_C u ds = 0, \quad \int_C g(s) ds = 0$$

اثبات: قضیه گرین-نویسن برای تابع G در D^* می نویسیم:

$$\iint_{D^*} (u \nabla^2 G - G \nabla^2 u) dx dy = \int_C (u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n}) ds - \int_0^{2\pi} (u \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial u}{\partial r}) r d\theta$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left(\frac{\partial G}{\partial r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$$

$$0 = - \int_C g(s) G ds + u(z_0)$$

$$\therefore u(z_0) = u(x, y) = \int_C g G ds$$

قضیه: تابع گرین-نویسن با شرایط فوق منحصر بنظر است.

اثبات:
 فرض کنید G_1, G_2 بصورت زیر باشند:

$$G_1 = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z_1| + H_1$$

$$G_2 = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z_2| + H_2$$

$$\int_C G_1 ds = \int_C G_2 ds = 0 \quad \nabla G_1 \cdot \underline{n}_C = \nabla G_2 \cdot \underline{n}_C = -1/2$$

تابع $G \equiv G_1 - G_2 = H_1 - H_2$ در D بدین گونه دهمینیک است:

$$\int_C G ds = 0 \quad \nabla G \cdot \underline{n}_C = 0$$

با توجه به منحصر بنظر بودن حل مسئله نویسن تحت شرایط فوق لذا

$$G \equiv 0 \quad \therefore G_1 = G_2$$

$$G(x, y; x_0, y_0) = -\frac{1}{4\pi} \ln \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\} + \frac{1}{4\pi} \ln \{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2\}$$

$$u(x, y) = -\int_C g(s) \nabla G \cdot \eta \, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)_{y=0} dx$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{y_0}{\pi} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^2 + y_0^2}$$

$$\therefore u(x, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx$$

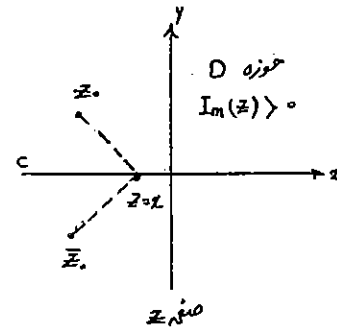
مثال ۲۰
بنابراین مثال اگر دایره دایره را در نظر بگیریم، با یک نقطه شش را به این سمت دایره را به سمت خود
نقطه شش کند به نحوی که z_0 مرکز آن شود

$$|z| = 1 \Rightarrow \omega = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad |w| = 1$$

$$G = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0| - \frac{1}{2\pi} \ln |1 - \bar{z}_0 z|$$

$$u(z_0) = -\int_0^{2\pi} g(\theta) \left(\frac{\partial G}{\partial r} \right)_{r=1} d\theta$$

نیم صفحه نواحی را در نظر بگیریم:



دایره شش به سمت خود

$$w = f(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

نیم صفحه نواحی به دایره دایره شش می شود

$$\text{Im } z > 0 \rightarrow |w| < 1$$

$$\text{Im } z = 0 \rightarrow |w| = 1$$

$$f(z_0) = 0$$

در نهایت تابع گزین می توان برای آن صورت

$$\begin{aligned} G(z, z_0) &= -\frac{1}{2\pi} \ln |f(z)| \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0| + \frac{1}{2\pi} \ln |z - \bar{z}_0| \end{aligned}$$

$$G(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} \cdot \frac{z + \bar{z}_0}{z + z_0} \right|$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0| + H$$

اگر بازه است $w = z^2$ صنف را باز کنیم

$$G(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - \bar{z}_0^2} \right|$$

$$z = re^{i\theta}, \quad z_0 = \rho e^{i\varphi}$$

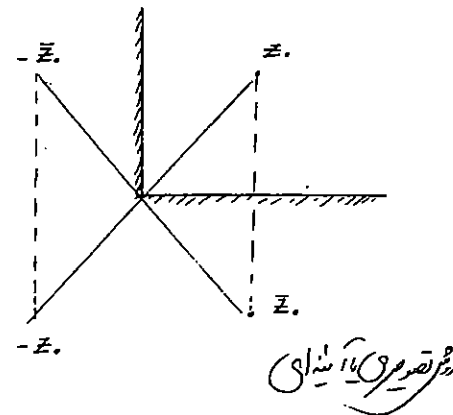
$$G = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{re^{i\theta} - \rho e^{i\varphi}}{1 - \rho r e^{i(\theta+\varphi)}} \right|$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)}{1 + \rho^2 r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)}$$

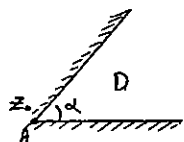
$$u(\rho, \varphi) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \varphi)} d\theta.$$

مثال ۳.

بندان مثال دیگر اگر تابع گزین را برای ربع صنف زیر بدست آوریم



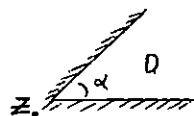
حال اگر حوزۀ D را به این شکل



"صفحه z "

$$w = (z - z_0)^{n/\alpha}$$

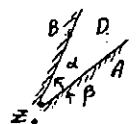
"صفحه w "



"صفحه z "

$$w = u_0 + (z - z_0)^{n/\alpha}$$

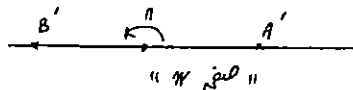
"صفحه w "



"صفحه z "

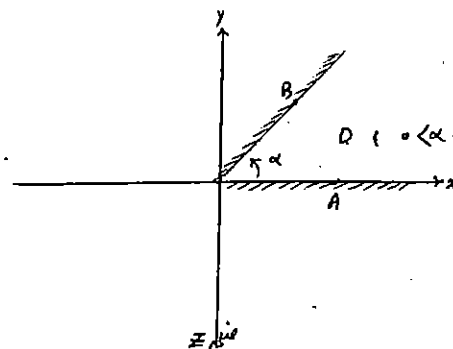
$$w = u_0 + (z - z_0)^{-n/\alpha} \cdot e^{-i\beta n/\alpha}$$

$$J_1 = z - z_0; \quad J_2 = J_1 e^{-i\beta}; \quad J_3 = J_2^{1/\alpha}; \quad w = u_0 + J_3$$



"Schwarz-Christoffel Mapping"

نگاشت شوارتز-کریستوفل



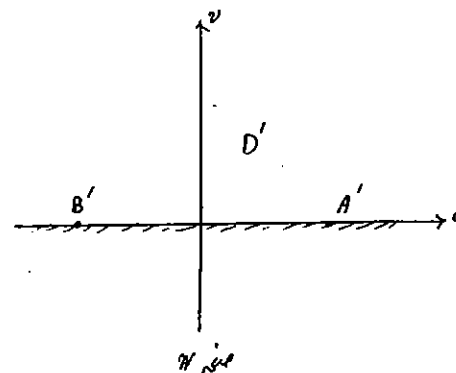
$$D: 0 < \arg z < \alpha < 2\pi$$

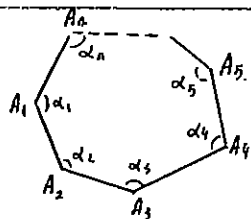
حوزه فوق-تخت نگاشت $w = z^{n/\alpha}$ با فرضی شروع. لذا صفحه w تولید راست

$$D': 0 < \arg w < \pi$$

$$OB: w = r^{n/\alpha} \cdot e^{i\theta}$$

$$\arg w = \theta$$





$$\frac{dz}{dw} = A \prod_{i=1}^n (w - u_i)^{\frac{\alpha_i}{n} - 1}$$

$$z = A \int_{w_0}^w \prod_{i=1}^n (w - u_i)^{\frac{\alpha_i}{n} - 1} dw + B$$

$$\begin{array}{cccccc} A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 & A'_5 & A'_n \\ \hline u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_n \end{array}$$

$$-\infty < u_1 < u_2 < u_3 < \dots < u_n < +\infty$$

حال نگاشت فن را در مختصات w برسی می کنیم. فرض است A, B نقش در این انتقال، نبرگهای دارند.

۷۸

نگاشت منکوس را با الفینر به صورت زیر است

$$(w - u_0)^{\alpha/\pi} = (z - z_0) e^{-i\beta}$$

$$z - z_0 = e^{i\beta} (w - u_0)^{\alpha/\pi}$$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\alpha}{\pi} e^{i\beta} (w - u_0)^{\alpha/\pi - 1}$$

$$\arg(dz) = \arg(dw) + \beta + \left(\frac{\alpha}{\pi} - 1\right) \arg(w - u_0)$$

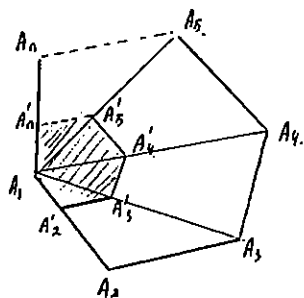
چنانچه w سمت راست نقطه u_0 باشد داریم: $\arg(w - u_0) = \pi$

$$\Rightarrow \arg(dz) = \beta + \alpha - \pi$$

چنانچه w سمت راست نقطه u_0 باشد داریم: $\arg(w - u_0) = 0$

$$\Rightarrow \arg(dz) = \beta$$

یعنی $\arg(dz)$ به اندازه $\pi - \alpha$ بچرخنی باید به نحوی که زاویه α مسافته شود.



در مثلث n ضلعی : علاوه بر تساوی نزایا، باقی
 $n-2$ ضلع قادر نیز به یک نسبت باشند.
 به عبارت دیگر $n-3$ رابطه باقی برقرار
 باشد. لذا مثلاً با متر از n با متر $u_1, \dots, u_n$
 در داخل است و بقیه باقی طوری تعیین شوند
 که شرط n برقرار باشد.

$$\frac{A'_2 A'_3}{A_2 A_3} = \frac{A'_3 A'_4}{A_3 A_4} = \frac{A'_4 A'_5}{A_4 A_5} = \dots = \frac{A'_{n-1} A'_n}{A_{n-1} A_n}$$

$$\frac{dZ}{dW} = A \prod_{i=1}^n (W - u_i)^{\frac{\alpha_i}{n} - 1}$$

α_i نزایای داخلی غیر ضلعی است نه در مثلث n ضلعی ضرب

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi$$

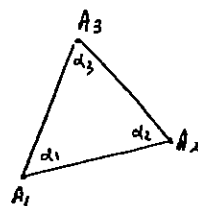
$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{n} - 1 \right) = -2$$

در مثلث n ضلعی : در مثلث n ضلعی نزایای آن ها مساوی باشند لذا
 u_1, u_2, u_3 دلخواه است.

$$-\infty < u_1 < u_2 < u_3 < +\infty$$

$$\frac{dZ}{dW} = A (W - u_1)^{\frac{\alpha_1}{n} - 1} (W - u_2)^{\frac{\alpha_2}{n} - 1} (W - u_3)^{\frac{\alpha_3}{n} - 1}$$

A, B را به قی تعیین می کنیم

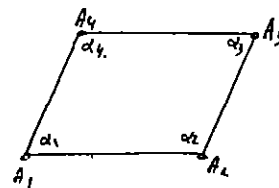


$$u_1 \rightarrow A_1 \quad Z(u_1) = Z_1$$

$$u_2 \rightarrow A_2 \quad Z(u_2) = Z_2$$

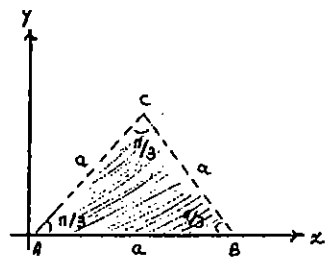
$$u_3 \rightarrow A_3 \quad Z(u_3) = Z_3$$

در مثلث n ضلعی : شرط n با این است که علاوه بر تساوی بودن نزایا، در ضلع
 قادر نیز به یک نسبت باشند. لذا به با متر از چهار با متر u_1, u_2, u_3, u_4
 در داخل است و چهارمی باقی به قی انتخاب شود که شرط n برقرار باشد.

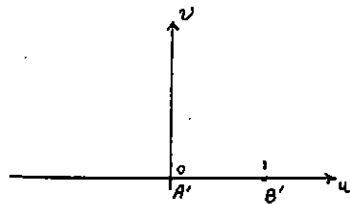


$$\frac{A'_2 A'_3}{A_2 A_3} = \frac{A'_3 A'_4}{A_3 A_4}$$

$$\therefore \frac{dz}{d\zeta} = A'(\zeta - \zeta_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} \dots (\zeta - \zeta_{n-1})^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi} - 1} \quad \zeta_i = \frac{1}{u_n - u_i}$$

صفحه z

مثال ۱ یک صفحه متناهی از افلاک را در نظر بگیرید.

صفحه w

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \pi/3$$

$$\frac{dz}{dw} = A(w - 0)^{-2/3} (w - 1)^{-2/3}$$

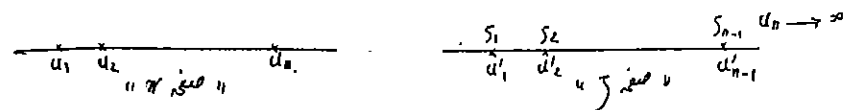
$$z = z(w) \quad u_1 = 0, \quad z_1 = 0 : z(0) = 0 ; \quad u_2 = 1, \quad z_2 = a : z(1) = a$$

$$z = A' \int_0^w w^{-2/3} (1-w)^{-2/3} dw$$

$$a = A' \int_0^1 w^{-2/3} (1-w)^{-2/3} dw$$

نکته: شرایط کرستینل: $u_n \rightarrow \infty$ در این صورت شکل گویاست
معبر است نیز می شود:

$$\frac{dz}{dw} = A \prod_{i=1}^{n-1} (w - u_i)^{\frac{\alpha_i}{\pi} - 1}$$



که در این شکل در پارامتر از $u_1, \dots, u_{n-1}$ مختلف است.

$$w = u_n - 1/\zeta \quad \zeta = \frac{1}{u_n - w}$$

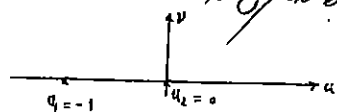
$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz}{dw} \frac{dw}{d\zeta}$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = A(\zeta - u_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} \dots (\zeta - u_{n-1})^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi} - 1} (\zeta - u_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= A \left(u_n - \frac{1}{\zeta} - u_1\right)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} \dots \left(u_n - \frac{1}{\zeta} - u_{n-1}\right)^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi} - 1} \left(-\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} \\ &= A' \left(\zeta - \frac{1}{u_n - u_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} \dots \left(\zeta - \frac{1}{u_n - u_{n-1}}\right)^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi} - 1} \frac{1}{\zeta^2} \end{aligned}$$

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{1}{\zeta^2}$$

نقطه بحرانی $u_1 = -1$, $u_2 = 0$



$$\frac{dz}{d\eta} = A(\eta+1)^{-1/2} \eta^{1/2} = A \sqrt{\frac{\eta}{\eta+1}} \Rightarrow 2A \sqrt{\zeta^2 - 1} = \frac{dz}{d\zeta} (\zeta^2 = \eta+1)$$

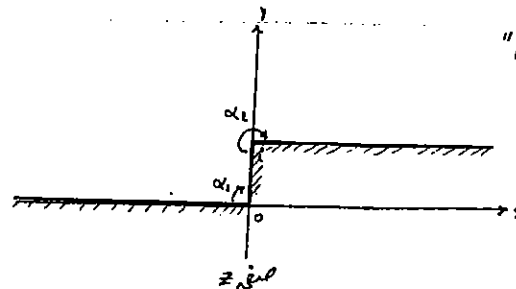
$$z(-1) = 0i, \quad z(0) = i$$

Beta Function: $B(m,n) \triangleq \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt$ تابع بتا

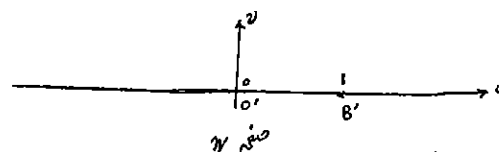
$$B(a,m,n) \triangleq \int_0^a t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt$$

$$\therefore z = F(\eta) = \frac{\alpha B(\eta; 1/3, 1/3)}{B(1/3, 1/3)}$$

مثال ۲. "Degenerate"



$$\alpha_1 = \pi/2, \quad \alpha_2 = 3\pi/2$$



$$u_1 = 0, \quad \alpha_1 = \pi/2$$

$$u_2 = 1, \quad \alpha_2 = 3\pi/2$$

$$\frac{dz}{d\eta} = A(\eta-0)^{-1/2} (\eta-1)^{1/2} = A \sqrt{\frac{\eta-1}{\eta}} \Rightarrow 2A(\sqrt{1+\zeta^2} - \frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}}) = \frac{dz}{d\zeta}$$

$$\zeta^2 = \eta-1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = i$$

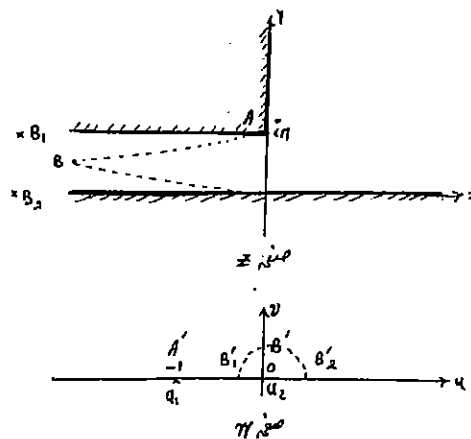
$$z = 2\zeta + \ln \frac{\zeta-1}{\zeta+1}$$

$$z(\eta) = 2\sqrt{\eta+1} + \ln \frac{\sqrt{\eta+1}-1}{\sqrt{\eta+1}+1}$$

$$\ln 0^- = -\infty + i\pi$$

$$\ln 0^+ = -\infty$$

$$\frac{dz}{d\eta} = A \frac{\sqrt{\eta+1}}{\eta}$$



"Degenerate" $\alpha_1 = 3\pi/2, \alpha_2 = 0$

$$\frac{dz}{d\eta} = A(\eta+1)^{1/2} \eta^{-1} = A \frac{\sqrt{\eta+1}}{\eta}$$

$$1+\eta = \zeta^2 \rightarrow \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz}{d\eta} \cdot 2\zeta = 2\zeta A \frac{\zeta}{-\zeta^2+1}$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = 2A \frac{\zeta^2}{\zeta^2-1} = 2A \left(1 + \frac{1}{\zeta^2-1}\right) = A \left(2 + \frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{\zeta+1}\right)$$

$$z = A \left(2\zeta + \ln \frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right) + B$$

$$\begin{aligned} \eta = -1 \\ z = i\eta \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta = 0 \\ z = i\eta \end{aligned} \right.$$

از رابطه $z(p) = \infty$ نتیجه می گیریم که $g(p) = \infty$.
یعنی p قطب $g(w)$ و $h(w)$ باشد. با توجه به اینکه جبهه فرعی هست
ساختن برای مناسب بود $h(w)$ افکائی شود لذا داریم:

$$\arg(g(w)) = \text{ثابت} \quad w=u$$

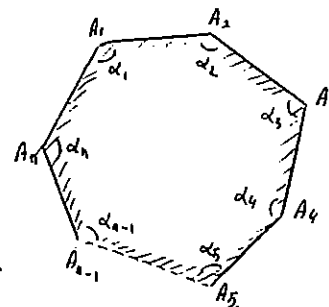
نکته: $z = f(w)$ و $h(w)$ در $w = \infty$ قطبی باشد یعنی $w^2 f'(w)$ و $h(w)$ در $w = \infty$ کراندار باشد. نیز $h(w) g(w) w^2$ و $h(w)$ در $w = \infty$ کراندار باشد. با توجه
به اینکه $\sum (1 - \frac{\alpha_j}{n}) = 2$: $h(w) w^2$ در $w = \infty$ کراندار باشد.

$$g(w) = \frac{A}{[(w-p)(w-\bar{p})]^2}$$

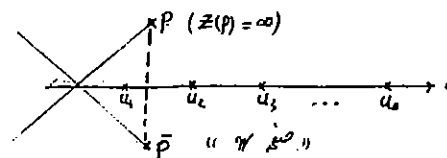
$$\frac{dz}{dw} = \frac{A}{[(w-p)(w-\bar{p})]^2} \prod_{j=1}^n (w-u_j)^{1-\frac{\alpha_j}{n}}$$

p قطب نقطه $z = \infty$ است $(\Im m p > 0)$

تبدیل حوزه خارجی یک چندضلعی
الف) به نیم صفحه راست



« z صفحه»



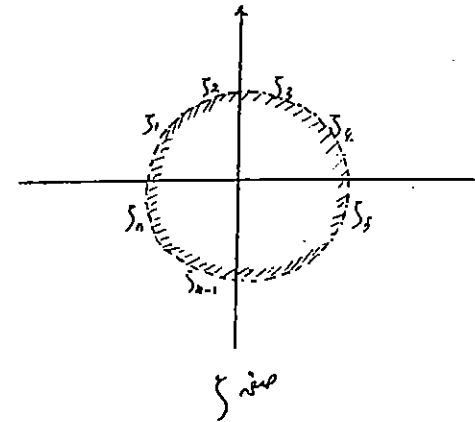
از جمله مضامین مهم این فصل این است که $z = \infty$ نقطه داخلی
حوزه است.

$$\frac{dz}{dw} = g(w) \prod_{j=1}^n (w-u_j)^{1-\frac{\alpha_j}{n}} = g(w) h(w)$$

$$z = f(w) = \int_w g(w) h(w) dw$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{A(\zeta-1)^4}{(p-\bar{p})^4 \zeta^2} \prod_{j=1}^n \left\{ \frac{(\bar{p}-p)(\zeta-\zeta_j)}{(\zeta-1)(\zeta_j-1)} \right\}^{1-\frac{\alpha_j}{n}} \frac{\bar{p}-p}{(\zeta-1)^2}$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{c}{\zeta^2} \prod_{j=1}^n (\zeta-\zeta_j)^{1-\frac{\alpha_j}{n}}$$



ب) خارج دایره واحد

این کار را انجام می دهیم تا به یک سلسله استواری
 $\zeta = \frac{w-\bar{p}}{w-p}$ برسیم
 عبارت است از:

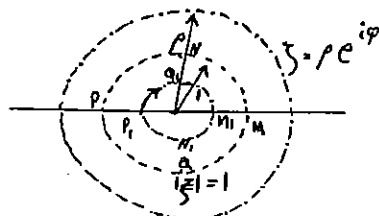
$$w = \frac{p\zeta - \bar{p}}{\zeta - 1} ; \quad w_j = \frac{p\zeta_j - \bar{p}}{\zeta_j - 1}$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dw}{dw} \frac{\bar{p}-p}{(\zeta-1)^2}$$

$$w - w_j = \frac{p\zeta - \bar{p}}{\zeta - 1} - \frac{p\zeta_j - \bar{p}}{\zeta_j - 1} = \frac{(\bar{p}-p)(\zeta-\zeta_j)}{(\zeta-1)(\zeta_j-1)}$$

$$w - p = \frac{p-\bar{p}}{\zeta-1} , \quad w - \bar{p} = \frac{(p-\bar{p})\zeta}{\zeta-1}$$

"مسجد"



"صفحه"

$$z = a/2 (\rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi})$$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi \\ y = \frac{a}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi \end{cases} \quad \rho > 1$$

$$\frac{x^2}{\left[\frac{a}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{a}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\right]^2} = 1$$

معادله بیضی که مانده های آن از قاعده $\pm a$ متساوی دارند

$$a/2 (p + 1/p)$$

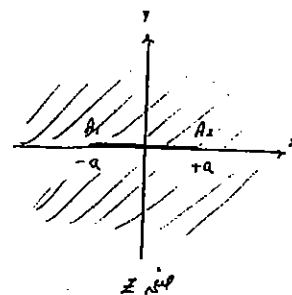
نصف طول مؤخر و ستر

$$a_{1/2} (f - 1/f)$$

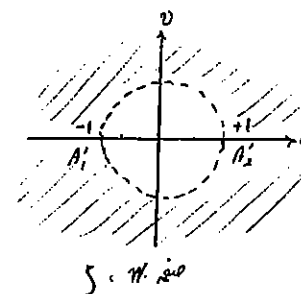
نصف طول قطر کو قطر

در این قسمه الهمزة بیضی کسی قسمه الهمزة بیضی می شود.

تبدیل زود فادوسلی



مفتی



5. W. zu

در صفحه z یک بردار در صفحه z ؛ زیرا $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ داریم

$$\frac{dz}{dz} = \frac{c}{z^2} (z^2 - 1)$$

$$x = c(\xi + \frac{1}{\xi}) + d$$

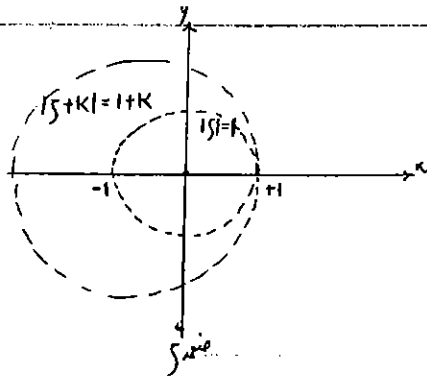
$$\begin{cases} \zeta = +1 \\ z = a \end{cases} \quad \begin{cases} \zeta = -1 \\ z = -a \end{cases}$$

$$C = a/2, \quad \rho = 0$$

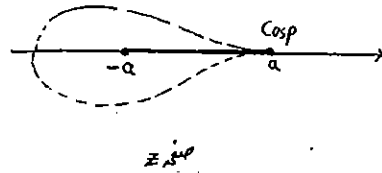
$z = 9/2 (\zeta + 1/\zeta)$: $\zeta = \sqrt{2}$

$$\left\{^2 - \frac{2x}{q}\right\} + 1 = 0$$

$$J = \frac{1}{q} (x \pm \sqrt{x^2 - q^2})$$

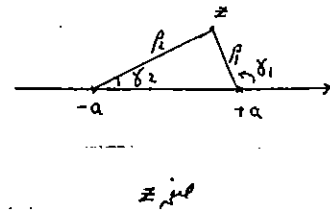
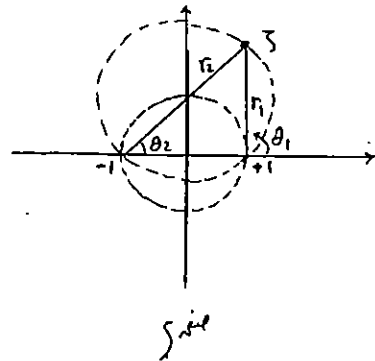


"Circular Arc Airfoil"



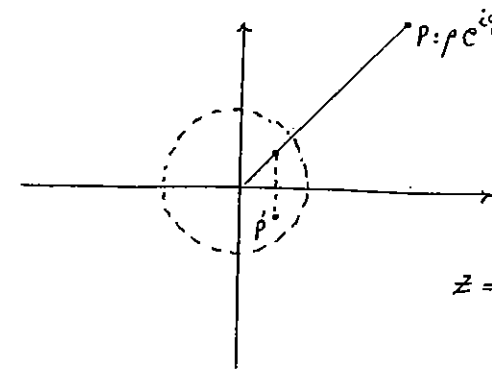
هنداشتن متوسعی زردکشی

بصورت زیر است.



$$z - a = \rho_1 e^{i\delta_1}, \quad z + a = \rho_2 e^{i\delta_2}$$

$$\frac{z-a}{z+a} = \left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right)^2 \quad \therefore \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\delta_1-\delta_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 e^{i2(\theta_1-\theta_2)}$$



$$z = \frac{a}{2} \left(\rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} \right)$$

نقطه P' یک نقطه در صفحه z است.

نقطه P یک نقطه در صفحه z است.

نقطه P یک نقطه در صفحه z است.

$$\frac{z-a}{z+a} = \left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right)^2$$

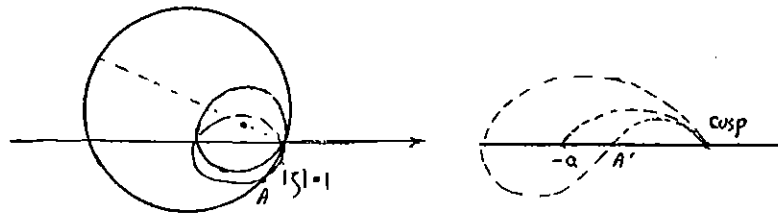
$$z = a/2 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = a/2 \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)$$

"Symmetric Joukowski Airfoil"

هنداشتن متقارن زردکشی

بصورت زیر است.



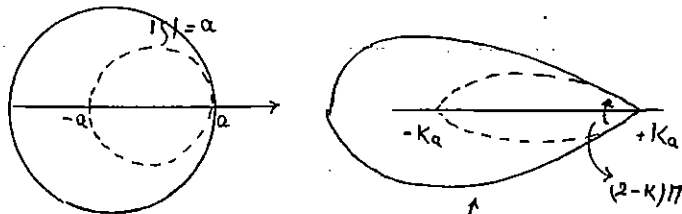
«صفحه»

برای جلوگیری از cusp (تیز شدن) و انداختن

Kármán - Trefftz Transformation

$$\frac{z - ka}{z + ka} = \left(\frac{\zeta - a}{\zeta + a} \right)^k \quad 1 < k < 2$$

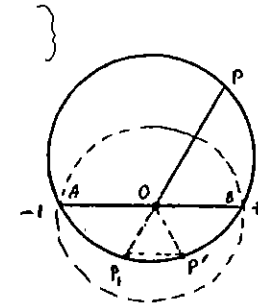
$k=1$ نگاشت هانی
 $k=2$ نگاشت وردنسکی



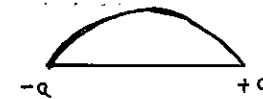
مناطق انتقال مارپیج - ترنسفر

$$\zeta - 1 = r_1 e^{i\theta_1} ; \zeta + 1 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$\delta = \theta_1 - \theta_2 = 2(\theta_1 - \theta_2) = 2\theta$$



$$(OA \cdot OB = OP \cdot OP')$$



کاربرد: بررسی حرکت غیر گرانشی سیال تراکم ناپذیر و بی‌چسب.

میدان سرعت زیر بارزنوا بگرنید: $\underline{z} = (u, v)$ که $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

$$\nabla \cdot \underline{z} = 0 \quad u_x + v_y = 0 \quad \text{معادله پایداری}$$

$$\nabla \times \underline{z} = 0 \quad u_y - v_x = 0 \quad \text{غیرگرانشی}$$

با دقت در روابط فوق می‌توانیم به روابط فوق در دایره راجع به $\underline{z}$ بیان داشته‌ایم برای تابع u و v تابع سرعت $\underline{z}$ می‌باشد.

$$w(z) = u - i v \quad \text{Complex Velocity Function.}$$

$$\nabla \times \underline{z} = 0 \Rightarrow \exists \varphi \text{ s.t. } \underline{z} = \nabla \varphi \quad \begin{cases} u = \varphi_x \\ v = \varphi_y \end{cases}$$

که φ تابع پتانسیل است.

