



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

بازی شلیک چپ و b -رنگ آمیزی گراف‌ها

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

رامین جوادی جورتانی

استاد راهنما

دکتر بهناز عمومی

۱۳۸۶



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض آقای رامین جوادی جورتانی

تحت عنوان

بازی شلیک چپ و b -رنگ آمیزی گراف‌ها

در تاریخ ۸۶/۶/۳۱ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

دکتر بهناز عمومی

۱- استاد راهنمای پایان نامه

دکتر سید عباداله محمودیان

۲- استاد مشاور پایان نامه

دکتر غلامرضا امیدی

۳- استاد داور ۱

دکتر بیژن طائری

۴- استاد داور ۲

دکتر رسول نصر اصفهانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات،
ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع
این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی
اصفهان است.

بسم الله الرحمن الرحيم

هست کلید در گنج حکیم

تو مگو ما را بر آن شه بار نیست

با کریمان کارها دشوار نیست

حضرت مولانا

فهرست مطالب

قسمت اول	بازی شلیک چپ	۴
فصل ۱ شلیک چپ روی گراف‌های غیر جهت‌دار		
۱-۱	تعاریف و مقدمات	۵
۲-۱	شلیک چپ و گریدهای با تکرار	۶
۳-۱	پایان‌پذیری	۸
۴-۱	طول بازی	۱۱
فصل ۲ بازی شلیک چپ روی گراف‌های جهت‌دار		
۱-۲	تعاریف و مقدمات	۱۴
۲-۲	پایان‌پذیری	۱۸
۳-۲	ماتریس لاپلاسین جهت‌دار	۱۹
۴-۲	گشت‌های تصادفی روی گراف‌های جهت‌دار	۲۱
۵-۲	دوره تناوب و طول بازی	۲۲
۶-۲	چرتکه احتمالاتی	۲۵
فصل ۳ بازی دلار و گروه بحرانی		
۱-۳	تعاریف و مقدمات	۴۴
۲-۳	آرایش‌های بحرانی	۴۵
۳-۳	گروه بحرانی یک گراف	۴۶
۴-۳	چند جمله‌ای تات و گروه بحرانی	۵۰
۵-۳	بررسی ساختاری گروه بحرانی	۵۲

۶۵	قسمت دوم b -رنگ آمیزی گراف‌ها
۶۶	فصل ۴ b -رنگ آمیزی حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها
۶۷	۱-۴ عدد b -رنگی گراف $K_m \square G$
۷۰	۲-۴ عدد b -رنگی گراف $K_m \square C_n$
۷۴	۳-۴ عدد b -رنگی گراف $K_m \square P_n$
۷۷	۴-۴ عدد b -رنگی گراف $K_n \square K_n$
۸۲	فصل ۵ b -رنگ آمیزی گراف‌های کنسر
۸۳	۱-۵ طرح‌های سه‌تایی اشتاینر
۸۶	۲-۵ عدد b -رنگی گراف‌های کنسر
۹۳	۳-۵ b -پیوستگی گراف‌های کنسر
۱۰۰	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۰۵	نمایه
۱۰۸	کتاب‌نامه

چکیده:

این پایان نامه از دو قسمت تشکیل شده است. در قسمت اول به بررسی یک بازی یا فرایند روی یک گراف به نام بازی شلیک چیپ می پردازیم. بازی شلیک چیپ یک بازی یک نفره یا یک فرایند انتشار روی یک گراف است. با وجودی که از تعریف این بازی بیش از ۲۰ سال نمی گذرد اما روابط جالبی که بین این فرایند و بسیاری از مفاهیم مهم مانند گشت های تصادفی، ماتریس لاپلاسن، چندجمله ای تات، چندجمله ای رنگی، نظریه جبری گراف، نظریه گروه ها و هم چنین فیزیک نظری وجود دارد، آن را به یک موضوع مهم و جذاب در ترکیبیات بدل کرده است. تاکنون نسخه های گوناگونی از این بازی تعریف و ویژگی های آن تحلیل شده است. در این قسمت بازی شلیک چیپ روی گراف های غیرجهت دار و جهت دار، هم چنین نسخه تغییر یافته ای از این بازی به نام بازی دلار را مورد تحلیل و بررسی جامع قرار می دهیم.

قسمت دوم این پایان نامه به پاسخ به برخی از سوالات باز در زمینه یک نوع رنگ آمیزی راسی روی گراف ها به نام b -رنگ آمیزی اختصاص یافته است. در این قسمت b -رنگ آمیزی حاصل ضرب دکارتی مسیرها، دورها و گراف های کامل و هم چنین گراف های کنسر را مطالعه می کنیم.

مقدمه

یکی از موضوعات جالب تحقیقاتی در ترکیبیات، تعریف بازی‌های مختلف روی یک گراف و بررسی خواص آن است. اولین بازی روی گراف‌ها توسط گراندی تعریف شد [۱۹] و تاکنون انواع متنوعی از بازی مانند بازی رنگ آمیزی [۴۱]، بازی احاطه‌گری [۱]، بازی رمزی [۳] و ... مورد مطالعه قرار گرفته است.

یکی از این بازی‌ها، یک بازی یک نفره یا یک فرایند انتشار روی یک گراف است که بازی شلیک چپ خوانده می‌شود. اولین نسخه از این بازی توسط بورنر و دیگران [۸] معرفی شد. پس از آن نسخه‌های مختلفی از این بازی تعریف و خواص آن‌ها بررسی شده است. ویژگی مهم بازی شلیک چپ، روابط جالبی است که بین این فرایند و بسیاری از مفاهیم مهم ترکیبیات مانند گشت‌های تصادفی، ماتریس لاپلاسی، چندجمله‌ای تات و چندجمله‌ای رنگی و هم‌چنین نظریه جبری گراف، نظریه گروه‌ها و حتی فیزیک نظری وجود دارد. قسمت اول این پایان‌نامه به مطالعه این بازی اختصاص داده شده است.

نسخه اولیه این بازی روی یک گراف غیر جهت‌دار اجرا می‌شود. یک گراف غیر جهت‌دار $G = (V, E)$ داده شده (یال چندگانه و طوقه مجاز است) و روی هر راس گراف تعدادی چپ قرار گرفته است. شکل اولیه توزیع چپ‌ها روی راس‌های گراف، آرایش شروع گفته شده و یک راس در یک آرایش را آماده می‌گویند هرگاه در این آرایش حداقل به تعداد درجه خود چپ داشته باشد. بازی شلیک چپ روی گراف G به این صورت انجام می‌شود که در هر آرایش یک راس آماده انتخاب و شلیک می‌شود. پس از شلیک یک راس، از هر یال واقع بر آن، یک چپ به همسایه مجاور می‌رود. اگر در یک وضعیت، راس آماده‌ای وجود نداشته باشد، بازی پایان می‌پذیرد. شلیک یک راس ممکن است یک راس ناآماده را آماده کند. در مرحله بعد بار دیگر یک راس آماده، انتخاب و شلیک می‌شود. وقتی که هیچ راس آماده‌ای وجود نداشته باشد، بازی تمام می‌شود. شکل توزیع چپ‌ها در پایان را آرایش پایانی می‌نامند. در فصل ۱ به بررسی بازی شلیک چپ روی گراف‌های غیرجهت‌دار و مطالعه ویژگی‌های آن می‌پردازیم.

می‌توان با اندکی تغییر این بازی را روی یک گراف جهت‌دار اجرا کرد. این نسخه توسط بورنر و دیگران [۷] بررسی شد. در فصل ۲، تعمیم فرایند شلیک چپ به گراف‌های جهت‌دار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این

فصل به سولاتی در مورد پایان‌پذیری بازی، طول بازی و نقش ترتیب انتخاب راس‌ها می‌پردازیم. همچنین ارتباط این بازی را با ماتریس لاپلاسین گراف‌های جهت‌دار و گشت‌های تصادفی روی گراف‌های جهت‌دار روشن می‌کنیم که ما را به سمت روابطی در مورد طول یک بازی متناهی و دوره تناوب یک بازی نامتناهی رهنمون می‌سازد.

اولین باریگز [۴] یک نسخه تغییر یافته از این بازی را معرفی کرد. این بازی روی گراف غیر جهت‌دار همبند $G = (V, E)$ اجرا می‌شود که یک راس خاص $q \in V$ مشخص شده و تعدادی چیپ روی راس‌های دیگر غیر از q توزیع شده است. در هر نوبت می‌توانیم یک راس آماده غیر از q (راسی که حداقل به تعداد درجه‌اش چیپ دارد) را شلیک کنیم. بازی تا جایی ادامه پیدا می‌کند که هیچ راس آماده‌ای غیر از q وجود نداشته باشد. در این حالت راس q شلیک می‌شود و بازی ادامه پیدا می‌کند. بنابراین راس q می‌تواند شلیک کند اگر و تنها اگر هیچ راس آماده‌ای غیر از q وجود نداشته باشد. وجود راس q تضمین می‌کند که بازی هیچ‌گاه پایان نپذیرد. در واقع می‌توانیم به جای چیپ‌ها با دلارها بازی کنیم و بازی را به عنوان یک "اقتصاد" و راس q را به عنوان "دولت" در نظر بگیریم. اقتصاد حرکت می‌کند و هر جا که به بن‌بست رسید دولت مقداری دلار به آن تزریق می‌کند و دوباره حرکت ادامه پیدا می‌کند. به همین دلیل این بازی به بازی دلار معروف است. در فصل ۳، این بازی را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که به کمک این بازی می‌توانیم یک گروه آبلی به هر گراف نسبت دهیم که گروه بحرانی نام دارد. در واقع خواهیم دید که مرتبه این گروه برابر تعداد درخت‌های فراگیر گراف G است. به کمک قضیه اساسی گروه‌های آبلی، ساختار این گروه را بررسی کرده و به ارتباط آن با چند جمله‌ای تات می‌پردازیم.

قسمت دوم این پایان‌نامه به پاسخ به برخی از سولات باز در زمینه یک نوع رنگ آمیزی راسی روی گراف‌ها به نام b -رنگ آمیزی اختصاص یافته است. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد. یک b -رنگ آمیزی از گراف G با k رنگ، یک رنگ آمیزی معتبر از راس‌های G با k رنگ است به طوری که در هر کلاس رنگی i یک راس x_i وجود دارد که در همه $k - 1$ کلاس رنگی دیگر همسایه دارد. راس x_i را یک راس b -احاطه‌گر و مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ را یک سیستم b -احاطه‌گر می‌نامیم. بزرگترین عدد k که G دارای یک b -رنگ آمیزی با k رنگ است را عدد b -رنگی گراف G گفته و با $\varphi(G)$ ، نشان می‌دهیم. مفهوم b -رنگ آمیزی اولین بار توسط ایروینگ و منلاو [۲۳] معرفی شده است. در فصل ۴ به مطالعه b -رنگ آمیزی حاصل ضرب دکارتی گراف کامل و هر گراف دلخواه G و به طور خاص دورها، مسیرها و گراف کامل می‌پردازیم. گراف G ، b -پیوسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر عدد صحیح k ، $\chi(G) \leq k \leq \varphi(G)$ یک b -رنگ آمیزی برای G با k رنگ وجود داشته باشد. فرض کنید k و n دو عدد طبیعی هستند که $2k < n$. برای مجموعه T از اندازه n ، V را مجموعه همه زیرمجموعه‌های k عضوی S در نظر بگیرید. گراف کنسر با پارامترهای n و k که با $K(n, k)$ نشان داده می‌شود گرافی با مجموعه راس‌های V است به طوری که دو راس مجاورند اگر و تنها اگر زیر مجموعه‌های متناظر آن‌ها مجزا باشند. گراف‌های کنسر از دیدگاه‌های مختلف مورد مطالعه بوده است. در

فصل آخر ضمن بررسی b -رنگ آمیزی گراف‌های کنسر و محاسبه عدد b -رنگی این گراف‌ها برای پارامترهای خاص، ثابت می‌کنیم گراف کنسر $K(n, k)$ با پارامترهای $k = 2$ و $n \geq 16$ ، b -پیوسته است.

قسمت اول

بازی شلیک چپ

فصل ۱

شلیک چپ روی گراف‌های غیر جهت‌دار

در این فصل قصد داریم یک بازی یک نفره یا یک فرایند را روی گراف‌های غیر جهت‌دار معرفی و بررسی کنیم. این بازی اولین بار توسط بورنر و دیگران [۸] معرفی شد. یک گراف غیر جهت‌دار $G = (V, E)$ داده شده (یال چندگانه و طوقه مجاز است) و روی هر راس گراف تعدادی چپ قرار گرفته است. شکل اولیه توزیع چپ‌ها روی راس‌های گراف را آرایش شروع می‌گوییم. بازی شلیک چپ روی گراف G به این صورت انجام می‌شود. در آرایش موجود یک راس را آماده گوییم هرگاه تعداد چپ‌های روی آن راس حداقل به اندازه درجه آن راس باشد. در ابتدا یک راس آماده را انتخاب کرده و آن را شلیک می‌کنیم. وقتی یک راس آماده $k \in V$ شلیک می‌شود، از طریق هر یال v ، یک چپ به راس مجاور k منتقل می‌شود. شلیک یک راس ممکن است یک راس ناآماده را آماده کند. در مرحله بعد بار دیگر یک راس آماده انتخاب و شلیک می‌شود. وقتی که هیچ راس آماده‌ای وجود نداشته باشد، بازی تمام می‌شود. شکل توزیع چپ‌ها در پایان را آرایش پایانی می‌گوییم.

متعاقب تعریف این بازی دو سوال به طور طبیعی مطرح می‌شود. یکی این‌که در چه مواردی بازی بعد از تعداد متناهی حرکت تمام می‌شود و چه موقع بازی نامتناهی است؟ از طرف دیگر ممکن است در یک آرایش چند راس آماده وجود داشته باشد و بنابراین حرکت‌های مختلفی از آن آرایش قابل انجام است. از این رو سوال دوم این است که آیا متناهی بودن بازی و آرایش پایانی به حرکت‌های بازی و ترتیب راس‌های شلیک شده وابسته است یا این‌که تنها به آرایش شروع بستگی دارد؟ در این فصل پس از تعریف دقیق بازی شلیک چپ به کمک نظریه گریدویدها ثابت می‌کنیم که متناهی بودن بازی و آرایش پایانی از حرکت‌های انجام شده مستقل

است و تنها به آرایش شروع بستگی دارد. سپس پایان‌پذیری بازی را بر اساس تعداد کل چیپ‌های روی راس‌ها بررسی کرده و در صورت پایان‌پذیر بودن بازی، کرانی برای طول بازی ارایه می‌کنیم.

۱-۱ تعاریف و مقدمات

ابتدا اجازه دهید تعریف بازی شلیک چیپ را به صورت دقیق‌تر و با نمادهای ریاضی بیان کنیم. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف غیر جهت‌دار باشد که راس‌های آن را با اعداد $1, 2, \dots, n$ برچسب‌گذاری کرده‌ایم. برای راس $k \in V$ تعداد یال‌های غیرطوقه روی k را با $\text{exdeg}(k)$ و دو برابر تعداد طوقه‌های روی k را با $\text{indeg}(k)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین درجه راس k را به صورت $\text{deg}(k) = \text{exdeg}(k) + \text{indeg}(k)$ تعریف کرده و تعداد یال‌هایی که دو راس $i, j \in V$ را به هم وصل می‌کند با $d_{i,j}$ نشان می‌دهیم.

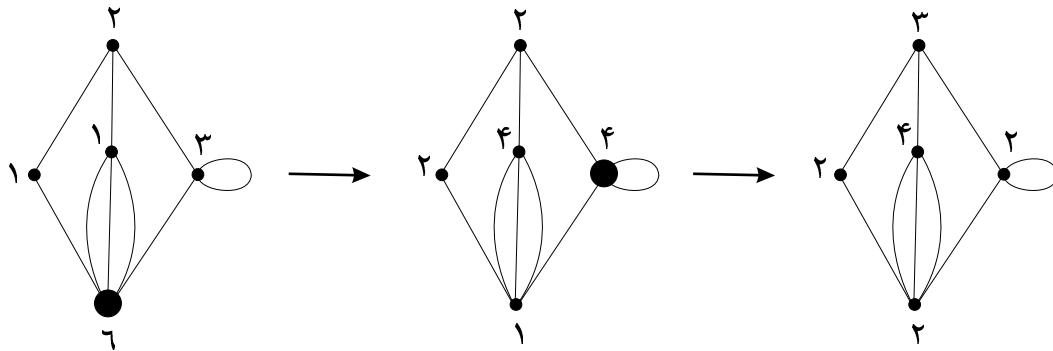
تعریف ۱-۱-۱ [۳۳] منظور از یک آرایش روی گراف $G = (V, E)$ ، یک تابع $\theta : V \rightarrow \mathbb{Z}$ است که برای هر $k \in V$ ، $\theta(k) \geq 0$. در واقع $\theta(k)$ تعداد چیپ‌های روی راس k را نشان می‌دهد. در یک آرایش θ روی گراف غیر جهت‌دار G ، راس k را آماده گوئیم هرگاه $\theta(k) \geq \text{deg}(k)$.

در یک حرکت می‌توانیم یک راس آماده در آرایش موجود را شلیک کنیم. پس از شلیک راس آماده $i \in V$ ، از چیپ‌های روی راس i به تعداد $\text{exdeg}(i)$ کم شده و به هر راس $j \neq i$ به اندازه $d_{i,j}$ اضافه می‌شود. بنابراین آرایش θ به آرایش θ' تبدیل می‌شود که θ' به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\theta'(j) = \begin{cases} \theta(j) + d_{i,j} & i \neq j, \\ \theta(i) - \text{exdeg}(i) & i = j. \end{cases}$$

توجه کنید که اگر روی راس i یک طوقه وجود داشته باشد، آن‌گاه با شلیک راس i دو چیپ بر روی این طوقه حرکت می‌کنند و به راس i باز می‌گردند. بنابراین طوقه‌ها تأثیری در توزیع مجدد چیپ‌ها ندارند و تنها اثر آن‌ها در آماده بودن یا نبودن یک راس است. در شکل ۱-۱ آرایش شروع و دو حرکت متوالی در یک گراف نشان داده شده است. عدد کنار هر راس تعداد چیپ‌های روی آن راس را نشان می‌دهد و در هر آرایش، راسی که قرار است شلیک شود بزرگتر نشان داده شده است.

تعریف ۱-۱-۲ [۳۳] یک دنباله قانونی σ برای آرایش شروع $\theta_0 = \theta$ ، یک دنباله از راس‌های $(k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$ است که برای هر $0 \leq i \leq n-1$ ، راس k_i در آرایش θ_i آماده است و آرایش θ_{i+1} از



شکل ۱-۱ دو مرحله از بازی شلیک چیپ روی یک گراف غیر جهت‌دار.

آرایش θ_i با شلیک راس k_i به دست می‌آید. فرایند شلیک متوالی راس‌های یک دنباله قانونی را یک بازی قانونی می‌گوییم. هم‌چنین امتیاز یک دنباله قانونی σ ، یک بردار $[\sigma] \in \mathbb{Z}^{|V|}$ تعریف می‌شود که برای هر $k \in V$ ، $[\sigma]_k$ برابر تعداد دفعات شلیک راس k در آن دنباله است.

قانون شلیک یک راس را می‌توانیم به وسیله ماتریس لاپلاسین گراف بیان کنیم.

تعریف ۱-۱-۳ [۱۸] برای گراف غیر جهت‌دار G ، ماتریس لاپلاسین این گراف $L(G) = L$ یک ماتریس $|V| \times |V|$ است که

$$L_{i,j} = \begin{cases} -d_{i,j} & i \neq j, \\ \text{exdeg}(i) & i = j. \end{cases}$$

حال فرض کنید θ یک آرایش شروع و $\sigma = (k_0, \dots, k_{n-1})$ یک دنباله قانونی برای θ باشد. اگر θ و $[\sigma]$ را به عنوان بردارهایی ستونی در $\mathbb{Z}^{|V|}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه با شلیک راس k_0 به آرایش $\theta - Le_{k_0}$ می‌رسیم که بردار e_{k_0} بردار شاخص k_0 در $\mathbb{Z}^{|V|}$ است. سپس با شلیک راس k_1 به آرایش $\theta - Le_{k_0} - Le_{k_1}$ می‌رسیم و الی آخر. در نتیجه اگر θ' آرایش حاصل بعد از اجرای بازی قانونی σ باشد، آن‌گاه

$$\theta' = \theta - L(e_{k_0} + \dots + e_{k_{n-1}}) = \theta - L[\sigma].$$

این بحث علاوه بر نشان دادن ارتباط شلیک‌ها و ماتریس لاپلاسین، نتیجه زیر را به دنبال دارد.

نتیجه ۱-۱-۴ در یک بازی شلیک چیپ روی یک گراف غیر جهت‌دار، آرایش نهایی بعد از اجرای بازی قانونی σ ، تنها به امتیاز دنباله σ یعنی $[\sigma]$ بستگی دارد، نه ترتیب شلیک راس‌ها.

۱-۲ شلیک چیپ و گریدهای با تکرار

فرض کنید گراف G و آرایش شروع θ داده شده است و مجموعه $\mathcal{L}$ را مجموعه همه دنباله‌های قانونی برای θ بگیرید. در این بخش پس از تعریف «پاد متروید با تکرار» ثابت می‌کنیم که $\mathcal{L}$ یک پاد متروید با تکرار است. به کمک این حقیقت ثابت می‌کنیم که در صورتی که آرایش شروع داده شده باشد، همه بازی‌های قانونی می‌توانند تا نامتناهی ادامه یابند یا همه بازی‌های قانونی بعد از تعداد متناهی و ثابتی حرکت پایان می‌یابند و در صورت اخیر تعداد دفعاتی که یک راس مشخص شلیک می‌شود در همه بازی‌های قانونی یکسان است. همچنین در صورت متناهی بودن بازی، آرایش پایانی در همه بازی‌های قانونی یکسان است.

تعریف ۱-۲-۱ [۸] فرض کنید V یک مجموعه متناهی از حروف باشد که آن را الفبا می‌نامیم. مراد از یک کلمه یک دنباله متناهی از اعضای V است و مجموعه‌ای از کلمات را یک زبان گوئیم. یک زیر کلمه از یک کلمه α با حذف چند حرف از آن به دست می‌آید و یک پیشوند از آن، چند حرف اول از آن کلمه است. طول کلمه α را با $\ell(\alpha)$ و امتیاز آن را با $[\alpha]$ نشان می‌دهیم. منظور از امتیاز α یک بردار $[\alpha] \in \mathbb{Z}^{|V|}$ است که برای هر حرف $x \in V$ ، $[\alpha]_x$ برابر تعداد دفعات تکرار حرف x در کلمه α می‌باشد.

برای دو بردار $u, v \in \mathbb{R}^n$ ، نماد $u \vee v$ را برای بردار ماکزیمم مولفه به مولفه آن دو و نماد $u \wedge v$ را برای بردار مینیمم مولفه به مولفه آن دو استفاده می‌کنیم. همچنین $\|u\|_1$ نرم بردار u را با $|u|$ و $\|u\|_2$ نرم بردار u را با $\|u\|$ نشان می‌دهیم؛ یعنی $|u| = \sum_{i=1}^n |u_i|$ و $\|u\| = (\sum_{i=1}^n u_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

تعریف ۱-۲-۲ [۸] گوئیم زبان $\mathcal{L}$ موروثی-چپ (یا به طور خلاصه موروثی) است، هرگاه:

(م چ) برای هر کلمه در $\mathcal{L}$ ، هر پیشوند از آن کلمه نیز در $\mathcal{L}$ باشد.

زبان $\mathcal{L}$ را موضعاً آزاد گوئیم هرگاه:

(م آ) برای هر کلمه $\alpha \in \mathcal{L}$ و دو حرف متمایز $x, y \in V$ ، اگر $\alpha x \in \mathcal{L}$ و $\alpha y \in \mathcal{L}$ ، آن‌گاه $\alpha xy \in \mathcal{L}$.

زبان $\mathcal{L}$ را جایگشت‌پذیر می‌خوانیم هرگاه:

(ج پ) برای هر $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ و $x \in V$ اگر $[\alpha] = [\beta]$ و $\alpha x \in \mathcal{L}$ ، آن‌گاه $\beta x \in \mathcal{L}$.

لم ۱-۲-۳ [۸] فرض کنید G یک گراف و θ یک آرایش شروع در بازی شلیک چیپ روی G باشد و $\mathcal{L}$ را مجموعه همه دنباله‌های قانونی برای θ قرار دهید. در این صورت $\mathcal{L}$ یک زبان موروثی چپ، موضعاً آزاد و جایگشت‌پذیر است.

برهان. موروثی بودن $\mathcal{L}$ بدیهی است. فرض کنید $\alpha \in \mathcal{L}$ یک دنباله قانونی و $x, y \in V(G)$ دو راس متمایز باشند که $\alpha x \in \mathcal{L}$ و $\alpha y \in \mathcal{L}$ ، در این صورت پس از شلیک متوالی دنباله راس‌های α به وضعیتی می‌رسیم که هر دو راس x و y در آن آماده هستند. چون با شلیک راس x ، تعداد چیپ‌های روی y کاهش نمی‌یابد، لذا y پس از شلیک متوالی دنباله αx نیز آماده است و در نتیجه $\alpha xy \in \mathcal{L}$ و $\mathcal{L}$ موضعاً آزاد است. حال فرض کنید $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ ، $x \in V$ و $[\alpha] = [\beta]$ ، $\alpha x \in \mathcal{L}$ ، در این صورت طبق نتیجه ۱-۱-۴ بخش قبل آرایش حاصل پس از شلیک α با آرایش حاصل پس از شلیک β یکسان است. در نتیجه چون x پس از شلیک α آماده است، لذا x پس از شلیک β نیز آماده است و در نتیجه $\beta x \in \mathcal{L}$ و $\mathcal{L}$ جایگشت‌پذیر است. ■

این ویژگی‌های یک زبان، خاصیتی قوی را برای آن نتیجه می‌دهد که به خاصیت تبدیل قوی معروف است: (تق) اگر $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ ، آن‌گاه α شامل یک زیر کلمه α' است که $\beta \alpha' \in \mathcal{L}$ و $[\beta \alpha'] = [\alpha] \vee [\beta]$. ویژگی اخیر حالت قوی‌تری از خاصیت تبدیل گریدوید است که به صورت زیر تعریف می‌شود: (تگ) اگر $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ و $\ell(\beta) < \ell(\alpha)$ ، آن‌گاه حرف $x \in \alpha$ یافت می‌شود که $\beta x \in \mathcal{L}$.

تعریف ۱-۲-۴ [۹] زبان $\mathcal{L}$ ساده خوانده می‌شود هرگاه در همه کلمات آن، هر حرف حداکثر یک بار ظاهر شود. زبانی که ساده، موروثی و دارای خاصیت تبدیل گریدوید باشد را یک گریدوید می‌گوییم. در صورتی که شرط ساده بودن را از زبان برداریم، آن را گریدوید با تکرار می‌خوانیم. هرگاه ترتیب حروف در کلمات گریدوید مهم نباشد، آن را متروید می‌گوییم. هم‌چنین زبان‌های ساده، موروثی و دارای خاصیت تبدیل قوی، دسته خاصی از گریدویدها را تشکیل می‌دهند که پادمتروید خوانده می‌شوند. در صورتی که شرط ساده بودن را از زبان برداریم، آن را پادمتروید با تکرار می‌گوییم.

برای بررسی جامع گریدویدها [۲۶] و گریدویدهای با تکرار [۹] را ببینید. یک نتیجه از قضیه زیر این است که مجموعه دنباله‌های قانونی برای یک آرایش شروع θ یک پادمتروید با تکرار است.

قضیه ۱-۲-۵ [۸] فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان موروثی-چپ باشد، در این صورت $\mathcal{L}$ موضعاً آزاد و جایگشت‌پذیر است اگر و تنها اگر $\mathcal{L}$ دارای خاصیت تبدیل قوی باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید $\mathcal{L}$ دارای خاصیت تبدیل قوی باشد. اگر $\alpha \in \mathcal{L}$ و $x, y \in V$ دو حرف متمایز باشند که $\alpha x, \alpha y \in \mathcal{L}$ ، آنگاه طبق (تق) یک زیرکلمه α' از αy موجود است که $\alpha x \alpha' \in \mathcal{L}$ و $[\alpha x \alpha'] = [\alpha y] \vee [\alpha x]$. اما $[\alpha y] \vee [\alpha x] = [\alpha xy]$ پس $[\alpha xy] = [\alpha x \alpha']$ و لذا $\alpha' = y$. این نشان می‌دهد که $\alpha xy \in \mathcal{L}$ و خاصیت (مآ) برقرار است. حال فرض کنید $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ ، $x \in V$ و $[\alpha] = [\beta]$ ، در این صورت طبق (تق) یک زیرکلمه α' از αx موجود است که $\beta \alpha' \in \mathcal{L}$ و $[\beta \alpha'] = [\alpha x] \vee [\beta]$. اما چون $[\alpha] = [\beta]$ ، پس $[\alpha x] \vee [\beta] = [\beta x]$ و لذا $\alpha' = x$. این نشان می‌دهد که $\beta x \in \mathcal{L}$ و لذا $\mathcal{L}$ در خاصیت (جپ) صدق می‌کند.

حال برعکس فرض کنید $\mathcal{L}$ در خاصیت‌های (مچ)، (مآ) و (جپ) صدق کند، ثابت می‌کنیم که $\mathcal{L}$ در خاصیت (تق) صدق می‌کند. این مطلب را با استقرا روی $||[\alpha] \vee [\beta]||$ نشان می‌دهیم. کلمه‌های $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ را در نظر بگیرید و برای هر حرف x در α ، تعداد $[\beta]_x$ تکرار اول این حرف x در α را حذف کنید و کلمه به‌دست آمده را α' بنامید. واضح است که $[\beta \alpha'] = [\alpha] \vee [\beta]$ ، نشان می‌دهیم که $\beta \alpha' \in \mathcal{L}$. کلمه α'' را طولانی‌ترین پیشوند α' بگیرید که $\beta \alpha'' \in \mathcal{L}$. با برهان خلف فرض کنید که $\alpha'' \neq \alpha'$ و x را حرف بعد از α'' در α' بگیرید. بنابراین

$$[\alpha]_x = [\beta]_x + [\alpha']_x > [\beta]_x + [\alpha'']_x = [\beta \alpha'']_x.$$

لذا می‌توانیم α را به صورت $\alpha_1 x \alpha_2$ بنویسیم که $[\alpha_1]_x = [\beta \alpha'']_x$. حال $[\alpha_1] \leq [\beta \alpha'']$ و لذا $[\alpha_1] \vee [\beta \alpha''] = [\beta \alpha'']$. علاوه بر این $||[\beta \alpha'']|| < ||[\beta \alpha']||$ ، در نتیجه طبق فرض استقرا یک زیرکلمه γ از $\beta \alpha''$ موجود است که $\alpha_1 \gamma \in \mathcal{L}$ و $[\alpha_1 \gamma] = [\beta \alpha'']$. تساوی اخیر نشان می‌دهد که در γ حرف x وجود ندارد، هم‌چنین $\alpha x \in \mathcal{L}$ و $\alpha_1 \gamma \in \mathcal{L}$ ، بنابراین می‌توانیم قانون (مآ) را چندین بار به‌کار ببریم و به‌دست آوریم که $\alpha_1 \gamma x \in \mathcal{L}$. اکنون با به‌کارگیری قانون (جپ) به‌دست می‌آوریم که $\beta \alpha'' x \in \mathcal{L}$ که خلاف فرض ماکسیم بودن α'' است. این نشان می‌دهد که $\beta \alpha' \in \mathcal{L}$. ■

تعریف ۱-۲-۶ [۸] فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان موروثی-چپ باشد. کلمه $\alpha \in \mathcal{L}$ را اساسی گویند هرگاه پیشوند سره‌ای از هیچ عضو $\mathcal{L}$ نباشد.

لم ۱-۲-۷ اگر $\mathcal{L}$ یک زبان موروثی-چپ با خاصیت تبدیل قوی باشد، آنگاه هر دو کلمه اساسی در $\mathcal{L}$ دارای امتیاز و طول یکسان است.