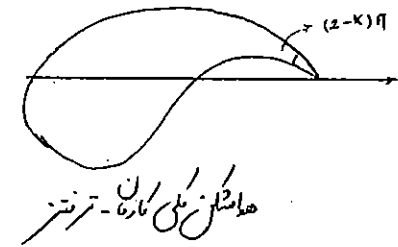
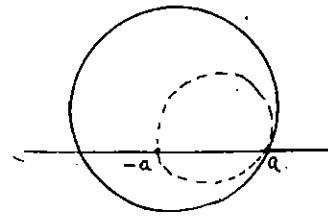
$$\nabla \cdot \underline{z} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

لذا φ هارمونیک است. حال اگر φ را در جمع هارمونیک φ بنویسیم

$$f(z) = \varphi + i \psi$$

تابع $f(z)$ تحلیلی است.

$$\nabla^2 \psi = 0$$



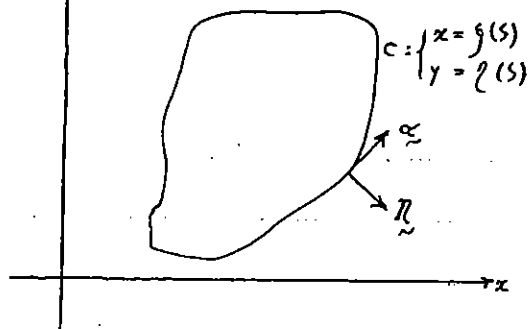
$$w(z) = u - iv$$

$$f(z) = \varphi + i\psi \quad f'(z) = w$$

$$u = \varphi_x = \psi_y$$

$$v = \varphi_y = -\psi_x$$

در صورت آرمین $w(z)$ به تفصیل دادن مناسب $f(z)$ منحصر به حل مسئله می شود (جریان غیر چرخشی $\text{curl} = 0$ و یا تدریج: میدان در محاسبه بر سبب)



$$\xi = (\xi', \eta') \quad ; \quad \eta = (\eta', -\xi')$$

$$z = \xi + i\eta$$

$$ds = (\xi' + i\eta') ds$$

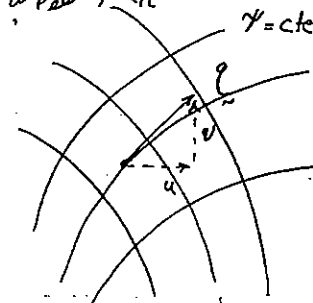
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v$$

$$f'(z) = \varphi_x + i\psi_x = u - iv = w(z)$$

$f(z)$ تابع پتانسیل (Complex Pot. Func.) می باشد. حال اگر تابع $\psi(x,y) = cte'$ (در اینجا بلاییم) خوانیم بریکه در واقع جریان برابر با صفر می باشد (است).

خطوط $\varphi = cte$



خطوط جریان (Stream Function)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{v}{u}$$

$$d\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho} dp$$

$$\therefore P = P_0 - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad \text{معادلهٔ دیرسلی:}$$

$$\therefore P = P_0 - \frac{1}{2} \rho W \bar{W} = P_0 - \frac{1}{2} \rho f'(z) \overline{f'(z)}$$

$$\underline{z} = (u, v)$$

$$\Gamma = \int \underline{z} \cdot \underline{\tau} ds \quad \text{circulation} \quad \text{چرخش}$$

$$Q = \int \underline{z} \cdot \underline{n} ds \quad \text{flow rate} \quad \text{جریان}$$

$$\begin{aligned} \int \omega(z) dz &= \int (u - iv)(\xi' + i\eta') ds \\ &= \int (u\xi' + v\eta') ds + i \int (u\eta' - v\xi') ds \\ &= \Gamma + iQ \end{aligned}$$

معادلات دیرسلی - استرکس در حالت خاص فون لایبرت زیر درمی آید:
(معادلات نیرتن)

$$\begin{cases} u \cdot u_x + v \cdot u_y = -\frac{1}{\rho} p_x & u_x + v_y = 0 \\ u v_x + v \cdot v_y = -\frac{1}{\rho} p_y & u_y - v_x = 0 \end{cases}$$

اگر معادله اول را در dx ، معادله دوم را در dy ضرب کنیم، رابطه زیر جمع کنیم، داریم:

ii) Source / Sink

چشمه / چاه

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z}{a}$$

$$\psi: Q > 0 \quad \text{Source}$$

$$\psi: Q < 0 \quad \text{Sink}$$

$$w(z) = f'(z) = \frac{Q}{2\pi z}$$

$$z = re^{i\theta}$$

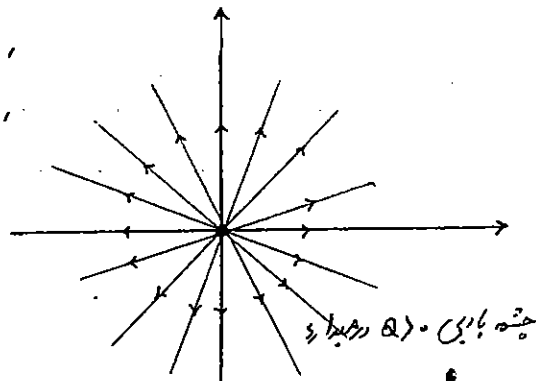
$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{r}{a} + i\theta \right)$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{a}$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$$

$$\begin{cases} u_r = \varphi_r \\ u_\theta = \frac{1}{r} \varphi_\theta = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{خطوط } \psi &= cte' \\ \theta &= cte' \end{aligned}$$



Simple Flows

i) Uniform Flow

جریان یکنواخت

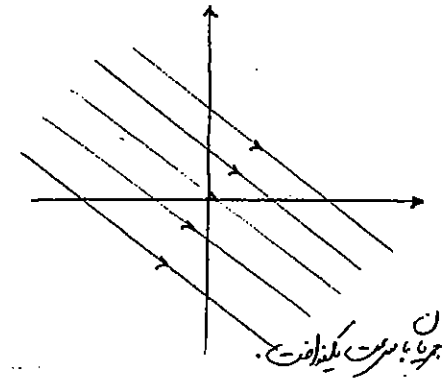
$$f(z) = cz$$

$$c = a + ib$$

$$\begin{cases} u = a \\ v = -b \end{cases}$$

$$w(z) = f'(z) = c = a + ib$$

$$\begin{aligned} f &= (a + ib)(x + iy) \\ &= ax - by + i(ay + bx) \end{aligned}$$



$$\varphi = ax - by \quad ; \quad \psi = ay + bx$$

$$\text{خطوط } \psi = ay + bx = cte$$

$$\text{جریان یکنواخت با سرعت } V_0 \text{ و زاویه } \alpha \text{ با محور } x: f(z) = V_0 e^{-i\alpha} z$$

$$w(z) = V_0 e^{-i\alpha} = u - iv$$

$$\begin{cases} u = V_0 \cos \alpha \\ v = V_0 \sin \alpha \end{cases}$$

ii) Vortex

چرخش

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z}{a}$$

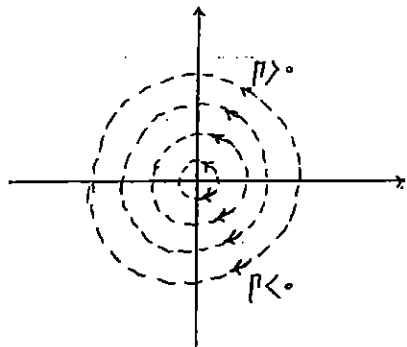
$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i z}$$

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta - i \ln \frac{r}{a})$$

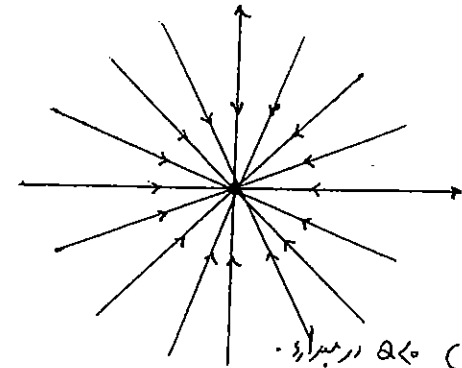
$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{a}$$

خطوط جریان: $\psi = cte$ $r = cte$

$$\begin{cases} u_r = v_\theta = 0 \\ u_\theta = \frac{1}{r} v_r = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$



$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z - z_0}{a} : z_0 \text{ مرکز چرخش}$$



$$W(z) = \frac{Q(x-iy)}{2\pi(x^2+y^2)}$$

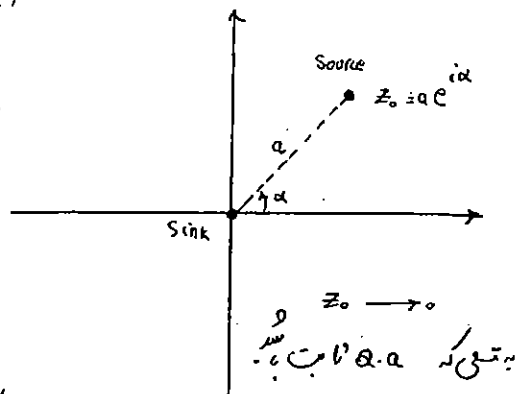
$$u = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+y^2} \quad ; \quad v = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$z_0 \text{ مرکز چاه یا چشمه} : f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z - z_0}{a}$$

اگر چند چاه یا چشمه، هم‌طور داشته باشیم $f(z)$ را می‌توان از ترکیب آنها بدست آورد.

۱) Doublet (Dipole)

$$\text{دوبل} \mu = \frac{Q \cdot a}{2\pi}$$



$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z - a e^{i\alpha}}{z} \\ &= \mu \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \ln \frac{z - a e^{i\alpha}}{z} \\ &= \mu \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln(z - a e^{i\alpha}) - \ln z}{a} \end{aligned}$$

$$= -\mu \frac{e^{i\alpha}}{z} \quad \therefore f(z) = -\mu \frac{e^{i\alpha}}{z}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\mu \frac{e^{i\alpha}}{r} e^{-i\theta} = -\frac{\mu}{r} e^{i(\theta-\alpha)} \\ &= -\frac{\mu}{r} [\cos(\theta-\alpha) - i \sin(\theta-\alpha)] \end{aligned}$$

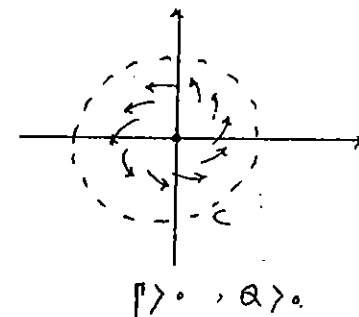
در صورتی که \alpha و \theta همان \mu

۲) Source / Sink + Vortex

$$f(z) = \frac{P + iQ}{2\pi i} \ln \frac{z}{a}$$

$$W(z) = \frac{P + iQ}{2\pi i z}$$

$$\int_C W(z) dz = P + iQ$$



vi) $\alpha = 0$ جریان منفرجه همراه با دایره در مجرای بازدارنده $(-U, 0)$
 در آن $\mu = a^2 U$

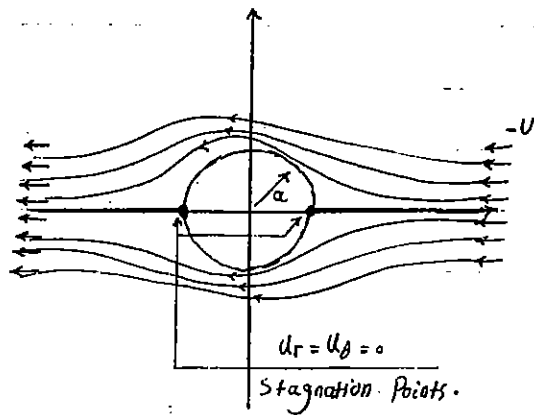
$$f(z) = -Uz - \frac{a^2 U}{z} = -U \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

$$f(z) = -U \left(r e^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta} \right)$$

$$\varphi = -U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta ; \quad \psi = -U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

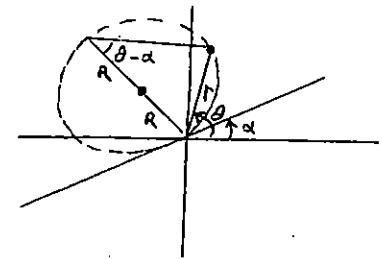
$$u_r = \varphi_{,r} = -U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta ; \quad u_\theta = \frac{1}{r} \varphi_{,\theta} = U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

خط جریانی: $U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta = cte$



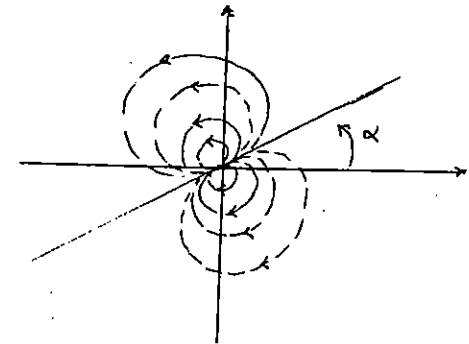
$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{\mu}{r} \cos(\theta - \alpha) \\ \psi &= \frac{\mu}{r} \sin(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad \begin{cases} u_r = \varphi_{,r} = \frac{\mu}{r^2} \cos(\theta - \alpha) \\ u_\theta = \frac{1}{r} \varphi_{,\theta} = -\frac{\mu}{r^2} \sin(\theta - \alpha) \end{cases}$$

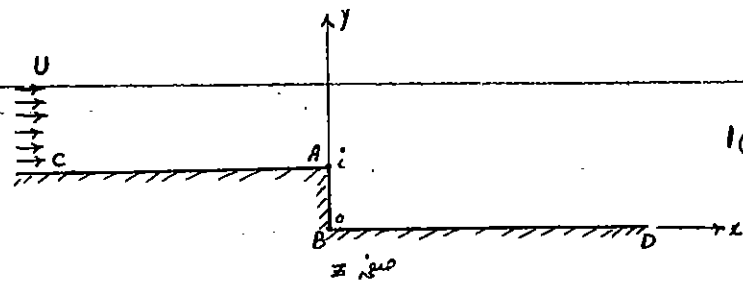
خط جریانی: $\psi = cte' \quad \therefore \frac{\mu}{r} \sin(\theta - \alpha) = cte'$



$$r = 2R \sin(\theta - \alpha)$$

$$\frac{\sin(\theta - \alpha)}{r} = \frac{1}{2R}$$

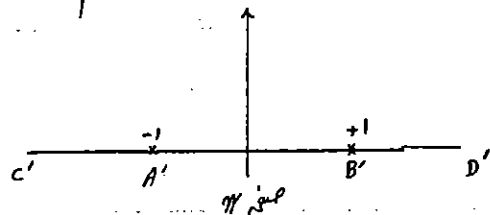




مسئله ۱

$$f(z) = ? \quad \left(\frac{df}{dz} \right)_{\infty} = U$$

حال از روش مشابهت ستریتزول، استفاده می‌کنیم



$$\frac{dz}{dw} = A \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} = A \left(\frac{1}{\sqrt{w^2-1}} + \frac{w}{\sqrt{w^2-1}} \right)$$

$$z = A \left(\cosh^{-1} w + \sqrt{w^2-1} \right) \quad ; \quad A = 1/\pi$$

$$z = \frac{1}{\pi} \left(\cosh^{-1} w + \sqrt{w^2-1} \right)$$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}}$$

اگر می‌خواهیم شرط را بنویسیم داریم:

$$f(z) = -U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z}{a}$$

$$\psi = -U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{a}$$

$$r=a \quad ; \quad \psi=0 \quad : \text{خط جریان}$$

$$\begin{aligned} \text{حقیقی } \eta > 1 : z &= \frac{1}{\eta} (\cosh^{-1} \eta + \sqrt{\eta^2 - 1}) \\ u - iv &= u \sqrt{\frac{\eta-1}{\eta+1}} \Rightarrow v = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{حقیقی } -1 < \eta < 1 : z &= \frac{1}{\eta} (\cosh^{-1} \eta + \sqrt{\eta^2 - 1}) \\ &= \frac{i}{\eta} (\cosh^{-1} \eta + \sqrt{1 - \eta^2}) = \text{مردمی خفیه} \\ u - iv &= i u \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{حقیقی } \eta < -1 : z &= \frac{1}{\eta} (\cosh^{-1}(-\eta) + \sqrt{\eta^2 - 1}) + i \\ u - iv &= u \sqrt{\frac{\eta-1}{\eta+1}} \Rightarrow v = 0 \end{aligned}$$

$$f(z) = f(z(\eta)) = F(\eta)$$

$$F(\eta) = B \cdot \eta : B \text{ ثابت}$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{dF}{d\eta} \frac{d\eta}{dz} = \eta \sqrt{\frac{\eta-1}{\eta+1}} B$$

$$\left(\frac{dF}{dz} \right)_{z=\infty} = 0 \Rightarrow B\eta = 0 \therefore B = 0/\eta$$

$$F(\eta) = \frac{0}{\eta} \eta$$

$$f(z) = f(z(\eta)) = F(\eta) = \frac{0}{\eta} \eta$$

$$z = \frac{1}{\eta} (\cosh^{-1} \eta + \sqrt{\eta^2 - 1})$$

$$\frac{dF}{dz} = u - iv = u \sqrt{\frac{\eta-1}{\eta+1}}$$

برای شرط بردار به بتر: بردار به بتر $\eta = \eta$ حقیقی است.

$$\eta > 1 : B'D' \longleftrightarrow BD$$

$$-1 < \eta < 1 : A'B' \longleftrightarrow AB$$

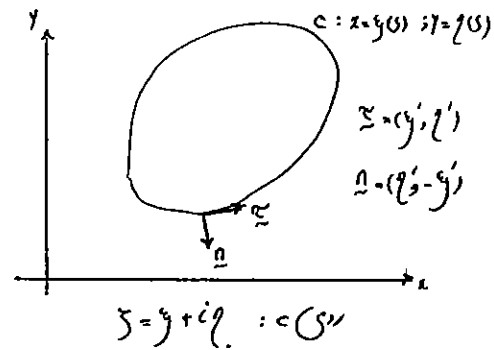
$$\eta < -1 : C'A' \longleftrightarrow CA$$

مثال ۳. فرض کنید جسی در مقابل جریان متناوب قرار دارد. ما باید میدان را در داخل جسی پیدا کنیم.

$$F = - \int_C p \bar{n} ds$$

$$\begin{cases} F_x = - \int_C p \xi' ds \\ F_y = + \int_C p \eta' ds \end{cases}$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho \pi \bar{\pi}$$

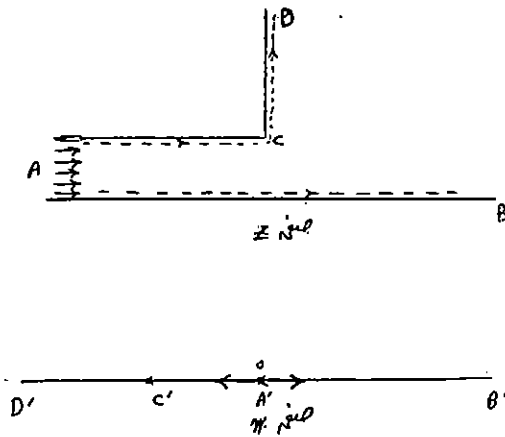


$$\begin{cases} F_x = - \int_C (p_0 - \frac{1}{2} \rho \pi \bar{\pi}) \xi' ds = \frac{1}{2} \rho \int_C \pi \bar{\pi} \xi' ds \\ F_y = - \frac{1}{2} \rho \int_C \pi \bar{\pi} \eta' ds \end{cases}$$

$$F_y = - \frac{1}{2} \rho \int_C \pi \bar{\pi} \eta' ds$$

$$F_x - i F_y = \frac{1}{2} \rho \left[\int_C \pi \bar{\pi} (\xi' + i \eta') ds \right]$$

$$= \frac{i \rho}{2} \int_C \pi \bar{\pi} \bar{z}' ds = \frac{i \rho}{2} \left[\int_C \bar{z}' \pi^2 ds + \underbrace{\int_C \pi (\bar{z}' \pi - \pi \bar{z}') ds}_{-2i \int_C \pi \bar{z}' ds} \right]$$



نمایب Source در مقابل با Q مجمل قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \int_C \pi \bar{\pi} \zeta \bar{\zeta}' ds \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \int_C \pi^2 \zeta \zeta' ds - \frac{1}{2} \rho \int_C \pi \zeta (\bar{\pi} \bar{\zeta}' - \pi \zeta') ds \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \int_C \zeta \pi^2 d\zeta + i \rho \int_C \pi \zeta (\xi \cdot \eta) ds \right\}
 \end{aligned}$$

چنانچه جسم جامد باشد $(\xi \cdot \eta) = 0$

$$\therefore M_0 = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \int_C \zeta \pi^2 d\zeta \right\}$$

رابطه انتگرال کلاسیک در اینجا بلازینوس "Blasius" که در صفحه ۱۱۸ نوشته داریم:

$$\pi = \frac{df}{dz} = \frac{d\tilde{f}}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}$$

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \int_C \pi^2(z) dz \quad (z \text{ صغیر} \rightarrow \zeta \text{ صغیر})$$

$$= \frac{i\rho}{2} \int_C \left(\frac{d\tilde{f}}{d\zeta} \right)^2 \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^2 \frac{dz}{d\zeta} d\zeta$$

$$= \frac{i\rho}{2} \int_C \left(\frac{d\tilde{f}}{d\zeta} \right)^2 \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^{-1} d\zeta$$

$$\bar{\pi} \zeta' - \pi \zeta' = -2i \operatorname{Im}(\pi \zeta') = -2i(u\eta' - v\xi') = -2i(\xi \cdot \eta)$$

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \int_C \pi^2 d\zeta + \rho \int_C \pi (\xi \cdot \eta) ds$$

چنانچه جسم جامد باشد $(\xi \cdot \eta) = 0$

$$\therefore F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \int_C \pi^2 d\zeta$$

حال که در دایره ما تابعی نیست:

$$dM_0 = \eta dF_y - \xi dF_x \quad (dF_y = p\xi' ds; dF_x = -p\eta' ds)$$

$$dM_0 = p(\eta\xi' + \xi\eta') ds \quad \therefore M_0 = \int_C p(\eta\xi' + \xi\eta') ds$$

$$M_0 = -\frac{1}{2} \rho \int_C \pi \bar{\pi} (\eta\xi' + \xi\eta') ds$$

حال انتقال منحنی را از ds به $d\zeta$ تبدیل می کنیم:

$$\zeta' = \xi' + i\eta' \quad ; \quad \bar{\zeta}' = \xi' - i\eta'$$

$$\nabla^2 \varphi = P = \sigma_x + \sigma_y$$

فرض کنید:

$$\nabla^2 P = 0 \quad f(z) = P + iQ$$

$f(z)$ تابع تحلیلی است، Q زوج همبسته P است.

$$\gamma(z) \triangleq \frac{1}{4} \int f(z) dz = p + iq$$

$$\gamma'(z) = \frac{1}{4} f(z) = p_{,x} + i p_{,y} = q_{,y} - i q_{,x}$$

$$p_{,x} = q_{,y} = \frac{1}{4} P, \quad q_{,x} = -p_{,y} = \frac{1}{4} Q$$

$$\nabla^2 (\varphi - x p - y q) = \nabla^2 \varphi - \nabla^2 (x p) - \nabla^2 (y q)$$

$$= \nabla^2 \varphi - (x \nabla^2 p + 2 \frac{\partial p}{\partial x}) - (y \nabla^2 q + 2 q_{,y})$$

$$= \nabla^2 \varphi - 2 p_{,xx} - 2 q_{,yy}$$

$$= P - \frac{1}{2} P - \frac{1}{2} P = 0$$

$$\therefore \varphi = p + x p + y q \quad p \text{ هارمونیک است}$$

$$= \operatorname{Re} [\bar{z} \gamma(z) + K(z)]$$

که $\gamma(z)$ و $K(z)$ تابع تحلیلی هستند.

"کامبر بر آسانتر فعلی در الاستیسیته در مبانی"

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{معادله}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad \text{معادله}$$

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \text{معادله}$$

$$\text{از رابطه معادله اول: } \exists A(x, y) \text{ s.t.: } \sigma_x = A_{,y}, \tau_{xy} = -A_{,x}$$

$$\text{از رابطه معادله دوم: } \exists B(x, y) \text{ s.t.: } \sigma_y = B_{,x}, \tau_{xy} = -B_{,y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y} \Rightarrow \exists \varphi(x, y) \text{ s.t.: } A = p_{,y}, B = p_{,x}$$

$$\sigma_x = p_{,yy}, \sigma_y = p_{,xx}, \tau_{xy} = -p_{,xy}$$

$$\text{معادله هارمونی: } \nabla^2 \varphi = 0$$

"Airy Stress Function" $\varphi(x, y)$ تابع تنش ایری گزینیم.

بالا - فوق باره :

$$2\varphi = \bar{z}\psi(z) + z\bar{\psi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases}$$

$$2\varphi_x = \bar{z}\psi'(z) + \bar{\psi}(\bar{z}) + \chi'(z) + \psi(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z})$$

$$2\varphi_y = i[\bar{z}\psi'(z) + \bar{\psi}(\bar{z}) + \chi'(z) - \psi(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z})]$$

$$\varphi_x + i\varphi_y = \psi(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z})$$

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + i\varphi_{xy} = \psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z}) + z\bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}) \\ i\varphi_{xy} - \varphi_{yy} = z\bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}) - \psi'(z) - \bar{\psi}'(\bar{z}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_x - i\varphi_y = \psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z}) + z\bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}) \\ -i\varphi_y - \varphi_x = z\bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}) - \psi'(z) - \bar{\psi}'(\bar{z}) \end{cases}$$

$$\varphi_x + \varphi_y = 2[\psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})] = 4\operatorname{Re}[\psi'(z)] = P$$

$$\varphi = \operatorname{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)]$$

دوره

$$= \operatorname{Re}\left[\bar{z}\bar{z} \frac{\psi(z)}{z} + \chi(z)\right]$$

$$= r^2 p_1 + p_2 \quad : p_1, p_2 \text{ تابع های مستقل}$$

یا $\operatorname{Re}[f(z)]$

$$f(z) = \alpha + i\beta \quad \alpha, \beta \text{ مستقل}$$

$$\bar{f}(\bar{z}) = \alpha - i\beta$$

$$2\operatorname{Re}[f(z)] = f(z) + \bar{f}(\bar{z})$$

$$f(z) = e^{inz} = e^{in(x+iy)}$$

$$\operatorname{Re}[f(z)] = e^{-ny} \cos nx$$

$$\bar{f}(\bar{z}) = e^{-in\bar{z}} = e^{-in(x-iy)}$$

$$f(z) = z \quad ; \quad \bar{f}(\bar{z}) = f(\bar{z}) = \bar{z}$$

$$f(z) = iz \quad ; \quad f(\bar{z}) = i\bar{z} \quad ; \quad \bar{f}(z) = -i\bar{z}$$

در مثل کرنش در صفحه "Plane Strain" ($\epsilon_z = 0$) گمانی است در شرایط اخیر
 به حل همان مسئله تغییر می‌بخشیم. $E \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2}$ و $\nu \rightarrow \frac{\nu}{1-\nu}$
 به حل همان مسئله تغییر می‌بخشد.

$$E u_{,xx} = p_{,yy} - \nu p_{,xx}$$

$$E v_{,y} = p_{,xx} - \nu p_{,yy}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\nabla^2 \phi = p_{,xx} + p_{,yy} = p$$

$$f = p + i q$$

$$\gamma = 1/4 \int f dz = p + i q \Rightarrow \gamma' = p_x + i q_x = 1/4 (p + i q) = f/4$$

$$\therefore \nabla^2 \phi = p = 4 p_x = 4 \gamma_{,y}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$E u_{,xx} = p_{,yy} - \nu p_{,xx} = 4 p_{,x} - (1+\nu) p_{,xx}$$

$$E v_{,y} = p_{,xx} - \nu p_{,yy} = 4 \gamma_{,y} - (1+\nu) p_{,yy}$$

$$2Gu = \frac{4}{1+\nu} p - p_{,xx} + f_1(x)$$

$$2Gv = \frac{4}{1+\nu} \gamma - p_{,yy} + f_2(x)$$

$$\epsilon_y - \epsilon_x - 2i \tau_{xy} = 2 [z \bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\kappa}''(\bar{z})]$$

$$\epsilon_y - \epsilon_x + 2i \tau_{xy} = 2 [\bar{z} \psi''(z) + \kappa''(z)]$$

$$\epsilon_x + \epsilon_y = 4 \operatorname{Re} [\psi'(z)]$$

$$\epsilon_y - \epsilon_x + 2i \tau_{xy} = 2 [\bar{z} \psi''(z) + \kappa''(z)]$$

در تغییر بردار درین بیان جایابی، معادلات تنش - کرنش را بدست می‌آوریم
 تنش در صفحه ($\epsilon_z = 0$) می‌نویسیم:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\epsilon_x - \nu \epsilon_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\epsilon_y - \nu \epsilon_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \text{و} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\epsilon_x = u_{,x}$$

$$\epsilon_y = v_{,y}$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}$$

"معادلات ریمان-یل-باره‌ای در تئوری"

$$\Rightarrow 2G(u+iv) = \frac{4}{1+\nu} \psi(z) - [\psi(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\kappa}'(\bar{z})] + f_1(y) + if_2(x)$$

حال براساس تنش-انحرش داریم:

$$2G u_{,y} = \frac{4}{1+\nu} p_{,y} - p_{,xy} + f_1'(y)$$

$$2G v_{,x} = \frac{4}{1+\nu} l_{,x} - p_{,xy} + f_2'(x)$$

$$2\tau_{xy} = \frac{4}{1+\nu} (p_{,y} \overset{\circ}{\hookrightarrow} l_{,x}) + 2\tau_{xy} + f_1'(y) + f_2'(x)$$

در نتیجه

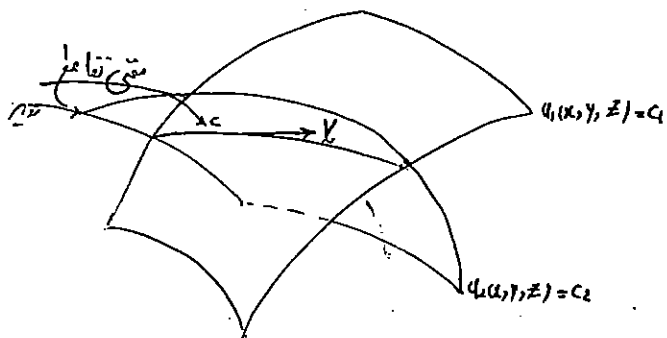
$$f_1'(y) + f_2'(x) = 0$$

$$\Rightarrow f_1'(y) = A, \quad f_2'(x) = -A$$

توابع $f_1(y)$ و $f_2(x)$ مبین حرکت صلب هستند، پس می‌توان آنها را از نظر حذف کرد.

$$2G(u+iv) = \frac{3-\nu}{1+\nu} \psi(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{\kappa}'(\bar{z}) \quad (\text{Plane Stress})$$

سؤال "موسگرینی" با ترجمه "میکائیل امیرزی" از اینجا آغاز می‌شود.