برهان. فرض کنید $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ دو کلمه اساسی باشند. در این صورت طبق خاصیت (تق)، زیرکلمه α' از α و زیرکلمه β' از β یافت می‌شوند که $\alpha \beta', \beta \alpha' \in \mathcal{L}$ و $[\alpha \beta'] = [\beta \alpha'] = [\alpha] \vee [\beta]$. اما با توجه به اساسی بودن α

و β ، داریم $\alpha' = \beta' = \emptyset$. در نتیجه $[\alpha] = [\beta]$. از طرف دیگر برای هر کلمه $\gamma \in \mathcal{L}$ ، داریم $\ell(\gamma) = |\gamma|$ ، پس $\ell(\alpha) = \ell(\beta)$. ■

تعریف ۱-۲-۸ طول یک کلمه اساسی در زبان موروثی-چیپ با خاصیت تبدیل قوی $\mathcal{L}$ را رتبه $\mathcal{L}$ گوئیم و در صورتی که $\mathcal{L}$ کلمه اساسی نداشته باشد آن را از رتبه بی‌نهایت می‌خوانیم.

اکنون آن‌چه در این بخش در مورد زبان‌های موروثی با خاصیت تبدیل قوی گفتیم را برای زبان دنباله‌های قانونی روی گراف G با آرایش شروع θ به کار می‌گیریم تا نتیجه اصلی این بخش را به دست آوریم. این حقیقت که در زبان دنباله‌های قانونی، کلمات اساسی همان دنباله‌های منجر به آرایش پایانی هستند، به همراه لم ۱-۲-۷ و نتیجه ۱-۱-۴ بی‌درنگ نتیجه زیر را حاصل می‌کنند.

نتیجه ۱-۲-۹ فرض کنید یک گراف غیر جهت‌دار G و آرایش شروع θ داده شده است. در این صورت هر بازی قانونی با شروع از θ می‌تواند به طور نامحدود ادامه یابد یا هر بازی قانونی با شروع از θ بعد از تعداد متناهی حرکت با یک آرایش پایانی یکسان خاتمه می‌یابد. در حالت دوم تعداد دفعاتی که یک راس شلیک می‌شود در همه بازی‌های قانونی منجر به وضعیت پایانی یکسان است.

۳-۱ پایان‌پذیری

هدف این بخش پاسخ دادن به این سوال است که در بازی شلیک چیپ کدام بازی‌ها پایان‌پذیر و کدام یک نامتناهی هستند. در اولین تلاش برای پاسخ دادن به این سوال دو لم ساده اما مهم زیر به دست می‌آیند.

لم ۱-۳-۱ [۸] اگر یک بازی شلیک چیپ روی گراف غیر جهت‌دار G پایان‌پذیر باشد، آن‌گاه یک راس وجود دارد که اصلاً شلیک نشده است.

برهان. طبق برهان خلف فرض کنید که همه راس‌ها شلیک شوند. راس k را راسی بگیرید که آخرین شلیک آن زودتر از آخرین شلیک همه راس‌ها باشد. در این صورت همه همسایه‌های k ، بعد از آخرین شلیک k ، حداقل یک بار شلیک می‌شوند و لذا k از هر همسایه‌اش حداقل یک چیپ دریافت می‌کند. این نشان می‌دهد که در

پایان تعداد چیپ‌های k حداقل برابر با $\deg(k)$ بوده که تناقض است. ■

لم ۱-۳-۲ [۳۷] اگر یک بازی شلیک چیپ روی گراف غیر جهت‌دار و همبند G نامتناهی باشد، آن‌گاه همه راس‌ها بی‌نهایت بار شلیک می‌شوند.

برهان. فرض کنید تعداد کل چیپ‌ها روی راس‌های G برابر N باشد. چون بازی نامتناهی است یک راس i وجود دارد که نامتناهی بار شلیک شده است. فرض کنید j راس مجاور i باشد. با هر بار شلیک راس i ، راس j یک چیپ دریافت می‌کند. چون راس j نمی‌تواند بیشتر از N چیپ داشته باشد، بنابراین حتماً باید بی‌نهایت بار شلیک شود. با توجه به همبندی گراف، این بحث نشان می‌دهد که همه راس‌های گراف بی‌نهایت بار شلیک می‌شوند. ■

قضیه زیر بین تعداد کل چیپ‌ها و پایان پذیری بازی یک رابطه برقرار می‌کند.

قضیه ۱-۳-۳ [۸] فرض کنید G یک گراف همبند با n راس و m پال باشد و تعداد کل چیپ‌ها روی راس‌های G برابر N باشد. بازی شلیک چیپ را روی این گراف انجام می‌دهیم. در این صورت

(الف) اگر $N > 2m - n$ ، آن‌گاه بازی نامتناهی است.

(ب) اگر $m \leq N \leq 2m - n$ ، آن‌گاه یک آرایش شروع وجود دارد که متناهی بودن بازی را تضمین می‌کند و یک آرایش شروع وجود دارد که نامتناهی بودن بازی را تضمین می‌کند.

(ج) اگر $N < m$ ، آن‌گاه بازی متناهی است.

برهان.

(الف) اگر در یک آرایش θ ، هیچ راس آماده‌ای وجود نداشته باشد، آن‌گاه برای هر $k \in V(G)$ ، $\theta(k) \leq \deg(k) - 1$. لذا $N = \sum_{k=1}^n \theta(k) \leq \sum_{k=1}^n (\deg(k) - 1) = 2m - n$. پس در هر آرایش θ ، یک راس آماده وجود دارد و در نتیجه بازی نامتناهی است.

(ب) اگر $N < 2m - n$ ، آن‌گاه روی هر راس k حداکثر به اندازه $\deg(k) - 1$ چیپ قرار می‌دهیم و در نتیجه آرایش شروعی به دست می‌آوریم که در آن هیچ راس آماده‌ای وجود ندارد و بازی متناهی است. حال ثابت می‌کنیم که هرگاه $N \geq m$ ، یک آرایش شروع وجود دارد که بازی نامتناهی است. کافی است

این مساله را برای $N = m$ نشان دهیم. به آسانی دیده می‌شود که برای هر گراف غیر جهت دار، یک جهت‌گذاری بدون دور وجود دارد. حال یک جهت‌گذاری بدون دور روی گراف غیر جهت دار G در نظر می‌گیریم. سپس روی هر راس k به تعداد درجه خروجی آن، $\deg^+(k)$ چیپ قرار می‌دهیم. این را آرایش شروع بنامید. در هر جهت‌گذاری بدون دور روی G حتماً یک راس k_0 وجود دارد که $\deg(k_0) = \deg^+(k_0)$ ، زیرا اگر همه راس‌ها حداقل یک یال ورودی داشته باشند و P یک مسیر جهت دار ماکزیمال در G باشد، آن‌گاه راس ابتدای این مسیر یک یال ورودی دارد و در نتیجه G یک دور پیدا می‌کند. این تناقض نشان می‌دهد که در آرایش شروع حداقل یک راس آماده k_0 وجود دارد. این راس آماده را شلیک می‌کنیم. سپس همه جهت همه یال‌های روی k_0 را عوض می‌کنیم. واضح است که جهت‌گذاری جدید نیز بدون دور است زیرا در جهت‌گذاری جدید $\deg^+(k_0) = 0$ و لذا هیچ دوری شامل k_0 وجود ندارد و چون جهت بقیه یال‌ها تغییر نکرده، در جهت‌گذاری جدید هیچ دوری وجود ندارد. از طرف دیگر در آرایش جدید و جهت‌گذاری جدید نیز هر راس به تعداد درجه خروجی‌اش چیپ دارد. در نتیجه طبق آن‌چه گفته شد در این جهت‌گذاری یک راس وجود دارد که یال ورودی ندارد و لذا آماده است. با ادامه این روند می‌بینیم که بازی پایان ناپذیر است.

(ج) فرض کنید θ یک آرایش شروع دلخواه باشد که در آن $N < m$. یک جهت‌گذاری بدون دور روی گراف G در نظر بگیرید و قرار دهید:

$$T = \sum_{k=1}^n \max\{0, \theta(k) - \deg^+(k)\}$$

در این آرایش راس i را ناقص گوئیم، هرگاه $\theta(i) < \deg^+(i)$. فرض کنید k اولین راس شلیک شده باشد. پس از شلیک راس k ، جهت همه یال‌های خروجی k را عوض کنید. ادعا می‌کنیم در آرایش و جهت‌گذاری جدید مقدار T افزایش نمی‌یابد و در صورتی که مجموعه راس‌های ناقص تغییر کند، مقدار T کم می‌شود.

عبارت متناظر با k در T در آرایش شروع $\theta(k) - \deg^+(k)$ و در آرایش جدید (پس از شلیک k) $\theta(k) - \deg(k)$ است. بنابراین این عبارت به مقدار $\deg(k) - \deg^+(k) = \deg^-(k)$ کم می‌شود. اگر i یک همسایه ورودی k باشد (یعنی $ik \in E$) آن‌گاه عبارت متناظر با i حداکثر یک واحد اضافه می‌شود. عبارت متناظر با بقیه راس‌ها نیز تغییر نمی‌کند. این نشان می‌دهد که در آرایش جدید مقدار T افزایش نمی‌یابد. در ضمن اگر یک همسایه ورودی k مثل i ، ناقص باشد، آن‌گاه مقدار متناظر با i در T در آرایش شروع و آرایش جدید صفر است و لذا مقدار T کاهش می‌یابد و در صورتی که هیچ‌کدام از همسایه‌های ورودی k ناقص نباشند، با شلیک k مجموعه راس‌های ناقص تغییر نمی‌کند. این نشان می‌دهد که اگر مجموعه راس‌های ناقص تغییر کند، آن‌گاه مقدار T کاهش می‌یابد. حال فرض کنید که بازی پایان ناپذیر

باشد. لذا طبق لم ۱-۳-۲، همه راس‌ها بی‌نهایت بار شلیک می‌شوند. چون $N < m$ ، در هر آرایش یک راس ناقص وجود دارد. از طرفی یک راس ناقص نمی‌تواند شلیک شود. در نتیجه مجموعه راس‌های ناقص بی‌نهایت بار تغییر پیدا می‌کند. لذا عدد نامنفی T بی‌نهایت بار کاهش می‌یابد. این تناقض نشان می‌دهد که بازی حتماً پایان‌پذیر است. ■

۴-۱ طول بازی

در یک بازی شلیک چیپ پایان‌پذیر، تعداد کل شلیک‌ها را طول بازی گوئیم. در نتیجه ۱-۲-۹ ثابت کردیم که طول بازی مستقل از حرکت‌های بازی است و فقط به آرایش شروع بستگی دارد. در این بخش، برای طول یک بازی پایان‌پذیر روی گراف ساده G ، دو کران چند جمله‌ای بر حسب تعداد راس‌ها به دست می‌آوریم. ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱-۴-۱ [۳۷] در طول یک بازی شلیک چیپ روی گراف غیر جهت‌دار G ، اختلاف تعداد شلیک‌های دو راس مجاور حداکثر برابر با تعداد کل چیپ‌ها است.

برهان. فرض کنید σ یک دنباله قانونی باشد و $i_0, j_0 \in V(G)$ دو راس مجاور G باشند که $[\sigma]_{i_0} > [\sigma]_{j_0}$. مجموعه H را مجموعه راس‌هایی قرار دهید که تعداد شلیک آن‌ها بیشتر از تعداد شلیک i_0 شلیک نباشد، یعنی $H = \{i \in V \mid [\sigma]_i \leq [\sigma]_{i_0}\}$. در این صورت $i_0 \in H$ و $j_0 \in H^c$. اگر i, j دو راس مجاور باشند که $i \in H$ و $j \in H^c$ ، آن‌گاه i بیشتر از j شلیک نشده است، بنابراین تعداد چیپ‌هایی که از طریق یال ij به H وارد شده است بزرگتر یا مساوی تعداد چیپ‌هایی است که از طریق آن یال از H خارج شده است و در یال $i_0 j_0$ این اختلاف برابر $[\sigma]_{i_0} - [\sigma]_{j_0}$ است. بنابراین تعداد کل چیپ‌های راس‌های H بعد از شلیک دنباله σ حداقل به اندازه $[\sigma]_{i_0} - [\sigma]_{j_0}$ افزایش می‌یابد. اما این مقدار نمی‌تواند بیشتر از تعداد کل چیپ‌ها یعنی N افزایش یابد، در نتیجه $[\sigma]_{i_0} - [\sigma]_{j_0} \leq N$. ■

حال قضیه اصلی را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۱-۴-۲ [۳۷] اگر G یک گراف همبند غیر جهت‌دار با n راس، m یال و قطر d باشد، آن‌گاه هر بازی شلیک چیپ پایان‌پذیر روی G بعد از حداکثر $2nmd$ شلیک پایان می‌یابد.

برهان. فرض کنید N تعداد کل چپ‌ها باشد. چون بازی پایان‌پذیر است، طبق لم ۱-۳-۱ یک راس i وجود دارد که اصلاً شلیک نشده است. با استفاده مکرر از لم قبل، هر راس j در فاصله d' از i ، حداکثر $d'N$ بار شلیک شده است. بنابراین بازی حداکثر بعد از nNd شلیک پایان می‌یابد. از طرف دیگر چون بازی پایان‌پذیر است، طبق قضیه ۱-۳-۳ (الف) داریم $N \leq 2m$. در نتیجه طول بازی حداکثر $2nmd$ است. ■

در صورتی که گراف G ساده باشد، با توجه به این که $2m \leq n^2$ و $d \leq n$ ، طول بازی حداکثر از $O(n^4)$ است. این یک کران چندجمله‌ای از تعداد راس‌ها برای طول بازی شلیک چپ روی گراف ساده G به دست می‌دهد. مثال زیر نشان می‌دهد که این کران در حالت کلی بهترین کران است.

مثال ۱-۴-۳ گراف G را به صورت زیر در نظر بگیرید. به یک گراف کامل با $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ راس یک مسیر با $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ راس اضافه کنید که مسیر از یکی از راس‌های گراف کامل شروع شود. در سر دیگر مسیر به تعداد $2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$ چپ بگذارید. با این آرایش شروع، بازی با $O(n^3) + \frac{n^4}{4}$ حرکت ادامه می‌یابد و سپس متوقف می‌شود. لذا طول این بازی از $\Theta(n^4)$ است.

همان‌طور که در بخش ۱-۱ دیدیم بین بازی شلیک روی گراف G و ماتریس لاپلاسی آن گراف، L ارتباطی وجود دارد. در ادامه کرانی برای طول یک بازی شلیک چپ پایان‌پذیر روی G ارائه می‌کنیم که این طول را با کوچکترین مقدار ویژه مثبت L مرتبط می‌کند. مجموع درایه‌های هر سطر L برابر صفر است؛ لذا صفر یک مقدار ویژه L متناظر با بردار ویژه $(1, \dots, 1)^T$ است. در ضمن L یک ماتریس نیم‌معین مثبت است (یعنی همه مقادیر ویژه آن نامنفی اند)، زیرا برای هر بردار $x \in \mathbb{R}^V$

$$x^T L x = \sum_i x_i^2 \text{exdeg}(i) - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} x_i x_j d_{i,j} = \sum_{e=ij \in E(G)} (x_i - x_j)^2 \geq 0.$$

فرض کنید G همبند باشد در این صورت بقیه مقادیر ویژه L مثبت اند، زیرا عبارت فوق تنها وقتی صفر می‌شود که x مضربی از بردار $(1, \dots, 1)^T$ باشد. کوچکترین مقدار ویژه ناصفر L را با λ_2 نشان می‌دهیم. قضیه زیر کرانی برای طول بازی شلیک چپ بر حسب λ_2 بیان می‌کند.

قضیه ۱-۴-۴ [۸] در یک بازی شلیک چپ پایان‌پذیر با N چپ روی گراف همبند G ، تعداد کل شلیک‌ها حداکثر برابر $\frac{2nN}{\lambda_2}$ است.

برهان. فرض کنید θ آرایش شروع و θ_1 آرایش پایانی باشند و σ دنباله قانونی باشد که θ را به θ_1 تبدیل می‌کند. راس‌های G را با اعداد $1, \dots, n$ برچسب‌گذاری کنید و بردار $x \in \mathbb{Z}^V$ را بردار امتیاز σ بگیرید.