خط تقاطع در $u_1(x, y, z) = c_1$ و $u_2(x, y, z) = c_2$ این است که:

$$\text{grad } u_1 \times \text{grad } u_2 \neq 0$$

توابع u_1, u_2 را رابطه گوینیم اگر $f(u_1, u_2) = 0$ باشد. چنانچه منحنی اشتغال c از هر خورده روی $u_1 = c_1$ و $u_2 = c_2$ حاصل شود، پس در این صورت:

$$v \perp \text{grad } u_1, \quad v \perp \text{grad } u_2$$

که از رابطه فوق نتیجه می گیریم:

$$p \frac{\partial u_1}{\partial x} + q \frac{\partial u_1}{\partial y} + r \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0$$

$$p \frac{\partial u_2}{\partial x} + q \frac{\partial u_2}{\partial y} + r \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0$$

در نتیجه منحنی اشتغال را می توان از دو حل مستقل معادله زیر بدست آورد:

$$p u_{1x} + q u_{1y} + r u_{1z} = 0$$

"معادلات دیفرانسیل پاره ای"

معادلات دیفرانسیل پاره ای رتبه یک
منحنی اشتغال یک میدان برداری

$$v = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

معین کند یک میدان برداری در R^3 باشد. در این صورت منظور از یک منحنی اشتغال این میدان برداری، منحنی است که با بر نقاط مختلف آن مماس باشد.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = dt$$

منحنی اشتغال میدان $v = (P, Q, R)$ را می توان از حل معادلات دیفرانسیل عادی فوق، بدست آورد. از طرفی می دانیم که یک منحنی را می توان از تقاطع دو درجه بدست آورد.

$$u_1 = \frac{x^2}{2} - \tan^{-1} z = c_1$$

$$u_2 = \frac{xy}{2} - \tan^{-1} z = c_2$$

دایره است که u_1, u_2 در حل مستقل هستند داریم:

$$\text{grad } u_1 = \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x}, 0 \right)$$

$$\text{grad } u_2 = \left(\frac{y}{2}, \frac{x}{2}, -\frac{1}{1+z^2} \right)$$

$$\Rightarrow \text{grad } u_1 \times \text{grad } u_2 \neq 0$$

اگر u_1, u_2 در حل معادله دیفرانسیل باشند، تابع u_3 نیز حل معادله است، زیرا که

$$\left(\frac{\partial u_3}{\partial x} = f_{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + f_{u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \quad P$$

$$\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} = f_{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial y} + f_{u_2} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \quad Q$$

$$\left(\frac{\partial u_3}{\partial z} = f_{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial z} + f_{u_2} \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \quad R$$

با جمع کردن روابط اخیر داریم:

$$\Rightarrow P u_{3,x} + Q u_{3,y} + R u_{3,z} = 0$$

مثال: در حل مستقل معادله زیر را بیابید.

$$x u_{xx} + y u_{yy} + xy(1+z^2) u_{zz} = 0$$

$$P = x, \quad Q = y, \quad R = xy(1+z^2)$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy(1+z^2)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \Rightarrow u_1 = \frac{y}{x} = c_1 \\ y \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+z^2} \text{ or } y dx dz = \frac{dz}{1+z^2} \end{array} \right.$$

طبقه بندی معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت: $PZ_{xx} + QZ_{xy} = R$

۱) اگر P, Q, R تابع x, y, z باشند، معادله را اصطلاحاً معادله دیفرانسیل با ضرایب شبه خطی گوئیم. "Quasi-linear"

۲) اگر P, Q, R تابع x, y ، تابع R تابع x, y, z باشد، را اصطلاحاً معادله تقریباً خطی گوئیم. "Almost-linear"

۳) اگر P, Q, R تابع x, y ، R تابع خطی از z باشد، را اصطلاحاً معادله خطی گوئیم.

$$a(x,y)Z_{xx} + b(x,y)Z_{xy} + c(x,y)Z = d(x,y)$$

$$P = a(x,y), \quad Q = b(x,y), \quad R = d(x,y) - c(x,y)z$$

اگر $q = u(x,y,z)$ یک حل معادله دیفرانسیل $(*) P u_{xx} + Q u_{xy} + R u_z = 0$ باشد به شرط آنکه $u_{xz} \neq 0$ ، را اصطلاحاً معادله فکتی گوئیم. $u(x,y,z) = 0$ حل معادله شبه خطی را بطور فکتی بدست می آید.

$$Z_{xx} = -\frac{u_{xx}}{u_{xz}}, \quad Z_{xy} = -\frac{u_{xy}}{u_{xz}}$$

$$PZ_{xx} + QZ_{xy} = -\frac{1}{u_{xz}} (P u_{xx} + Q u_{xy}) = -\frac{1}{u_{xz}} (-R u_z) = R$$

مثال: حل کنی معادله زیر را بنویس.

$$x^2 Z_{xx} + y^2 Z_{yy} = (x+y)z$$

$$P = x^2, \quad Q = y^2, \quad R = (x+y)z$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{(x+y)z}$$

$$u_1 = 1/x - 1/y = c_1$$

$$\frac{d(x-y)}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{(x+y)z} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{d(x-y)}{x-y}$$

$$u_2 = \frac{z}{x-y} = c_2$$

حال از فرضی می دانیم که هر تابعی از u_1, u_2 حل معادله $(*)$ است. «انتهای»

لذا برای حل معادله شبه خطی با شرط ابتدایی، باید روشی را پیدا کنیم به نحوی که z حل معادله بوده در درجه شامل متغیری $\bar{c}$ باشد.

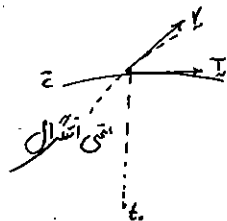
$$\bar{c} : x = x_0(t) ; y = y_0(t) ; z = z_0(t)$$

قضیه: چنانچه در نقطه $t_0 \in I$

$$P(x_0, y_0, z_0) \frac{dy_0}{dt} - Q(x_0, y_0, z_0) \frac{dx_0}{dt} \neq 0$$

باشد، در اینصورت یک همپای $\bar{c}$ برای t_0 وجود دارد که معادله شبه خطی با شرط اولیه در این همپای دارای حل منحصر به فرد است. منظور از $P(x_0, y_0, z_0)$ ، $P(x_0(t_0), y_0(t_0), z_0(t_0))$ ، $Q(x_0(t_0), y_0(t_0), z_0(t_0))$ ، $\frac{dx_0}{dt}$ ، $\frac{dy_0}{dt}$ است.

اثبات: چنانچه $u(x, y, z) = 0$ حل ضعیف معادله شبه خطی با شرط ابتدایی باشد بدیهی است که ادلا: این درجه شامل متغیری $\bar{c}$ در همپای متغیری است که بیان $u(x, y, z) = 0$ می باشد. لذا: $u_{x, y, z} \neq 0$ باشد.



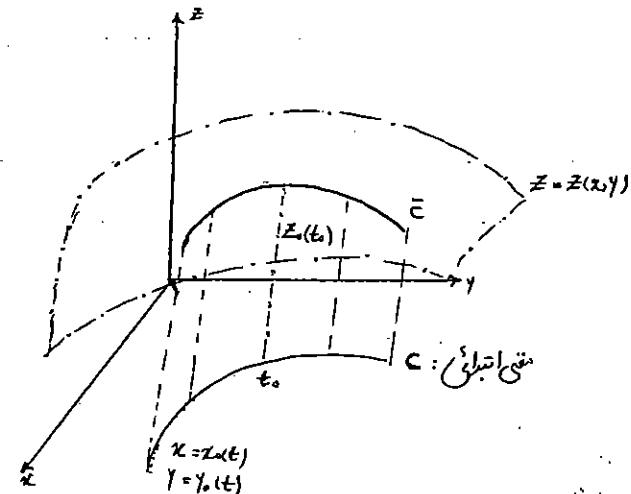
$$\frac{z}{x-y} = f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow z = (x-y) f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

که تابع f هر تابعی می تواند باشد که با استفاده از شرط از برای بدست می آید.

"معادله با شرط ابتدایی"

معادله شبه خطی $Pz_x + Qz_y = R$ را در نظر بگیریم، چنانچه $z(x_0)$ بر روی متغیری $\bar{c}$ که عبارت است از $(c: x = x_0(t), y = y_0(t))$ $t \in I$ برابر با $z_0(t) = z(x_0(t), y_0(t))$ باشد در اینصورت معادله را معادله با شرط ابتدایی گوئیم.



روند حل معادله:

برای حل معادله به خطی
 $PZ_x + QZ_y = R$ ؛ شرط اولیه: $z(x_0(t), y_0(t)) = z_0(t)$
 $(t \in I)$ معادله زیر را حل می‌کنیم.

(۱) معادله متغیری را به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$\bar{c}: x = x_0(t); y = y_0(t); z = z_0(t)$$

(۲) شرط $P(x_0, y_0, z_0) \frac{dx_0}{dt} - Q(x_0, y_0, z_0) \frac{dy_0}{dt} \neq 0$ را بررسی می‌کنیم تا وجود
 منحصر به فرد بودن حل مشخص شود.

(۳) در حل مستقل u_1 ، u_2 را برای معادله $P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ پیدا می‌کنیم.

(۴) u_1, u_2 را به ازای $z = z_0(t); y = y_0(t); x = x_0(t)$ تابعی کنیم تا تابع $u_1(t)$
 و $u_2(t)$ بدست آید.

(۵) t را بین $u_1(t)$ و $u_2(t)$ حذف می‌کنیم تا رابطه $f(u_1, u_2) = 0$ بدست آید.

اگر u بر سطح $\bar{c}$ را در نقطه (x_0, y_0, z_0) بنا کنیم، یعنی است
 که رویه بطور موضعی شامل $\bar{c}$ است.

$$\text{grad } u \parallel \bar{c} \times I$$

$$\bar{c} \times I = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ P & Q & R \\ \frac{dx_0}{dt} & \frac{dy_0}{dt} & \frac{dz_0}{dt} \end{vmatrix}_{t=t_0}$$

چون آنکه $u_{,z} \neq 0$ باشد آنگاه u را می‌توان به عنوان $u(x, y, z)$ نوشت.

$$(\text{grad } u)_z \neq 0$$

$$\Rightarrow \left(P \frac{dy_0}{dt} - Q \frac{dx_0}{dt} \right)_{t_0} \neq 0$$

در صورت منحصر به فرد بودن، یا حل وجود ندارد یا بی‌خاسته حل وجود دارد.

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x-y}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{d(x+z)}{x+z} \Rightarrow u_1 = \frac{x+z}{y} = c_1$$

$$\frac{d(x-y)}{z} = \frac{dz}{x-y} \Rightarrow u_2 = (x-y)^2 - z^2 = c_2$$

برای $\bar{c}$:

$$u_1 = \frac{t+1+t}{1} = 1+2t \quad t = \frac{1}{2}(u_1-1)$$

$$u_2 = (t-1)^2 - (t+1)^2 = -4t \quad t = -\frac{1}{4}u_2$$

با فرض t بین دو رابطه فوق

$$2u_1 + u_2 = 2$$

$$2\left(\frac{x+z}{y}\right) + (x-y)^2 - z^2 - 2 = 0$$

$$z^2 - \frac{2}{y}z + 2 - (x-y)^2 - \frac{2x}{y} = 0$$

$$z = \frac{1}{y} \pm \left(\frac{1}{y} + x - y\right)$$

$$z(x, y) = \frac{2}{y} + x - y \quad y \neq 0$$

جواب قابل تبدیل عبارت است از

$$\begin{cases} z(x, 1) = 1 + x \quad (-\infty < x < +\infty) \text{ بر خط انتقالی بهر الیه} \\ (y+z)z_x + yz_y = x-y \end{cases}$$

$$c: x_0 = t, y_0 = 1, -\infty < t < +\infty$$

$$c \text{ برای } z = 1 + x = 1 + t \quad \bar{c} \text{ مستقیماً می آید:}$$

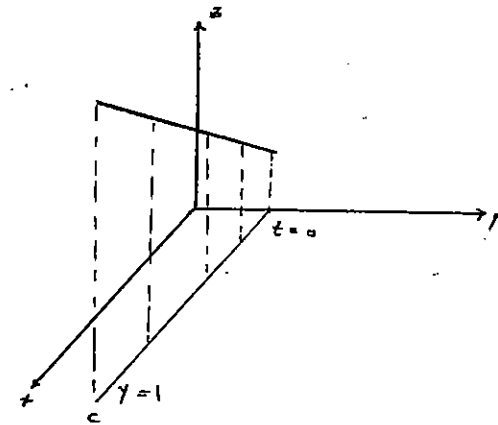
$$\bar{c}: x_0 = t, y_0 = 1, z_0 = 1 + t$$

$$P = y + z, \quad Q = y, \quad R = x - y$$

$$P(x_0, y_0, z_0) = 2 + t$$

$$Q(x_0, y_0, z_0) = 1$$

$$\Rightarrow P \frac{dy_0}{dt} - Q \frac{dx_0}{dt} = -1 \neq 0 \quad \text{برای خطی تماماً } c \text{ حل وجود دارد:}$$



$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$a(u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = a$$

$$u \rightarrow z, \quad t \rightarrow y \quad \therefore a(z) z_x + z_y = 0 \quad \text{معادله بقا}$$

$$C: \begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases} \quad \bar{C}: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=f(t) \end{cases}$$

معادله زیر را بنویسید و آن را حل کنید

$$\frac{dz}{a(z)} = \frac{dy}{1} = \frac{dx}{a}$$

$$u_1 = z = c_1$$

$$u_2 = x - a(z)y = c_2$$

$$\therefore z = f(x - a(z)y)$$

حل معادله بصورت صریح:

اگر معادله زیر را هم z را بر حسب تابعی از x, y بدست آوریم

$$F(x, y, z) = 0$$

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F_{,z} \neq 0 \quad z_{,x} = -\frac{F_{,x}}{F_{,z}}, \quad z_{,y} = -\frac{F_{,y}}{F_{,z}}$$

مثال: معادله با شرط ابتدایی بصورت زیر را حل کنید

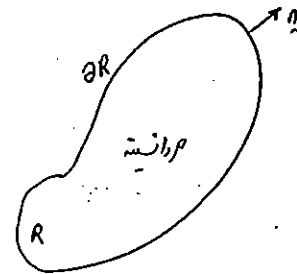
$$\begin{cases} p z_{xx} + z_{yy} = R \\ z(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

$$\bar{C}: x_0 = t; y_0 = 0; z_0 = f(t)$$

$$p \frac{dy_0}{dt} - q \frac{dx_0}{dt} = -1 \neq 0$$

برای نقطه x و $y=0$ در $t=0$ سیستم دارای حل منحصر به فرد است.

معادلات بقا:



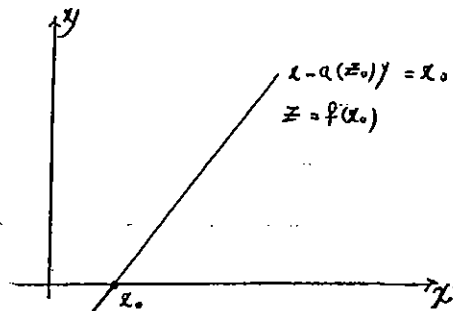
$$\text{معادله بقا: } \frac{d}{dt} \int_R p \, dy = - \int_{\partial R} f \cdot n \, du$$

p : دانسته می‌شود است که بقای y را بر p نشان می‌دهد است که بقای y را بر p .

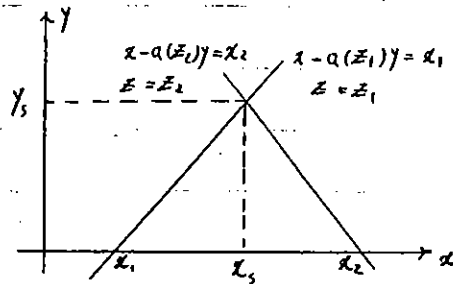
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div } \underline{f} = 0$$

$$p = u \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{df}{dx} = 0 \quad f = f(u) \quad \text{در یک بعد}$$

رأفح است که مجموعه نقاط اخیر در مساله صدق می کند



خط متق در دامنه در فضای حل است. به بیان دیگر برای هر x خط متق را خط دیره یا 'characteristics' مساله گوئیم، که کمترین مقدار y که به ازای آن در خط دیره یکیش را قطع می کند در دامنه نقطه اخیر است.



$$x_2 > x_1, \quad a(z_1) > a(z_2)$$

$$F(x, y, z) = z - f(x - a(z)y)$$

$$F_{,z} = 1 + a'(z)y f'(x - a(z)y)$$

شرط برقراری حل این است:

$$1 + a'(z)y f'(x - a(z)y) > 0$$

در هغه که برقراری شرط متق می توان:

$$z_{,x} = \frac{f'(x - a(z)y)}{1 + a'(z)y f'(x - a(z)y)}$$

$$z_{,y} = - \frac{a(z) f'(x - a(z)y)}{1 + a'(z)y f'(x - a(z)y)}$$

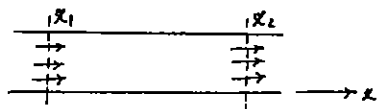
چنانچه $1 + a'(z)y f'(x - a(z)y) = 0$ باشد در این صورت $z_{,x}$ و $z_{,y}$ بی نهایت می شود. در این بیان مناسب است که حل را به اعتبار مقدار x در این موضع ما را به نقطه اخیر یا Shock هدایت می کند:

$$z = f(x - a(z)y)$$

اگر مجموعه نقاطی که در دامنه از این مساله گذشت را به یک خط متق بنویسیم:

$$x - a(z_0)y = x_0, \quad z = f(x_0)$$

مثال: مدلی برای حرکت اتومبیل در اتوبان دایمان ایجاب می‌دهد که در هر لحظه از زمان t در نقطه x باشد.



اگر $p(x, t)$ دانسته یا تعداد اتومبیل بر واحد طول جاده در زمان t در نقطه x باشد، $p(x, t)$ دبی اتومبیل در جاده یا تعداد اتومبیل بر واحد زمان در نقطه x در زمان t .

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial p}{\partial t} dx \quad \text{معادله بقا:}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial p}{\partial t} dx = p(x_1, t) - p(x_2, t) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x} dx \quad \text{قانون بقا:}$$

با توجه به دقت کردن بازه $[x_1, x_2]$ داریم:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$q = G(p) \triangleq cp \left(1 - \frac{p}{p_j}\right) \quad \text{فرض}$$

p_j : دانسته مانع از تراکم اتومبیل در جاده (سرعت سیر می‌دهد) و c سرعت آزاد اتومبیل در جاده یا مانع تراکم می‌دهد.

$$y_s = \frac{x_2 - x_1}{q(x_1) - q(x_2)} > 0 \quad \text{نقطه تعادل:}$$

$$x_s = \frac{x_2 q(x_1) - x_1 q(x_2)}{q(x_1) - q(x_2)}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید و شرایط مرزی را در نظر بگیرید.

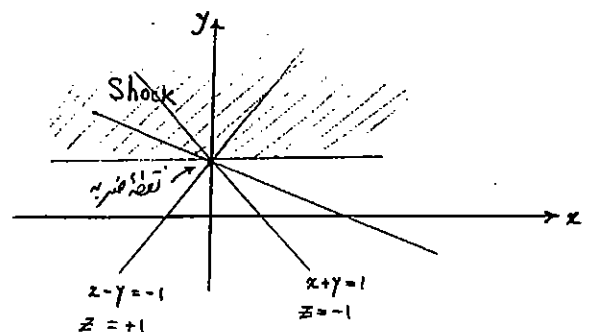
$$z z_{xx} + z_{xy} = 0$$

$$z(x, 0) = -x \quad f(x) = -x$$

$$\text{حل ساده: } z = -[x - zy] \quad z = -\frac{x}{1-y}$$

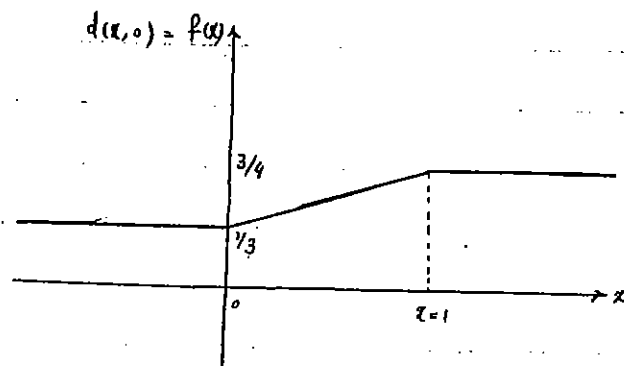
$$\text{شرط مرزی: } 1 - y > 0$$

$$\text{شرط مرزی: } x - zy = x_1, \quad z = -x_1 = z_1 \Rightarrow x + x_1 y = x_1$$



مثال عسی : انحصار حرکت اتومبیل در جاده

$$d(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1/3 & x \leq 0 \\ 1/3 + 5/12 x & 0 \leq x \leq 1 \\ 3/4 & x \geq 1 \end{cases}$$



معادله حرکت : $x - ct(1 - 2d_0) = x_0$
 $d = d_0 = f(x_0)$

مثال : $x_0 \leq 0$, $d_0 = 1/3 \Rightarrow x - ct(1 - 2/3) = x_0$
 $ct = 3(x - x_0) \quad x \leq 0$

با تکرار این رابطه تغییر می‌دهیم :

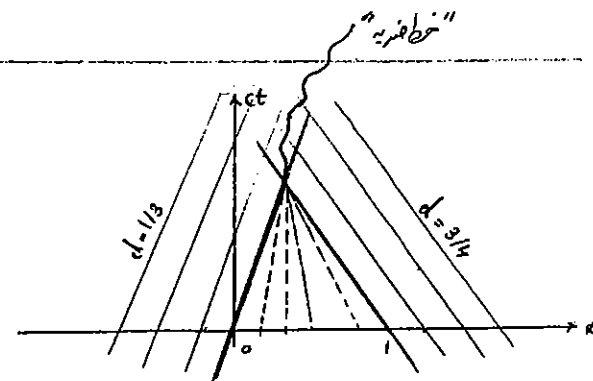
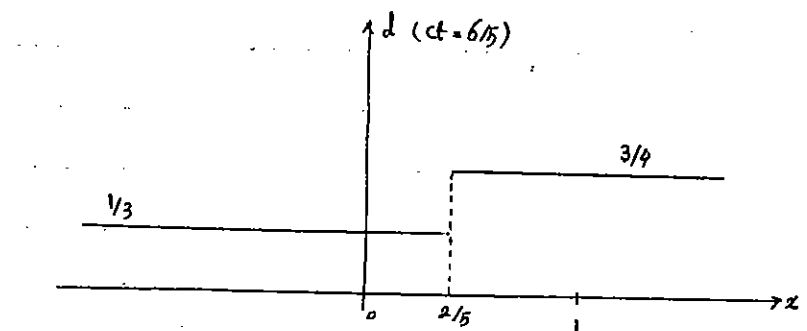
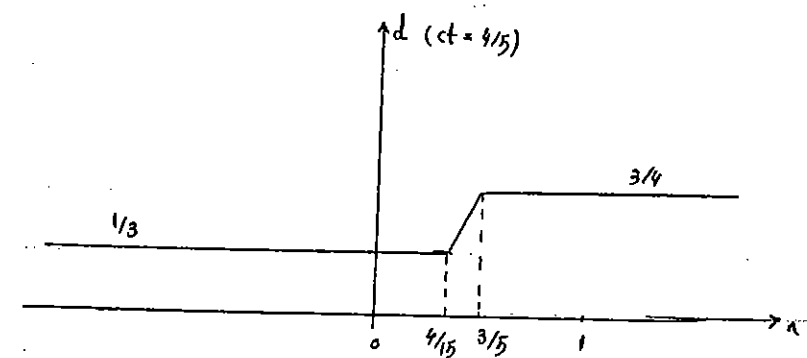
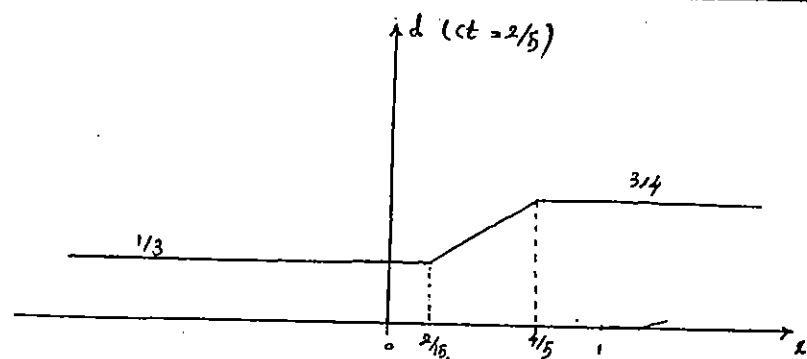
$$\frac{\partial p}{\partial t} + c \left(1 - \frac{2p}{f_1}\right) \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$d(x, t) \triangleq \frac{p(x, t)}{f_1} \text{ Normalized Density.}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial t} + c(1 - 2d) \frac{\partial d}{\partial x} = 0 \\ d(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

$$\text{مثال : } d = f(x - ct(1 - 2d))$$

$$\text{مثال : } 1 - 2ct f'(x - ct(1 - 2d)) > 0$$



$$y: x_0 > 1 \quad d_0 = 3/4 \Rightarrow x - ct(1 - 3/2) = x_0$$

$$ct = -2(x - x_0)$$

$$y: 0 \leq x_0 \leq 1 \quad d_0 = 1/3 + 5/12 x_0 \Rightarrow x - ct[1 - 2/3 - 5/6 x_0] = x_0$$

$$ct = (x - x_0) / (1 - 2/3 - 5/6 x_0)$$

$$ct = 6/5 (x - x_0) / (2/5 - x_0)$$

$$\begin{cases} x = 2/5 \\ ct = 6/5 \end{cases}$$

حال اگر تبدیل "d" را از زمان بررسی کنیم:

مثال: بررسی یک مسئله در شبکه تلفن.

اگر $P(t)$ احتمال اشغال n خط در زمان t باشد $(n = 0, 1, 2, \dots)$
و شبکه دارای خطوط تلفن بسیار زیاد است (اصطلاحاً "Trunkline")

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

مثبت

۱. احتمال آغاز یک مکالمه جدید در بازه $(t, t+h)$ برابر است با $\lambda h + o(h)$
۲. احتمال پایان یک مکالمه در بازه زمانی $(t, t+h)$ برابر است با $\mu h + o(h)$
۳. احتمال تغییر یا بیشتر در این بازه برابر است با $o(h)$

موضعی که $P_n(t)$ برای $n = 0, 1, 2, \dots$ مستطابق باشد می‌خواهیم
 $P_n(t+h)$ را بدست آوریم.

حوادث فضایی

۱. در زمان t ، $n-1$ خط اشغال است و یک مکالمه جدید در بازه $(t, t+h)$ آغاز شده است.
۲. در زمان t ، $n+1$ خط اشغال است و در بازه $(t, t+h)$ یک مکالمه پایان یافته است.
۳. در زمان t ، n خط اشغال است و در بازه $(t, t+h)$ هیچ اتفاقی نیفتاده است.
۴. در بازه $(t, t+h)$ دو تغییر یا بیشتر به وقوع پیوسته است.

حالت احتمال حوادث چهارگانه فوق را مشخص می‌کنیم.

۱. $[\lambda h + o(h)] P_{n-1}(t)$
۲. $(n+1) [\mu h + o(h)] P_{n+1}(t)$
۳. $[1 - \lambda h - \mu h - o(h)] P_n(t)$
۴. $o(h)$

$$\therefore P_n(t+h) = [\lambda h + o(h)] P_{n-1}(t) + (n+1) [\mu h + o(h)] P_{n+1}(t) + [1 - \lambda h - \mu h - o(h)] P_n(t) + o(h)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \lambda(s-1)G + \mu(1-s)\frac{\partial G}{\partial s}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} + \mu(s-1)\frac{\partial G}{\partial s} = \lambda(s-1)G \\ G(0, s) = g(s) \end{cases} \quad \text{شرط اولیه}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{1} = \frac{ds}{\mu(s-1)} = \frac{dG}{\lambda(s-1)G}$$

$$\begin{cases} \frac{dt}{1} = \frac{ds}{\mu(s-1)} \Rightarrow \ln(s-1) = \mu t + c_1 \Rightarrow u_1 = (s-1)e^{-\mu t} = c_1 \\ \frac{dG}{G} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{ds}{s-1} \Rightarrow u_2 = G e^{-\lambda/\mu s} = c_2 \end{cases}$$

$$\text{پس از این: } u_2 = f(u_1) \Rightarrow G = e^{\lambda/\mu s} f[(s-1)e^{-\mu t}]$$

$$G(0, s) = g(s) = e^{\lambda/\mu s} f(s-1)$$

$$\therefore f(s-1) = g(s) e^{-\frac{\lambda}{\mu s}}$$

$$\therefore f(s) = g(s+1) e^{-\frac{\lambda}{\mu(s+1)}}$$

$$\therefore P'_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) - (\lambda + n\mu)P_n(t) \quad n=1, 2, \dots$$

$$\& P'_0(t) = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t) \quad n=0$$

تابع $G(t, s)$ تابع مولده احتمال می‌شود

$$G(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) s^n$$

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial G}{\partial s^n} \right)_{s=0}$$

حال ثابت می‌کنیم که تابع مولده رابطة ساده زیر را برقرار می‌کند.