هم‌چنین فرض کنید $s = \mathbf{1}^T x$ تعداد کل شلیک‌ها باشد. طبق لم ۱-۳-۱ یک راس وجود دارد که اصلاً شلیک نشده است، لذا بدون کم شدن کلیت مساله می‌توانیم فرض کنیم $x_1 = 0$. از بخش ۱-۱ می‌دانیم که

$$Lx = \theta_1 - \theta_0.$$

حال فرض کنید $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس L و $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1} = v_1, v_2, \dots, v_n$ یک پایه متعامد یک‌ه‌ای بردارهای ویژه متناظر باشد. ماتریس $P_{n \times n}$ را ماتریسی بگیرید که ستون‌های آن بردارهای $v_n, \dots, v_2, v_1$ و $D_{n \times n}$ را ماتریس قطری بگیرید که روی قطر آن اعداد $\lambda_n, \dots, \lambda_2, \lambda_1$ باشد. در این صورت

$$L = PDP^T = \sum_{i=2}^n \lambda_i \cdot v_i v_i^T.$$

قرار دهید

$$L' = \sum_{i=2}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot v_i v_i^T,$$

در این صورت چون $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه متعامد یک‌ه‌ای است، داریم:

$$L'L = \sum_{i,j=2}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_i} v_i v_i^T v_j v_j^T = \sum_{i=2}^n v_i v_i^T = PP^T - v_1 v_1^T = I - \frac{1}{n}J.$$

بنابراین

$$e_1^T L'L = e_1^T - \frac{1}{n}\mathbf{1}^T,$$

ولذا

$$\begin{aligned} s &= \mathbf{1}^T x = (ne_1^T - ne_1^T L'L)x = -ne_1^T L'Lx \\ &= -ne_1^T L'(\theta_1 - \theta_0) = \sum_{i=2}^{n-1} -\frac{n}{\lambda_i} (e_1^T v_i)(v_i^T (\theta_1 - \theta_0)). \end{aligned}$$

حال با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز داریم:

$$\begin{aligned} s &\leq \frac{n}{\lambda_2} \sum_{i=2}^{n-1} |e_1^T v_i| \cdot |v_i^T (\theta_1 - \theta_0)| \leq \frac{n}{\lambda_2} \sqrt{\sum_{i=2}^{n-1} (e_1^T v_i)^2} \sqrt{\sum_{i=2}^{n-1} (v_i^T (\theta_1 - \theta_0))^2} \\ &\leq \frac{n}{\lambda_2} \sqrt{e_1^T \sum_{i=2}^{n-1} (v_i v_i^T) e_1} \sqrt{(\theta_1 - \theta_0)^T \sum_{i=2}^{n-1} (v_i v_i^T) (\theta_1 - \theta_0)} \\ &\leq \frac{n}{\lambda_2} \sqrt{e_1^T e_1} \sqrt{(\theta_1 - \theta_0)^T (\theta_1 - \theta_0)} \\ &\leq \frac{n}{\lambda_2} \|\theta_1 - \theta_0\| \leq \frac{2nN}{\lambda_2}. \end{aligned}$$

و حکم ثابت می‌شود. ■
 لم زیریک کران پایین معروف برای λ_2 به دست می‌دهد.

لم ۱-۴-۵ اگر G یک گراف همبند با n راس و قطر d باشد، آن‌گاه $\lambda_2 \geq \frac{1}{nd}$.

برهان. فرض کنید w بردار ویژه یک متناظر با مقدار ویژه λ_2 باشد، در این صورت یک راس G ، مثلاً راس ۱ وجود دارد که $|w_1| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$. بدون کم شدن کلیت مساله می‌توانیم فرض کنیم که $w_1 > 0$. چون L متقارن است، w بر بردار ویژه متناظر با صفر عمود است، لذا $\sum_j w_j = 0$ و بنابراین یک راس k وجود دارد که $w_k < 0$. فرض کنید مسیر $1, 2, \dots, k$ کوتاه‌ترین مسیر از راس ۱ به راس k باشد. در نتیجه $1 \leq d - k$ و داریم:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= w^T L w = \sum_{ij \in E(G)} (w_i - w_j)^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^{k-1} (w_i - w_{i+1})^2 \geq \frac{1}{k-1} \left(\sum_{i=1}^{k-1} (w_i - w_{i+1}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{k-1} (w_1 - w_k)^2 \geq \frac{1}{(k-1)n} \geq \frac{1}{nd}. \end{aligned}$$

ولذا حکم ثابت می‌شود. ■

با استفاده از لم فوق و قضیه ۱-۴-۴ به دست می‌آوریم $2n^2 N \leq 2n^2 dN \leq s$. اگر گراف G ساده باشد، آن‌گاه با توجه به متناهی بودن بازی داریم $n^2 \leq m - n \leq N$. در نتیجه به دست می‌آوریم که طول بازی حداکثر از $O(n^5)$ است. این کران در حالت کلی ضعیف‌تر از کران قضیه ۱-۴-۲ است، اما در مواردی که λ_2 از پایین کران‌دار باشد^۱، کران قضیه ۱-۴-۴ بهتر است.

^۱گراف‌هایی که λ_2 آن‌ها از پایین کران‌دار است گراف‌های توسیعی نامیده می‌شوند [۲۱].

فصل ۲

بازی شلیک چپ روی گراف‌های جهت‌دار

در این فصل فرایند شلیک چپ را به گراف‌های جهت‌دار تعمیم می‌دهیم. گراف جهت‌دار G داده شده و روی هر راس تعدادی چپ قرار گرفته است. در هر مرحله یک راس آماده یعنی راسی که حداقل به اندازه درجه خروجی‌اش چپ دارد را انتخاب کرده و آن را شلیک می‌کنیم. شلیک یک راس باعث می‌شود که از طریق هر یال خروجی راس مورد نظر، یک چپ به راس انتهایی آن یال منتقل شود. این فرایند تا جایی که هیچ راس آماده‌ای یافت نشود ادامه می‌یابد. در این فصل به سوالاتی در مورد پایان‌پذیری بازی، طول بازی و نقش ترتیب انتخاب راس‌ها می‌پردازیم. در تحلیل بازی شلیک چپ روی گراف‌های جهت‌دار از همان دورهیافت فصل پیش، یعنی رهیافت زبان‌های با خاصیت تبدیل قوی و رهیافت عملگر لاپلاسین گراف G استفاده می‌کنیم. رهیافت زبان‌ها به طور طبیعی به حالت جهت‌دار تعمیم می‌یابد ولی در مورد عملگر لاپلاسین کار به این سر راستی نیست، زیرا در این حالت ماتریس لاپلاسین متقارن نیست و نمی‌توانیم از تجزیه طیفی آن به عنوان یک ابزار استفاده کنیم. با این حال ارتباطی جالب بین ماتریس لاپلاسین و گشت‌های تصادفی روی گراف جهت‌دار G وجود دارد که نزدیکی بین گشت‌های تصادفی و بازی شلیک چپ برقرار می‌کند و می‌تواند ما را به سمت روابطی در مورد طول یک بازی متناهی و دوره تناوب یک بازی نامتناهی رهنمون سازد.

۲-۱ تعاریف و مقدمات

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار باشد (یال چندگانه و طوقه مجاز است). که تعداد راس‌ها و یال‌های آن به ترتیب، n و m است و راس‌های آن با اعداد $1, 2, \dots, n$ برچسب‌گذاری شده‌اند. درجه خروجی و ورودی راس k را به ترتیب با $\deg^+(k)$ و $\deg^-(k)$ نشان می‌دهیم. یک راس k را راس چاهک گوییم هرگاه $d^+(k) = 0$. برای دو راس i, j ، تعداد یال‌های با دم i و سر j را با $d_{i,j}$ نشان داده و از $d_{i,i}$ تعداد طوقه‌های روی v را مراد می‌کنیم. دست آخر تعریف می‌کنیم $\Delta = \max_{k \in V} \deg^+(k)$ و برای بردار $v \in \mathbb{R}^{|V|}$ ، قرار می‌دهیم $\|v\| = \sum_{k \in V} d^+(k)|v_k|$ و $|v| = \sum_{k \in V} |v_k|$.

تعریف ۲-۱-۱ [۷] فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار و $\theta: V \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ یک آرایش باشد که برای هر راس k ، $\theta(k)$ تعداد چپ‌های روی k را نشان می‌دهد. یک راس $k \in V$ را در آرایش θ آماده گویند، هرگاه $\theta(k) \geq \deg^+(k)$.

اگر راس k در آرایش θ آماده باشد، آن‌گاه می‌توانیم آن را شلیک کنیم. با شلیک یک راس، از هر یال خروجی آن یک چپ به همسایه خروجی آن راس منتقل می‌شود. بنابراین آرایش θ به آرایش جدید θ' تبدیل می‌شود که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\theta'(i) = \begin{cases} \theta(i) + d_{i,k} & i \neq k, \\ \theta(k) - d^+(k) + d_{k,k} & i = k. \end{cases}$$

توجه کنید که اگر راس k یک راس چاهک باشد، آن‌گاه این راس همیشه آماده است و در هر مرحله می‌تواند شلیک شود. شلیک این راس هیچ تغییری در آرایش بازی ندارد. بنابراین اغلب فرض می‌شود که یک راس چاهک نمی‌تواند شلیک شود. ما این فرض را در مدل خود با گذاشتن تعداد کافی حلقه روی راس‌های چاهک رعایت می‌کنیم. هم‌چنین توجه کنید که هر گراف غیر جهت‌دار را می‌توان با جایگزین کردن هر یال غیر جهت‌دار با دو یال در جهت متضاد، به یک گراف جهت‌دار تبدیل کرد. لذا نتایج این فصل در مورد گراف‌های غیر جهت‌دار نیز صادقند. یک گراف جهت‌دار را اوپلری گوییم هرگاه برای هر راس k ، $\deg^+(k) = \deg^-(k)$. با توجه به آن‌چه گفته شد هر گراف غیر جهت‌دار را می‌توان یک گراف جهت‌دار اوپلری در نظر گرفت و خواهیم دید که بسیاری از نتایج در مورد گراف‌های غیر جهت‌دار بدون تغییر به گراف‌های جهت‌دار اوپلری تعمیم می‌یابد.

گراف G را قویاً همبند گوییم هرگاه برای هر دو راس i و j ، یک مسیر جهت‌دار از i به j در G وجود داشته باشد. هم‌چنین گراف G را همبند ضعیف (یا به طور خلاصه همبند) گوییم هرگاه گراف زمینه آن (گراف غیرجهت‌داری که از حذف جهت یال‌های G به دست می‌آید)، همبند باشد. یک زیرگراف ماکسیمال قویاً همبند

از G را یک مولفه قویاً همبند G می‌گوییم. هر گراف را می‌توان به طور یکتا به مولفه‌های قویاً همبند افراز کرد. یک مولفه قویاً همبند در G را مولفه چاهک می‌گوییم، هرگاه هیچ یالی مولفه را ترک نکند. به عبارت دیگر هر یالی که یک سر آن درون مولفه و سر دیگر آن بیرون مولفه است، دمش در بیرون مولفه باشد. در ادامه قصد داریم ثابت کنیم که پایان‌پذیری بازی شلیک چپ روی گراف‌های جهت‌دار مستقل از ترتیب شلیک راس‌هاست و تنها به آرایش شروع بستگی دارد. آن‌چه در لم ۱-۲-۳ برای گراف‌های غیر جهت‌دار اثبات شد، در مورد گراف‌های جهت‌دار نیز صادق است و اثبات آن عیناً مشابه اثبات آن لم است. ما از تکرار اثبات صرف نظر می‌کنیم.

لم ۲-۱-۲ [۷] فرض کنید G یک گراف جهت‌دار و θ یک آرایش شروع باشد. مجموعه همه دنباله‌های قانونی برای آرایش شروع θ ، یک زبان موروثی چپ، موضعاً آزاد و جایگشت‌پذیر است. بنابراین با استفاده از لم ۱-۲-۷ نتیجه زیر را به دست می‌آوریم.

نتیجه ۲-۱-۳ [۷] فرض کنید یک گراف جهت‌دار G و آرایش شروع θ داده شده است. در این صورت هر بازی قانونی با شروع از θ می‌تواند به طور نامحدود ادامه یابد یا هر بازی قانونی با شروع از θ بعد از تعداد متناهی حرکت با یک آرایش پایانی یکسان خاتمه می‌یابد. در حالت دوم تعداد دفعاتی که یک راس شلیک می‌شود در همه بازی‌های قانونی منجر به وضعیت پایانی یکسان است.

بعداً در بخش ۲-۵ نیاز داریم که زبان دیگری را در ارتباط با یک گراف جهت‌دار مورد بررسی قرار دهیم. برای یک زبان $\mathcal{L}$ با الفبای V و بردار $a \in \mathbb{Z}_+^{|V|}$ ، مجموعه $\mathcal{L}[a]$ را مجموعه همه کلماتی در $\mathcal{L}$ قرار می‌دهیم که هر حرف x در آن کلمه، حداکثر a_x بار ظاهر شود. به عبارت دیگر $\mathcal{L}[a] = \{\alpha \in \mathcal{L} \mid [\alpha]_x \leq a_x, \forall x \in V\}$. در این صورت لم زیر را داریم:

لم ۲-۱-۴ [۷] اگر $\mathcal{L}$ یک زبان موروثی-چپ، موضعاً آزاد و جایگشت‌پذیر باشد، آن‌گاه $\mathcal{L}[a]$ نیز این‌گونه است.

برهان. موروثی بودن $\mathcal{L}[a]$ مستقیماً از موروثی بودن $\mathcal{L}$ نتیجه می‌شود. اگر $\alpha x, \alpha y \in \mathcal{L}[a]$ ، آن‌گاه با توجه به موضعاً آزاد بودن $\mathcal{L}$ داریم $\alpha xy \in \mathcal{L}$. از طرفی $[\alpha xy]_x = [\alpha x]_x$ و $[\alpha xy]_y = [\alpha y]_y$ ، هم‌چنین برای هر $\alpha xy \in \mathcal{L}[a]$ ، پس $[\alpha xy]_z = [\alpha]_z$ ، $z \neq x, y$. این نشان می‌دهد که $\mathcal{L}[a]$ موضعاً آزاد است. حال فرض کنید $\alpha, \beta \in \mathcal{L}[a]$ و $[\alpha] = [\beta]$. هم‌چنین $\alpha x \in \mathcal{L}[a]$. در این صورت از جایگشت‌پذیر بودن $\mathcal{L}$ داریم $\beta x \in \mathcal{L}$ ، اما $[\beta x] = [\alpha x] \leq a$. پس $\beta x \in \mathcal{L}[a]$. ■

۲-۲ پایان‌پذیری

در بخش ۱-۳ دو لم مقدماتی درباره بازی شلیک چپ متناهی و نامتناهی روی گراف‌های غیر جهت‌دار بیان کردیم. بر طبق این دو لم، اگر بازی متناهی باشد، آن‌گاه یک راس وجود دارد که اصلاً شلیک نشده است (لم ۱-۳-۱) و اگر بازی نامتناهی باشد آن‌گاه همه راس‌ها بی‌نهایت بار شلیک شده‌اند (لم ۱-۳-۲). لم دوم بدون مشکل به حالت جهت‌دار تعمیم می‌یابد (لم ۱-۲-۲). لم اول در حالت جهت‌دار تنها برای گراف‌های اویلری صادق است. (برای اثبات این مطلب نتیجه ۲-۵-۸ را ببینید.)

لم ۱-۲-۲ [۷] در هر بازی شلیک چپ نامتناهی روی یک گراف جهت‌دار G ، یک مولفه چاهک در G وجود دارد که هر راس آن مولفه بی‌نهایت بار شلیک شده است.

برهان. چون بازی نامتناهی است، یک راس k وجود دارد که بی‌نهایت بار شلیک شده است. اگر از k به z یک یال وجود داشته باشد، آن‌گاه z نیز بی‌نهایت بار شلیک شده است، زیرا در غیر این صورت بعد از آخرین شلیک z تعداد نامتناهی چپ در z جمع می‌شود در حالی که تعداد کل چپ‌ها متناهی است. در نتیجه همه راس‌هایی که از راس k به آن‌ها مسیر وجود دارد، بی‌نهایت بار شلیک می‌شوند. از طرف دیگر اگر مولفه قویاً همبندی که k در آن قرار دارد یک مولفه چاهک نباشد، آن‌گاه می‌توانیم از آن مولفه به یک مولفه دیگر برویم و همین‌طور این کار را ادامه دهیم تا به یک مولفه چاهک برسیم. لذا از k به یک مولفه چاهک، یک مسیر وجود دارد. این نشان می‌دهد که هر راس آن مولفه بی‌نهایت بار شلیک شده است. ■

در قضیه ۱-۳-۳ رابطه‌ای بین پایان‌پذیری بازی و تعداد کل چپ‌ها بیان کردیم. یک قسمت از این قضیه به راحتی برای حالت جهت‌دار تعمیم می‌یابد.

گزاره ۲-۲-۲ [۷] فرض کنید در یک بازی شلیک چپ روی گراف جهت‌دار G با n راس و m یال، تعداد کل چپ‌ها N باشد و $N > m - n$ ، آن‌گاه بازی نامتناهی است.

برهان. اگر در یک آرایش θ روی $V(G)$ ، هیچ راس آماده‌ای وجود نداشته باشد، آن‌گاه برای هر $k \in V$ ، $\theta(k) \leq \deg^+(k) - 1$ و لذا $N = \sum_{k \in V} \theta(k) \leq \sum_{k \in V} (\deg^+(k) - 1) = m - n$. بنابراین در هر آرایش حداقل یک راس آماده وجود دارد و در نتیجه بازی نامتناهی است. ■

برای تعمیم قسمت دوم قضیه ۱-۳-۳ با این سوال روبرو هستیم که کمترین تعداد چپ‌ها که می‌توان با آن‌ها یک بازی نامتناهی روی گراف جهت‌دار G انجام داد چقدر است؟ این سوال هنوز در حالت کلی جواب داده

نشده است. این عدد تنها تابعی از تعداد راس‌ها و یال‌ها نیست. به عنوان مثال G_1 را یک دور به طول n با یال‌های دوگانه بگیرید که همگی در دو جهت مخالف جهت‌گذاری شده‌اند و G_2 را دوری به طول n با یال‌های دوگانه بگیرید که یال‌ها هم جهت جهت‌گذاری شده‌اند. طبق قضیه ۱-۳-۳ هر بازی با کمتر از n چپ روی G_1 پایان‌پذیر است، اما با قرار دادن دو چپ روی یک راس گراف G_2 می‌توان یک بازی نامتناهی ترتیب داد. با این حال کران زیر برای این عدد پیدا شده است.

قضیه ۲-۲-۳ [۷] فرض کنید G یک گراف قویاً همبند و h ماکسیمم تعداد دورهای جهت‌دار و یال-مجزا در G باشد، در این صورت هر بازی شلیک چپ با کمتر از h چپ پایان‌پذیر است.

برهان. فرض کنید $C_1, \dots, C_h$ یک خانواده از دورهای جهت‌دار و یال-مجزا در G باشد. در طول بازی فرض کنید چپ‌ی که برای اولین بار از یک یال دور C_i عبور می‌کند، توسط این دور تصاحب می‌شود و تا آخر بازی باید در این دور بماند. این مطلب با قانون بازی تناقض ندارد، زیرا طبق چپ‌ی که در یک دور از راس k به راس $k+1$ می‌رود، در صورت شلیک راس $k+1$ می‌تواند به راس $k+2$ برود و چون دورها یال مجزا هستند، تا آخر در تصاحب همین دور می‌ماند. حال اگر $N < h$ ، آن‌گاه یک دور وجود دارد که چپ‌ی را تصاحب نمی‌کند، لذا راس‌های این دور هرگز شلیک نمی‌شوند. اما طبق لم ۲-۲-۱ اگر بازی نامتناهی باشد، آن‌گاه همه راس‌ها باید شلیک شوند. لذا بازی روی G با N چپ پایان‌پذیر است. ■

۳-۲ ماتریس لاپلاسین جهت‌دار

ماتریس لاپلاسین گراف‌های غیر جهت‌دار بسیار مورد توجه محققین بوده است و نتایج و خواص گوناگون این ماتریس به ویژه ارتباط آن با خواص توسیعی گراف‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. اما ویژگی‌های ماتریس لاپلاسین گراف‌های جهت‌دار کمتر بررسی شده است. ارتباطات جالبی بین ماتریس لاپلاسین و گشت‌های تصادفی وجود دارد که گشت‌های تصادفی را به بازی شلیک چپ مرتبط می‌کند. این بخش و بخش بعد را به مطالعه ماتریس لاپلاسین گراف‌های جهت‌دار و گشت‌های تصادفی روی گراف‌های جهت‌دار اختصاص داده و ابزارهای لازم را برای بررسی بازی شلیک چپ جمع‌آوری می‌کنیم.

تعریف ۲-۳-۱ برای گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ ، ماتریس لاپلاسین G ، یک ماتریس $|V| \times |V|$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_{ij} = \begin{cases} d_{ji}, & i \neq j, \\ -d^+(i) + d_{ii}, & i = j. \end{cases}$$

توجه کنید که مجموع درایه‌های یک ستون در L صفر است، لذا $1^T L = 0$ و در نتیجه L منفرد است. اگر G جهت‌دار اوپلری باشد، آن‌گاه $L1 = 0$.

فرض کنید σ یک دنباله قانونی از وضعیت شروع θ باشد که پس از شلیک متوالی راس‌های آن به وضعیت θ' برسیم. با استدلالی مشابه آن‌چه در بخش ۱-۱ ارائه کردیم می‌توان نشان داد که اگر $[\sigma]$ بردار امتیاز دنباله σ باشد، آن‌گاه

$$\theta' = \theta - L[\sigma].$$

بنابراین می‌توانیم فرایند شلیک راس‌ها در بازی شلیک چپ روی گراف‌های جهت‌دار را به کمک ماتریس لاپلاسین گراف‌های جهت‌دار بیان و توصیف کنیم. در ادامه به بررسی ماتریس لاپلاسین گراف‌های جهت‌دار می‌پردازیم.

قضیه زیر یک قضیه معروف و اساسی است که قضیه پرون-فروبینیوس^۱ نام دارد و توصیفاتی در مورد مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس‌های نامنفی (ماتریس‌هایی با همه درایه‌ها نامنفی) بیان می‌کند. برای یک ماتریس $n \times n$ حقیقی A ، گراف زمینه A یک گراف جهت‌دار تعریف می‌شود که برای هر $1 \leq i, j \leq n$ ، از i به j یال وجود دارد، اگر و تنها اگر $A_{ij} \neq 0$ و ماتریس A تحویل ناپذیر گفته می‌شود هرگاه گراف زمینه آن قویاً همبند باشد. هم‌چنین ماکزیمم قدرمطلق مقادیر ویژه یک ماتریس A را شعاع طیفی A گوئیم و با $\rho(A)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲-۳-۲ (پرون-فروبینیوس) [۱۸] فرض کنید A یک ماتریس حقیقی نامنفی و تحویل ناپذیر $n \times n$ باشد. در این صورت:

الف) $\rho(A)$ یک مقدار ویژه ساده A است، یعنی بعد فضای ویژه متناظر $\rho(A)$ ، یک است. در ضمن اگر x یک بردار ویژه متناظر $\rho(A)$ باشد، آن‌گاه همه مولفه‌های x ناصفر بوده و همگی هم‌علامتند.

ب) اگر A_1 یک ماتریس نامنفی حقیقی $n \times n$ و $A - A_1$ نامنفی باشد، آن‌گاه $\rho(A_1) \leq \rho(A)$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $A_1 = A$.

ج) اگر θ یک مقدار ویژه A باشد که $|\theta| = \rho(A)$ ، آن‌گاه $\frac{\theta}{\rho(A)}$ یک ریشه m ام یکه است و برای هر عدد صحیح r ، $e^{\frac{\gamma \pi i r}{m}} \rho(A)$ یک مقدار ویژه A است.

^۱ Perron-Frobenius

(د) اگر u یک بردار ویژه چپ برای A متناظر با مقدار ویژه λ باشد که همه مولفه‌های آن نامنفی است، آن‌گاه $\lambda = \rho(A)$.

برای اثبات قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج)، [۱۸] را ببینید. در ذیل اثباتی برای قسمت (د) می‌آوریم. برهان. طبق (الف)، یک بردار ویژه v با همه مولفه‌های مثبت متناظر با $\rho(A) = \rho$ وجود دارد. پس $Av = \rho v$ و $u^T A = \lambda u^T$ و لذا داریم $u^T Av = \lambda u^T v = \rho u^T v$. از طرفی چون u برداری ناصفر و نامنفی (همه مولفه‌ها نامنفی) و v برداری مثبت (همه مولفه‌ها مثبت) است، داریم $u^T v > 0$ ، در نتیجه $\lambda = \rho$. ■

برای مطالعه ارتباط ماتریس لاپلاسی با گشت‌های تصادفی روی گراف‌ها به توصیفی از فضای پوچ L ، یعنی فضای همه بردارهای $v \in \mathbb{R}^{|V|}$ که $Lv = 0$ ، نیاز داریم. در قضیه زیر نشان می‌دهیم که برای این فضا یک پایه از بردارهای نامنفی وجود دارد که تکیه‌گاه آن‌ها مولفه‌های چاهک G است.

قضیه ۲-۳-۷ [۷] فرض کنید گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ دارای k مولفه چاهک $S_1, \dots, S_k$ باشد، در این صورت بردارهای $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{Z}^{|V|}$ وجود دارد که

(الف) مجموعه $\{v_1, \dots, v_k\}$ یک پایه برای فضای پوچ ماتریس لاپلاسی G است.

(ب) برای هر $j \in S_i$ ، $(v_i)_j > 0$ و برای هر $j \notin S_i$ ، $(v_i)_j = 0$.

(ج) اگر S_i اوپلری باشد، آن‌گاه برای هر $j \in S_i$ ، $(v_i)_j = 1$.

برهان. ابتدا فرض کنید G قویاً همبند باشد. اگر Δ ماکزیمم درجه خروجی در G باشد، آن‌گاه ماتریس $L + \Delta I$ یک ماتریس حقیقی نامنفی و تحویل ناپذیر است که 1 یک بردار ویژه چپ آن متناظر با Δ است. بنابراین طبق قضیه پرون-فروبینوس قسمت (د)، $\rho(A) = \Delta$ شعاع طیفی $L + \Delta I$ است. لذا طبق قضیه پرون-فروبینوس قسمت (الف)، فضای ویژه ماتریس $L + \Delta I$ متناظر با مقدار ویژه Δ ، یک بعدی است و توسط یک بردار مثبت تولید می‌شود. اما این فضای ویژه دقیقاً همان فضای پوچ L است. پس فضای پوچ L توسط یک بردار مثبت تولید می‌شود که بعد از ضرب در یک عدد صحیح مناسب می‌توانیم فرض کنیم با مولفه‌های صحیح است. به ویژه اگر G همبند و اوپلری باشد، آن‌گاه بردار 1 یک پایه برای فضای پوچ L است.

حال فرض کنید G یک گراف جهت‌دار دلخواه باشد. ادعا می‌کنیم اگر $Lv = 0$ آن‌گاه همه مولفه‌های مربوط به راس‌های بیرون از مولفه‌های چاهک صفر است. فرض کنید چنین نباشد و T^+ و T^- را به ترتیب راس‌های با مولفه مثبت و راس‌های با مولفه منفی در $V \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_k)$ برای بردار v بگیرید. در این صورت $Lv = 0$ و لذا

$$\sum_{j \in V} d_{j,i} v_j = d^+(i) v_i,$$

و با جمع بستن روی $i \in T^+$ داریم:

$$\sum_{i \in T^+} d^+(i) v_i = \sum_{i \in T^+} \sum_{j \in V} d_{j,i} v_j = \sum_{j \in V} v_j \sum_{i \in T^+} d_{j,i}.$$

در جمع طرف راست می‌توانیم تنها روی $j \in T^+ \cup T^-$ جمع ببندیم. زیرا برای $j \notin T^+ \cup T^-$ یا $v_j = 0$ یا j در یک مولفه چاهک قرار دارد و هیچ یالی از i به j وجود ندارد. بنابراین به دست می‌آوریم:

$$\sum_{i \in T^+} d^+(i) v_i = \sum_{j \in T^+} v_j d(j, T^+) + \sum_{j \in T^-} v_j d(j, T^+),$$

که منظور از $d(A, B)$ ، تعداد یال‌هایی است که دم در A و سر در B دارند. از طرف دیگر:

$$\sum_{i \in T^+} d^+(i) v_i = \sum_{i \in T^+} v_i d(i, T^+) + \sum_{i \in T^+} v_i d(i, V \setminus T^+),$$

و در نتیجه از دو معادله اخیر به دست می‌آوریم:

$$\sum_{j \in T^-} v_j d(j, T^+) = \sum_{i \in T^+} v_i d(i, V \setminus T^+).$$

در این معادله طرف چپ نامثبت و طرف راست نامنفی است. بنابراین برای هر $i \in T^+$ ، $d(i, V \setminus T^+) = 0$. از این رو T^+ حاوی یک مولفه چاهک است که با تعریف آن در تناقض است.

حال چون هیچ یالی بین دو مولفه چاهک وجود ندارد، تهدید هر بردار در فضای پوچ L به هر مولفه چاهک، یک بردار در فضای پوچ ماتریس لاپلاسین آن مولفه است. همان طور که ثابت شد این فضای پوچ مولفه یک بعدی است و توسط یک بردار مثبت تولید می‌شود. اجازه دهید $v_1, \dots, v_k$ را به ترتیب بردارهای مثبت مولد فضای پوچ ماتریس لاپلاسین مولفه‌های $S_1, \dots, S_k$ قرار دهیم. بدون تغییر نماد بردار v_i را با قرار دادن صفر در بیرون مولفه S_i ، برداری در $\mathbb{Z}^{|V|}$ در نظر می‌گیریم. اکنون خانواده $\{v_1, \dots, v_k\}$ همگی بردارهایی در فضای پوچ L هستند که این فضا را تولید می‌کنند. در ضمن چون تکیه‌گاه این بردارها مجزا است، آن‌ها مستقل خطی هستند و در نتیجه پایه‌ای برای فضای پوچ L تشکیل می‌دهند. ■

۴-۲ گشت‌های تصادفی روی گراف‌های جهت‌دار

در این بخش دوره مختصری بر خواص گشت‌های تصادفی روی گراف‌های جهت‌دار، با تاکید بر ارتباط آن با ماتریس لاپلاسین گراف‌های جهت‌دار انجام می‌دهیم. نتایج به دست آمده در این بخش ما را در بررسی خواص

تناوبی بازی شلیک چیپ در بخش بعد یاری خواهد کرد. در بخش ۲-۶ نیز موضوعی به نام چرتکه احتمالاتی را معرفی می‌کنیم که ارتباط دیگری را بین گشت‌های تصادفی و بازی شلیک چیپ برقرار می‌کند. فرض کنید گراف G و یک راس شروع k داده شده باشد، یکی از همسایه‌های خروجی k را به تصادف انتخاب می‌کنیم و به آن حرکت می‌کنیم. این کار را برای راس جدید تکرار می‌کنیم. دنباله راس‌های انتخاب شده، یک گشت تصادفی تشکیل می‌دهند. نظریه گشت‌های تصادفی کلاسیک به بررسی گشت‌های تصادفی روی گراف‌های ساده اما نامتناهی مثل گریدها می‌پردازد. احتمال این که یک گشت تصادفی با شروع از یک راس پس از تعداد متناهی قدم به راس اولیه بازگردد چقدر است؟ این نظریه به سوالاتی از این دست پاسخ می‌دهد. اخیراً مطالعه گشت‌های تصادفی روی گراف‌های کلی‌تر ولی متناهی مورد توجه قرار گرفته است. در این تحلیل‌ها کمیت‌های بیشتری می‌تواند بررسی شود، مثلاً این که با شروع از یک راس چند قدم تصادفی می‌زنیم تا به راس اولیه یا یک راس دیگر برسیم و یا از همه راس‌ها عبور کنیم؟ در ادامه دوره‌ای از برخی خواص مهم گشت‌های تصادفی روی گراف‌های جهت‌دار ارائه می‌کنیم. برای مطالعه بیشتر [۲۵] و [۳۱] را ببینید.