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(t) s^n$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) s^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(t) s^n$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= \mu P_1(t) - \lambda P_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda P_{n-1}(t) s^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(t) s^n \\ &\quad - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) s^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) s^n \end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\lambda G + \lambda s G + \mu \frac{\partial G}{\partial s} - \mu s \frac{\partial G}{\partial s}$$

$$G(t, s) = (as + b) \exp(cs + d)$$

مع t با d, c, b, a

$$a = e^{-\mu t}$$

$$b = 1 - e^{-\mu t}$$

$$c = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$$

$$d = -\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$$

$$G(t, s) = (as + b) e^d \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} s^n$$

$$P_n(t) = \frac{a e^d c^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{b e^d c^n}{n!}$$

$$G(t, s) = e^{\frac{\lambda}{\mu} s} \cdot g[(s-1)e^{-\mu t} + 1] e^{-\frac{\lambda}{\mu} [(s-1)e^{-\mu t} + 1]}$$

$$G(t, s) = g[(s-1)e^{-\mu t} + 1] \exp\left[\frac{\lambda}{\mu} (s-1)(1 - e^{-\mu t})\right]$$

فرض کنیم در $t=0$ فقط یک خط اتصال باشد و اینطور است:

$$\begin{cases} P_1(0) = 1 \\ P_n(0) = 0, \quad n \neq 1 \end{cases}$$

$$G(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) s^n, \quad g(s) = G(0, s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) s^n = s$$

$$\Rightarrow G(t, s) = [(s-1)e^{-\mu t} + 1] \exp\left[\frac{\lambda}{\mu} (s-1)(1 - e^{-\mu t})\right]$$

$$P_0(t) = (1 - e^{-\mu t}) \exp\left[\frac{\lambda}{\mu} (e^{-\mu t} - 1)\right]$$

$$P_1(t) = \left. \frac{\partial G}{\partial s} \right|_{s=0}$$

$\vdots$

$$P_n(t) = \left. \frac{1}{n!} \frac{\partial^n G}{\partial s^n} \right|_{s=0}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_1(t, x, u, u_x) + F_3(t, x, u, u_x) u_t + F_4(t, x, u, u_x) u_{xt}$$

حال ربط می‌دهیم $u(t, x)$ را در $\mathbb{R}^2$ می‌نویسیم:

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} \right)^k u(0, 0)$$

تعمیم قضیه نون به صورت زیر است: در $\mathbb{R}^{n+1}$ به این ترتیب

$$u_t = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$$

در این حالت متغیرها متعلق به $\mathbb{R}^n$ است.

$$u(0, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{معلوم})$$

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(t \frac{\partial}{\partial t} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k u(0, 0, \dots, 0)$$

به این ترتیب تابع $u(t, x)$ در $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر

$$u(t, x) = u(0, 0) + t u_t(0, 0) + x u_x(0, 0) +$$

$$\frac{1}{2} [t^2 u_{tt}(0, 0) + 2tx u_{tx}(0, 0) + x^2 u_{xx}(0, 0)] + \dots$$

"Cauchy - Kovalevsky"

قضیه کوشی - کوفالفسکی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}) \quad u(t, x) = ?$$

$$\text{شرط اولیه: } u(0, x) = \varphi(x)$$

$$u(0, 0) = \varphi(0)$$

$$u_x(0, 0) = \varphi'(0)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0) = \varphi''(0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, 0) = F(0, 0, \varphi(0), \varphi'(0))$$

$$u_t(0, 0) = F(0, 0, \varphi(0), \varphi'(0))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = F_2(t, x, u, u_x) + F_3(t, x, u, u_x) u_t + F_4(t, x, u, u_x) u_{xx}$$

$$u_{tx}(0, 0) \quad \text{معلوم} \rightarrow \frac{\partial^{n+1}}{\partial t \partial x^n}(0, 0)$$

« معادلات انوار نیل پاره ای رسته در خطی »

مثال: حل معادله زیر با مرتبه ۲ بدست آورید.

$$\begin{cases} u_t = u \cdot u_x \\ u(0, x) = 1 + x^2 = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(0, 0) = 1$$

$$u_t(0, 0) = u(0, 0) \cdot u_x(0, 0) = 0$$

$$u_x(0, 0) = 0$$

$$u_{tx}(0, 0) = u_x^2 + u \cdot u_{xx} = 2$$

$$u_{xx}(0, 0) = 2$$

$\vdots$

$$u_{ttt} = u_{tt} \cdot u_x + u \cdot u_{xtt} \Rightarrow u_{ttt}(0, 0) = 2$$

$$\therefore u(t, x) = 1 + \frac{1}{2} [2t^2 + 4tx + 2x^2] + \dots$$

$$= 1 + t^2 + 2tx + x^2 + \dots$$

$$Z_{xx} = Z_{yy} \dot{y}_x^2 + 2Z_{yz} \dot{y}_x \dot{z}_x + Z_{zz} \dot{z}_x^2 + Z_{xy} \dot{y}_x \dot{y}_y + Z_{yz} \dot{y}_x \dot{z}_y + Z_{xx} \dot{y}_y^2 + 2Z_{xy} \dot{y}_y \dot{z}_y + Z_{yy} \dot{z}_y^2 + Z_{xz} \dot{y}_x \dot{z}_z + Z_{yz} \dot{y}_y \dot{z}_z + Z_{xx} \dot{z}_z^2 + 2Z_{xz} \dot{z}_z \dot{y}_x + Z_{zz} \dot{z}_z^2$$

$$Z_{xy} = Z_{yy} \dot{y}_x \dot{y}_y + Z_{yz} (\dot{y}_x \dot{z}_y + \dot{y}_y \dot{z}_x) + Z_{zz} \dot{z}_x \dot{z}_y + Z_{xx} \dot{y}_y \dot{y}_x + Z_{xy} \dot{y}_y \dot{z}_x + Z_{yz} \dot{y}_y \dot{z}_y$$

$$Z_{yz} = Z_{yy} \dot{y}_y \dot{z}_y + 2Z_{yz} \dot{y}_y \dot{z}_z + Z_{zz} \dot{z}_y^2 + Z_{xx} \dot{y}_y \dot{z}_x + Z_{xy} \dot{y}_y \dot{z}_y + Z_{yz} \dot{y}_y \dot{z}_z$$

با جایگزینی این روابط در معادله دیراکس می‌توانیم بنویسیم:

$$LZ = Q(y) Z_{yy} + 2P(y, z) Z_{yz} + Q(z) (Z_{zz}) + (L) - F(y) Z_y + (Lz - Fz) Z_z + FZ = G$$

برای بدست آوردن که

$$Q(y) = A \dot{y}_x^2 + 2B \dot{y}_x \dot{y}_y + C \dot{y}_y^2$$

$$P(y, z) = A \dot{y}_x \dot{z}_x + B (\dot{y}_x \dot{z}_y + \dot{y}_y \dot{z}_x) + C \dot{y}_y \dot{z}_y$$

$$Q(z) = A \dot{z}_x^2 + 2B \dot{z}_x \dot{z}_y + C \dot{z}_y^2$$

در این صورت می‌توان معادله جدید Δ' برابر است با:

$$\Delta' = P^2(y, z) - Q(y) Q(z)$$

$$\begin{aligned} \Delta' = & A^2 \dot{y}_x^2 \dot{z}_x^2 + B^2 (\dot{y}_x \dot{z}_y + \dot{y}_y \dot{z}_x)^2 + C^2 \dot{y}_y^2 \dot{z}_y^2 + 2AB \dot{y}_x \dot{z}_x (\dot{y}_x \dot{z}_y + \dot{y}_y \dot{z}_x) + \\ & + 2AC \dot{y}_x \dot{z}_x \dot{y}_y \dot{z}_y + 2BC (\dot{y}_x \dot{z}_y + \dot{y}_y \dot{z}_x) \dot{y}_y \dot{z}_y - A^2 \dot{y}_x^2 \dot{z}_x^2 - 4B^2 \dot{y}_x \dot{z}_x \dot{y}_y \dot{z}_y \\ & - C^2 \dot{y}_y^2 \dot{z}_y^2 - 2AB \dot{y}_x \dot{z}_x (\dot{y}_x \dot{z}_y + \dot{y}_y \dot{z}_x) - AC (\dot{y}_x^2 \dot{z}_y^2 + \dot{y}_y^2 \dot{z}_x^2) \\ & - 2BC \dot{y}_y \dot{z}_y (\dot{y}_x \dot{z}_y + \dot{y}_y \dot{z}_x) \end{aligned}$$

$$\Delta' = B^2 (\dot{y}_x \dot{z}_y - \dot{y}_y \dot{z}_x)^2 - AC (\dot{y}_x \dot{z}_y - \dot{y}_y \dot{z}_x)^2$$

"معادلات دیفرانسیل با سه متغیر"

معادله دیراکس را می‌توانیم بنویسیم:

$$LZ = -AZ_{xx} + 2BZ_{xy} + CZ_{yy} + DZ_x + EZ_y + FZ = G$$

که A, B, C, D, E, F, G تابعی از x, y, z هستند. معادله فوق Δ برابر با:

$$\Delta = B^2 - AC$$

است؛ با تغییر متغیر (u, v, w) به صورت زیر:

$$u = u(x, y, z)$$

$$v = v(x, y, z)$$

$$J = \left| \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right| = \dot{y}_x \dot{z}_y - \dot{z}_x \dot{y}_y \neq 0$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$\dot{z}_x = \dot{z}_y \dot{y}_x + \dot{z}_z \dot{y}_y$$

$$\dot{z}_y = \dot{z}_y \dot{y}_y + \dot{z}_z \dot{y}_z$$

در فضای حلقه عبارت است از

$$\Delta' = \Delta \cdot J^2$$

بنابراین می‌توانیم معادله زینوایل مرتبه دوم را به صورت زیر بنویسیم:
 Δ برای یک معادله زینوایل می‌تواند اساس طبقه بندی معادلات زینوایل بوده ای
 راست در نظر بگیرد:

"طبقه بندی معادلات زینوایل بوده ای راست در"

۱. اگر در نقطه (x_0, y_0) $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ باشد، معادله را در این نقطه هذلولی
 گوئیم. "Hyperbolic"

۲. اگر در نقطه (x_0, y_0) $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ باشد، معادله را در این نقطه سهمی
 گوئیم. "Parabolic"

۳. اگر در نقطه (x_0, y_0) $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ باشد، معادله را در این نقطه بیضی
 گوئیم. "Elliptic"

اگر در یک ناحیه $R \in \mathbb{R}^2$ ، Δ کوچکتر یا بزرگتر یا مساوی صفر باشد، در آن ناحیه معادله
 در ناحیه R بیضی یا هذلولی یا سهمی گوئیم.

بنابراین مثال از منظمترین معادلات راست در می‌توانیم موارد زیر را اشاره کرد

معادله هذلولی منحنی	$z_{xx} - z_{yy} = 0$	$B=0, A=1, C=-1$
معادله سهمی دیفیوژن یا انتقال حرارت	$z_{xx} - z_y = 0$	$B=0, A=1, C=0$
معادله بیضی لاپلاس	$z_{xx} + z_{yy} = 0$	$B=0, A=1, C=1$
معادله بیضی	$\gamma z_{xx} + z_{yy} = 0$	$\gamma > 0$
معادله سهمی	$\gamma z_{xx} + z_{yy} = 0$	$\gamma = 0$
معادله هذلولی	$\gamma z_{xx} + z_{yy} = 0$	$\gamma < 0$
معادله هذلولی	$z_{xy} = 0$	

با تغییر متغیر (در می‌توان معادله زینوایل را به فرم ساده ای در آورده و در آن فرم معادله
 معادله زینوایل به فرم استاندارد یا "Canonical" در آورده است.

حالت خاص را به دست می آوریم

$$A^2 (F_x^\pm)^2 + 2AB (F_x^\pm)(F_y^\pm) + B^2 (F_y^\pm)^2 = (B^2 - AC) (F_y^\pm)^2$$

در نتیجه

$$A (F_x^\pm)^2 + 2B (F_x^\pm)(F_y^\pm) + C (F_y^\pm)^2 = 0$$

$$Q(\eta) = Q(\xi) = 0$$

$$P(\eta, \xi) = A \eta_x \xi_x + B (\eta_x \xi_y + \eta_y \xi_x) + C \eta_y \xi_y$$

$$R = \sqrt{B^2 - AC}$$

$$\eta_x = - \frac{B+R}{A} \eta_y$$

$$\xi_x = - \frac{B-R}{A} \xi_y$$

$$\eta_x \xi_x = \frac{AC}{A^2} \eta_y \xi_y = \frac{C}{A} \eta_y \xi_y$$

$$\eta_x \xi_y + \eta_y \xi_x = - \left(\frac{B+R}{A} + \frac{B-R}{A} \right) \eta_y \xi_y = - \frac{2B}{A} \eta_y \xi_y$$

$$\begin{aligned} P(\eta, \xi) &= 2C \eta_y \xi_y - \frac{2B^2}{A} \eta_y \xi_y = - \frac{2}{A} (B^2 - AC) \eta_y \xi_y \\ &= - \frac{2}{A} (B^2 - AC) \eta_x \xi_x \end{aligned}$$

در این صورت معادله به صورت زیر در می آید

تحلیل معادلات دیرنوالی با روشی است که به فرایندی متعارف

- ۱) Hyperbolic معادلات دیرنوالی $\Delta = B^2 - AC > 0$, $(A \neq 0)$
 با فرض $A \neq 0$ معادلات دیرنوالی را می توان به صورت زیر درآید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

معادلات فوق را به صورت

$$F^\pm(x, y) = K^\pm$$

می نویسیم: در این صورت (K) را به صورت زیر انتخاب می کنیم

$$\eta = F^+(x, y)$$

$$\xi = F^-(x, y)$$

از طرفی داریم

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x^\pm(x, y)}{F_y^\pm(x, y)}$$

در نتیجه

$$A F_x^\pm + B F_y^\pm = \pm \sqrt{B^2 - AC} F_y^\pm$$

اگر معادله تعقیل یافته به نظر:

$$Z_{y2} + P_y Z_y + P_z Z_z + F' Z = G'$$

با سه درجه آزادی می توانیم با انتخاب z بصورت زیر معادله را باز هم تعقیل کنیم
 $z = \pi e^{-\varphi}$

$$Z_y = (\pi_y - P_y \pi) e^{-\varphi}$$

$$Z_z = (\pi_z - P_z \pi) e^{-\varphi}$$

$$Z_{y2} = (\pi_{y2} - P_{y2} \pi - P_y \pi_y - P_z \pi_z + P_y P_z \pi) e^{-\varphi}$$

با جایگزینی در معادله

$$\pi_{y2} - P_{y2} \pi - P_y \pi_y - P_z \pi_z + P_y P_z \pi + P_y \pi_y - P_y P_z \pi + P_y \pi_z - P_z P_y \pi + F' \pi = G' e^{\varphi}$$

معادله می شود که مشتقات مرتبه اول از بین می روند داریم:

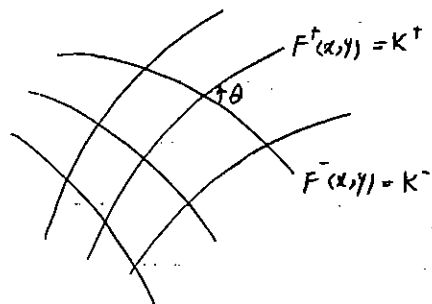
$$\pi_{y2} + (F' - P_y P_z - P_{y2}) \pi = G' e^{\varphi}$$

$$\therefore Z_{y2} + \frac{L_y - F_y}{2P(y, z)} Z_y + \frac{L_z - F_z}{2P(y, z)} Z_z + \frac{F}{2P} Z = \frac{G}{2P}$$

که فرم اصلی معادله می شود Z_{y2} است، که اگر مجدداً متغیر را به اندازه $\pi/4$ دوران دهیم، فرم اصلی بصورت دیگری در می آید:

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y - z \end{cases} \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y'^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

لذا فرم اصلی معادله ضلعی را می توان به نظر $Z_{y2}' - Z_{zz}'$ نیز تعقیل کرد؛ در نتیجه
 معنی آن $F^+(x, y) = K^+$ ، $F^-(x, y) = K^-$ معنی می دهد که معادله هیپر بولیک
 می شود.



$$\tan \theta = \frac{m^+ - m^-}{1 + m^+ m^-} = \frac{\frac{B+R}{A} - \frac{B-R}{A}}{1 + \frac{B^2 - R^2}{A^2}} = \frac{2RA}{A^2 + \frac{B^2 - R^2}{Ac} \cdot Ac} = \frac{2\sqrt{B^2 - Ac}}{A + c}$$

$$Z\eta + D'Z = h \Rightarrow h\eta + E'h = G'$$

معادله در این توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [h \exp(\int_a^\eta E'(\zeta, \eta) d\zeta)] = G' \exp(\int_a^\eta E'(\zeta, \eta) d\zeta)$$

$$h = \exp(-\int_{a_1}^\eta E'(\zeta, \eta) d\zeta) [f(\eta) + \int_{b_1}^\eta G' \exp(\int_{a_1}^\zeta E'(\zeta, \eta) d\zeta) d\zeta]$$

معادله اول نیز به تکرار زیر را

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [Z \exp(\int_{b_2}^\eta D'(\eta, \tau) d\tau)] = h \exp(\int_{b_2}^\eta D'(\eta, \tau) d\tau)$$

$$Z = \exp(-\int_{b_2}^\eta D'(\eta, \tau) d\tau) [g(\eta) + \int_{a_2}^\eta h \exp(\int_{b_2}^\zeta D'(\eta, \tau) d\tau) d\zeta]$$

به همین ترتیب اگر

$$F' = D'E' + \frac{\partial E'}{\partial \eta}$$

با هم در این صورت

$$Z\eta + D'Z\eta + E'Z\eta + D'E'Z + E'_2Z = G'$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (Z\eta + E'Z) + D'(Z\eta + E'Z) = G'$$

$$Z\eta + aZ\eta + bZ\eta + abZ = a$$

مثال: معادله زیر را حل کنید:

$$\varphi = a\eta + b\eta$$

$$Z = \eta e^{-\varphi}$$

$$\therefore \eta\eta = 0$$

$$\therefore Z = [f(\eta) + g(\eta)] \exp[-(a\eta + b\eta)]$$

f و g تابع دلخواه هستند

در قبیل ما همه می‌توانیم که می‌توان معادله به صورت زیر تغییر داد

$$Z\eta + D'Z\eta + E'Z\eta + F'Z = G'$$

حال اگر:

$$F' = D'E' + \frac{\partial D'}{\partial \eta} \quad \text{or} \quad D'E' + \frac{\partial E'}{\partial \eta}$$

را به هم در این صورت داریم:

$$Z\eta + D'Z\eta + E'Z\eta + (D'E' + D'\eta)Z = G'$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (Z\eta + D'Z) + E'(Z\eta + D'Z) = G'$$

$$x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = xy$$

مثال: معادله خطی زیر را بررسی کنید.

$$A = x^2, B = 0, C = -y^2, D = E = F = 0, G = xy$$

$$B^2 - AC = x^2 y^2 > 0 \quad \text{"Hyperbolic"}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \pm \frac{xy}{x^2} = \pm \frac{y}{x}$$

$$F^+(x, y) = \frac{y}{x}, \quad F^-(x, y) = xy$$

$$\begin{cases} \eta = y/x \\ \xi = xy \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{متغیر مستقل} \\ \text{متغیر وابسته} \end{array} \right\} \begin{cases} x = \sqrt{\xi/\eta} \\ y = \sqrt{\xi\eta} \end{cases}$$

$$P(\eta, \xi) = -\frac{2}{A}(B^2 - AC) = -\frac{2}{x^2} x^2 y^2 = -2y^2 = -2\xi\eta$$

$$L\eta - F\eta = x^2 \eta_{xx} - y^2 \eta_{yy} = x^2 \left(\frac{2\eta}{x^3} \right) = 2 \frac{\eta}{x} = 2\xi$$

$$L\xi - F\xi = x^2 \xi_{xx} - y^2 \xi_{yy} = 0$$

$$z_{\eta\xi} + \frac{2\xi}{-4\xi\eta} z_{\eta} = \frac{\xi}{-4\xi\eta}$$

$$z_{\eta\xi} - \frac{1}{2\eta} z_{\eta} = -\frac{1}{4\eta}$$

$$z_{\eta} + E'z = K$$

$$K_{\eta} + D'K = G'$$

این دو معادله را حل می‌کنیم.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$z_{\eta\xi} + \eta z_{\eta} + \xi z = 0$$

$$\therefore h_{\eta} = 0 \Rightarrow h = f(\xi) \quad (\text{تابع تفکیک})$$

$$\therefore z_{\eta} + \eta z = f(\xi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [z \exp(\frac{1}{2}\eta^2)] = f(\xi) \exp(\frac{1}{2}\eta^2)$$

$$z = \exp(-\frac{1}{2}\eta^2) \left[g(\xi) + \int f(\xi) e^{\frac{1}{2}\eta^2} d\eta \right]$$

$$x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = xy z$$

$$A = x^2, B = 0, C = -y^2, D = E = G = 0, F = -xy$$

مثال: معادله زیر را بررسی کنید.
با نتیجه گیری از مثال قبل داریم:

$$y = y/x$$

$$z = xy$$

$$P(y, z) = -2yz$$

$$L_y - F_y = 2y$$

$$L_z - F_z = 0$$

در این صورت معادله بصورت زیر می آید:

$$z_{yz} + \frac{2y}{-4yz} z_y + \frac{-z}{-4yz} z = 0$$

$$z_{yz} - \frac{1}{2z} z_y + \frac{1}{4y} z = 0$$

$$\varphi = -1/2 \ln z, \quad z = re^{\varphi}, \quad z = r\sqrt{z}$$

$$w_{yz} \sqrt{z} + \frac{1}{4y} z w \sqrt{z} \frac{1}{z} = 0$$

$$\therefore w_{yz} + \frac{1}{4y} w = 0$$

$$\varphi = -1/2 \ln z, \quad z = re^{\varphi} = r\sqrt{z}$$

$$z_y = w_y \sqrt{z}, \quad z_{yz} = w_{yz} \sqrt{z} + \frac{1}{2\sqrt{z}} w_y$$

$$w_{yz} \sqrt{z} + \frac{1}{2\sqrt{z}} w_y - \frac{1}{2z} w_y \sqrt{z} = -\frac{1}{4y}$$

$$w_{yz} = -\frac{1}{4y\sqrt{z}}$$

$$w_z = -\frac{1}{4\sqrt{z}} \ln y + f(z)$$

$$w = -\frac{1}{2} \sqrt{z} \ln y + f(z) + g(y)$$

$$\therefore z = -\frac{1}{2} z \ln y + f_1(z) + \sqrt{z} g(y)$$

$$= -\frac{1}{2} xy \ln \frac{y}{x} + f_1(xy) + \sqrt{xy} g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\therefore z = -\frac{1}{2} xy \ln \frac{y}{x} + f_1(xy) + x g_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

که f_1 و g_1 دو تابع دلخواه است.

2) $B^2 - AC = 0$ "Parabolic" معادلات همبسته

در معادله همبسته با انتخاب η و ξ داریم که $Q(\eta) = Q(\xi) = 0$ حال آنکه η و ξ انتخابی هستند معادله همبسته امکان پذیر است.

$$P(\eta, \xi) - Q(\eta)Q(\xi) = 0$$

اگر انتخاب فوق امکان پذیر باشد در این صورت $P(\eta, \xi) = 0$ خواهد بود.

$$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0 \\ A\xi^2 + B(\xi\eta + \eta\xi) + C\eta^2 = 0 \\ A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 = 0 \end{cases}$$

همچنین داشتن حل غیر بدیهی باید داشته باشیم

$$\begin{vmatrix} \xi^2 & 2\xi\eta & \eta^2 \\ \xi\eta & \xi\eta + \eta\xi & \eta^2 \\ \xi^2 & 2\xi\eta & \eta^2 \end{vmatrix} = 0$$

بجای ۱- انضیم و لذا جایز نیست $\eta = 0$ $\Rightarrow (\xi\eta - \eta\xi)^3 = 0$

$$\eta = E(\eta) N(\eta)$$

$$E'(\eta) N'(\eta) + \frac{1}{4\eta} E(\eta) N(\eta) = 0$$

$$4\eta \frac{E'(\eta)}{E(\eta)} = - \frac{N(\eta)}{N'(\eta)} = 5 \in \mathbb{C}$$

$$\frac{E'(\eta)}{E(\eta)} = \frac{5}{4\eta} \quad \& \quad \frac{N'(\eta)}{N(\eta)} = -\frac{1}{5}$$

$$\ln E(\eta) = \frac{5}{4} \ln \eta + A \quad \& \quad \ln N(\eta) = -\frac{1}{5} \eta + B$$

$$\therefore \eta = \int_c f(\eta) \eta^{5/4} e^{-\eta/5} d\eta \quad (\text{مقیاسی از جمله ۵})$$

$$z'' + D'z' + E'z + F'z = G'$$

حال باید غیر متغیر می توان بد z را نیز حذف کرد

$$z = \pi e^{-p}$$

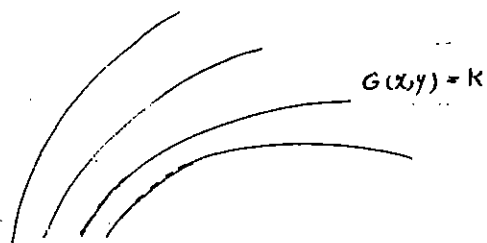
$$p = \frac{1}{2} \int^2 E(y, \tau) d\tau \quad p_2 = \frac{1}{2} E'$$

$$z_1 = (\pi_1 - p_1 \pi) e^{-p} \quad \& \quad z_2 = (\pi_2 - p_2 \pi) e^{-p}$$

$$z_{11} = (\pi_{11} - p_{11} \pi - \pi_1^2 p_2 + p_1^2 \pi) e^{-p}$$

$$\therefore \pi_{11} + (D')\pi_1 + (F' - p_{11} - p_1^2 - D'p_2)\pi = G' e^p$$

معادله سهمی یک خانواده منحنی می باشد



$$G(x, y) = K$$

بنابر این با فرض "مشتق" معادله $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$ (A ≠ 0) و نوشتن کل آن بصورت

$$G(x, y) = K \quad , \quad y = G(x, y) \quad \text{انتخاب می کنیم در اینجا} \quad \text{را هم:}$$

$$G_x + G_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore A y_x + B y_y = 0$$

$$A Q(y) = (A y_x + B y_y)^2 + (AC - B^2) y_y^2$$

$$A P(y, y) = (A y_x + B y_y)(A y_x + B y_y) + (AC - B^2) y_y y_y$$

$$A Q(y) = (A y_x + B y_y)^2 + (AC - B^2) y_y^2$$

لذا با انتخاب $y = G(x, y)$

$$Q(y) = 0$$

$$P(y, y) = 0$$

$$Q(y) = \frac{1}{A} (A y_x + B y_y)^2$$

و هر انتخاب مستقل از y می تواند باشد یعنی

$$y_2 y_1 - y_1 y_2 \neq 0$$

دو تابعی متعلق به صورت زیر تعریف می یابیم

$$z_{11} + \frac{L_1 - F_1}{Q(y)} z_y + \frac{L_2 - F_2}{Q(y)} z_x + \frac{F}{Q(y)} z = \frac{G}{Q(y)}$$

$$AQ(\eta) = (Ac - B^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2)$$

$$P(\eta_1, \eta_2) = 0$$

$$\therefore Q(\eta_1) = Q(\eta_2)$$

$$AQ(\eta) = (Ac - B^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2)$$

نمایش دهنده معادله تفکیک یابنده، معادله را با این شکل می‌نویسند

$$Z\eta_1 + Z\eta_2 + \frac{L\eta_1 - F\eta_2}{Q(\eta_1)} Z\eta_1 + \frac{L\eta_2 - F\eta_1}{Q(\eta_2)} Z\eta_2 + \frac{F}{Q(\eta_1)} Z = \frac{G}{Q(\eta_1)}$$

اگر فرض کنیم متغیر به شکل

$$Z\eta_1 + Z\eta_2 + 2P_1 Z\eta_1 + 2P_2 Z\eta_2 + F'Z = G'$$

باشد، در این صورت با انتخاب Z به صورت زیر می‌توانیم:

$$Z = re^{-P}$$

$$\eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_2 + (F' - P_1\eta_1 - P_2\eta_2 - P_1^2 - P_2^2)\eta = G'e^P$$

$$3) \quad B^2 - Ac < 0 \quad \text{"Elliptic"}$$

$$I \triangleq \sqrt{Ac - B^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + iI}{A}$$

حل معادله فوق را به صورت $w(x, y) = K$ می‌نویسیم که K یک ثابت خواهد بود.

$$w(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$$

حالا در w را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\eta_1 = u(x, y)$$

$$\eta_2 = v(x, y)$$

انتخاب فوق مشروط بر اینست که در w مثبت باشد. باز می‌آید:

$$\begin{cases} u_x + i v_x + (u_y + i v_y) \frac{dy}{dx} = 0 \\ u_x + i v_x + (u_y + i v_y) \frac{B + iI}{A} = 0 \end{cases}$$

$$A u_x + B u_y = I v_y$$

$$A v_x + B v_y = -I u_y$$

$$A \eta_1 + B \eta_2 = I \eta_1$$

$$A \eta_2 + B \eta_1 = -I \eta_1$$

$$\therefore \eta_1 \eta_2 - \eta_2 \eta_1 = \frac{I}{A} (\eta_1^2 + \eta_2^2) \neq 0$$

طبقه بندی معادلات دیفرانسیل با توجه به درجه و نوع معادله

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = d$$

معادله دیفرانسیل خطی در $\mathbb{R}^n$ - مرتبه اول - بدون مشتقات از مرتبه بالاتر
 a_{ij} را می توان، ماتریس متقارن در نظر گرفت؛ درجه اول با حالت درجه دوم

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = AC - B^2 = -\Delta$$

که λ_1, λ_2 مقادیر ویژه (a_{ij}) هستند

۱) اگر λ_1, λ_2 مخالف صفر و هم علامت باشند، معادله بیضی است

۲) اگر یکی از مقادیر ویژه صفر باشد، معادله سهمی است

۳) اگر λ_1, λ_2 مخالف صفر و مخالف علامت باشند، معادله هذلولی است

۱) اگر λ_1, λ_2 مثبت و مقادیر ویژه مخالف صفر و هم علامت باشند، معادله را در این نقطه بیضی گویند
 ۲) اگر λ_1, λ_2 مثبت و مقادیر ویژه مخالف صفر و یکی از آنها علامت مثبت باقیه تفاوت دارند باشد معادله را در این نقطه هذلولی گویند

مثال:

$$2a^2 z_{xx} + 2ab z_{xy} + b^2 z_{yy} = 0$$

$$A = 2a^2, \quad B = ab, \quad C = b^2$$

$$B^2 - AC = -a^2 b^2 < 0 \quad \text{"elliptic"}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ab + iab}{2a^2} = \frac{b}{2a} + i \frac{b}{2a}$$

$$w(x, y) = \left(\frac{b}{2a} x - y \right) + i \frac{b}{2a} x$$

$$\begin{cases} \xi = \frac{b}{2a} x - y \\ \eta = \frac{b}{2a} x \end{cases}$$

$$L_1 - F_1 = L_2 - F_2 = 0$$

$$z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = 0 \quad \text{معادله لاپلاس}$$

$$\therefore w_{\xi\xi}$$

۱۳) اگر در $\mathcal{H}$ یک مجموعه متناهی از نقاط مخالف همبسته در معادلات در مقدار ویژه مثبت در مقدار ویژه منفی باشد، معادله را در این نقطه فوق ضلعی گوئیم. "Ula Hyperbolic"

۱۴) اگر در $\mathcal{H}$ (۱) اتل یک مقدار ویژه منفی باشد، معادله را در این نقطه صافی گوئیم.

معادلات فوق را می توان بصورت مسئله تغییر را با یک تبدیل خطی $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ می توان معادلات را بصورت زیر درآورد.