یک فرایند تصادفی یک آزمایش تصادفی است که در چند مرحله اتفاق می‌افتد به طوری که نتیجه پیشامد شده در یک مرحله می‌تواند به نتیجه پیشامد شده در مراحل قبل وابسته باشد. مثلاً فرض کنید یک سکه پرتاب می‌کنیم، در صورتی که شیر آمد، یک تاس پرتاب می‌کنیم و در صورتی که خط آمد دوباره آن سکه را پرتاب می‌کنیم. این یک فرایند تصادفی دو مرحله‌ای است. در شرایطی که در یک فرایند تصادفی، نتیجه مرحله n -ام تنها به نتیجه مرحله $(n-1)$ -ام (و نه مراحل قبل‌تر) وابسته باشد، آن را یک فرایند مارکوف می‌گوییم. در صورتی که یک آزمایش تصادفی ثابت، در چند مرحله تکرار شود، آن را یک زنجیر مارکوف می‌گوییم. چون هدف ما تحلیل گشت‌های تصادفی روی گراف‌های متناهی است، بررسی خود را به حالت متناهی محدود می‌کنیم. اجازه دهید تعاریف را دقیق‌تر بیان کنیم.

تعریف ۲-۴-۱ [۲۵] فرض کنید برای $f_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ یک آزمایش تصادفی و A_n فضای نمونه آن باشد. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a \in A_n$ ، $\Pr(f_n = a)$ تابعی از پیشامدهای رخ داده در آزمایش‌های $f_0, \dots, f_{n-1}$ باشد آن‌گاه دنباله $(f_0, f_1, \dots)$ را یک فرایند تصادفی می‌گوییم. اگر به علاوه برای هر $i \in \mathbb{N}$ که $A_i = A$ مجموعه‌ای متناهی است، آن‌گاه آن را فرایند تصادفی متناهی می‌گوییم. یک فرایند تصادفی را فرایند مارکوف می‌خوانیم هرگاه برای هر گزاره‌ی s که درستی آن تنها وابسته به نتایج آزمایش‌های $f_0, \dots, f_{n-1}$ باشد، هر $a \in A_n, b \in A_{n-1}$ داشته باشیم $\Pr(f_n = a | (f_{n-1} = b) \cap s) = \Pr(f_n = a | f_{n-1} = b)$. هم‌چنین احتمال انتقال از b به a در مرحله n -ام که با $p_{a,b}(n)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p_{a,b}(n) = \Pr(f_n = a | f_{n-1} = b).$$

یک زنجیر مارکوف متناهی یک فرایند مارکوف متناهی است که برای هر $a, b \in A$ ، $p_{a,b}(n)$ مستقل از n باشد. اگر فرض کنیم $A = \{1, \dots, n\}$ ، آن‌گاه ماتریس $P = (p_{i,j})_{n \times n}$ را ماتریس انتقال گوئیم. توزیع احتمال آغازی را با $p_0 = ((p_0)_i; i \in A)$ نشان می‌دهیم که $(p_0)_i = \Pr(f_0 = i)$ و توزیع احتمال در مرحله n ام p_n است که $(p_n)_i = \Pr(f_n = i)$.

یک زنجیر مارکوف متناهی را می‌توانیم به صورت یک فرایند در نظر بگیریم که از حالتی به حالت دیگر تغییر می‌کند. با احتمال $(p_0)_i$ از i شروع می‌کنیم. در صورتی که در یک زمان در حالت i باشیم، در گام بعد با احتمال p_{ij} به حالت j می‌رویم. توزیع احتمال آغازی و ماتریس انتقال، به طور کامل فرایند زنجیر مارکوف را مشخص می‌کنند.

تعریف ۲-۴-۲ [۲۵] فرض کنید G یک گراف جهت‌دار باشد که فاقد راس چاهک است، یعنی برای هر $k \in V(G)$ ، $d^+(k) > 0$. یک گشت تصادفی روی G ، یک زنجیر مارکوف $(f_0, f_1, \dots)$ است که مقادیر همه f_i ‌ها در $V(G)$ است. با یک توزیع احتمالی روی راس‌های G مثل p_0 شروع می‌کنیم. (هم‌چنین می‌توانیم از یک راس k_0 شروع کنیم که در واقع یک توزیع است که احتمال k_0 یک و احتمال بقیه راس‌ها صفر است.) در صورتی که مقدار f_t داده شده باشد، برای راس k احتمال این که $f_{t+1} = k$ برابر نسبت تعداد یال‌های واصل f_t به k بر کل یال‌های خروجی f_t است. در واقع احتمالات انتقال در گشت تصادفی روی G به صورت زیر هستند.

$$p_{i,j} = \frac{d_{i,j}}{d^+(i)}, \quad i, j \in V(G). \quad (۱.۲)$$

یک توزیع ایستا برای یک زنجیر مارکوف، یک توزیع آغازی $p_0 = q$ است که $p_1 = p_0 = q$. در واقع اگر q یک توزیع ایستا باشد، آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $p_n = q$.

با توجه تعریف فوق برای توزیع ایستای q در یک گشت تصادفی روی گراف G ، اگر در یک زمان احتمال این که در راس k باشیم q_k باشد، آن‌گاه بعد از یک قدم تصادفی نیز احتمال این که در k باشیم همان q_k است. لم زیرین توزیع ایستا و ماتریس لاپلاسی و ماتریس انتقال روابطی برقرار می‌کند:

لم ۲-۴-۳ فرض کنید G یک گراف جهت‌دار، L ماتریس لاپلاسی آن، $P = (p_{ij})$ ماتریس معرفی شده در معادله (۱.۲) و $q = (q_i; i \in V(G))$ یک توزیع احتمال روی G باشد. در این صورت موارد زیر معادلند:
الف) q ایستا است.

ب) q یک بردار ویژه چپ متناظر با مقدار ویژه یک برای ماتریس P است.

(ج) بردار x که به صورت $x_i = \frac{q_i}{d^+(i)}$ تعریف شده، در معادله $Lx = 0$ صدق کند.

برهان. توزیع p_1 توزیع احتمالی روی راس‌ها بعد از یک قدم تصادفی است، بنابراین برای هر $i \in V$ داریم

$$(p_1)_i = \Pr(f_1 = i) = \sum_{j=1}^n \Pr(f_1 = i | f_0 = j) \cdot \Pr(f_0 = j) = \sum_{j=1}^n \frac{d_{j,i}}{d^+(j)} q_j.$$

در نتیجه $p_1 = q$ اگر و تنها اگر $q^T = q^T P$ ، یعنی q بردار ویژه چپ ماتریس P متناظر با مقدار ویژه یک باشد. هم‌چنین $p_1 = q$ اگر و تنها اگر برای هر $i \in V$

$$\sum_{j=1}^n d_{j,i} \frac{q_j}{d^+(j)} - d^+(i) \frac{q_i}{d^+(i)} = 0.$$

لذا با قرار دادن $x_i = \frac{q_i}{d^+(i)}$ به دست می‌آوریم $p_1 = q$ اگر و تنها اگر $Lx = 0$. ■

توجه کنیم که چون q یک توزیع احتمالی است، بردار x تعریف شده در لم بالا در شرط $\|x\| = 1$ صدق می‌کند. از طرف دیگر اگر G یک گراف قویاً همبند باشد، آنگاه طبق قضیه ۲-۳-۳ معادله $Lx = 0$ با $\|x\| = 1$ یک جواب یکتای مثبت دارد. در نتیجه یک توزیع ایستای یکتا روی G وجود دارد که برابر $x_i = \frac{1}{m}$ است و برای هر $i \in V$ ، $q_i > 0$. هم‌چنین اگر علاوه بر این G اویلری باشد، آنگاه قضیه ۲-۳-۳ نتیجه می‌دهد که $x_i = \frac{1}{m}$ و $q_i = \frac{d^+(i)}{m}$ که m تعداد یال‌های G است.

تعریف ۲-۴-۴ [۷] برای دوراس i و j ، زمان دسترسی راس j از راس i را برابر امید ریاضی تعداد گام‌ها در یک گشت تصادفی با شروع از i قبل از اولین برخورد با j تعریف می‌کنیم و با $\text{acc}(i, j)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $\text{acc}(i, i)$ برابر امید ریاضی تعداد گام‌ها با شروع از i قبل از اولین بازگشت به i است. ماکزیمم زمان دسترسی بین هر دوراس G را با $\text{acc}(G)$ نشان می‌دهیم.

در گزاره زیر ثابت می‌کنیم که همواره در گراف‌های قویاً همبند مقدار $\text{acc}(i, j)$ متناهی است.

گزاره ۲-۴-۵ اگر G یک گراف جهت‌دار قویاً همبند باشد، آنگاه برای هر $i, j \in V(G)$ ، $\text{acc}(i, j)$ متناهی است.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم $\text{acc}(i, i)$ متناهی است. یک گشت تصادفی $(i, f_1, f_2, \dots)$ با شروع از راس i در نظر می‌گیریم. فرض کنیم راس i روی یک دور جهت‌دار C باشد. (که چون i راس چاهک نیست و G قویاً همبند است، امکان‌پذیر است.) بنابراین احتمال این که گشت زن تصادفی روی C حرکت کند و به i برگردد مثبت

است. لذا احتمال این که گشت‌زن تصادفی بعد از تعداد متناهی حرکت به راس i بازگردد، مثبت است.^۲ پس یک $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $\Pr(f_n = i) > 0$. فرض کنید n_0 کوچکترین عددی باشد که این احتمال مثبت است و قرار دهید $p = \Pr(f_{n_0} = i) > 0$. بنابراین

$$\Pr(f_{2n_0} = i) \geq \Pr(f_{n_0} = i \cap f_{n_0} = i) = \Pr(f_{n_0} = i | f_{n_0} = i) \cdot \Pr(f_{n_0} = i) = p^2.$$

با تکرار استدلال فوق ثابت می‌شود که $\Pr(f_{tn_0} = i) \geq p^t$ برای هر $t \in \mathbb{N}$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \text{acc}(i, i) &= n_0 \Pr(f_{n_0} = i) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} k \Pr(f_k = i \cap f_{k-1} \neq i \cap \dots \cap f_{n_0} \neq i) \\ &\leq n_0 p + \sum_{t=1}^{\infty} (t+1) n_0^2 \Pr(f_{tn_0} \neq i) \leq n_0 p + \sum_{t=1}^{\infty} (t+1) n_0^2 (1-p^t) \\ &\leq n_0 p + n_0^2 \sum_{t=1}^{\infty} (t+1) (1-p)^t < \infty. \end{aligned}$$

حال فرض کنید $i, j \in V$ و $e_1 e_2 \dots e_h$ یک مسیر باشد که i را به j وصل می‌کند و یک گشت تصادفی با شروع از i را در نظر بگیرید. فرض کنید که باید τ_1 گام منتظر بمانیم تا از یال e_1 عبور کنیم. بعد از آن باید τ_2 گام منتظر بمانیم تا از e_2 عبور کنیم و همین طور تا آخر. بنابراین بعد از $\tau_1 + \dots + \tau_h$ گام به j می‌رسیم و در نتیجه $\text{acc}(i, j) \leq \mathbb{E}(\tau_1 + \dots + \tau_h)$. لذا با توجه به خاصیت خطی امید ریاضی، کافی ثابت کنیم $\mathbb{E}(\tau_k)$ متناهی است. این مطلب را برای $\mathbb{E}(\tau_1)$ ثابت می‌کنیم و بقیه به طور مشابه است. قرار دهید $d = d^+(i)$ ، احتمال این که گشت‌زن تصادفی پس از t -امین ملاقات راس i از e_1 عبور کند برابر $1/d(1-1/d)^t$ است، لذا

$$\mathbb{E}(\tau_1) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{d} \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t (t \cdot \text{acc}(i, i) + 1) < \infty.$$

■

در نتیجه حکم ثابت می‌شود.

در قضیه زیر مقدار دقیق $\text{acc}(i, i)$ را به دست می‌آوریم.

قضیه ۲-۴-۶ [۷] اگر G یک گراف جهت‌دار قویاً همبند و q توزیع ایستا روی $V(G)$ باشد، آنگاه $\text{acc}(i, i) = \frac{1}{q_i}$.

^۲ در واقع این احتمال برابر یک است. راس j_0 را گرفته و فرض کنید r_i احتمال این باشد که یک گشت تصادفی با شروع از i بعد از تعداد متناهی گام به j_0 برسد. واضح است که $r_{j_0} = 1$ و برای هر $i \neq j_0$ ، $r_i = \sum_k \frac{d_{i,k}}{d^+(i)} r_k$. قرار می‌دهیم $r_{i_0} = \min_k r_k$. در این صورت برای هر همسایه خروجی i_0 مثل k داریم $r_k = r_{i_0}$ زیرا اگر برای یک همسایه خروجی i_0 مثل k داشته باشیم $r_{k_0} > r_{i_0}$ ، آنگاه $r_{i_0} = \sum_k \frac{d_{i_0,k}}{d^+(i_0)} r_k > \sum_k \frac{d_{i_0,k}}{d^+(i_0)} r_{i_0} = r_{i_0}$. با تکرار این استدلال با توجه به این که G قویاً همبند است، به دست می‌آوریم برای هر k ، $r_k = r_{j_0} = 1$ ، یعنی با شروع از هر راس k ، حتماً بعد از تعداد متناهی گام به j_0 می‌رسیم.

برهان. قرار دهید $m_{i,j} = \text{acc}(i,j)$ و $M = (m_{i,j})$ و برای i, j ثابت، X را برابر تعداد گام‌های تصادفی با شروع از i ، قبل از اولین برخورد با j بگیرید. در این صورت

$$\begin{aligned} m_{i,j} &= \mathbf{E}(X) = \sum_k \mathbf{E}(X|f_1 = k) \cdot \Pr(f_1 = k) = \frac{d_{i,j}}{d^+(i)} + \sum_{k \neq j} \frac{d_{i,k}}{d^+(i)} (1 + m_{k,j}) \\ &= \frac{1}{d^+(i)} \sum_k d_{i,k} + \sum_{k \neq j} \frac{d_{i,k}}{d^+(i)} m_{k,j}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$m_{i,j} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,k} m_{k,j} = 1 + \sum_k p_{i,k} m_{k,j} - p_{i,j} m_{j,j}. \quad (2.2)$$

اگر D یک ماتریس قطری باشد که درایه‌های روی قطرش اعداد $m_{1,1}, \dots, m_{n,n}$ است و J ماتریسی با همه درایه‌های ۱ باشند، آن‌گاه می‌توان معادله (۲.۲) را به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$M = J + P(M - D).$$

از طرفی طبق لم ۲-۴-۳، q یک مقدار ویژه راست برای P است و لذا

$$q^T M = q^T J + q^T P(M - D) = \mathbf{1}^T + q^T (M - D).$$

■ و از آن جا داریم $q^T D = \mathbf{1}^T$. در نتیجه برای هر $i \in V(G)$ و لذا $q_i m_{ii} = 1$ و $m_{ii} = \frac{1}{q_i}$.

قضیه زیر کرانی برای مقدار $\text{acc}(i,j)$ در گراف‌های قویاً همبند به دست می‌دهد.

قضیه ۲-۴-۷ [۷] گراف جهت‌دار قویاً همبند G را توزیع ایستای q روی $V(G)$ در نظر بگیرید و فرض کنید دو راس i و j بوسیله مسیر جهت‌دار $i = i_0, i_1, \dots, i_h = j$ به هم وصل شده‌اند. در این صورت

$$\text{acc}(i,j) \leq \left(\sum_{r=0}^{h-1} \frac{d^+(i_r)}{q_{i_r}} \right) - h.$$

برهان. فرض کنید $e_1 = i_0 i_1$ و $e_h = i_{h-1} i_h$ یال‌های متوالی مسیر داده شده باشد. یک گشت تصادفی با شروع از i را در نظر بگیرید. فرض کنید باید τ_1 گام منتظر بمانیم تا از یال e_1 عبور کنیم. بعد از آن باید τ_2 گام منتظر بمانیم تا از e_2 عبور کنیم و همین طور تا آخر. بنابراین بعد از $\tau_1 + \dots + \tau_h$ گام به j می‌رسیم و در

نتیجه $\text{acc}(i, j) \leq E(\tau_1 + \dots + \tau_h)$. لذا با توجه به خاصیت خطی امید ریاضی، کافی است ثابت کنیم

$$E(\tau_{k+1}) \leq \frac{d^+(i_r)}{q_{i_r}} - 1. \quad (3.2)$$

این مطلب را برای $r = 0$ نشان می‌دهیم و بقیه مشابه است. اگر $d^+(i) = 1$ آنگاه به وضوح $E(\tau_1) = 1$ و با توجه به ایستنا بودن q ، $q_{i_1} = q_{i_0} + \sum_{k \neq i_0} d_{k,i_1}/d^+(k)$ و لذا $q_{i_1} \geq q_{i_0}$. این موضوع نشان می‌دهد که $q_i = q_{i_0} \leq \frac{1}{d}$ و در نتیجه (۳.۲) برای $d^+(i) = 1$ صادق است. قرار دهید $d^+(i) > 1$ و $q = q_i$ و با شروع از i فرض کنید $E(k)$ امید تعداد گام‌ها قبل از بازگشت به i باشد، به شرطی که حرکت اول از یکی از یال‌های واصل i به k باشد. در این صورت

$$\sum_k \frac{d_{i,k}}{d} E(k) = \text{acc}(i, i) = \frac{1}{q},$$

که تساوی اخیر با توجه به گزاره ۲-۴-۶ است. در نتیجه امید تعداد گام‌ها قبل از بازگشت به i به شرطی که در حرکت اول از یال e_1 عبور نکنیم برابر است با

$$\frac{1}{d-1} \left[\sum_k d_{i,k} E(k) - E(i_1) \right] \leq \frac{d}{d-1} \frac{1}{q} - \frac{2}{d-1} = \frac{d-2q}{(d-1)q}.$$

حال احتمال این که گشت‌زن تصادفی پس از t -امین ملاقات راس i از e_1 عبور کند برابر $(1 - \frac{1}{d})^t$ است، لذا $E(\tau_1)$ حداکثر برابر با مقدار زیر است:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{d} \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t \left(t \frac{d-2q}{(d-1)q} + 1\right) = \frac{d}{q} - 1$$

■

و ادعا ثابت می‌شود.

نتیجه ۲-۴-۸ [۷] برای گراف جهت‌دار قویاً همبند G با توزیع ایستای q ، داریم $\text{acc}(G) \leq \|(\frac{1}{q_k})\|$.

برهان.

$$\text{acc}(i, j) \leq \sum_{r=0}^{h-1} \frac{d^+(i_r)}{q_{i_r}} \leq \sum_{k \in V} \frac{d^+(k)}{q_k} = \left\| \left(\frac{1}{q_k} \right) \right\|.$$

■

و لذا حکم ثابت می‌شود.

نتیجه ۲-۴-۹ [۷] برای گراف همبند و اوپلری G با n راس و m یال، داریم $\text{acc}(G) \leq nm$.
 برهان. اگر q توزیع ایستا روی $V(G)$ باشد، آنگاه طبق قضیه ۲-۳-۳ و لم ۲-۴-۳، برای هر راس k ،
 $q_k = d^+(k)/m$. لذا به کمک نتیجه ۲-۴-۸، $\text{acc}(G) \leq \|(\frac{1}{q_k})\| = \sum_k m = nm$. ■

لم زیر رابطه دیگری را بین ماتریس لاپلاسین و زمان دسترسی به دست می‌دهد.

لم ۲-۴-۱۰ [۷] فرض کنید G یک گراف جهت‌دار قویاً همبند با ماتریس لاپلاسین L باشد و
 $i, j \in V(G)$ دو راس متمایز در G باشند. در این صورت یک بردار $w \in \mathbb{R}^{|V|}$ وجود دارد که

$$Lw = e_j - e_i, \quad w \geq 0, \quad w_j = 0, \quad (4.2)$$

و

$$\text{acc}(i, j) = \|w\|.$$

(توجه کنید که شرایط (۴.۲)، w را به طور یکتا مشخص می‌کنند.)

برهان. فرض کنید u_k برابر امید تعداد دفعاتی باشد که یک گشت‌زن تصادفی با شروع از i راس k را ترک می‌کند، قبل از این که به راس j برخورد کند. بنابراین $u_j = 0$ و برای هر $i, j \neq r$ ، داریم

$$u_r = \sum_k d_{k,r} \frac{u_k}{d^+(k)},$$

زیرا $u_k/d^+(k)$ برابر امید تعداد دفعاتی است که گشت‌زن تصادفی از یک یال مشخص واصل k به r می‌گذرد.
 برای $i = j$ به خاطر شروع یک واحد به مقدار فوق اضافه می‌شود و برای $r = j$ به خاطر پایان یک واحد از مقدار فوق کم می‌شود، لذا

$$u_i = \sum_k d_{k,i} \frac{u_k}{d^+(k)} + 1, \quad 0 = u_j = \sum_k d_{k,j} \frac{u_k}{d^+(k)} - 1.$$

در نتیجه برای $w_i = u_i/d^+(i)$ و $w = (w_1, \dots, w_n)$ داریم $Lw = e_j - e_i$ و به وضوح $w \geq 0$ و $w_j = 0$.
 علاوه بر این

$$\text{acc}(i, j) = \sum_k u_k = \|w\|.$$

■

بنابراین حکم برقرار است.

در پایان این بخش نتیجه‌ای را بیان می‌کنیم که در بخش بعد استفاده خواهد شد.

قضیه ۲-۴-۱۱ [۷] فرض کنید G یک گراف جهت دار قویاً همبند، $w \in \mathbb{R}^{|V|}$ و $\min_k w_k = 0$. در این صورت

$$\|w\| \leq \frac{1}{\gamma} |Lw| \text{ acc}(G).$$

برهان. فرض کنید $V^+ = \{i : (Lw)_i > 0\}$ و $V^- = \{i : (Lw)_i < 0\}$. بنابراین

$$Lw = \sum_{j \in V^+} a_j e_j - \sum_{i \in V^-} a_i e_i,$$

که برای هر $k \in V^+ \cup V^-$ ، $e_k > 0$ از طرفی $1^\top L = 0$ ، لذا $\sum_{j \in V^+} a_j - \sum_{i \in V^-} a_i = 1^\top Lw = 0$. نتیجه

$$Lw = \sum_{j \in V^+} a_j (e_j - e_i) + \sum_{i \in V^-} a_i (e_j - e_i) = \sum_{j \in V^+, i \in V^-} \left(\frac{a_j}{|V^-|} + \frac{a_i}{|V^+|} \right) (e_j - e_i).$$

قرار دهید $\beta_{ij} = \frac{a_j}{|V^-|} + \frac{a_i}{|V^+|}$ و لذا $Lw = \sum_{j \in V^+, i \in V^-} \beta_{ij} (e_j - e_i)$. فرض کنید $w^{(ij)}$ بردار به دست آمده در لم ۲-۴-۱۰ باشد که

$$Lw^{(ij)} = e_j - e_i, \quad w^{(ij)} \geq 0, \quad w_j^{(ij)} = 0,$$

و قرار دهید $w' = \sum_{j \in V^+, i \in V^-} \beta_{ij} w^{(ij)}$. پس $L(w' - w) = 0$ ، بنابراین طبق قضیه ۲-۳-۳ همه مولفه های بردار $w' - w$ هم علامت هستند. از طرفی چون $\min_k w_k = 0$ و $w' \geq 0$ داریم $w \leq w'$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \|w\| &\leq \|w'\| = \sum_{j \in V^+, i \in V^-} \beta_{ij} \|w^{(ij)}\| = \sum_{i,j} \beta_{i,j} \text{acc}(i,j) \\ &\leq \left(\sum_{i,j} \beta_{i,j} \right) \text{acc}(G) = \frac{1}{\gamma} |Lw| \text{acc}(G). \end{aligned}$$

■

ولذا حکم برقرار است.

۲-۵ دوره تناوب و طول بازی

در این بخش به بررسی دوره تناوب بازی های نامتناهی و طول بازی های متناهی می پردازیم. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف جهت دار و L ماتریس لاپلاسین آن باشد و یک بازی شلیک چپ روی G در نظر

بگیریم. در صورتی که این بازی نامتناهی باشد، با توجه به این که تعداد آرایش‌های مختلف متناهی است، حتماً بعد از تعداد متناهی شلیک یک آرایش θ تکرار می‌شود. فرض کنیم $(k_0, \dots, k_{n-1})$ یک دنباله قانونی از راس‌ها باشد که ترتیب راس‌های شلیک شده از اولین ظهور آرایش θ تا دومین ظهور آرایش θ را نشان دهد. بردار $v = [\sigma]$ را بردار امتیاز دنباله σ قرار می‌دهیم. به یاد می‌آوریم که برای هر $v_i, i \in V$ برابر تعداد دفعات شلیک راس i در دنباله σ است. در نتیجه داریم $\theta = \theta - Lv$ ، یعنی $Lv = 0$.

تعریف ۲-۵-۱ [۷] یک بردار $v \in \mathbb{R}^{|V|}$ را یک بردار تناوب می‌گوییم هرگاه همه مولفه‌های v صحیح و نامنفی باشند و $Lv = 0$. بردار تناوب v را اولیه می‌گوییم هرگاه مولفه‌های v ، مقسوم‌علیه مشترک نابديهی نداشته باشند.

قضیه ۲-۳-۳ مستقیماً نشان می‌دهد که در گراف‌های قویاً همبند یک بردار تناوب اولیه یکتا وجود دارد. ما نتایج قضیه مذکور را در گزاره زیر جمع می‌کنیم.

گزاره ۲-۵-۲ فرض کنید G یک گراف جهت‌دار باشد. در این صورت

(الف) اگر G قویاً همبند باشد، آن‌گاه G یک بردار تناوب اولیه یکتای v_G دارد. این بردار اکیداً مثبت است و همه بردارهای تناوب مضارب طبیعی v_G هستند.

(ب) اگر G همبند اوپلری باشد، آن‌گاه $v_G = 1$.

(ج) در حالت کلی بردارهای تناوب یک گراف جهت‌دار دلخواه G بردارهایی به شکل $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ هستند که $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ و $v_1, \dots, v_k$ بردارهای تناوب اولیه مولفه‌های چاهک G می‌باشند.

تعریف ۲-۵-۳ برای هر گراف جهت‌دار قویاً همبند G ، مقدار $|v_G| = \sum_k (v_G)_k$ را دوره تناوب G گفته و با $\text{per}(G)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین برای هر گراف دلخواه G ، $\text{per}(G)$ را برابر مجموع $\text{per}(H)$ روی همه مولفه‌های قویاً همبند H از G تعریف می‌کنیم.

با توجه به تعریف فوق به عنوان مثال اگر همه مولفه‌های قویاً همبند G اوپلری باشند، آن‌گاه $\text{per}(G) = n$. در لم ۱-۳-۱ ثابت کردیم که در یک بازی پایان‌پذیر روی یک گراف غیرجهت‌دار، راسی وجود دارد که شلیک نشده است. اکنون آماده‌ایم تا تعمیمی از این لم را برای گراف‌های جهت‌دار اوپلری ثابت کنیم. ابتدا یک لم مهم

و جالب را بیان می‌کنیم. یک نتیجه از این لم این است که اگر از یک بازی قانونی روی G ، یک دوره تناوب کم کنیم، آن‌گاه باز هم یک دنباله قانونی به دست می‌آوریم.

لم ۲-۵-۴ فرض کنید σ یک دنباله قانونی از یک آرایش شروع θ باشد و بردار نامنفی $v \in \mathbb{Z}^{|V|}$ به گونه‌ای باشد که $\theta' = \theta - Lv$ یک تابع آرایش باشد. حال σ' را زیردنباله‌ای از σ بگیرید که از حذف اولین v_i بار وقوع راس i در σ ، برای هر i به دست می‌آید. (اگر راس i کمتر از v_i بار اتفاق افتاده باشد، آن‌گاه همه i ها را حذف می‌کنیم.) در این صورت σ' یک دنباله قانونی با شروع از آرایش θ' است.

برهان. فرض کنید $\sigma = x_1 \dots x_m$ و $\sigma' = x_{i_1} \dots x_{i_k}$. با استقرا فرض می‌کنیم دنباله $x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}}$ با شروع از θ' قانونی باشد و قرار می‌دهیم $y = x_{i_k}$. در بازی σ با شروع از θ بعد از $i_k - 1$ شلیک اول، نوبت شلیک y می‌رسد و بنابراین در این لحظه y به اندازه $c \geq d^+(y)$ چپ دارد. اجازه دهید این عدد را با تعداد چپ‌های روی y بعد از $k - 1$ حرکت اول در بازی σ' با شروع از θ' مقایسه کنیم. اولاً تعداد چپ‌های روی y در آرایش شروع θ' به اندازه $(Lv)_y -$ بیشتر از آرایش شروع θ است. ثانیاً ما $v(y)$ وقوع اول y را در σ حذف کرده‌ایم، بنابراین y به اندازه $v(y)$ بار کمتر شلیک شده است. به این خاطر در آرایش حاضر $(d^+(y) - d_{y,y})v(y)$ چپ بیشتر روی y قرار دارد. اما از طرف دیگر همسایه‌های y هم کمتر شلیک شده‌اند و از این بابت y چپ‌های کمتری از آنان دریافت می‌کند. به بیان دقیق‌تر برای هر راس u ، اگر بعد از $i_k - 1$ شلیک اول در بازی σ ، y به تعداد $a(u)$ چپ از u دریافت کند، آن‌گاه بعد از $k - 1$ حرکت اول در بازی σ' ، به اندازه $\max\{0, a(u) - d_{u,y}v(u)\}$ چپ از آن دریافت می‌کند. بنابراین به اندازه $a(u) - \max\{0, a(u) - d_{u,y}v(u)\} = \min\{a(u), d_{u,y}v(u)\}$ کمتر چپ از u دریافت می‌کند. در نتیجه تعداد چپ‌های روی y بعد از $k - 1$ شلیک اول در بازی σ' با شروع از θ' برابر است با

$$\begin{aligned} c - (Lv)_y + (d^+(y) - d_{y,y})v(y) - \sum_{u: u \neq y} \min\{a(u), d_{u,y}v(u)\} \\ \geq c - (Lv)_y + d^+(y)v(y) - \sum_u d_{u,y}v(u) = c \geq d^+(y). \end{aligned}$$

■

بنابراین σ' یک دنباله قانونی با شروع از θ' است.

نتیجه ۲-۵-۵ فرض کنید v یک بردار تناوب گراف جهت‌دار G ، σ یک دنباله قانونی از آرایش شروع θ و σ' دنباله مذکور در لم فوق باشد، در این صورت σ' نیز یک دنباله قانونی از آرایش شروع θ است.

برهان. طبق فرض داریم $Lv = 0$ ، بنابراین $\theta - Lv = \theta$ نامنفی است و طبق لم قبل σ' یک دنباله قانونی از آرایش شروع $\theta = \theta'$ است. ■

تعریف ۲-۵-۶ [۷] بردار غیرصفر $a \in \mathbb{R}^{|V|}$ را تقلیل یافته می‌گوییم هرگاه برای هر بردار تناوب v ، یک راس i وجود داشته باشد که $a_i < v_i$.

قضیه زیر نشان می‌دهد که تنها در بازی‌های نامتناهی ممکن است یک دوره تناوب، کامل اجرا شود.

قضیه ۲-۵-۷ [۷] هر بردار امتیاز یک بازی قانونی پایان‌پذیر، تقلیل یافته است.

برهان. فرض کنید σ یک دنباله قانونی با بردار امتیاز غیرتقلیل یافته $[\sigma]$ باشد. بنابراین بردار تناوب v وجود دارد که $v \leq [\sigma]$. لذا طبق نتیجه ۲-۵-۵ یک بازی قانونی σ' با بردار امتیاز $v - [\sigma]$ وجود دارد. اما زبان دنباله‌های قانونی دارای خاصیت تبدیل قوی است.^۳ لذا یک زیر دنباله β از σ وجود دارد که $\sigma'\beta$ یک بازی قانونی است و $[\sigma'\beta] = [\sigma]$. بنابراین $v = [\beta]$ و در نتیجه σ' و $\sigma'\beta$ به یک آرایش منجر می‌شوند. لذا $\sigma'\beta\beta\cdots$ یک بازی قانونی نامتناهی است. هم‌چنین σ و $\sigma'\beta$ به یک آرایش منجر می‌شوند (چون دارای امتیاز یکسانند)، در نتیجه $\sigma\beta\beta\cdots$ نیز یک بازی قانونی نامتناهی است. ■

تعمیم لم ۱-۳-۱ برای گراف‌های اویلری نتیجه مستقیم قضیه بالاست.