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2}$$

$$\psi_{,xx} + \psi_{,yy} = 0 \Leftrightarrow \psi_{,uu} + \psi_{,vv} = 0$$

معادله لاپلاس در هر دستگاه مختصاتی که از تبدیل 'ماتریال' دستگاه (x, y) حاصل شده به روش جدا کردن متغیر قابل حل است:

$$\psi = \int f(\alpha) \exp(i\alpha u \pm \alpha v) d\alpha$$

در مختصات معادله هلمهولتز در مختصات دگاتی:

$$x''/x + y''/y + k^2 = 0$$

$$x''/x = -(y''/y + k^2) = -\alpha^2$$

$$x'' + \alpha^2 x = 0$$

$$y'' + (k^2 - \alpha^2) y = 0$$

$$\psi = \int f(\alpha) \exp(i\alpha x \pm (\sqrt{\alpha^2 - k^2}) y) d\alpha$$

مختصات $k = k(x, y)$ باشد در مختصات می توان معادله هلمهولتز را به روش جدا کردن متغیر حل کرد.

$$k^2 = \epsilon^2 + f(x) + g(y)$$

که در ماتریس همان معادله شود متغیر است:

$$x''/x + f(x) + y''/y + g(y) + \epsilon^2 = 0$$

$$x''/x + f(x) = -[y''/y + g(y) + \epsilon^2] = -\alpha^2$$

"جدا کردن متغیر"

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

معادله هلمهولتز در مختصات:

در مختصات دگاتی $\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ اگر نسبت نگاشت 'ماتریال' $\pi = f(z)$ به مختصات u, v بدیم می خواهیم حقیق کنیم که نسبت نگاشتی، یار مختصات $u = u(x, y)$ معادله به روش جدا کردن متغیر قابل حل است.

$$\nabla^2 \psi = \psi_{,xx} + \psi_{,yy} = |f'(z)|^2 (\psi_{,uu} + \psi_{,vv})$$

$$|f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2$$

در مختصات معادله لاپلاس:

$$\psi_{,xx} + \psi_{,yy} = 0 \quad \psi = X(x) \cdot Y(y)$$

$$x''/x = -y''/y = -\alpha^2$$

$$x'' + \alpha^2 x = 0$$

$$y'' - \alpha^2 y = 0$$

$$\psi = \int f(\alpha) \exp(i\alpha x \pm \alpha y) d\alpha$$

با توجه به اینکه

زیربنه:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial w^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{w}^2} \right) \frac{dz}{dw} \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} = 0$$

چون z و $\bar{z}$ مختصات w و $\bar{w}$ است پس داریم:

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \cdot \frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{dz}{dw} \right) = \frac{dz}{dw} \cdot \frac{d^2}{d\bar{w}^2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right)$$

$$\frac{\frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{dz}{dw} \right)}{\frac{dz}{dw}} = \frac{\frac{d^2}{d\bar{w}^2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right)}{\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}} = \lambda$$

که λ عدد ثابت حقیقی است؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{dz}{dw} \right) = \lambda \frac{dz}{dw}$$

$$(i) \quad \lambda = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dz}{dw} = \beta + \gamma w$$

$$i-1) \quad \gamma = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dz}{dw} = \beta \quad \longrightarrow \quad z = \beta w + \alpha$$

$$\beta = a + ib$$

$$\alpha = c + id$$

$$x + iy = (a + ib)(u + iv) + c + id \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = c + au - bv \\ y = d + av + bu \end{cases}$$

$$X'' + [f(x) + \alpha^2]X = 0$$

$$Y'' + [g(y) + \varepsilon^2 - \alpha^2]Y = 0$$

حال معادله صمیمان را در نظر بگیریم:

$$\gamma_{xx} + \gamma_{yy} = -K^2 \psi$$

$$\gamma_{uu} + \gamma_{vv} = -K^2 / |dw/dz|^2 \cdot \psi = -K^2 \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 \psi$$

$$\gamma_{uu} + \gamma_{vv} = -K^2 \frac{dz}{dw} \cdot \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \cdot \psi$$

در صورتی که w و $\bar{w}$ جداگانه متغیر قابل حل است که

$$\frac{dz}{dw} \cdot \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} = f(u) + g(v)$$

زیربنه داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{dz}{dw} \cdot \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right) = 0$$

$$w = u + iv; \quad \bar{w} = u - iv$$

از طرفی:

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}}; \quad \frac{\partial}{\partial v} = i \left(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = i \left(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) = i \left(\frac{\partial^2}{\partial w^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{w}^2} \right)$$

$$\nabla_{uu}^2 \psi + \nabla_{vv}^2 \psi + k^2 (u^2 + v^2) \psi = 0$$

$$\psi = F(u) \cdot G(v)$$

$$F''/F + k^2 u^2 = -(G''/G + k^2 v^2) = +\alpha^2$$

$$\frac{d^2 F}{du^2} + (k^2 u^2 - \alpha^2) F = 0$$

$$\frac{d^2 G}{dv^2} + (k^2 v^2 + \alpha^2) G = 0$$

معادلهٔ همگونی را از:

$$K^2 = [E^2 + f(u) + g(v)] / (u^2 + v^2)$$

در مختصات پارابولیک، K^2 بصورت زیر باقی می ماند

$$(ii) \quad \lambda = 1 \rightarrow \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{dz}{d\eta} \right) = \frac{dz}{d\eta}$$

$$z = a e^{\eta} + b e^{-\eta}$$

$$ii-1) \quad z = e^{\eta} = e^u (\cos v + i \sin v)$$

$$\begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{cases}$$

$$\left| \frac{dz}{d\eta} \right|^2 = e^{2u}$$

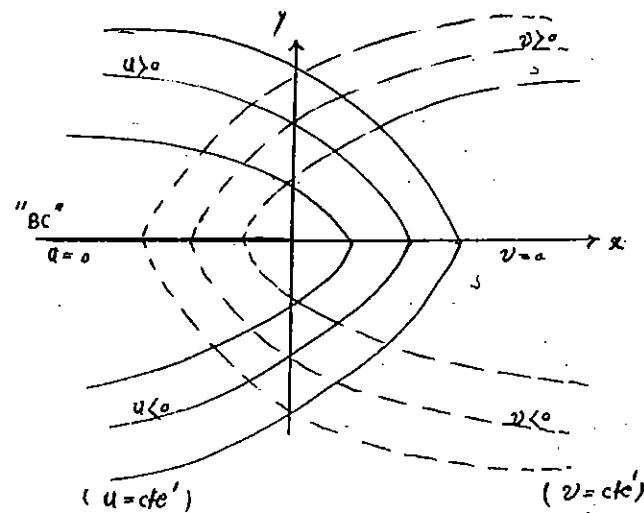
در حالت کلی:

که در واقع تغییر مختصات انتقال، دوران، تغییر مقیاس است.

$$(i-2) \quad \beta = 0, \quad \delta = 1$$

$$\frac{dz}{d\eta} = \eta \rightarrow z = \frac{1}{2} \eta^2 \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} (u^2 - v^2) \\ y = uv \end{cases}$$

$$\left| \frac{dz}{d\eta} \right|^2 = u^2 + v^2$$



Parabolic Coordinate "نقطهٔ پارابولیک"

$$e^u = r \rightarrow u = \ln r$$

$$\& v = \theta$$

باینر متغیر:

رابطه متغیر باینر معادلات بدست می آید

$$dF/du = dF/dr \cdot e^u$$

$$d^2F/du^2 = d^2F/dr^2 e^{2u} + dF/dr \cdot e^u$$

$$= r^2 \frac{d^2F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr}$$

لذا معادله همگن در این متغیر باینر:

$$r^2 \frac{d^2F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} + (K^2 r^2 - \alpha^2) F = 0 \quad (\text{معادله بسل})$$

$$\frac{d^2G}{dv^2} + \alpha^2 G = 0$$

$$\text{ii-2) } z = ae^{\pi} + be^{-\pi}$$

$$\text{چون: } a = 1/2 d e^{-\beta}, \quad b = 1/2 d e^{\beta}$$

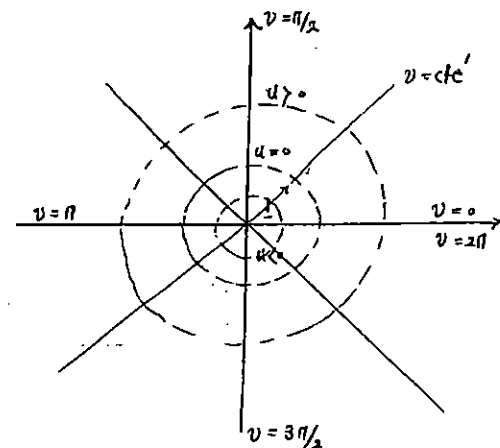
$$d = 2\sqrt{ab}, \quad e^{2\beta} = b/a$$

$$z = \frac{1}{2} d e^{\pi-\beta} + \frac{1}{2} d e^{-(\pi-\beta)}$$

$$= d \cdot \cosh(\pi - \beta)$$

$$u = cte' \text{ خط مستقیم: } x^2 + y^2 = e^{2u} \rightarrow r = e^u$$

$$v = cte' \text{ خط مستقیم: } v = \tan^{-1} \frac{y}{x} = cte' \rightarrow \theta = cte'$$



"رابطه متغیر باینر"

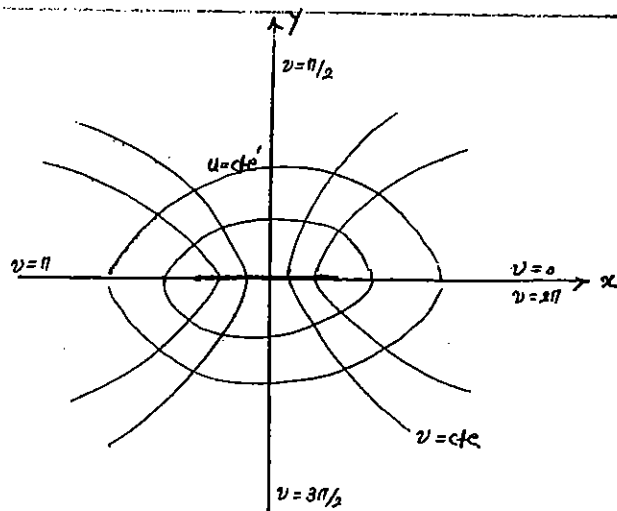
مسئله همگن در این متغیر باینر بدست می آید:

$$\psi_{uu} + \psi_{vv} + K^2 e^{2u} \psi = 0$$

$$\psi = F(u) \cdot G(v)$$

$$F''/F + G''/G + K^2 e^{2u} = 0$$

$$\begin{cases} d^2F/du^2 + (K^2 e^{2u} - \alpha^2) F = 0 \\ d^2G/dv^2 + \alpha^2 G = 0 \end{cases}$$



"دستگاه مختصات بیضی"

$$\mathcal{L}_{uu} + \mathcal{L}_{vv} + k^2 d^2 (\cosh^2(u-\beta) - \cosh^2 v) \psi = 0$$

$$\psi = F(u) \cdot G(v)$$

$$F''/F + k^2 d^2 \cosh^2(u-\beta) = -[G''/G - k^2 d^2 \cosh^2 v] = \alpha^2$$

$$d^2 F/du^2 + [k^2 d^2 \cosh^2(u-\beta) - \alpha^2] F(u) = 0$$

$$d^2 G/dv^2 + [\alpha^2 - k^2 d^2 \cosh^2 v] G(v) = 0$$

برای این شرایط معادلات، ضرایب جبری باشند در این صورت با تغییر متغیر:

$$(q, v) \rightarrow (\rho, \mu)$$

معادله هلمهولتز:

$$z = u + iv$$

$$z = d \cosh(u-\beta + iv)$$

$$z = d [\cosh(u-\beta) \cosh v + i \sinh(u-\beta) \sinh v]$$

$$x = d \cosh(u-\beta) \cosh v$$

$$y = d \sinh(u-\beta) \sinh v$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 = d^2 [\sinh^2(u-\beta) \cosh^2 v + \cosh^2(u-\beta) \sinh^2 v] \\ &= d^2 [\cosh^2(u-\beta) - \cosh^2 v] \end{aligned}$$

$$u = \text{cte} \text{ خط } : \left(\frac{x}{d \cosh(u-\beta)} \right)^2 + \left(\frac{y}{d \sinh(u-\beta)} \right)^2 = 1$$

بیضی‌هایی که مانده‌های آنها در نقاط $(-d, 0)$ ، $(d, 0)$ مکرر دارند.

$$v = \text{cte} \text{ خط } : \left(\frac{x}{d \cosh v} \right)^2 - \left(\frac{y}{d \sinh v} \right)^2 = 1$$

هائپربول‌هایی که مانده‌های آنها در $(-d, 0)$ ، $(d, 0)$ مکرر دارند.

"دستگاه مختصات بیضی"

جدا کردن متغیرها سه متغیر در ۳ بعد که در ۱۰ دستگاه مختصات است. متغیرهای x, y, z را به u, v, η تبدیل می‌کنیم. (۱) معادله را در مختصات جدید بنویسیم.

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} + k^2 \psi = 0$$

$$\psi = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$-X''/X = Y''/Y + Z''/Z + k^2 = \alpha^2$$

$$(*) X'' + \alpha^2 X = 0 \quad (i)$$

$$-Y''/Y = Z''/Z + k^2 - \alpha^2 = \beta^2$$

$$(**) Y'' + \beta^2 Y = 0 \quad (ii)$$

$$(***) Z'' + (k^2 - \alpha^2 - \beta^2) Z = 0 \quad (iii)$$

اگر (x, y, z) را به (u, v, η) تبدیل کنیم معادله را در این مختصات بنویسیم. ds (این طول را بنویسید)

$$ds^2 = (h_1 dx)^2 + (h_2 dy)^2 + (h_3 dz)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$g_i = g_i(x, y, z)$$

$$h_0^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 = \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial g_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial g_i} \right)$$

$$\begin{cases} \eta = \cosh(u-\beta) \\ \mu = \cosh v \end{cases} \quad \begin{cases} x = d\mu\eta \\ y = \pm d\sqrt{(1-\mu^2)(\eta^2-1)} \end{cases}$$

$$dF/du = dF/d\eta \sinh(u-\beta)$$

$$\begin{aligned} d^2F/du^2 &= d^2F/d\eta^2 \sinh^2(u-\beta) + dF/d\eta \cosh(u-\beta) \\ &= (\eta^2-1) d^2F/d\eta^2 + \eta dF/d\eta \end{aligned}$$

$$dG/dv = dG/d\mu \cdot d\mu/dv = -\sinh v dG/d\mu$$

$$\begin{aligned} d^2G/dv^2 &= \sinh^2 v d^2G/d\mu^2 - \cosh v dG/d\mu \\ &= (1-\mu^2) d^2G/d\mu^2 - \mu dG/d\mu \end{aligned}$$

$$\therefore (\eta^2-1) d^2F/d\eta^2 + \eta dF/d\eta + (k^2 d^2 \eta^2 - \alpha^2) F = 0$$

$$\therefore (\mu^2+1) d^2G/d\mu^2 - \mu dG/d\mu + (\alpha^2 - k^2 d^2 \mu^2) G = 0$$

$$1 \leq \eta < \infty \quad ; \quad -1 \leq \mu \leq 1$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] + K^2 \psi = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + K^2 \psi = 0$$

$$\psi = R(r) \Theta(\theta) Z(z)$$

$$\frac{(rR')'}{rR} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + K^2 = - \frac{Z''}{Z} = \alpha^2$$

$$(*) Z'' + \alpha^2 Z = 0$$

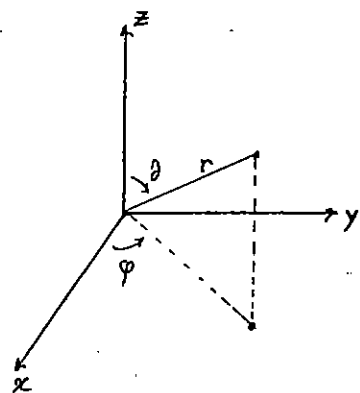
$$-\Theta''/\Theta = r^2 \frac{(rR')'}{rR} + (K^2 - \alpha^2) r^2 = \beta^2$$

$$(**) \Theta'' + \beta^2 \Theta = 0$$

$$r(rR')' + [(K^2 - \alpha^2) r^2 - \beta^2] R = 0$$

$$(***) r^2 R'' + rR' + [(K^2 - \alpha^2) r^2 - \beta^2] R = 0$$

(: حل جلد)



(۳) فضا سه بعدی:

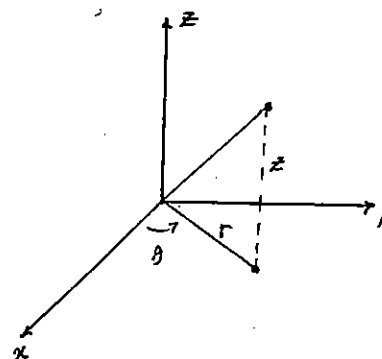
$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$-\pi < \phi \leq \pi$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial y_3} \right) \right]$$

(۲) فضا استوانه‌ای:



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = r \\ y_2 = \theta \\ y_3 = z \end{cases} \quad \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = r \\ h_3 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore ds^2 = dr^2 + (r d\theta)^2 + dz^2$$

(۱) فضا مکعبی:

$$\nabla^2 \psi + K^2 \psi = 0$$

سطوح $\alpha = cte$ ، یعنی برخی ایتاها هستند کانونهای آفا و زفا $(0,0,c)$ و $(0,0,-c)$ قرار دارند.

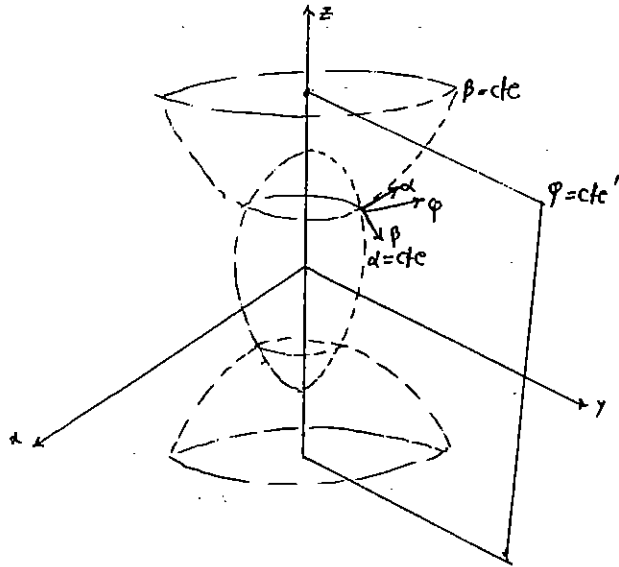
سطوح $\beta = cte$

$$\left(\frac{z}{c \cosh \beta}\right)^2 - \left(\frac{r}{c \sinh \beta}\right)^2 = 1$$

که در صفحه (z,r) دایره‌ای با کانون $(\pm c, 0)$ هستند. لذا سطح $\beta = cte$ دایره‌ای است که در صفحه (z,r) دایره‌ای با کانونهای $(0,0,\pm c)$ هستند.

سطوح $\varphi = cte$

با توجه به اینکه $\tan \varphi = 1/x$ ، لذا سطح $\varphi = cte$ ، سطحی است که از محور z عبور می‌کند.



"Prolate Spheroidal Coordinate" دایره‌ای متغیر بیضی ایتاها

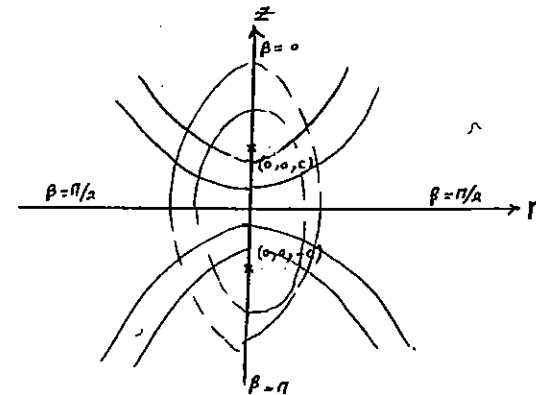
(α, β, φ)

$$\begin{cases} x = c \sinh \alpha \sinh \beta \cos \varphi & 0 \leq \alpha < \infty \\ y = c \sinh \alpha \sinh \beta \sin \varphi & 0 \leq \beta \leq \pi \\ z = c \cosh \alpha \cosh \beta & -\pi \leq \varphi < \pi \text{ or } 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

$$\alpha = cte : x^2 + y^2 = c^2 \sinh^2 \alpha \sinh^2 \beta = r^2$$

$$\left(\frac{r}{c \sinh \alpha}\right)^2 + \left(\frac{z}{c \cosh \alpha}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{z}{c \cosh \alpha}\right)^2 + \frac{x^2 + y^2}{c^2 \sinh^2 \alpha} = 1$$



$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2 \sinh \alpha \sinh \beta (\sinh^2 \alpha + \sinh^2 \beta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (c \sinh \alpha \sinh \beta \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (c \sinh \alpha \sinh \beta \frac{\partial \psi}{\partial \beta}) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{c (\sinh^2 \alpha + \sinh^2 \beta)}{\sinh \alpha \sinh \beta} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) \right\}$$

$$\nabla^2 \psi + K^2 \psi = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2 \sinh \alpha (\sinh^2 \alpha + \sinh^2 \beta)} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sinh \alpha \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}) + \\ & + \frac{1}{c^2 \sinh \beta (\sinh^2 \alpha + \sinh^2 \beta)} \frac{\partial}{\partial \beta} (\sinh \beta \frac{\partial \psi}{\partial \beta}) + \\ & + \frac{1}{c^2 \sinh^2 \alpha \sinh^2 \beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} + K^2 \psi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore & \frac{1}{\sinh \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sinh \alpha \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}) + \frac{1}{\sinh \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} (\sinh \beta \frac{\partial \psi}{\partial \beta}) + \\ & + \left(\frac{\sinh^2 \alpha + \sinh^2 \beta}{\sinh^2 \alpha \sinh^2 \beta} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} + K^2 c^2 (\sinh^2 \alpha + \sinh^2 \beta) \psi = 0 \end{aligned}$$

A.9,15 : 9 AM

$$x = c \sinh \alpha \sinh \beta \cosh \rho$$

$$y = c \sinh \alpha \sinh \beta \sinh \rho$$

$$z = c \cosh \alpha \cosh \beta$$

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2$$

$$= c^2 [\cosh^2 \alpha \sinh^2 \beta + \sinh^2 \alpha \cosh^2 \beta]$$

$$= c^2 (\sinh^2 \alpha + \sinh^2 \beta) \quad \therefore h_1 = c (\sinh^2 \alpha + \sinh^2 \beta)^{1/2}$$

$$h_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$= c^2 [\sinh^2 \alpha \cosh^2 \beta + \cosh^2 \alpha \sinh^2 \beta]$$

$$= c^2 (\sinh^2 \alpha + \sinh^2 \beta) \quad \therefore h_2 = c (\sinh^2 \alpha + \sinh^2 \beta)^{1/2}$$

$$h_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2$$

$$= c^4 \sinh^2 \alpha \sinh^2 \beta \quad \therefore h_3 = c \sinh \alpha \sinh \beta$$

$$\frac{(F' \sinh \alpha)'}{F \sinh \alpha} + K^2 c^2 \sinh^2 \alpha - \frac{B}{\sinh^2 \alpha} =$$

$$- \frac{(G' \sin \beta)'}{G \sin \beta} - K^2 c^2 \sin^2 \beta + \frac{B}{\sin^2 \beta} = A$$

$$\begin{cases} F''(\alpha) + \tanh \alpha F'(\alpha) + (K^2 c^2 \sinh^2 \alpha - A - B/\sinh^2 \alpha) F(\alpha) = 0 \\ G''(\beta) + \tan \beta G'(\beta) + (K^2 c^2 \sin^2 \beta + A - B/\sin^2 \beta) G(\beta) = 0 \\ \Phi''(\varphi) + B \Phi(\varphi) = 0 \end{cases}$$

"Prolate Spheroidal"

$$\gamma = F(\alpha) \cdot G(\beta) \cdot \Phi(\varphi)$$

$$\frac{(\sinh \alpha F')'}{\sinh \alpha F} + \frac{(\sin \beta G')'}{G \sin \beta} + \frac{\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta}{\sinh^2 \alpha \cdot \sin \beta} \cdot \frac{\Phi''}{\Phi} + K^2 c^2 (\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta) = 0$$

$$- \frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{\sinh^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta} \left\{ \frac{(F' \sinh \alpha)'}{F \sinh \alpha} + \frac{(G' \sin \beta)'}{G \sin \beta} + K^2 c^2 (\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta) \right\} = B$$

$$\Phi'' + B \Phi = 0$$

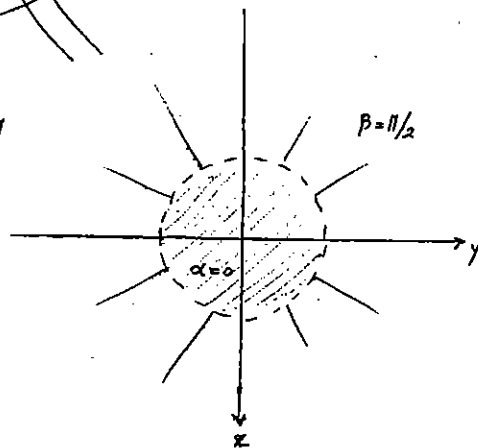
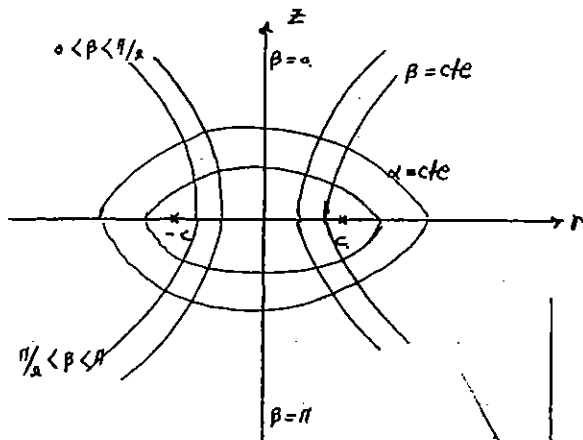
$$\frac{(F' \sinh \alpha)'}{F \sinh \alpha} + \frac{(G' \sin \beta)'}{G \sin \beta} + K^2 c^2 (\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta) = B \left(\frac{1}{\sinh^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \right)$$

$$\beta = cte' \text{ سطح}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{c^2 \sin^2 \beta} - \frac{z^2}{c^2 \cos^2 \beta} = 1$$

$$-\left(\frac{r}{c \sin \beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{c \cos \beta}\right)^2 = -1$$

لذا سطح $\beta = cte'$ قطعهای کروی است که در مرکز $r=0$ و $z=c$ قرار دارند.



"Oblate Spheroidal Coordinate" (α, β, φ)

$$x = c \cosh \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi$$

$$0 < \alpha < \infty$$

$$y = c \cosh \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \varphi$$

$$0 < \beta < \pi$$

$$z = c \sinh \alpha \cdot \cos \beta$$

$$-\pi < \varphi < \pi$$

در مختصات آردان سطحهای کروی قرار دارند:

$$\alpha = cte' \text{ سطح}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = c^2 \cosh^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta$$

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2 \cosh^2 \alpha} + \frac{z^2}{c^2 \sinh^2 \alpha} = 1$$

$$\left(\frac{r}{c \cosh \alpha}\right)^2 + \left(\frac{z}{c \sinh \alpha}\right)^2 = 1$$

لذا سطح $\alpha = cte'$ بیضیهای کروی (خیمه‌شکل) است که در مرکز $r=0$ قرار دارند.

$$x = c \cosh \alpha \sin \beta \cos \varphi \quad 0 < \alpha < \infty$$

$$y = c \cosh \alpha \sin \beta \sin \varphi \quad 0 < \beta \leq \pi$$

$$z = c \sinh \alpha \cos \beta \quad -\pi < \varphi \leq \pi$$

$$\begin{aligned} R_1^2 &= x_{,\alpha}^2 + y_{,\alpha}^2 + z_{,\alpha}^2 \\ &= c^2 [\sinh^2 \alpha \sin^2 \beta + \cosh^2 \alpha \cos^2 \beta] \\ &= c^2 (\cosh^2 \alpha - \sin^2 \beta) \end{aligned}$$

$$R_1 = R_2 = c (\cosh^2 \alpha - \sin^2 \beta)^{1/2} \quad \& \quad R_3 = c \cosh \alpha \sin \beta$$

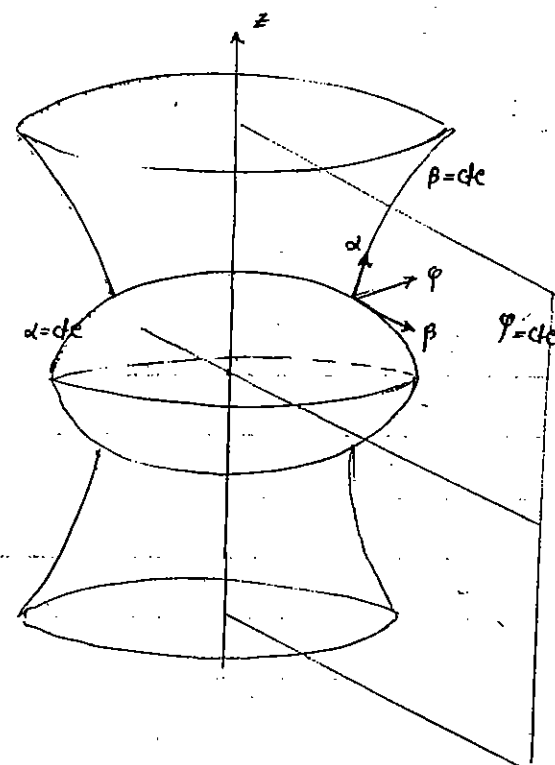
$$\nabla^2 \psi + K^2 \psi = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2 \cosh \alpha \sin \beta (\cosh^2 \alpha - \sin^2 \beta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(c \cosh \alpha \sin \beta \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(c \cosh \alpha \sin \beta \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{c (\cosh^2 \alpha - \sin^2 \beta)}{\cosh \alpha \sin \beta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \left. \right\} + \\ & + K^2 \psi = 0 \end{aligned}$$

مساحت $\varphi = c d\epsilon'$

$$\tan \varphi = y/x \rightarrow \varphi = \tan^{-1} y/x$$

مختصات مستطی که از فرم φ می‌گذرند.



$$\begin{cases} F''(\alpha) + \tanh \alpha F'(\alpha) + (K^2 c^2 \cosh^2 \alpha - A + B/\cosh^2 \alpha) F(\alpha) = 0 \\ G''(\beta) + \tanh \beta G'(\beta) - (K^2 c^2 \sin^2 \beta - A + B/\sin^2 \beta) G(\beta) = 0 \\ \Phi'(\varphi) + B\Phi(\varphi) = 0 \end{cases}$$

"Oblate Spheroidal"

حال به جمع بندی رابع به معادلات زیرین تبدیل شده می بینیم:

(r) در نقطه استاندارد: $r^2 R'' + rR' + [(K^2 - \alpha^2)r^2 - \beta^2]R = 0$

(r) در نقطه کروی: $r^2 R'' + 2rR' + (K^2 r^2 - \beta^2)R = 0$

حال اگر در نقطه استاندارد: $\rho = \lambda r$, $R(r) = Z_n(\rho)$, $\beta = n$, $\lambda = \sqrt{K^2 - \alpha^2}$

در نقطه کروی: $R(r) = r^{-1/2} Z_n(\rho)$, $\rho = \lambda r$, $n = \sqrt{\beta^2 + 1/4}$, $\lambda = K$

تکرار هم را می بینیم هر دو معادله به معادله

$$\rho^2 Z_n''(\rho) + \rho Z_n'(\rho) + (\rho^2 - n^2) Z_n(\rho) = 0$$

پس می بینیم معادله یکسان است. (n ∈ ℤ) در نقطه کروی:

$$R = r^{-1/2} Z_n(\rho)$$

$$R' = -1/2 r^{-3/2} Z_n + K r^{-1/2} Z_n'$$

$$R'' = 3/4 r^{-5/2} Z_n - K r^{-3/2} Z_n' + K^2 r^{-1/2} Z_n''$$

$$\frac{1}{\cosh \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\cosh \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} (\sin \beta \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}) +$$

$$\frac{\cosh^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\cosh^2 \alpha \sin^2 \beta} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho^2} + K^2 c^2 (\cosh^2 \alpha - \sin^2 \beta) \gamma = 0$$

$$\gamma = F(\alpha) \cdot G(\beta) \cdot \Phi(\varphi)$$

$$\frac{(F' \cosh \alpha)'}{F \cosh \alpha} + \frac{(G' \sin \beta)'}{G \sin \beta} + \frac{\cosh^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\cosh^2 \alpha \sin^2 \beta} \frac{\Phi''}{\Phi} + K^2 c^2 (\cosh^2 \alpha - \sin^2 \beta) = 0$$

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{\cosh^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\cosh^2 \alpha - \sin^2 \beta} \left\{ \frac{(F' \cosh \alpha)'}{F \cosh \alpha} + \frac{(G' \sin \beta)'}{G \sin \beta} + K^2 c^2 (\cosh^2 \alpha - \sin^2 \beta) \right\} = B$$

$$\Phi'' + B\Phi = 0$$

$$\frac{(F' \cosh \alpha)'}{F \cosh \alpha} + \frac{(G' \sin \beta)'}{G \sin \beta} + K^2 c^2 (\cosh^2 \alpha - \sin^2 \beta) = \frac{B}{\sin^2 \beta} - \frac{B}{\cosh^2 \alpha}$$

$$\frac{(F' \cosh \alpha)'}{F \cosh \alpha} + K^2 c^2 \cosh^2 \alpha + \frac{B}{\cosh^2 \alpha} = -\frac{(G' \sin \beta)'}{G \sin \beta} + K^2 c^2 \sin^2 \beta + \frac{B}{\sin^2 \beta} = A$$

که معادله تغییرات معادله دایره را در نظر گرفته که در حالت $\alpha = 0$ معادله را در نظر می‌گیریم.
در نتیجه به صورتی می‌تواند باشد:

$$(i) \quad F(\alpha) = U(\cosh \alpha) \rightarrow \mu \triangleq \cosh \alpha$$

$$(ii) \quad G(\beta) = U(\cosh \beta) \rightarrow \mu \triangleq \cosh \beta$$

$$(i) \quad F' = \frac{dU}{d\mu} \sinh \alpha, \quad F'' = \frac{d^2 U}{d\mu^2} \sinh^2 \alpha + \cosh \alpha \frac{dU}{d\mu}$$

$$\sinh^2 \alpha \frac{d^2 U}{d\mu^2} + 2 \cosh \alpha \frac{dU}{d\mu} + (K^2 \cosh^2 \alpha - A - B/\sinh^2 \alpha) U = 0$$

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 U}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dU}{d\mu} + [K^2 c^2 (1-\mu^2) + A - B/(1-\mu^2)] U = 0$$

$$(ii) \quad G' = \frac{dU}{d\mu} (-\sin \beta), \quad G'' = \frac{d^2 U}{d\mu^2} \sin^2 \beta - \cosh \beta \frac{dU}{d\mu}$$

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 U}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dU}{d\mu} + [K^2 c^2 (1-\mu^2) + A - B/(1-\mu^2)] U = 0$$

در نتیجه به صورتی می‌تواند باشد:

$$(i) \quad F(\alpha) = V(i \sinh \alpha)$$

$$(ii) \quad G(\beta) = V(\cosh \beta)$$

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 V}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dV}{d\mu} + [-K^2 c^2 (1-\mu^2) + A - B/(1-\mu^2)] V = 0$$

در معادله:

با قرار دادن μ در این معادله داریم:

$$\frac{3}{4} r^{-1/2} Z_n - K r^{1/2} Z_n' + K^2 r^{3/2} Z_n'' - r^{-1/2} Z_n + 2K r^{1/2} Z_n' + K^2 r^{1/2} Z_n' + K^2 r^{3/2} Z_n - \beta^2 r^{-1/2} Z_n = 0$$

با ضرب کردن در $r^{1/2}$

$$\rho^2 Z_n'' + \rho Z_n' + (\rho^2 - (\beta^2 + 1/4)) Z_n = 0$$

$$\rho Z_n'' + \rho Z_n' + (\rho^2 - \pi^2) Z_n = 0$$

$$(ii) \quad \Theta'' + \cot \theta \cdot \Theta' + (\beta^2 - \frac{\alpha^2}{\sin^2 \theta}) \Theta = 0$$

$$\Theta(\theta) = S(\cos \theta) \quad ; \quad \mu \triangleq \cos \theta$$

$$\Theta' = \frac{dS}{d\mu} (-\sin \theta) \quad ; \quad \Theta'' = \frac{d^2 S}{d\mu^2} \sin^2 \theta - \cos \theta \frac{dS}{d\mu}$$

$$\Theta'' = (1-\mu^2) \frac{d^2 S}{d\mu^2} - \mu \frac{dS}{d\mu}$$

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 S}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dS}{d\mu} + (\beta^2 - \frac{\alpha^2}{1-\mu^2}) S = 0$$

"Associated Legendre Equation"

$$y_2 = w(z_0) y_1 \int_{z_0}^z \frac{1}{y_1^2} \exp \left(- \int_{z_0}^u p(u) du \right) du$$

نقطه عادی: $z=a$ نقطه عادی (Regular Point) معادله داریم. اگر
 $p(z), q(z)$ حول $z=a$ به صورت زیر نوشته شود:

$$p(z) = p(a) + p'(a)(z-a) + \frac{1}{2!} p''(a)(z-a)^2 + \dots$$

$$q(z) = q(a) + q'(a)(z-a) + \frac{1}{2!} q''(a)(z-a)^2 + \dots$$

رابطه کلی، معادله دیفرانسیل را برای حل کلی است.

$$y(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \dots$$

$$y'(z) = a_1 + 2a_2(z-a) + 3a_3(z-a)^2 + \dots$$

$$y''(z) = 2a_2 + 6a_3(z-a) + \dots$$

تکرار این در معادله دیفرانسیل داریم:

$$2a_2 + 6a_3(z-a) + \dots + [p(a) + p'(a)(z-a) + \frac{1}{2!} p''(a)(z-a)^2 + \dots] \times$$

$$(a_1 + 2a_2(z-a) + 3a_3(z-a)^2 + \dots) + [q(a) + q'(a)(z-a) + \dots] \times$$

$$(a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots) = 0$$

$$2a_2 + a_1 p(a) + a_0 q(a) = 0$$

$$6a_3 + 2a_2 p(a) + a_1 p'(a) + a_0 q'(a) = 0$$

تقریباً

معادلات دیفرانسیل عادی رتبه دوم

$$Ly = \frac{d^2 y}{dz^2} + p(z) \frac{dy}{dz} + q(z) y = 0$$

معادله فوق را برای دو حل مستقل است. یعنی که اگر y_1, y_2 دو حل از معادله فوق باشند و نسبت آنها صفر نیست.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

$$\frac{dW}{dz} = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = y_1 (-p y_2' - q y_2) - y_2 (-p y_1' - q y_1)$$

$$\frac{dW}{dz} = -p \cdot W$$

$$W(z) = W(z_0) \exp \left(\int_{z_0}^z -p(u) du \right) \quad \text{تاکار آبل}$$

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = y_1^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{y_2}{y_1} \right)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{W(z)}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} W(z_0) \exp \left(- \int_{z_0}^z p(u) du \right)$$

$$y(z) = (z-a)^r (a_0 + a_1(z-a) + \dots)$$

به نظر دادن در معادله فروانیل

$$(z-a)^2 y'' + (z-a) F(z) y' + G(z) y = 0$$

$$(z-a)^2 y'' + (z-a) (F(a) + F'(a)(z-a) + \dots) y' + (G(a) + G'(a)(z-a) + \dots) y = 0$$

حال منسوب $(z-a)^r$ معادله در r زیر است "Indicial Equation"

$$r(r-1) + F(a)r + G(a) = 0$$

$$r^2 + [F(a)-1]r + G(a) = 0$$

در حالت کلی معادله انتگرالی در r است، چنانچه تفاضل $r_1 - r_2$ عدد صحیح باشد، در حالت کلی دو حل مستقل نخواهیم داشت؛ در حالت $r_1 - r_2$ عدد صحیح قدر.

$$y_2 = c y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp(-\int p dz) dz$$

با توجه به رابطه متقابل

برای تن حل y_1 توان حل y_2 که مستقل از y_1 است بدست آورده. اگر y_1 و y_2 توابع خطی باشند در این صورت

$$y_1 = (z-a)^{r_1} u_1$$

$$y_2 = (z-a)^{r_2} u_2$$

$$\exp(-\int p dz) = \exp(-\int \frac{F(a) + F'(a)(z-a) + \dots}{z-a} dz) \\ = (z-a)^{-F(a)} \cdot (\text{تابع خطی})$$

$$y = a_0 y_1 + a_1 y_2$$

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2} p(a) (z-a)^2 + \frac{1}{8} (p(a) \cdot p'(a)) (z-a)^3 + \dots$$

$$y_2 = (z-a) - \frac{1}{2} p(a) (z-a)^2 - \frac{1}{8} (p(a) + p'(a) - p'(a)) (z-a)^3 + \dots$$

$$\begin{cases} y_1(a) = 1 \\ y_1'(a) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(a) = 0 \\ y_2'(a) = 1 \end{cases}$$

لذا y_1 و y_2 دو حل مستقل هستند. حال برای $z=a$ با شرایط مرزی زیر

$$y(a) = A, \quad y'(a) = B \rightarrow y(z) = A y_1 + B y_2$$

تعریف: نقطه $z=a$ را برای معادله $Ly=0$ یک نقطه متفرد منظم گوئیم. اگر این نقطه برای $p(z)$ حاکم قطب ساده و برای $q(z)$ حاکم قطب مضاعف باشد، در غیر این صورت نقطه متفرد نقطه متفرد غیر منظم (Irregular Point) گوئیم. برای نقطه متفرد منظم تابع

$$p(z) = \frac{G(z)}{(z-a)^2}, \quad q(z) = \frac{F(z)}{z-a}$$

که $F(z)$ و $G(z)$ در $z=a$ خطی هستند، حل معادله $Ly=0$ حول نقطه متفرد منظم در حالت کلی (نه در حالت $r_1 - r_2$ عدد صحیح) دارای تکلیف خاصی است

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} p\left(\frac{1}{t}\right) \right) \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^4} q\left(\frac{1}{t}\right) y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + P(z) \frac{dy}{dz} + Q(z) y = 0$$

$$\begin{cases} P(z) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} p\left(\frac{1}{t}\right) = 2z - z^2 p(z) \\ Q(z) = \frac{1}{t^4} q\left(\frac{1}{t}\right) = z^4 q(z) \end{cases}$$

نقطه ∞ برای معادله $L(y) = 0$ یک نقطه عادی است، اگر تمام $2z - z^2 p(z)$ و $z^4 q(z)$ در ∞ قطب نداشته باشند. همچنین ترتیب نقطه ∞ را برای معادله $L(y) = 0$ یک نقطه متعین می‌کنیم، اگر $2z - z^2 p(z)$ و $z^4 q(z)$ در ∞ حداکثر دارای قطب ساده و $z^4 q(z)$ در ∞ حداکثر قطب مضاعف داشته باشند.

مثال: معادله $y'' + y = 0$ را در نظر بگیرید. در این صورت:

$$P(z) = 0, \quad Q(z) = 1$$

$$2z - p(z) = 2z$$

$$z^4 q(z) = z^4$$

پس ∞ نقطه متعین منظم است.

$$y_2 = c(z-a)^{r_1} u_1 \int \frac{(z-a)^{r_1+r_2-1} (u_1')}{(z-a)^{2r_1} (u_1)} dz$$

$$= c(z-a)^{r_1} u_1 \int \frac{b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots}{(z-a)^{r_1-r_2+1}} dz$$

$$= (z-a)^{r_1} u_1 \left[\frac{-b_0}{r_1-r_2} + \frac{b_1}{r_2-r_1+1} (z-a) + \dots + (z-a)^{r_1-r_2} b_{r_1-r_2} \ln(z-a) + \dots \right]$$

هنگامی که $r_1 = r_2$ و u_1 یک تابعی ایجاب می‌شود که سبب استقلال u_1 از u_2 باشد.

"بررسی ریشه نقطه ∞ "

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$$

تبدیل $z = 1/t$ و ریشه $t = 0$ را بررسی می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dt} \left(-\frac{1}{t^2} \right) = -t^2 \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{t^2} \right) \frac{dy}{dt} + \frac{2}{t^3} \frac{dy}{dt} = t^4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + p(z) \frac{dy}{dz} + q(z) y = 0$$

معادله با دو نقطه متغیر منتظم

$$2z - z^2 p(z), \quad z^2 q(z)$$

برای اینکه ∞ نقطه متغیر منتظم باشد یعنی

$$p(z) = A/z, \quad q(z) = B/z^2$$

نقطه $z=0$ نقطه متغیر منتظم است

$$A \triangleq 1 - \alpha - \beta$$

$$\beta \triangleq \alpha \beta$$

در این صورت معادله از این فرم حاصل می شود

$$z^2 y'' - (\alpha + \beta - 1) z y' + \alpha \beta y = 0$$

$$p(z) = 0$$

$$q(z) = 2/z$$

مثال ۲. برای معادله با کمترین تعداد نقاط متغیر داریم:

لذا معادله $y'' + 2/z y' = 0$ فقط دارای یک نقطه متغیر است، دو معادله ای که دارای یک نقطه متغیر باشد قابل تبیین به این معادله است. در حل این معادله عبارت است از:

$$y = A/z + B$$

مثال ۳.

معادله $y'' = 0$ در ∞ دارای نقطه متغیر منتظم است، که با تغییر متغیر

$$t = 1/z \rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dt} \left(-1/z^2 \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot 1/z^4 + 2/z^3 \frac{dy}{dt}$$

مثال ۴.

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{2}{z-a} \frac{dy}{dz} = 0 \quad z = 1/t - a$$

$$2z - z^2 p(z) = 2z - \frac{2z^2}{z-a}$$

لذا در ∞ طلب برای ∞ داریم

معادله با ۲ نقطه متغیر منتظم
نویس کننده معادله

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t) y = 0$$

دارای سه نقطه متغیر منتظم است در نقاط

$$t = a, \quad t = b, \quad t = c.$$

است را تغییرات نگاشت:

$$z = \delta \frac{t-a}{t-c}, \quad \delta = \frac{b-c}{b-a}, \quad t = \frac{\delta a - cz}{\delta - z}$$

نقاط متغیر منتظم را به $\infty, 1, 0$ بیاب

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + p(z) \frac{dy}{dz} + q(z) y = 0$$

$$p(z) = \frac{\delta(a-c)}{(\delta-z)^2} P\left(\frac{\delta a - cz}{\delta - z}\right) - \frac{2}{\delta - z}$$

$$q(z) = \frac{\delta^2(a-c)^2}{(\delta-z)^4} Q\left(\frac{\delta a - cz}{\delta - z}\right)$$

$$z^2 y'' - (\alpha + \beta - 1) z y' + \alpha \beta y = 0$$

معادله ادری:

$$y_1 = z^\alpha$$

$$y_2 = z^\beta$$

معادله که دارای دو نقطه متغیر منتظم است قابل تبدیل به معادله ادری است. بطور
مثال اگر $t = a$, $t = b$ نقاط متغیر منتظم معادله

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t) y = 0$$

نکته را تغییرات را تبدیل

$$z = \frac{t-a}{t-b}$$

معادله قابل تبدیل به معادله ادری است. اگر $\alpha = \beta$

$$p(z) = \frac{1-2\alpha}{z}$$

$$q(z) = \frac{\alpha^2}{z}$$

$$y_1 = z^\alpha$$

$$y_2 = z^\alpha \int \frac{e^{-\int \frac{1-2\alpha}{z} dz}}{z^{2\alpha}} dz = z^\alpha \ln z$$

$$y = z^\alpha (c_1 + c_2 \ln z)$$

$$q(z) = c/z^2 + D/(z(z-1)) + E/(z-1)^2$$

اگر فرض کنیم معادله اینترپال را در صورت r_1, r_2 و s_1, s_2 در t_1, t_2 بنویسیم در این صورت

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 1 - A \\ r_1 \cdot r_2 = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_1 + s_2 = 1 - B \\ s_1 \cdot s_2 = E \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 - (2 - A - B) = A + B - 1 \\ t_1 t_2 = c - D + E \end{cases}$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{1-r_1-r_2}{z} + \frac{1-s_1-s_2}{z-1} \right) \frac{dy}{dz} + \left(\frac{r_1 r_2}{z^2} - \frac{r_1 r_2 + s_1 s_2 - t_1 t_2}{z(z-1)} + \frac{s_1 s_2}{(z-1)^2} \right) y = 0$$

$$r_1 + r_2 + s_1 + s_2 + t_1 + t_2 = 1$$

معادله فوق را با استفاده از معادله Papperitz بنویسیم. حال اگر قرار دهیم:

$$y = z^{r_1} (z-1)^{s_1} \cdot w$$

به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} \frac{d(z)}{(t-c)^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} \frac{d^2(z)}{(t-c)^4} - \frac{2d(z)}{(t-c)^3} \frac{dy}{dz}$$

$$p(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + p_1(z)$$

$$q(z) = \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z} + \frac{E}{(z-1)^2} + \frac{F}{z-1} + q_1(z)$$

اگر p_1, p_2 کسرهای ساده باشند ما توجه به آنکه معادله فوق منظم است، بنابراین

$$2z - z^2 p(z)$$

در ∞ باقی‌مانده قطب ساده،

$$z^4 q(z)$$

در ∞ باقی‌مانده قطب مضاعف داشته باشد.

$$\therefore p_1(z) = 0$$

$$D + F = 0, \quad q_1(z) = 0$$

$$p(z) = A/z + B/(z-1)$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 - c \\ s_1 = c - a - b \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = a \\ t_2 = b \end{cases}$$

Hypergeometric Equation:

$$z(1-z)w'' + [c - (a+b+1)z]w' - abw = 0$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

$$w' = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n z^{n-1}$$

$$w'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n z^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n z^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n z^n + c \sum_{n=1}^{\infty} n A_n z^{n-1} -$$

$$(a+b+1) \sum_{n=1}^{\infty} n A_n z^n - ab \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = 0$$

$$(n+1)n A_{n+1} + c(n+1) A_{n+1} = [n(n-1) + n(a+b+1) + ab] A_n$$

$$A_{n+1} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} A_n$$

$$-z(z-1)w'' + [c - (a+b+1)z]w' - abw = 0$$

"Hypergeometric" معادله فوق هندسی گوییم

معادله فوق هندسی:

$$P(z) = \frac{c - (a+b+1)z}{z(1-z)}$$

$$Q(z) = -\frac{ab}{z(1-z)}$$

ریشه های معادله ایست که در مخرج = 0 ، 1-c است. در صورتی که 0 ، c-a-b است در صورتی که 0 ، a-b است. و در صورتی که 0 ، a-b است. و در صورتی که 0 ، a-b است. و در صورتی که 0 ، a-b است.

اگر معادله را با دو تکرار تکرار کردیم معادله فوق هندسی گوییم.

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{1-r_2}{z} + \frac{1-s_2}{z-1} \right) \frac{dy}{dz} + \left(\frac{t_1 t_2}{z(z-1)} \right) y = 0$$

$$-z(1-z) \frac{d^2 y}{dz^2} + (r_2 - 1 + (2-r_2-s_2)z) \frac{dy}{dz} + t_1 t_2 y = 0$$

$$z(z-1) y'' + [1-r_1 - (2-r_1-s_1)z] y' - t_1 t_2 y = 0$$

۶

حل دیگر معادله فوق هضبی بصورت $w = z^{1-c}$ است که w را $z = 0$ تکلیلی است در اینصورت با جایگزینی بصورت زیر

$$w = z^{1-c} w_2$$

$$w' = z^{1-c} \left(\frac{1-c}{z} w_2 + w_2' \right)$$

$$w'' = z^{1-c} \left(\frac{(1-c)^2 - (1-c)}{z^2} w_2 + \frac{2(1-c)}{z} w_2' + w_2'' \right)$$

در معادله فوق هضبی داریم: (با تقسیم بر z^{1-c})

$$w_2' \text{ ضریب} = 2(z-1)(c-1) + c - (a+b+1)z \\ = 2 - c - (a+b+z-2c)z$$

$$w_2 \text{ ضریب} = \frac{c(c-1)}{z^2} (1-z) + \frac{c(1-c)}{z} - (a+b+1)(1-c) - ab \\ = -c(c-1) - (a+b+1)(1-c) - ab \\ = -[ab - (c-1)(a+b+1) + c(c-1)] \\ = -[(a+1-c)(b+1-c)]$$

دقتاً معادله بالا در $z=0$ برقرار است

$$z(1-z)w_2'' + [2-c - (a+b+z-2c)z]w_2' - (a+1-c)(b+1-c)w_2 = 0$$

حال A_n را در معادله فوق مرتبه را بدست می آوریم در اینصورت حل تکلیلی مشخص می شود

$$A_1 = \frac{ab}{c} A_0$$

$$A_2 = (a+1)(b+1)/(c+1)(2) \cdot A_1 = \frac{(a+1)a \cdot (b+1)b}{(c+1)c \cdot 2!} A_0$$

⋮

$$A_n = \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1) b(b+1) \cdots (b+n-1)}{c(c+1) \cdots (c+n-1) n!} A_0$$

$$(a)_n \triangleq a(a+1) \cdots (a+n-1) \quad \text{"Pochhammer Symbol"}$$

$$w = F(a, b; c; z)$$

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

که سری فوق بنام سری فوق هضبی معروف است "Hypergeometric series"

چنانچه $a=1$, $b=c$ باشد در اینصورت سری فوق به سری تصاعد هضبی بدل می شود

$$(1)_n = n!$$

اگر a یا b اعداد منفی متناهی باشد در اینصورت کسرها به صفر می رسد

"مسئله با نقطه متغیر غیر منظم"

فرض کنید $t=a$ نقطه متغیر غیر منظم باشد، داریم:

$$p(t) = \frac{2}{t-a}$$

$$2t - t^2 p(t) \xrightarrow{\infty} 2t - 2t = 0$$

$$q(t) = -\frac{k^2}{(t-a)^4}$$

$$t^4 q(t) \xrightarrow{\infty} -k^2$$

داریم: ∞ نقطه خلیج $\frac{1}{t-a}$ ، پس مسئله:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2}{t-a} \frac{dy}{dt} - \frac{k^2}{(t-a)^4} y = 0$$

دارای یک نقطه متغیر غیر منظم است. حال اگر این نقطه را در ∞ بنویسیم، داریم:

$$z = \frac{1}{t-a}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} \left(-\frac{1}{(t-a)^2} \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} \frac{1}{(t-a)^4} + \frac{2}{(t-a)^3} \frac{dy}{dz}$$

$$= z^4 \frac{d^2 y}{dz^2} + 2z^3 \frac{dy}{dz}$$

$$w_2 = F(a+1-c, b+1-c; 2-c; z)$$

حل دیگر معادله فوق هندسی به صورت زیر است:

$$w = z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c; 2-c; z)$$

سری فوق هندسی را به حسب تابع Γ فزینی توان نوشت:

$$\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$$

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}$$

"Confluent Hypergeometric Equation"

معادله انتقال هسین

$$z(1-z)w'' + [c - (a+b+1)z]w' - abw = 0$$

اگر $z = bz$ قرار دهیم

$$x/b(1-x/b)b^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + [c - (a+b+1)\frac{x}{b}]b \frac{dw}{dx} - abw = 0$$

$$x(1-x/b) \frac{d^2 w}{dx^2} + [c - (a+b+1)\frac{x}{b}] \frac{dw}{dx} - aw = 0$$

حال b را به سمت ∞ میل می دهیم $(b \rightarrow \infty)$ را می بینیم:

$$x \frac{d^2 w}{dx^2} + (c-x) \frac{dw}{dx} - aw = 0 \quad \text{"Confluent Hypergeometric Equation"}$$

$$p(x) = \frac{c-x}{x}$$

$$q(x) = -a/x$$

$a=0$ نقطه متغیر منتظم است در هر دو معادله اینترشال $(0, (1-c))$ است.

$$2x - x^2 p(x) = 2x - x(c-x)$$

$$x^2 q(x) = -a^2 x$$

نقطه متغیر غیر منتظم است.

$$\Rightarrow z^4 \frac{d^2 y}{dz^2} + 2z^3 \frac{dy}{dz} + 2z [-z^2 \frac{dy}{dz}] - k^2 z^4 y = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dz^2} - k^2 y = 0$$

$$y(t) = A \exp\left(\frac{k}{t-a}\right) + B \exp\left(\frac{-k}{t-a}\right)$$

این حل در $t=a$ دارای تکینگی اساسی است.

معینان مثال دیگر معادله

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (a+bz^2)y = 0$$

در ∞ نقطه متغیر غیر منتظم است.

"Special Functions"

توابع خاص

$$F(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)} \frac{b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!} x^n$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b; c; \frac{x}{b}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore F(a; c; x) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}$$

سری فوق العاده سری فوق هندسی همزن گوسه

$$y: a=c \rightarrow F(a; a; x) = e^x$$

حل دیگر معادله فوق هندسی همزن بصورت زیر است

$$x^{1-c} F(a+1-c; 2-c; x)$$

بنابراین معادله زیر را بنویسیم

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1/2 - x) \frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$\begin{aligned} y &= e^x (C_1 + C_2 \sqrt{x}) + C_1 F(1; 1/2; x) - C_1 e^x \\ &= C_1 F(1; 1/2; x) + C_2 \sqrt{x} e^x \end{aligned}$$

$$\text{Res} [\Gamma(z), z = -n] = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$z \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} d(t^z) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \Gamma(z+1)$$

$$\therefore \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad \text{Re}(z) > -1, z \neq 0$$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \quad \text{Re}(z) > -2, z \neq 0, -1$$

⋮

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad \text{Re}(z) > -n-1, z \neq 0, -1, -2, \dots, -n$$

"تابع گاما"

$$(i) \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{Re}(z) > 0$$

$$\Gamma(1-z) = \int_0^\infty e^{-s} s^{-z} ds \quad \text{Re}(z) < 1$$

$$\therefore \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} t^{z-1} s^{-z} dt ds$$

$$0 < \text{Re}(z) < 1$$

Gamma Function

"تابع گاما"

$$\Gamma(z) \triangleq \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \& \quad \text{Re}(z) > 0$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + E(z)$$

✓ E(z) تابع انتگرالی است.

$$E(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\text{Entire Function})$$

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

$$\therefore \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + E(z)$$

تابع $\Gamma(z)$ در همه نقاط صافی است به جز نقاط

$$z = -n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

تکلیلی است در این نقاط قطب ساده دارد.

نتیجه: تابع $\Gamma(z)$ فاقد صفر در صفحه قطعه است. لذا $1/\Gamma(z)$ تابع تافا است.
(تابع تافا تابعی است که قطب ندارد باشد)

$$a) \quad 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z) \quad 2z \neq 0, -1, -2, \dots$$

"Legendre's Duplication Formula" — بنا بر رابطه دوگان در صورتی که
رابطه دوگان برای صورتی که

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

$$\Gamma(z+1/2) = \int_0^\infty e^{-s} s^{z-1/2} ds \quad \operatorname{Re}(z) > -1/2$$

$$\Gamma(z) \Gamma(z+1/2) \cdot 2^{2z-1} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+s)} (2\sqrt{st})^{2z-2} 2s^{1/2} dt ds$$

با تغییر متغیر از صحنه st به $\alpha\beta$ بهر

$$s = \alpha^2$$

$$t = \beta^2$$

$$A = \Gamma(z) \Gamma(z+1/2) 2^{2z-1} = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-2} \beta^2 \alpha d\alpha d\beta$$

با تغییر متغیر از صحنه st به u, v بهر

$$\begin{cases} u = s+t & u \in [0, \infty) \\ v = t/s & v \in [0, \infty) \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -t/s & 1/s \end{vmatrix} = 1/s + t/s^2 = \frac{t+s}{s^2}$$

$$ds dt = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right|^{-1} du dv = \frac{s^2}{t+s} du dv$$

$$\therefore \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} v^{z-1} \frac{s}{t+s} du dv$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} \frac{v^{z-1}}{v+1} du dv \quad \& \quad 0 < \operatorname{Re}(z) < 1$$

$$= \left(\int_0^\infty e^{-u} du \right) \left(\int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{v+1} dv \right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{v+1} dv$$

$$= \pi / \sin \pi z \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\therefore A = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \exp[-u^2 - 2v] (2v)^{2x-1} du dv \quad (2v \rightarrow v)$$

$$= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v)} v^{2x-1} du dv$$

$$= \left(2 \int_0^\infty e^{-u^2} du \right) \left(\int_0^\infty e^{-v} v^{2x-1} dv \right)$$

$$= \sqrt{\pi} \Gamma(2x)$$

"مشتق تابع"

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$$

$$\dot{\Gamma}: x=n \text{ (عدد صحیح)} : \frac{\Gamma'(n+1)}{n!} = \frac{\Gamma'(n)}{(n-1)!} + \frac{1}{n}$$

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{n!} = \Gamma'(1) + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}_{h_n} = \Gamma'(1) + h_n$$

$$\Gamma'(n+1) = n! (\Gamma'(1) + h_n)$$

$$A = 8 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha^2 + \beta^2)} (2\alpha\beta)^{2x-2} (\alpha+\beta) d\alpha d\beta$$

از طرفی می دانیم که:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \quad F(\alpha, \beta) = F(\beta, \alpha)$$

$$= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty F(\alpha, \beta) d\beta d\alpha$$

در نتیجه

$$A = \text{حاصل اشتراک} = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha^2 + \beta^2)} (2\alpha\beta)^{2x-2} (\alpha+\beta) d\beta d\alpha$$

$$\begin{cases} u = \alpha - \beta & u \in [0, \infty) \\ v = 2\alpha\beta & v \in [0, \infty) \end{cases}$$

با تغییر متغیر

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = 2(\alpha + \beta)$$

$$d\alpha d\beta = \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \frac{1}{2(\alpha + \beta)} du dv$$

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z$$

$$\therefore G(z) \cdot G(1-z) = \sin \pi z / \pi$$

$$G'(z) G(1-z) - G(z) G'(1-z) = \cos \pi z$$

المتغير لا بد من متغير تابع

المتغير لا بد من متغير تابع

$$G'(-m) \cdot G(m+1) = (-1)^m$$

$$G'(-m) = (-1)^m \cdot m! \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{G'(z+1)}{G(z+1)} = \frac{G'(z)}{G(z)} - \frac{1}{z}$$

$$\frac{G'(n+1)}{G(n+1)} = \frac{G'(n)}{G(n)} - \frac{1}{n}$$

$$n! G'(n+1) = (n-1)! G'(n) - 1/n$$

$$h_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n \quad \& \quad h_0 = 0$$

$$n! G'(n+1) = (n-1)! G'(n) - 1/n \Rightarrow (F(n) = F(n-1)) = F(1)$$

$$\therefore n! G'(n+1) + h_n = G'(1) = \gamma \quad \underline{\gamma} \triangleq G'(1)$$

"عكس تابع" G

$$G(z) = 1/\Gamma(z)$$

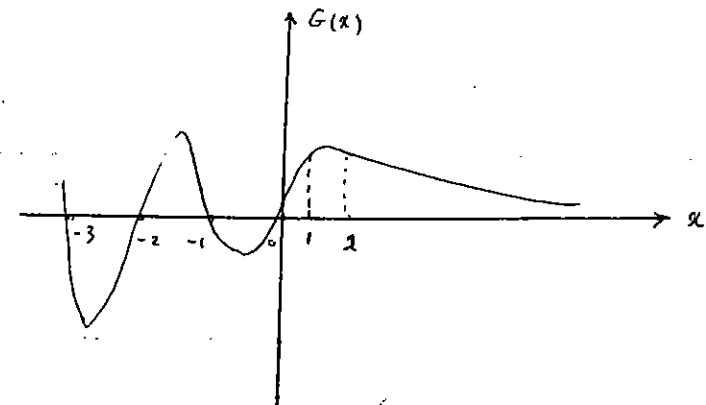
$$G(-m) = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$G(z)$ تابع ناكس

$$G(n+1) = 1/\Gamma(n+1) = 1/n!$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^n dt = n \Gamma(n)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \rightarrow \Gamma(n+1) = n!$$



$$z \Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

$$\therefore G(z+1) = G(z)/z$$

Digamma Function

تابع دایگاما

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = - \frac{G'(z)}{G(z)}$$

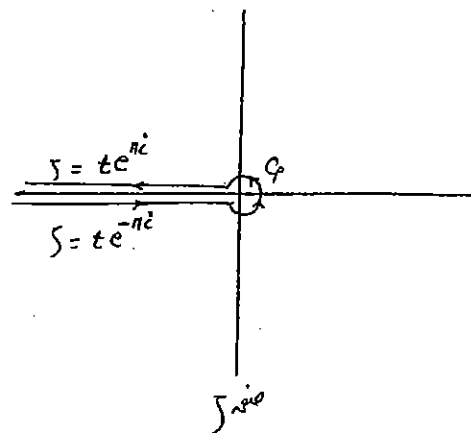
تابع دایگاما، تصویر متعلق به تابع گاما تعریف می شود

$$\psi(n+1) = h_n - \gamma \quad (\gamma = 0.5772156649 \dots)$$

$$\therefore G'(n+1) = \frac{-\psi(n+1)}{n!}$$

$$G'(n+1) = \frac{1}{n!} (\gamma - h_n)$$

$$n=0, 1, 2, \dots$$



برای آنکه مقدار انتگرال بی حد و وقتی که $\rho \rightarrow 0$ ، منبسط شود، $\text{Re } z < 1$ فرض می‌کنیم.

$$I = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_0^\infty e^{-t} t^{-z} e^{-n\pi i(1-z)} dt + \int_0^\infty e^{-t} t^{-z} e^{n\pi i(1-z)} dt \right\}$$

$$I = \frac{e^{n\pi i} - e^{-n\pi i}}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-t} t^{-z} dt \quad \text{Re}(z) < 1$$

$$\therefore I = \frac{\sin \pi z}{\pi} \Gamma(1-z) = \frac{1}{\Gamma(z)} = G(z)$$

$$G(-m) = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

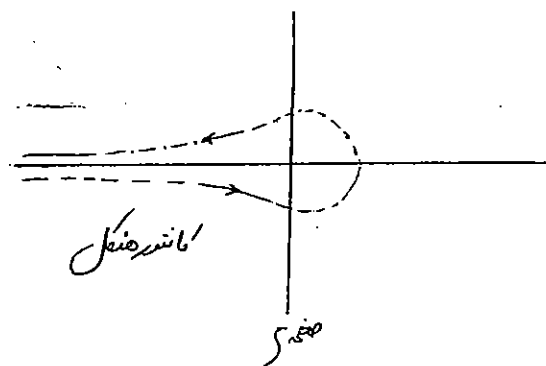
$$G(n+1) = 1/n!$$

$$G'(-m) = (-1)^m m! \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$G'(n+1) = 1/n! (\gamma - h_n) \quad \gamma = 0.57721$$

نمایش انتگرالی برای تابع $G(z)$ بصورت زیر است

$$G(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{\zeta} \zeta^{-z} d\zeta$$



$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{\zeta} \zeta^{-z} d\zeta$$

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} [h_N - \ell_N(N+1)] = 0.57721$$

$$\gamma = G'(1) = -P'(1)$$

$$P(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$P'(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \ln t \cdot dt$$

$$\therefore \gamma = - \int_0^\infty e^{-t} \ln t \cdot dt$$

حال با توجه به اینکه تابع $G(z)$ تابع تابع است و بی نهایت ضرایب دارد
بی نهایت ضرایب آن را ضرب در بی نهایت جمله می‌گیریم.

$$f(z) = f(0) \exp\left(\frac{f'(0)}{f(0)} z\right) \prod_k \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{z/a_k}, \quad f(0) \neq 0$$

$$f(z) \triangleq G(z+1)$$

$$G(z+1) = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} = \frac{1}{\Gamma(z+1)}$$

$$G(z) = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + z/n\right) e^{-z/n}, \quad \gamma = G'(1)$$

$$1 = e^{\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-1/n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e^{\gamma} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N e^{-1/n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$0 = \gamma + \ln \left\{ e^{-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N})} \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{N}\right) \right\}$$

$$\therefore \gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} - \ln(N+1) \right\}$$

$$J_n''(z) = \frac{(z/2)^n}{2\pi i} \int_C e^{t - \frac{z^2}{4t}} \left\{ \frac{n^2 - n}{z^2} - \frac{n}{t} - \frac{1}{2t} + \frac{z^2}{4t^2} \right\} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

$$J_n''(z) + \frac{1}{z} J_n'(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) J_n(z) =$$

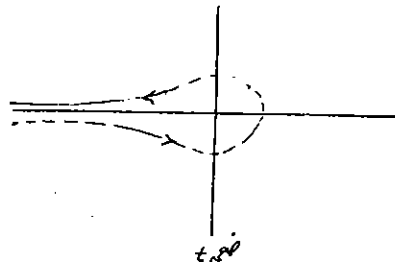
$$\frac{(z/2)^n}{2\pi i} \int_C e^{t - \frac{z^2}{4t}} \left\{ \frac{n^2 - n}{z^2} - \frac{1}{2t} - \frac{n}{t} + \frac{z^2}{4t^2} + \frac{n}{z^2} - \frac{1}{2t} + 1 - \frac{n^2}{z^2} \right\} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

$$= \frac{(z/2)^n}{2\pi i} \int_C e^{t - \frac{z^2}{4t}} \left\{ 1 - \frac{n+1}{t} + \frac{z^2}{4t^2} \right\} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

$$= \frac{(z/2)^n}{2\pi i} \int_C \frac{d}{dt} \left[e^{t - \frac{z^2}{4t}} \frac{1}{t^{n+1}} \right] dt$$

$$= 0 \quad \text{بنا به این که در صحنه 1}$$

$$J_\nu(z) \triangleq \frac{(z/2)^\nu}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(\infty)} e^{t - \frac{z^2}{4t}} \frac{dt}{t^{\nu+1}} \quad , z, \nu \in \text{Complex}$$



Bessel's Function

"تابع بسل"

تابع بسل اول: تابع معادله تابع بسل بصورت زیر است:

$$e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n \quad \text{برای } |t| < 1$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

که در اینجا فرض می‌کنیم که z یک عدد حقیقی باشد. تابع $J_n(z)$ تابع بسل اول است. حال تابع بسل صفر را می‌بینیم.

$$\frac{z\zeta}{2} = t \quad , \quad \zeta = \frac{2t}{z}$$

$$\therefore J_n(z) = \frac{(z/2)^n}{2\pi i} \int_C e^{t - \frac{z^2}{4t}} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

بنابراین مشتقات تابع بسل داریم:

$$J_n'(z) = \frac{(z/2)^n}{2\pi i} \int_C e^{t - \frac{z^2}{4t}} \left\{ \frac{n}{z} - \frac{z}{2t} \right\} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

$$J_n''(z) = \frac{(z/2)^n}{2\pi i} \int_C e^{t - \frac{z^2}{4t}} \left\{ \frac{n^2}{z^2} - \frac{n}{2t} - \frac{n}{2t} + \frac{z^2}{4t^2} - \frac{n}{z^2} - \frac{1}{2t} \right\} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

$$y: \nu = n \text{ (مستقیم)} \rightarrow G(n+k+1) = 1/(k+n)!$$

$$\therefore J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n)!} (z/2)^{2k+n} \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

عبارت مثال $J_{1/2}(z)$ را در نظر بگیرید:

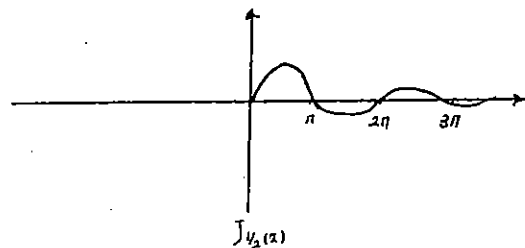
$$J_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} G(k+3/2) (z/2)^{2k+1/2}$$

با استفاده از رابطه زیر می‌توان نوشت:

$$2^{2k+1} \cdot k! \Gamma(k+3/2) = \sqrt{\pi} (2k+1)!$$

$$\therefore J_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{\sqrt{\pi} (2k+1)!} (z/2)^{2k+1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$$



$J_\nu(z)$ با عریف انفرم معادله بسل مرتبه ν می‌باشد.

$$J_\nu'' + \frac{1}{z} J_\nu' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_\nu = 0$$

J_ν در حل معادله بسل مرتبه ν است. معادله اندکی تابع بسل J_ν و $J_{-\nu}$ است.

$$e^{-z^2/4t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z/2)^{2k} / t^k$$

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0^+)} e^t \cdot t^{-\nu-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(z/2)^{2k}}{t^k} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z/2)^{2k+\nu} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0^+)} e^t \cdot t^{-\nu-k-1} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} G(k+\nu+1) \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$\therefore J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} (z/2)^{2k+\nu}$$

$J_\nu(z)$ عبارت از تابعی از z در $z=0$ است. تابعی از z در $z=0$ است.

$$z^{-\nu} J_{\nu}(z) = \frac{1}{2^{\nu+1} \pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{t - z^2/4t} \frac{dt}{t^{\nu+1}}$$

$$\frac{d}{dz} (z^{-\nu} J_{\nu}(z)) = \frac{-z/2}{2^{\nu+1} \pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{t - z^2/4t} \frac{dt}{t^{\nu+2}}$$

$$= -z^{\nu} J_{\nu+1}(z)$$

$$z^{-\nu} J'_{\nu}(z) - \nu z^{-\nu-1} J_{\nu}(z) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)$$

$$J'_{\nu}(z) = \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) - J_{\nu+1}(z)$$

$$J'_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z)$$

$$= \frac{1}{2} (J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z))$$

$$\frac{d}{dz} (z^{\nu} J_{\nu}(z)) = z^{\nu} J'_{\nu}(z) + \nu z^{\nu-1} J_{\nu}(z)$$

$$= z^{\nu} J_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{d}{dz} J_0(z) = -J_1(z), \quad \frac{d}{dz} (z J_1(z)) = z J_0(z)$$

با تابع مشابهی توان $J_{-\nu/2}(z)$ را نیز بدست آوردیم

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$$

رابطه استثنائی در شکل زیر

$$J_{\nu}(z) = \frac{(z/2)^{\nu}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{t - z^2/4t} \frac{dt}{t^{\nu+1}}$$

$$\int_{-\infty}^{(0+)} \frac{d}{dt} \left\{ e^{t - z^2/4t} \frac{1}{t^{\nu}} \right\} dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{(0+)} e^{2(t - z^2/4t)} \left\{ e^{-(t - z^2/4t)} \right\} \left(1 + \frac{z^2}{4t^2} - \frac{\nu}{t} \right) \frac{dt}{t^{\nu}} = 0$$

را با فرض $(z/2)^{\nu-1} / 2\pi i$ ضرب می کنیم

$$J_{\nu-1}(z) - \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z) + J_{\nu+1}(z) = 0$$

تابع بسل نوع اول

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2}) y = 0$$

اگر ν عدد صحیح باشد در این صورت J_ν و $J_{-\nu}$ حلهای معادله بسل هستند.
در این صورت تابع بسل نوع دوم را می‌نویسند:

$$Y_\nu(z) \triangleq \frac{G(\nu, \nu) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{2 \sin \nu \pi}$$

دقتی در عدد صحیح نسبت $Y_\nu(z)$ ترکیبی نوعی از J_ν است، در نتیجه حل معادله بسل عبارت از آن:

$$y = c_1 J_\nu(z) + c_2 Y_\nu(z)$$

حال اگر $\nu = n$ عدد صحیح باشد Y_n عبارت از $\frac{1}{\pi}$ درجه ای است که با استعاره از قانون هورستال داریم:

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right)_{\nu=n}$$

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} G(k+\nu+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} G(k-\nu+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}$$

تابع بسل از نوع دوم:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} G(k+\nu+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

اگر $\nu = -n$ (عدد صحیح) باشد در این صورت:

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} G(k-n+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} G(k-n+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(n+m)!} G(m+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}$$

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}$$

$$= (-1)^n J_n(z)$$

لذا اگر ν عدد صحیح باشد J_n و J_{-n} استقلال ندارند و نمی‌توان حل معادله بسل را به صورت ترکیبی آن‌ها نوشت.

$$+ (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ G'(k+n+1) + G(k+n+1) \ell_n \frac{z}{2} \right\} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n}$$

$$\therefore G'(-m) = (-1)^m \cdot m! \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} n Y_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n)!} \left\{ \delta - h_{k+n} + \ell_n \frac{z}{2} \right\} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+n} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+n)! k!} \left\{ \delta - h_k + \ell_n \frac{z}{2} \right\} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n)!} \left\{ 2\delta - h_{k+n} - h_{k+2} \ell_n \frac{z}{2} \right\} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+n} \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n)!} \left\{ 2 \ell_n \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right\} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+n} \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n Y_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ G'(k+n+1) + G(k+n+1) \ell_n \frac{z}{2} \right\} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+n} \\ &\quad + (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ G'(k-n+1) + G(k-n+1) \ell_n \frac{z}{2} \right\} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} \end{aligned}$$

$$n/2 Y_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ G'(k+1) + G(k+1) \ell_n \frac{z}{2} \right\} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k}$$

از طرفی می دانیم

$$G'(k+1) = 1/k! (\delta - h_k)$$

$$G(k+1) = 1/k!$$

و داریم

$$Y_n(z) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} (\delta - h_k + \ell_n \frac{z}{2}) \left(\frac{z}{2} \right)^{2k}$$

یا بصورت تابع

$$Y_n(z) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\ell_n \frac{z}{2} - \psi(k+1) \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2k}$$

$$\begin{aligned} n Y_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n)!} (\delta - h_{k+n} + \ell_n \frac{z}{2}) \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+n} + \\ &\quad + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} G'(k-n+1) \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} + \end{aligned}$$

توان تابعی Y_0 و Y_n در نقطه $z \sim 0$ بصورت $\frac{2}{n} \ln \frac{z}{2}$ است.

$$z \sim 0 \quad Y_0(z) \sim \frac{2}{n} \ln \frac{z}{2}$$

$$z \sim 0 \quad Y_n(z) \sim - (n-1)! / n \cdot (z/2)^{-n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

حل کامل معادله بسل:

$$Y = c_1 J_0(z) + c_2 Y_0(z)$$

چنانچه z در صفر نباشد. حل کامل معادله بسل را می توان به شکل زیر نوشت.

$$Y = c_1 J_0(z) + c_2 J_{-0}(z)$$

رابطه انتگرالی در مشتق از مشتق تابع Y_0

$$Y_{0-1}(z) - \frac{2}{z} Y_0(z) + Y_{0+1}(z) = 0$$

$$\frac{d}{dz} (z^{-1} Y_0(z)) = -z^{-1} Y_{0+1}(z)$$

$$\frac{d}{dz} (z^1 Y_0(z)) = z^1 Y_{0-1}(z)$$

$$Y_0'(z) = Y_{0-1}(z) - \frac{1}{z} Y_0(z) = \frac{1}{z} Y_0(z) - Y_{0+1}(z)$$

"توابع هسکل"

$$H_0^{(1)}(z) = H_0^{(2)}(z) \triangleq J_0(z) + i Y_0(z)$$

$$H_0^{(2)}(z) = H_0^{(1)}(z) \triangleq J_0(z) - i Y_0(z)$$

در این صورت حل کامل معادله بسل را می توان بصورت زیر نوشت

$$Y = c_1 H_0^{(1)}(z) + c_2 H_0^{(2)}(z)$$

توابع بسل نوع اول در اینجا در "توابع هسکل" (اصطلاحاً) توابع استاندارد این گونه می نامیم. که رابطه انتگرالی افسیر در رابطه بین مشتقات از مشتقات این توابع برقرار است.

"توابع هسکل"

اگر معادله بسل را بصورت زیر بنویسیم

$$Y'' + \frac{1}{z} Y' + \left(\lambda^2 - \frac{Y^2}{z^2} \right) Y = 0$$

حل معادله فوق $J_0(\lambda z)$ و $Y_0(\lambda z)$ است که از آنجا $\lambda = i$

$$Y'' + \frac{1}{z} Y' - \left(1 + \frac{Y^2}{z^2} \right) Y = 0 \quad \text{معادله}$$

حاصل می شود که آنرا معادله بسل می نامیم

Modified Bessel's Eq.

$$I_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{\sqrt{\pi} (2k+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2} \quad \text{از اینجاست}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z$$

$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh z$$

در معادله تبدیل بفرمول $\nu = n$ و $\nu = -n$ قرار دهیم؛ پس از اینجاست I_{-n} و I_n را بدست می آوریم

$$I_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G(k-n+1)}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{G(k-n+1)}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

$$= I_n(z)$$

در فصل بیست و دوم به تابع مستقل به تابع تبدیل فرمول های بالا

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} G(k+\nu+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

تابع تبدیل نوع اول

$$I_\nu(z) \triangleq e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(e^{i\pi/2} z)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G(k+\nu+1)}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = 1 + \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \dots$$

$$I_0(z) = 1 + \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \dots$$

$$I_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G(k+3/2)}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$$

$$2^{2k-1} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$$

$$2^{2k+1} k! \Gamma(k+3/2) = \sqrt{\pi} (2k+1)!$$

$$\frac{d}{dz} [z^{-\nu} I_{\nu}(z)] = z^{-\nu} I_{\nu+1}(z)$$

$$\frac{d}{dz} [z^{-\nu} K_{\nu}(z)] = -z^{-\nu} K_{\nu+1}(z)$$

$$I_{\nu-1}(z) - \frac{2\nu}{z} I_{\nu}(z) + I_{\nu+1}(z) = 0$$

$$K_{\nu-1}(z) + \frac{2\nu}{z} K_{\nu}(z) - K_{\nu+1}(z) = 0$$

$$I_{\nu}(z) \triangleq e^{-i\nu\pi/2} J_{\nu}(e^{i\pi/2} z)$$

$$K_{\nu}(z) \triangleq \frac{1}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_{\nu}(z)}{\sin \nu\pi}$$

تابع بessel نوع دوم

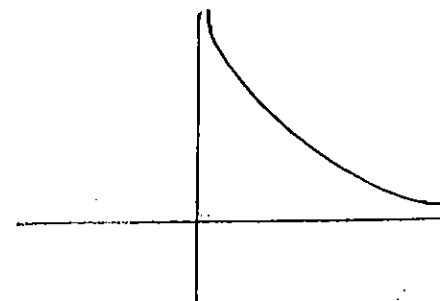
$$K_{\nu}(z) \triangleq \frac{1}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_{\nu}(z)}{\sin \nu\pi}$$

$$K_n(z) \triangleq \lim_{\nu \rightarrow n} K_{\nu}(z)$$

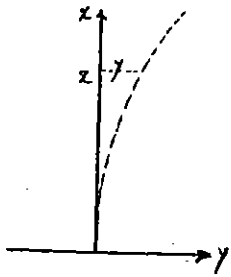
$$K_{1/2}(z) = \frac{1}{2} \frac{\cosh z - \sinh z}{\sin \pi/2} \sqrt{\frac{2}{\pi z}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-z} = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$$

$$\therefore K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$



مسئله کاهش یک ستون تحت اثر وزن خودش



معادله دینامیک = $EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -\rho (L-x) \frac{dy}{dx}$

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$ $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=L} = 0$

$L-x = z$

$EI \frac{d^3 y}{dz^3} = -\rho z \frac{dy}{dz}$

$\frac{dy}{dz} = u \rightarrow \frac{d^2 u}{dz^2} + k^2 z u = 0$ $k^2 = \rho/EI$

$u(z=L) = 0$

$\frac{du}{dz}(z=0) = 0$

"معادله قابل تفکیک به معادله بسل"

$(x^r y')' + (ax^s + bx^{r-2})y = 0$

فرض : $(1-r)^2 \gg 4b$

به جزء در مواردی که معادله فوق به معادله اولیه تبدیل می شود (مثلاً $s=2, r=0$) معادله فوق بصورت زیر است

$y = x^2 [c_1 J_\alpha(\lambda x^2) + c_2 Y_\alpha(\lambda x^2)]$

$\alpha = (1-r)/2$

$\lambda = (2-s+r)/2$

$\lambda = 2\sqrt{a}/(2-r+s)$

$\nu = \sqrt{(1-r)^2 - 4b}/(2-r+s)$

چنانچه $a < 0$ به جای J_ν و Y_ν : K_ν قرار می دهیم.

اگر ν عدد غیر صحیح باشد به جای J_ν و Y_ν می توانیم از J_ν استفاده کنیم

$$(L)_{cr} = \frac{7.837 EI}{L^2}$$

$$r = 0$$

$$\alpha = \frac{1-r}{2} = 1/2$$

$$b = 0$$

$$\gamma = (2 - r + s)/2 = 3/2$$

$$q = k^2$$

$$\lambda = 2k/3$$

$$s = 1$$

$$\nu = 1/3$$

$$u(z) = \sqrt{z} \left[c_1 J_{1/3} \left(\frac{2k}{3} z^{3/2} \right) + c_2 J_{-1/3} \left(\frac{2k}{3} z^{3/2} \right) \right]$$

$$J_{1/3} \left(\frac{2k}{3} z^{3/2} \right) \approx z^{1/2} \quad \sqrt{z} J_{1/3} \left(\frac{2k}{3} z^{3/2} \right) \approx z$$

$$J_{-1/3} \left(\frac{2k}{3} z^{3/2} \right) \approx z^{-1/2} \quad \sqrt{z} J_{-1/3} \left(\frac{2k}{3} z^{3/2} \right) \approx 1$$

$$c_1 = 0$$

باقوم به انکه $\frac{du}{dz}(z=0) = 0$ نتیجه می گیریم:

$$u(z) = c_2 \sqrt{z} J_{-1/3} \left(\frac{2k}{3} z^{3/2} \right)$$

$$J_{-1/3} \left(\frac{2k}{3} L^{3/2} \right) = 0$$

اولین ریشه متفاوت عبارت است از

$$J_{-1/3}(z) = 0 \quad z = 1.866$$

"توانع ایری"

$$(Airy) : y'' - xy = 0 \quad \text{معادله ایری}$$

$$\alpha = -1 \quad y = c_1 A_1(x) + c_2 B_1(x)$$

حل معادله فوق بر حسب توانع زیر است

$$\sqrt{x} I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right), \quad \sqrt{x} I_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right)$$

$$A_i(x) \triangleq \frac{1}{3} \sqrt{x} \left[I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) - I_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right] \quad \text{توانع ایری نوع اول}$$

$$B_i(x) \triangleq \sqrt{x/3} \left[I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) + I_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right] \quad \text{توانع ایری نوع دوم}$$

$$A_i(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{x/3} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right)$$

"توانع شرینگر"

$$\text{مسئله شرینگر لیبیل : (Sturm - Liouville)}$$

تعریف : معادله دیفرانسیل عادی شرینگر

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda p(x)) y = 0$$

که در آن توانع حقیقی p, r, q در بازه $[x_1, x_2]$ پیوسته بوده و r, p در این بازه مثبت هستند و $y(x)$ در شرایط مرزی زیر

$$A_i y(x_i) - B_i y'(x_i) = 0 \quad i=1,2$$

$$A_i^2 + B_i^2 \neq 0$$

صدق می کند. سبب مسئله شرینگر لیبیل عادی خوانده می شود. (از آنجا که λ مقدار درجه آن است که از آنجا که λ مقدار درجه آن است، با مثال شرایط مرزی طبیعی برای مقادیر λ بیست می آوریم که

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$$

$$\begin{cases} A_1 y_m(x_1) - B_1 y'_m(x_1) = 0 \\ A_1 y_n(x_1) - B_1 y'_n(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow W(y_m, y_n) \Big|_{x=x_1} = 0$$

$$\begin{cases} A_2 y_m(x_2) - B_2 y'_m(x_2) = 0 \\ A_2 y_n(x_2) - B_2 y'_n(x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow W(y_m, y_n) \Big|_{x=x_2} = 0$$

$$\therefore \int_{x_1}^{x_2} P(x) y(\lambda_m x) y(\lambda_n x) dx = 0 \quad m \neq n$$

در این حالت، متدهای حالت کلی مطرح می شود

$$f(x) = \sum C_m y(\lambda_m x)$$

$$C_m = \frac{\int_{x_1}^{x_2} P(x) f(x) y(\lambda_m x) dx}{\int_{x_1}^{x_2} P(x) y^2(\lambda_m x) dx}$$

نکته: اگر $W(x) \neq 0$ و یا حالت دیگر باشد، متدها
استفاده از تبدیلی غیر خطی نامیده می شود.

در $\lambda_n \rightarrow \infty$ وقتی که $n \rightarrow \infty$ را می بینیم، اگر متدهای حالت نامتناهی را در نظر بگیریم، $y(\lambda_m x)$ به نام $y(\lambda x)$ می نویسند.

$$\{y(\lambda_1 x), y(\lambda_2 x), \dots, y(\lambda_m x), \dots\}$$

در این حالت $[x_1, x_2]$ نسبت به تابع وزن $P(x)$ متعامد است.

$$\lambda = \lambda_m \quad y = y(\lambda_m x) = y_m$$

$$y_m \{ (r y'_m)' + (q + \lambda_m p) y_m = 0 \}$$

$$\lambda_m \neq \lambda_n$$

$$y_n \{ (r y'_n)' + (q + \lambda_n p) y_n = 0 \}$$

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) P y_m y_n &= y_m (r y'_n)' - y_n (r y'_m)' \\ &= \frac{d}{dx} \{ r (y_m y'_n - y_n y'_m) \} \\ &= \frac{d}{dx} \{ r W(y_m, y_n) \} \end{aligned}$$

$$\therefore (\lambda_m - \lambda_n) \int_{x_1}^{x_2} P y_m y_n dx = [r W(y_m, y_n)]_{x_1}^{x_2}$$

نسبت به تابع وزن $p(x) = x$ - شکل مجعده متعادلی دارند

$$\int_{x_1}^{x_2} x \gamma_D(\lambda_m x) \gamma_D(\lambda_n x) dx = 0 \quad m \neq n$$

که $\gamma_D(\lambda_m x)$ مرتب از توابع $J_D(\lambda_m x)$ ، $Y_D(\lambda_m x)$ ، $H_D^{\pm}(\lambda_m x)$ می تواند باشد.
 چنانچه $x_1 = 0$ باشد در اینصورت در x_1 نیازی به شرط مرزی نداریم، و این
 از لحاظ فیزیکی بیان مناسبی که مرتب $\gamma_D(\lambda_m x)$ مناسب می باشد.

توابع بل نه اول، نه دوم و توابع شکل را توابع استاندارد می گویند؛ اگر توابع استاندارد
 ۱ با $C_D(\lambda_m x)$ ، $D_D(\lambda_m x)$ نشان دهیم، یا به تعبیر دیگر می توانیم بگوییم:

$$\int_{x_1}^{x_2} x C_D(\lambda_m x) D_D(\lambda_n x) dx = 0 \quad m \neq n$$

و ما نیاز به یک استرال زیر را داریم

$$\int_{x_1}^{x_2} x C_D(\lambda_m x) D_D(\lambda_n x) dx = ?$$

نتیجه:

۱. اگر $r(x_1) = 0$ و $r(x_2) \neq 0$ در $x = x_1$ نیازی به شرط مرزی نداریم.

۲. اگر $r(x_2) = 0$ و $r(x_1) \neq 0$ در $x = x_2$ نیازی به شرط مرزی نداریم.

چنانچه $r(x)$ در x_1 یا x_2 صفر نباشد و یا $r(x)$ در x_1 و x_2
 صفر نباشد. مسئله را به استوار تبدیل می کنیم.

حال معادله بسل را در فرم دیگر بنویسیم:

$$x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y = 0$$

$$\frac{d}{dx} (x y') + \left(-\frac{\nu^2}{x} + \lambda^2 x\right) y = 0$$

$$r(x) = x$$

$$z(x) = -\nu^2/x$$

$$p(x) = x$$

حل معادله بسل در بازه $0 < x_1 < x_2$ تحت شرایط مرزی:

$$A_i \gamma_D(\lambda x_i) - B_i \gamma_D'(\lambda x_i) = 0$$

$$A_i^2 + B_i^2 \neq 0$$

$$D'_p = p/x D_p - \lambda_n D_{p+1}$$

$$\begin{aligned} C_p D'_p - D_p C'_p &= C_p (p/x D_p - \lambda_n D_{p+1}) - D_p (p/x C_p - \lambda_m C_{p+1}) \\ &= p/x C_p D_p - \lambda_n C_p D_{p+1} - p/x D_p C_p + \lambda_m D_p C_{p+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda_m} [x (C_p D'_p - D_p C'_p)]_{\lambda_n = \lambda_m}^{x_2} = \frac{d}{d\lambda_m} [x (\lambda_m^* D_p C'_{p+1} - \lambda_n^* C_p D_{p+1})]_{\lambda_n = \lambda_m}^{x_2}$$

$$\frac{d}{d\lambda_m} C_{p+1}(\lambda_m x) = x C_p(\lambda_m x) - \frac{p+1}{\lambda_m} C_{p+1}(\lambda_m x)$$

$$\frac{d}{d\lambda_m} C_p(\lambda_m x) = \frac{p}{\lambda_m} C_p(\lambda_m x) - x C_{p+1}(\lambda_m x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda_m} [x (C_p D'_p - D_p C'_p)]_{\lambda_n = \lambda_m}^{x_2} = [x D_p(\lambda_m x) C_{p+1}(\lambda_m x) +$$

$$+ x \lambda_m D_p(\lambda_m x) (x C_p(\lambda_m x) - \frac{p+1}{\lambda_m} C_{p+1}(\lambda_m x))$$

$$- \lambda_m D_{p+1}(\lambda_m x) (p/\lambda_m C_p - x C_{p+1})]_{x_1}^{x_2}$$

$$(xy')' + (-p^2/x + \lambda^2 x) y = 0$$

$$\lambda = \lambda_m \quad y = C_p(\lambda_m x)$$

$$\lambda = \lambda_n \quad y = D_p(\lambda_n x)$$

$$(x C'_p)' + (-p^2/x + \lambda_m^2 x) C_p = 0$$

$$(x D'_p)' + (-p^2/x + \lambda_n^2 x) D_p = 0$$

از شرطین نتیجه میگیریم:

$$\begin{aligned} (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) x C_p D_p &= C_p \frac{d}{dx} [x D'_p] - D_p \frac{d}{dx} [x C'_p] \\ &= \frac{d}{dx} [x (C_p D'_p - D_p C'_p)] \end{aligned}$$

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_{x_1}^{x_2} x C_p D_p dx = [x (C_p D'_p - D_p C'_p)]_{x_1}^{x_2}$$

حال از شرطین رابطه انتگرال نسبت به λ_m مشتق میگیریم و $\lambda_n = \lambda_m$ قرار می‌دهیم

$$2 \lambda_m \int_{x_1}^{x_2} x C_p(\lambda_m x) D_p(\lambda_m x) dx = \frac{d}{d\lambda_m} [x (C_p D'_p - D_p C'_p)]_{\lambda_n = \lambda_m}^{x_2}$$

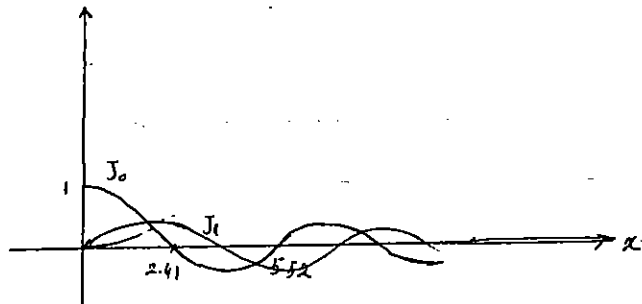
$$C'_p = \frac{p}{x} C_p - \lambda_m C_{p+1}$$

درستی نتایج

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_n(x)/x^n = \frac{1}{2^n n!}$$

از انتیجی می بینیم که در $x=0$ مرتبه n (مرتبه مضاعف مرتبه n)
 $J_0(0) = 1$ است. $(n=1, 2, \dots)$



$$J_0(x) = 0 \quad x = 2.41, 5.52, 8.65, 11.79, \dots$$

$$J_1(x) = 0 \quad x = 0, 3.83, 7.82, 10.17, 13.23, \dots$$

$$J_2(x) = 0 \quad x = 0, x=0, x=5.14, x=8.42, x=11.62, x=14.80, \dots$$

هر تابع بلی دارای ریشه های مابین درستی تابع بلی متقابل خود دارد

$$= [x D_p C_{p+1} + x^2 \lambda_m C_p D_p - x D_p C_{p+1} - x D_p C_{p+1} - x D_p C_{p+1} + x^2 \lambda_m C_{p+1} D_{p+1}]_{x_1}^{x_2}$$

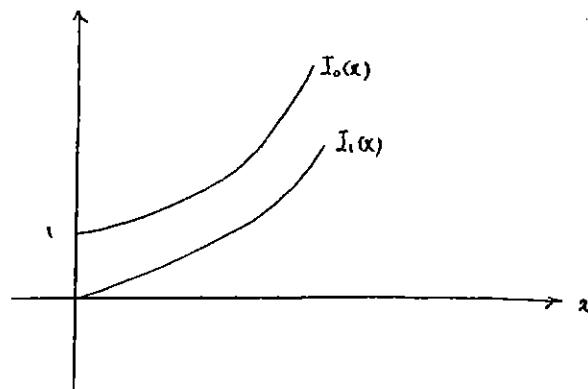
$$\therefore \int_{x_1}^{x_2} x C_p(\lambda_m x) D_p(\lambda_m x) dx = \left[\frac{x^2}{2} (C_p D_p + C_{p+1} D_{p+1}) - \frac{p x}{2 \lambda_m} (C_p D_{p+1} + D_p C_{p+1}) \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\psi: C_p = D_p = J_p(\lambda_m x) \quad = \text{مثال}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} x J_p^2(\lambda_m x) dx = \left[\frac{x^2}{2} (J_p^2(\lambda_m x) + J_{p+1}^2(\lambda_m x)) - \frac{p x}{\lambda_m} J_p(\lambda_m x) J_{p+1}(\lambda_m x) \right]_{x_1}^{x_2}$$

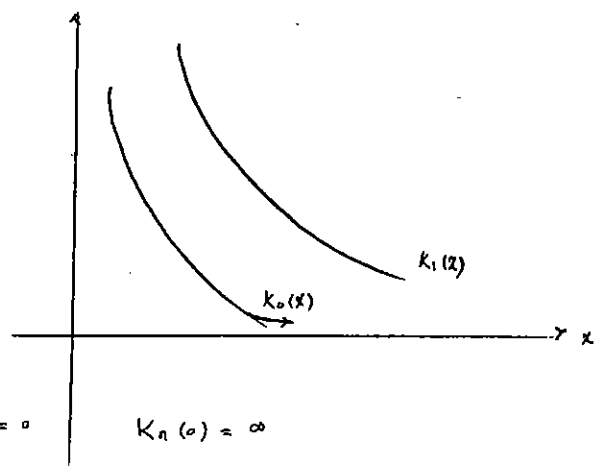
$$\int_{x_1}^{x_2} x C_p^2(\lambda_m x) dx = \left[\frac{x^2}{2} (C_p^2 + C_{p+1}^2) - \frac{p x}{\lambda_m} C_p C_{p+1} \right]_{x_1}^{x_2}$$

این روابط را به سبب C_p و $\frac{d}{dx} C_p$ نیز می توان نوشت



$$I_n(0) = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

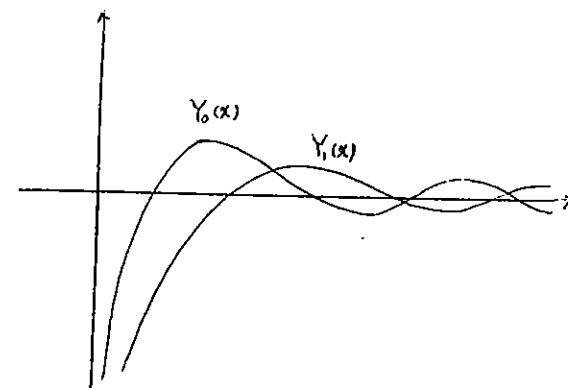
$$I_0(0) = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} K_n(x) = 0$$

$$K_n(0) = \infty$$

"WATSON"; "Bessel Functions";



$$Y_0(x) = 0 \quad x \approx 0.89, 3.96, 7.09, 10.22, \dots$$

$$Y_1(x) = 0 \quad x \approx 2.2, 5.43, 8.60, 11.75, \dots$$

$$Y_2(x) = 0 \quad x \approx 3.38, 6.79, 10.02, 13.21, \dots$$

$$J_0 \max = 1 \quad \text{at } x = 0$$

هناك مجموعتي دالتين بيسل من النوع الثاني هما $Y_0(x)$ و $Y_1(x)$ هما دالتان بيسل من النوع الثاني هما $Y_0(x)$ و $Y_1(x)$

$$J_1 \max = 0.58 \quad \text{at } x = 1.8$$

$$Y_0 \max = 0.52 \quad \text{at } x = 2.05$$

$$Y_1 \max = 0.42 \quad \text{at } x = 3.75$$

$$\int_1^2 x y_0(\lambda_n x) dx = C_n \int_1^2 x y_0^*(\lambda_n x) dx$$

$$T_{\text{ext}} = C_n \left\{ \frac{4}{2} \gamma_1^2 (2\lambda_n) - \frac{1}{2} \gamma_1^2 (\lambda_n) \right\}$$

$$\gamma_{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n} [2\gamma_1(2\lambda_n) - \gamma_1(\lambda_n)]$$

: জন্ম

$$\int x^p C_{p-1}(\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda} x^p C_p(\lambda x) + c.$$

$$\int x^{-\nu} C_{\nu+1}(\lambda x) dx = -1/\lambda x^{-\nu} C_{\nu}(\lambda x) + c.$$

$$\therefore C_n = \frac{2}{A_n} \cdot \frac{1}{2\gamma_1(2A_n) + \gamma_1(A_n)}$$

$$Y_1(\Lambda_0 x) = Y_0(\Lambda_n) J_1(\Lambda_n x) - J_0(\Lambda_n) Y_1(\Lambda_n x)$$

1. 1

در مثل فنیر یکی اگر عضو حفزه باشد در اینصورت تابع k از نظایب گیرند
اگر عضو حفزه نباشد در اینصورت I از نظایب گیرند

مثال - تابع $f(x) = 1$ را بر حسب توابع استاندارد ای مرتبه صفر که در $[1, 2]$ می باشد

$$y_0(Ax) = c_1 J_0(Ax) + c_2 Y_0(Ax)$$

$$\begin{cases} c_1 J_0(\lambda) + c_2 Y_0(\lambda) = 0 \\ c_1 J_0(2\lambda) + c_2 Y_0(2\lambda) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow J_0(\lambda) Y_0(2\lambda) - J_0(2\lambda) Y_0(\lambda) = 0 \quad \text{: معادلهٔ مسطح}$$

معادله فوق را برای n خاصیت $n=1$ تا $n=k$ را A_n نامیده ایم ($n=1, 2, \dots$)

$$f(x) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \gamma_n(\lambda_n x)$$

$$Y_0(A_n x) = Y_0(A_n) J_0(A_n x) - J_0(A_n) Y_0(A_n x)$$

$$R = c J_0(\lambda r)$$

$$J_0(\lambda a) = 0$$

$$\lambda_n = \alpha_n / a$$

که α_n صفرهای $J_0(x)$ است.

$$Z'' - \lambda_n^2 Z = 0$$

$$u = \sum u_n$$

$$u_n = [M_n \cosh(\lambda_n z) + N_n \sinh(\lambda_n z)] J_0(\lambda_n r)$$

$$\therefore u = \sum_{n=1}^{\infty} [M_n \cosh(\lambda_n z) + N_n \sinh(\lambda_n z)] J_0(\lambda_n r)$$

حال شرط مرزی را اعمال می‌کنیم

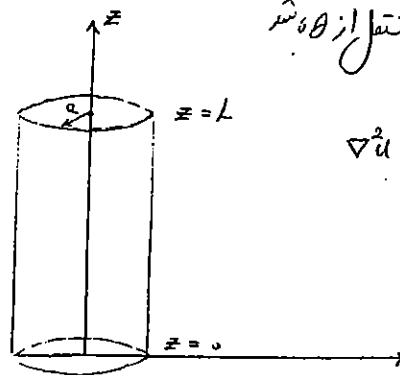
$$f_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n J_0(\lambda_n r)$$

$$f_2(r) = \sum_{n=1}^{\infty} [M_n \cosh(\lambda_n L) + N_n \sinh(\lambda_n L)] J_0(\lambda_n r)$$

$$\therefore M_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^a r f_0(r) J_0(\lambda_n r) dr$$

$$\therefore M_n \cosh(\lambda_n L) + N_n \sinh(\lambda_n L) = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^a r f_2(r) J_0(\lambda_n r) dr$$

مثال: "مسئله دیرید" - فرض کنید یک نوار نازک متناهی از θ است.



$$\nabla^2 u = 0 \quad \& \quad u, \quad \text{مسلک}$$

مسئله دیرید را می‌توانیم به دو مسئله با شرایط مرزی زیر تفکیک کنیم.

$$u|_{r=a} = 0 \quad \& \quad u(z=0) = f_0(r), \quad u(z=L) = f_2(r) \quad (I)$$

$$u|_{r=a} = F(z) \quad \& \quad u(z=0) = u(z=L) = 0 \quad (II)$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$u = R(r) \cdot Z(z) \rightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = - \frac{Z''}{Z}$$

برای حل مسئله (I)، ثابت جبری را برابر با $-\lambda^2$ انتخاب می‌کنیم و با توجه به (I)

"The Hankel Transform"

فرض کنید تابع $f(r)$ در بازه $[0, \infty)$ تعریف شده و در مرز $r=0$ و $r=\infty$ محدود باشد. تبدیل هانکل (نمودار هانکل) تابع $f(r)$ توسط رابطه:

$$\bar{f}(\lambda) = \int_0^\infty r f(r) J_0(\lambda r) dr$$

تعریف می شود که $J_0(x)$ تابع بی نوع اول از مرتبه 0 است.

$$f(r) = \int_0^\infty \lambda \bar{f}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

(مرجع: Special Function 'Lebedef')

(II)

برای حل مسئله در جهت z شرط مرزی هانکل است، لذا مسئله معادله درجه در این جهت داریم. لذا ثابت جبرانی A^2 انتخاب می کنیم

$$z'' + \lambda^2 z = 0 \quad z(0) = z(L) = 0 \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$rR'' + R' - r\lambda^2 R = 0$$

$$R = I_0(\lambda r)$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{I_0(\frac{n\pi}{L} r)}{I_0(\frac{n\pi}{L} a)} \sin \frac{n\pi}{L} z$$

$$u(r=a) = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin \frac{n\pi}{L} z$$

$$\therefore F_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin \frac{n\pi z}{L} dz$$

لذا حل کامل مسئله عبارت است از:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} [M_n \cosh(\lambda_n z) + N_n \sinh(\lambda_n z)] J_0(\lambda_n r) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{I_0(\frac{n\pi}{L} r)}{I_0(\frac{n\pi}{L} a)} \sin \frac{n\pi z}{L}$$

$$u(z=0) = u(z=L)$$

با توجه به تقارن معجزه

$$A(\lambda) = A(\lambda) \cosh(\lambda L) + B(\lambda) \sinh(\lambda L)$$

$$A(\lambda) = \frac{\sinh \lambda L}{1 - \cosh \lambda L} B(\lambda)$$

$$Z(z) = B(\lambda) \left[\frac{\sinh \lambda L}{1 - \cosh \lambda L} \cosh \lambda z + \sinh \lambda z \right]$$

$$u(r, z) = \int_0^\infty \lambda B(\lambda) \frac{\sinh \lambda z + \sinh \lambda (L-z)}{\sinh \lambda L} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$u(r, 0) = u(r, L) = f(r) = \int_0^\infty \lambda B(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

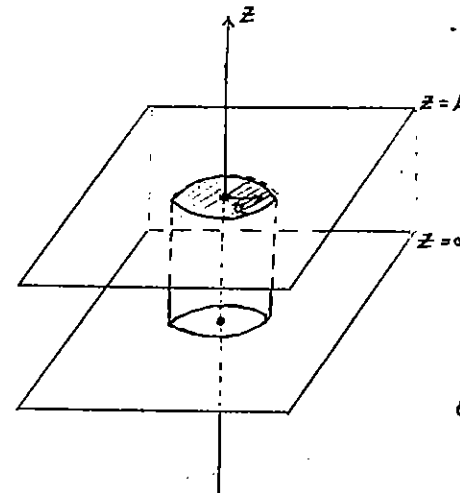
$Z(z)$ را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$Z(z) = \frac{\lambda B(\lambda)}{\sinh \lambda L} [\sinh \lambda z + \sinh \lambda (L-z)]$$

$$B(\lambda) = \int_0^\infty r f(r) J_0(\lambda r) dr = u_0 \int_0^a r J_0(\lambda r) dr$$

$$= \frac{u_0}{\lambda} [r J_1(\lambda r)]_{r=0}^a = \frac{u_0 a}{\lambda} J_1(\lambda a)$$

مثال: سطله‌ای که در زیر را حل کنید.



$$\nabla^2 u(r, z) = 0$$

$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq z < L$$

$$u(r, 0) = u(r, L) = \begin{cases} u_0 & 0 \leq r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

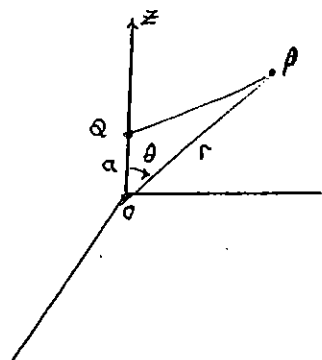
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$u = R(r) \cdot Z(z)$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2$$

$$R(r) = J_0(\lambda r)$$

$$Z(z) = A(\lambda) \cosh(\lambda z) + B(\lambda) \sinh(\lambda z)$$



"تابع گراند"

اگر تاویل نقطه P را تا شعاع از بار معکوس
در نقطه Q خطی ثابت کنیم:

$$V(p) = \frac{k}{PQ}$$

$$PQ = \sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)}$$

$$V = \frac{k}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}}$$

$$V = \frac{k}{r \sqrt{(a/r)^2 + 1 - 2(a/r) \cos \theta}} \quad a/r < 1$$

$$V = \frac{k}{a \sqrt{(r/a)^2 + 1 - 2(r/a) \cos \theta}} \quad r/a < 1$$

$$u(r, z) = u_0 a \int_0^\infty \frac{[\sinh \lambda z + \sinh \lambda (l - z)]}{\sinh \lambda l} J_1(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda$$

مقتضی که در جفتی که مسئله مقدار دیرینه است اگر صفحه بی نهایت باشد در این صورت
صیف طالبعبدت مسئله تغییر پیدا نمی کند.

$$\begin{aligned}
 (-2hz + h^2)^K &= \sum_{r=0}^K \binom{K}{r} (-2hz)^{K-r} h^{2r} \\
 &= \sum_{r=0}^K \binom{K}{r} (-2z)^{K-r} h^{K+r} \quad \begin{matrix} K+r=l \\ r=l-K \end{matrix} \\
 &= \sum_{l=K}^{\infty} \binom{K}{l-K} (-2z)^{2K-l} h^l
 \end{aligned}$$

اگر $\binom{K}{r}$ را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\binom{K}{r} = 0 \quad \text{if } r < 0 \text{ \& } r > K$$

مانفیدت رابطه فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$(-2hz + h^2)^K = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{K}{l-K} (-2z)^{2K-l} h^l$$

$$\begin{aligned}
 \therefore G(z, h) &= \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-1/2}{K} \binom{K}{l-K} (-2z)^{2K-l} h^l \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(z) h^l \quad \begin{matrix} h < z_+ \\ h < z_- \end{matrix} \quad z_{\pm} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}
 \end{aligned}$$

$$(i) \quad 0/r \triangleq h < 1 \quad G(z) = z$$

$$(ii) \quad r/a \triangleq h < 1 \quad G(z) = z$$

$$G(z, h) = (1 - 2hz + h^2)^{-1/2}$$

تابع فوق در واقع مولد تابع پوانسره است. با توجه به رابطه زیر:

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k$$

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2)(-1/2-1)(-1/2-2) \dots (-1/2-k+1)}{k!}$$

$$(a+b)^K = \sum_{r=0}^K \binom{K}{r} a^{K-r} b^r$$

می‌توان تابع $G(z, h)$ را به صورت

$$G(z, h) = (1 - 2hz + h^2)^{-1/2} = \sum_{K=0}^{\infty} \binom{-1/2}{K} (-2hz + h^2)^K$$

به سبب

$$|1 - 2hz + h^2| < 1$$

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r}{2^r} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-2r-1)}{r! (n-2r)!} z^{n-2r}$$

$$P_0(z) = 1$$

$$P_1(z) = z$$

$$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$$

$$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$$

$$P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3)$$

$$P_5(z) = \frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z)$$

$$G(z, h) = \frac{i}{\sqrt{1-2hz + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) h^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\pm 1) h^n = (1 \mp h)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n h^n$$

$$\therefore P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$P_l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \binom{l}{l-k} (-2z)^{k-l} \quad l=0, 1, 2, \dots$$

تابع $P_l(z)$ در واقع توابع توان در مرتبه علامت فصل ظاهر می شود، توابع توان در مرتبه

$$j: \quad (-k = r)$$

$$P_l(z) = \sum_{r=-\infty}^{r=l} \binom{-1/2}{l-r} \binom{l}{r} (-2z)^{l-2r} \quad j: r > l-r \rightarrow \binom{l-r}{r} = 0$$

$$\rightarrow P_l(z) = \sum_{r=0}^{[l/2]} \binom{-1/2}{l-r} \binom{l}{r} (-2z)^{l-2r} \quad l=0, 1, 2, \dots$$

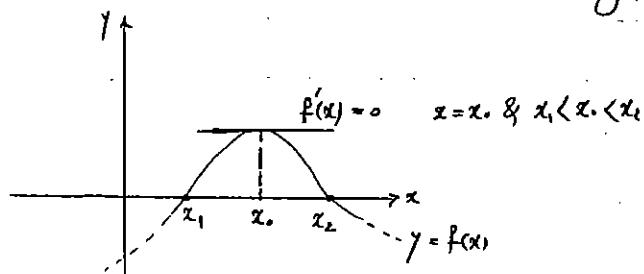
حال اگر تابع $P_n(z)$ را با h بسط دهیم:

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{l-r} &= \frac{(-1/2)(-1/2-1) \cdots (-1/2-n+r+1)}{(n-r)!} \\ &= \frac{(-1)^{n-r} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-2r-1}{2^{n-r} \cdot (n-r)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P_n(z) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \binom{n}{r} z^{2n-2r} \\ &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (z^2)^{n-r} (-1)^r \\ &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \end{aligned}$$

$$\therefore P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad \text{Rodrigues formula}$$

حال با استفاده از وسیله میانی، تصویر منتهای تابع در این محاسبه می‌شود.
- وسیله:



$$\rho_{2m+1}(0) = 0$$

$$P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{m!}$$

حال شمل و در مختار جامع الزمان است یادم :

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-2r-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots (2n-2r-1) (2n-2r)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots (2n-2r)}$$

$$= \frac{(2n-2r)!}{2^{n-r} (n-r)!}$$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r}{2^n} \frac{(2n-2r)!}{r! (n-r)! (n-2r)!} x^{n-2r}$$

$$\frac{d^k}{dz^k} z^n = \frac{k!}{(k-n)!} z^{k-n} \quad k \geq n \quad \& \quad (\text{zero for } k < n)$$

$$\frac{d^n}{dz^n} z^{2n-2r} = \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!} z^{n-2r}$$

$$\Rightarrow P_n(z) = \frac{1}{2^n} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r}{r! (n-r)!} z^{2n-2r}$$

تابع $f(x)$ را بصورت زیر می‌نویسیم

$$f(x) = (x^2 - 1)^n = (x-1)^n (x+1)^n$$

$$f'(x) = 2nx(x^2 - 1)^{n-1} = 2nx(x-1)^{n-1} \cdot (x+1)^{n-1}$$

اگر $n > 1$ باشد در اینصورت علاوه بر $f'(-1) = f'(1) = 0$ ، $f'(0) = 0$ داریم.
در نتیجه $f''(x)$ صفوی در بازه $(0, +1)$ و منفی در $(-1, 0)$ دارد.

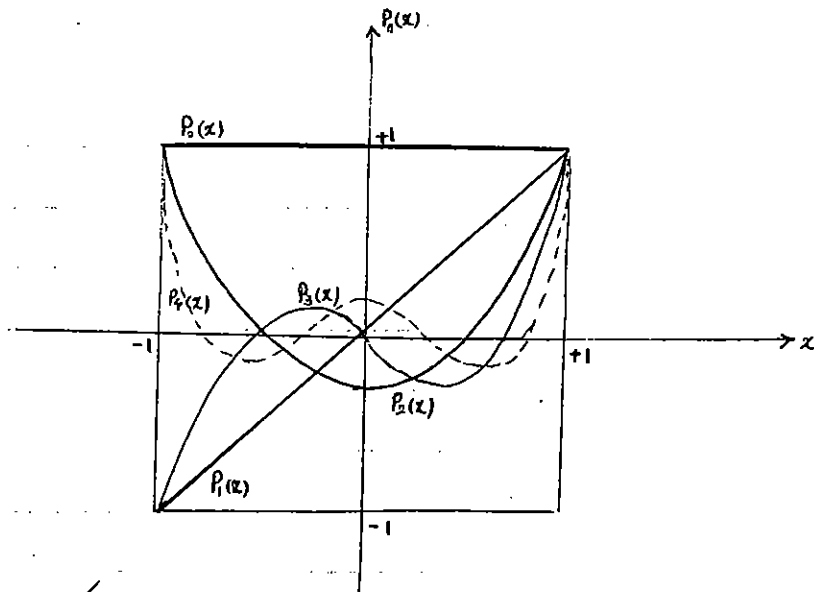
$$\begin{aligned} f''(x) &= 2n(x^2 - 1)^{n-1} + 4n(n-1)x^2(x^2 - 1)^{n-2} \\ &= [2n(x^2 - 1) + 4n(n-1)x^2](x^2 - 1)^{n-2} \\ &= 2n[(2n-1)x^2 - 1](x-1)^{n-2}(x+1)^{n-2} \end{aligned}$$

با استفاده از مشتق دوم و تغییرات علامت می‌توانیم عبارت زیر

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

n صفر در بازه $[-1, +1]$ دارد همچون این عبارت از صفر n است پس این
 n صفر نقطه منفرجه تابع هستند.

نتیجه: 'نقطه منفرجه' $P_n(x)$ حقیقی و غیرا بوجه در بازه $[-1, +1]$ قرار دارند.



همانگونه که مشاهده می‌شود توابع $P_n(x)$ با افزایش n در مبدأ، زوایای کمتر
عبارتاً رفتار توابع $P_n(x)$ در بازه $[-1, +1]$ هموارتر می‌شود.

$$(1-z^2) P_n''(z) - 2z P_n'(z) + n(n+1) P_n(z) =$$

$$= \frac{n+1}{2^{n+1} \pi i} \oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-z)^{n+3}} \left[(1-z^2)(n+2) - 2z(z-z) + n(z-z)^2 \right] dz$$

$$= \frac{n+1}{2^{n+1} \pi i} \oint_C \frac{d}{dz} \left[\frac{(z^2-1)^{n+1}}{(z-z)^{n+2}} \right] dz$$

در این مرحله

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{(z^2-1)^{n+1}}{(z-z)^{n+2}} \right] = \frac{2z(n+1)(z^2-1)^n}{(z-z)^{n+2}} - \frac{(n+2)(z^2-1)^{n+1}}{(z-z)^{n+3}}$$

$$= \frac{(z^2-1)^n}{(z-z)^{n+3}} \left[2z(n+1)(z-z) - (n+2)(z^2-1) \right]$$

$$= \frac{(z^2-1)^n}{(z-z)^{n+3}} \left[(n+2) - (n+2)z^2 - 2z^2 + 2z^2 + n z^2 + n z^2 - 2n z^2 \right]$$

$$n+2 - n z^2 - 2 z^2 - 2 z^2 + 2 z^2 + n z^2 + n z^2 - 2 n z^2 =$$

$$n+2 - 2 z^2 + n z^2 - 2 n z^2$$

$$2z(nz - nz + z - z) - (nz^2 - n + 2z^2 - 2) =$$

$$2nz^2 - 2nz^2 + 2z^2 - 2z^2 - nz^2 + n - 2z^2 + 2 = n+2 - 2z^2 + n z^2 - 2n z^2$$

فرض کنیم $f(z) = \frac{1}{2^n n!} (z^2-1)^n$

فرض کنیم $f(z) = \frac{1}{2^n n!} (z^2-1)^n$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2^n n!} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z)^{n+1}} dz$$

$$f(z) \triangleq \frac{1}{2^n n!} (z^2-1)^n$$

$$\Rightarrow P_n(z) = f^{(n)}(z)$$

$$\Rightarrow P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-z)^{n+1}} dz \quad n=0, 1, 2, \dots$$

حال تابع $P_n(z)$ را در معادله دیفرانسیل زیر قرار می دهیم:

$$(1-z^2) P_n''(z) - 2z P_n'(z) + n(n+1) P_n(z) = ?$$

$$P_n'(z) = \frac{n+1}{2^{n+1} \pi i} \oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-z)^{n+2}} dz$$

$$P_n''(z) = \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1} \pi i} \oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-z)^{n+3}} dz$$

توانیم تابع توان در

معادله توان در تابع توان با معادله استدم لیبیل بصورت زیر می آید:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

$$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0$$

پس تابع غیر تابعی استدم لیبیل داریم:

$$r(x) = 1-x^2$$

$$q(x) = 0$$

$$p(x) = 1$$

$$r(-1) = r(+1) = 0$$

لذا چند جمله ای توان در ضرایب مجموع متعادل در بازه $[-1, +1]$ می باشد

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

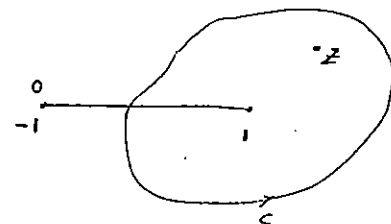
با استفاده از رابطه "Rodrigues"، فرض کنید $m > n$.

$$I(m, n) = \int_{-1}^{+1} P_m(x) \cdot P_n(x) dx$$

باقی به آنکه n در صفر غیر متناهی است لذا مقدار آن را صفر است در نتیجه
تابع توان در معادله توان در صفر می آید.

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \quad n \in \mathbb{Z}$$

حال چنانچه n در صفر می باشد، ما متوجه می شویم که انتخاب می کنیم نقطه
 $z = +1$ را در مرتبه اول - ۱ را در مرتبه دوم و در نهایت تابع توان در
در معادله توان در صفر می آید.



$$\Rightarrow \rho_n^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\Rightarrow I(n, n) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx$$

$$x = \sin \theta \rightarrow dx = \cos \theta d\theta$$

$$\Rightarrow I(n, n) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta$$

از طرفی تابع متعام است از

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \theta \cdot \sin^{2n-1} \theta d\theta$$

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

در نتیجه می توان نوشت:

$$I(n, n) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(1/2)}{\Gamma(n+3/2)}$$

حال با استفاده از فرمول دیگرا بنویسیم

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$$

$$2^{2n+1} n! \Gamma(n+3/2) = \sqrt{\pi} (2n+1)!$$

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^m}{dx^m} (x^2-1)^m \rho_n(x) dx \cdot 2^n n! \\ &= \frac{1}{2^m m!} \left[\rho_n(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2-1)^m - \int_{-1}^{+1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2-1)^m \rho_n'(x) dx \right] \\ &= - \frac{1}{2^m m!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2-1)^m \rho_n'(x) dx \\ &= \frac{(-1)^K}{2^m m!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{m-K}}{dx^{m-K}} (x^2-1)^m \rho_n^{(K)}(x) dx \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\rho_n(x)$ ندراتی است $n < K$ انتخاب شود در نتیجه

$$I(m, n) = 0 \quad (m > n)$$

$$I(m, n) = I(n, m) = 0.$$

حال میانی $m=n$ را بنویسیم

$$I(n, n) = \int_{-1}^{+1} \rho_n^2(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \rho_n^{(n)}(x) dx$$

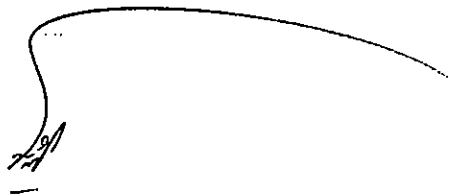
$$\rho_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{1-2hz+h^2} dx = -\frac{1}{2h} \ln(1-2hz+h^2) \Big|_{-1}^{+1}$$

$$= \frac{1}{h} [\ln(1+h) - \ln(1-h)]$$

حال، با توجه به تعریف $P_n^{(2h)}$ می‌توان نوشت:

به کمک این دو معادله می‌توان نوشت:



ساعت: 12:30 ; ۸/۱۰/۱۳

$$I_{(n,n)} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_n(x) dx}{\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_n(x) dx}$$

$$= \frac{2\sqrt{n} (2n)!}{\sqrt{n} (2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

$$\therefore \boxed{I_{(n,n)} = \frac{2}{2n+1}}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

رابطه فوق را از طریق استفاده از تابع مولد می‌توان بدست آورد

$$\frac{1}{1-2hz+h^2} = [P_0(x) + P_1(x)h + \dots + P_n(x)h^n + \dots]^2$$

از رابطه فوق در بازه $[-1, +1]$ انتگرال می‌گیریم