نتیجه ۲-۵-۸ [۷] اگر یک بازی شلیک چپ روی گراف اویلری G متناهی باشد، آنگاه راسی وجود دارد که هرگز شلیک نشده است.

برهان. فرض کنید σ دنباله قانونی این بازی باشد. طبق گزاره ۲-۵-۲ بردار ۱، یک بردار تناوب برای G است. از طرفی طبق قضیه ۲-۵-۷، بردار امتیاز این بازی، $[\sigma]$ تقلیل یافته است. لذا یک راس i وجود دارد که $1 < [\sigma]_i$ ، یعنی راس i شلیک نشده است. ■

تاکنون برای گراف‌های جهت‌دار قویاً همبند، دو پارامتر معرفی کردیم که هر کدام به نوعی سرعت انتشار را در گراف G اندازه‌گیری می‌کنند، یکی زمان دسترسی، $\text{acc}(G)$ و دیگری دوره تناوب، $\text{per}(G)$. قضیه زیر رابطه‌ای بین دوره تناوب و زمان دسترسی در گراف‌های قویاً همبند برقرار می‌کند.

^۳بخش ۱-۲ را ببینید.

قضیه ۲-۵-۹ [۷] برای هر گراف قویاً همبند G ، داریم $\text{acc}(G) \leq n\Delta \text{ per}(G)$.

برهان. فرض کنیم $v = v_G$ بردار تناوب اولیه G باشد و q را توزیع ایستا روی $V(G)$ بگیریم. در این صورت طبق لم ۲-۴-۳، برای هر $i \in V$

$$\frac{q_i}{d^+(i)} = \frac{v_i}{\|v\|}. \quad (۵.۲)$$

لذا به کمک نتیجه ۲-۴-۸ داریم

$$\begin{aligned} \text{acc}(G) &\leq \sum_k \frac{d^+(k)}{q_k} = \|v\| \sum_k \frac{1}{v_k} \leq n\|v\| \\ &\leq n\Delta \sum_k v_k = n\Delta \text{ per}(G). \end{aligned} \quad (۶.۲)$$

■

و این حکم را ثابت می‌کند.

علاوه بر پارامترهای زمان دسترسی، $\text{acc}(G)$ و دوره تناوب، $\text{per}(G)$ ، پارامتر دیگری از این دست برای یک گراف جهت‌دار قابل تعریف است.

تعریف ۲-۵-۱۰ [۷] برای گراف جهت‌دار G ، طول بازی G را ماکزیمم طول یک بازی متناهی روی گراف G ، یعنی ماکزیمم تعداد راس‌های شلیک شده در یک بازی متناهی روی گراف G ، تعریف کرده و با $\text{game}(G)$ نشان می‌دهیم.

برای گراف اویلری بدون یال چندگانه G ، طبق نتیجه ۲-۴-۹، $\text{acc}(G)$ از $O(n^3)$ بوده و طبق گزاره ۲-۵-۲، $\text{per}(G) = n$. هم‌چنین قبلاً برای گراف غیر جهت‌دار ساده G ، طی قضیه ۱-۴-۲ ثابت کردیم که $\text{game}(G)$ از $O(n^4)$ است. در ادامه ضمن یافتن رابطه‌ای بین طول بازی و دوره تناوب، ثابت می‌کنیم که $\text{game}(G)$ برای گراف‌های اویلری بدون یال چندگانه از $O(n^5)$ است.

لم ۲-۵-۱۱ [۷] فرض کنید G یک گراف قویاً همبند با بردار تناوب اولیه v باشد و a را یک بردار نامنفی تقلیل یافته در نظر بگیرید. در این صورت

$$\|a\| \leq \left(1 + \frac{n}{4}|La|\right) \|v\|.$$

برهان. با توجه به تعریف بردار تقلیل یافته، یک $0 \leq \lambda < 1$ وجود دارد که $\min_k (a_k - \lambda v_k) = 0$. بنابراین طبق قضیه ۲-۴-۱۱،

$$\|a - \lambda v\| \leq \frac{1}{\varphi} |L(a - \lambda v)| \text{acc}(G).$$

از طرف دیگر با توجه به تعریف بردار تناوب، $L(a - \lambda v) = La$. لذا به کمک نامساوی (۶.۲)،

$$\|a\| \leq \lambda \|v\| + \frac{1}{\varphi} |La| \text{acc}(G) \leq \|v\| + \frac{1}{\varphi} |La| n \|v\|.$$

■

در نتیجه حکم ثابت می شود.

لم ۲-۵-۱۲ [۷] فرض کنید a بردار امتیاز یک بازی با N چپ روی یک گراف جهت دار G باشد. اگر a تقلیل یافته باشد، آن گاه $|a| < 2nN\Delta \text{per}(G)$.

برهان. فرض کنید θ آرایش شروع و θ' آرایش پایانی بازی باشد. در این صورت $|\theta' - \theta| \leq 2N$. اگر $|La| = |\theta' - \theta|$. اگر G قویاً همبند باشد، آن گاه طبق لم ۲-۵-۱۱،

$$|a| \leq \|a\| \leq (1 + nN)\|v\| < 2nN\Delta \text{per}(G).$$

در ادامه، لم را برای گراف جهت دار دلخواه G به دست می آوریم. فرض کنید برای هر مولفه قویاً همبند H از G ، بردار a_H از تحدید بردار a به راس های مولفه H به دست آید، بنابراین $|a_H|$ برابر تعداد شلیک ها در آن مولفه است. به دو ملاحظه زیر توجه کنید:

ملاحظه ۱- اگر یک مولفه قویاً همبند H_1 به یک مولفه قویاً همبند H_2 وصل باشد، آن گاه شلیک راس های H_2 نمی تواند به شلیک راس های H_1 کمک کند. در نتیجه می توانیم فرض کنیم که همه شلیک های راس های H_2 بعد از همه شلیک های راس های H_1 انجام می شود.

ملاحظه ۲- اگر در یک گراف قویاً همبند H با ماتریس لاپلاسین L_H ، به یکی از راس ها طوقه ای اضافه شود آن گاه هر بردار $v \in \mathbb{R}^{|V|}$ مقدار $L_H v$ تغییری نمی کند. بنابراین بردار تناوب اولیه آن، v_H و در نتیجه دوره تناوب آن $\text{per}(H)$ تغییر نمی کند.

در صورتی که H یک مولفه قویاً همبند G باشد، می توانیم روی هر راس k در H ، به تعداد همسایه های خروجی k که بیرون از H هستند طوقه اضافه کرده و کلیه راس های بیرون H را حذف می کنیم تا گراف H' را به دست آوریم. بنابراین طبق ملاحظه ۱، شلیک هایی که درون H انجام شده، یک بازی روی H' ترتیب می دهد که بردار امتیاز آن a_H است.

حال فرض کنید H یک مولفه چاهک باشد. در این صورت از گزاره ۲-۵-۲ داریم که a_H در H یک بردار تقلیل یافته است. لذا طبق قسمت اول اثبات، برای هر مولفه چاهک H ،

$$|a_H| \leq 2nN\Delta \text{ per}(H).$$

حال اگر H مولفه چاهک نباشد، آن‌گاه یک راس $u \in H$ وجود دارد که به راسی بیرون H وصل است. بنابراین با هر بار شلیک راس u ، یک چپ برای همیشه از H خارج می‌شود. لذا u نمی‌تواند بیش‌تر از N بار شلیک شود، یعنی $a_u \leq N$. حال طبق آن‌چه گفتیم یک بازی روی H' ترتیب می‌دهیم. فرض کنیم $v_H = v$ دوره تناوب H باشد و قرار می‌دهیم $\lambda = \min_{k \in H} a_k / v_k$ ، بنابراین $\min_{k \in H} (a_k - \lambda v_k) = 0$ ، هم‌چنین $\lambda \leq a_u / v_u \leq a_u \leq N$. در نتیجه به کمک قضیه ۲-۴-۱۱، قضیه ۲-۵-۹ و ملاحظه ۲ داریم،

$$\begin{aligned} \|a_H - \lambda v\| &\leq \frac{1}{\gamma} |L_{H'}(a_H - \lambda v)| \text{ acc}(H') = \frac{1}{\gamma} |L_H(a_H)| \text{ acc}(H') \\ &\leq Nn\Delta \text{ per}(H') = nN\Delta \text{ per}(H). \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} |a_H| &\leq \|a_H\| \leq \|a_H - \lambda v_H\| + \lambda \|v_H\| \\ &\leq nN\Delta \text{ per}(H) + N\Delta \text{ per}(H) < 2nN\Delta \text{ per}(H). \end{aligned}$$

■ در نتیجه با جمع روی همه مولفه‌های قویاً همبند حکم حاصل می‌شود.

قضیه ۲-۵-۱۳ [۷] برای هر گراف جهت‌دار G ، $\text{game}(G) \leq 2nm\Delta \text{ per}(G)$.

برهان. یک بازی متناهی با طول ماکزیمم روی G در نظر گرفته و فرض کنید a بردار امتیاز آن باشد. طبق قضیه ۲-۵-۷ بردار a تقلیل یافته است و طبق گزاره ۲-۲-۲، $N \leq m - n$. بنابراین لم اخیر نشان می‌دهد که $\text{game}(G) = |a| < 2n(m - n)\Delta \text{ per}(G)$. ■

نتیجه ۲-۵-۱۴ [۷] اگر هر مولفه قویاً همبند G اویلری باشد، آن‌گاه $\text{game}(G) \leq 2n^2m\Delta$ و اگر علاوه بر این G یال چندگانه نداشته باشد، آن‌گاه $\text{game}(G) \leq 2n^5$.

نتیجه فوق، قضیه ۱-۴-۲ را به گراف‌های جهت‌دار اولیری بدون یال چندگانه تعمیم می‌دهد. اما در مورد گراف‌های جهت‌دار کلی چه‌طور؟ اریکسون ثابت کرده است که هیچ کران چندجمله‌ای بر حسب تعداد راس‌ها برای طول بازی یک گراف جهت‌دار دلخواه وجود ندارد و در واقع طول بازی یک گراف جهت‌دار ممکن است به طور نمایی بزرگ باشد [۱۶].

تا به حال در قضیه‌های ۲-۵-۹ و ۲-۵-۱۳ کران‌هایی برای $\text{acc}(G)$ و $\text{game}(G)$ بر حسب $\text{per}(G)$ بیان کردیم. قضیه زیر کران بالایی برای $\text{per}(G)$ ارائه می‌دهد.

قضیه ۲-۵-۱۵ [۷] برای هر گراف جهت‌دار G ، $\text{per}(G) < (2\Delta)^{n-1}$.

برهان. ابتدا فرض کنید G قویاً همبند است. چون طبق قضیه ۲-۳-۳، $\text{rank} L = n - 1$ ، یک زیرماتریس $(n-1) \times (n-1)$ وجود دارد، مثلاً زیرماتریس حاصل از حذف سطر i ام و ستون j ام به طوری که دترمینان آن، $L^{i,j}$ ناصفر باشد. بردار $u = (u_1, \dots, u_n)$ را به صورت $u_k = (-1)^{i+k} L^{i,k}$ تعریف کنید. u یک بردار ناصفر با مولفه‌های صحیح است و داریم $Lu = 0$ ، زیرا اگر $L = (l_{ij})$ ، آن‌گاه $(Lu)_t = \sum_k l_{t,k} (-1)^{i+k} L^{i,k}$ ، L به جای سطر i ام آن به دست می‌آید. در نتیجه u یا $-u$ یک بردار تناوب است. از طرف دیگر طبق نامساوی هادامارد، $|\det(A)|$ برای هر ماتریس A ، حداکثر برابر حاصل ضرب طول بردارهای ستونی A است. لذا برای هر راس k ،

$$|u_k| = L^{i,k} \leq \prod_{k \neq j} \left(\sum_t (l_{t,k})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \prod_{k \neq j} \left(2d^+(k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq (\sqrt{2}\Delta)^{n-1}.$$

بنابراین $\text{per}(G) \leq \sum_k |u_k| \leq n(\sqrt{2}\Delta)^{n-1}$. حال برای گراف دلخواه G با مولفه‌های قویاً همبند $H_1, \dots, H_\omega$ داریم

$$\text{per}(G) = \sum_{t=1}^{\omega} \text{per}(H_t) \leq \sum_t n_t (\sqrt{2}\Delta)^{n-1} = n(\sqrt{2}\Delta)^{n-1} < (2\Delta)^{n-1}.$$

■

و حکم ثابت می‌شود.

۶-۲ چرتکه احتمالاتی

فرض کنید G یک گراف جهت‌دار با h راس چاهک $t_1, \dots, t_h$ و یک راس غیر چاهک دیگر به نام s باشد. هم‌چنین فرض کنید G مولفه چاهک دیگری غیر از این h راس نداشته باشد. حال یک گشت تصادفی را روی

G با شروع از s در نظر بگیرید. این گشت اولین باری که به یکی از راس‌های $t_1, \dots, t_h$ برسد متوقف می‌شود. یک مساله جالب در مورد این گشت تصادفی، پیدا کردن p_i ، احتمال این که گشت زن تصادفی در راس چاهک t_i متوقف شود و هم چنین مقدار زمان دسترسی $\text{acc}(s, t_i)$ است. البته این مسائل را می‌توان با ابزارهای محاسبه زمان دسترسی در نظریه زنجیرهای مارکوف و جبر خطی مقدماتی پاسخ گفت [۲۵]. اما در این جا به منظور مشاهده ارتباطی دیگر بین گشت‌های تصادفی و بازی شلیک چیپ، از یک روش ترکیبیاتی به نام چرتکه احتمالاتی استفاده می‌کنیم. چرتکه احتمالاتی که توسط ا. انجل [۱۴، ۱۵] معرفی شده است یک بازی شلیک چیپ روی گراف G است که در آن علاوه بر قوانین معمول این قانون نیز وجود دارد که راس‌های $t_1, \dots, t_h$ نمی‌توانند شلیک شوند. (می‌توانیم برای تامین این قانون در مدل معمول خودمان روی هر راس t_i به تعداد کافی طوقه بگذاریم.) در ابتدا روی هر راس غیر چاهک به تعداد $\deg^+(k) - 1$ چیپ قرار می‌دهیم. این آرایش را آرایش مرزی می‌گوییم. سپس یک چیپ اضافی نیز روی راس s قرار می‌دهیم. این موقعیت را فاز اول می‌نامیم. بازی طبق معمول اجرا می‌شود. اگر بازی در یک آرایش مرزی روی راس‌های غیر چاهک پایان‌پذیرد، آن‌گاه متوقف می‌شویم. در غیر این صورت یک چیپ به راس s اضافه کرده و بازی را دوباره اجرا می‌کنیم تا به یک آرایش پایانی برسیم. این موقعیت را فاز دوم می‌گوییم. این بازی را تا جایی که به یک آرایش مرزی روی راس‌های غیر چاهک برسیم ادامه می‌دهیم و در این صورت متوقف می‌شویم. قبل از انجام هر کاری تضمین پایان‌پذیری چرتکه احتمالاتی برای کارایی آن لازم است، یعنی این که ثابت کنیم بعد از تعداد متناهی فاز به یک آرایش مرزی روی راس‌های غیر چاهک می‌رسیم. این مطلب موضوع قضیه بعد است.

قضیه ۲-۶-۱ [۷] چرتکه احتمالاتی بعد از حداکثر Δ^{n-h} فاز متوقف می‌شود.

برهان. چون راس‌های چاهک $t_1, \dots, t_h$ هیچ‌گاه شلیک نمی‌شوند و مولفه چاهک دیگری نیز وجود ندارد، بنابراین طبق لم ۲-۲-۱ هر فاز بازی چرتکه احتمالاتی پایان‌پذیر است. در آرایش پایانی هر فاز، هر راس غیر چاهک k حداکثر $1 + d^+(k)$ چیپ دارد. بنابراین حداکثر Δ^{n-h} آرایش پایانی وجود دارد. در نتیجه حداکثر بعد از اجرای Δ^{n-h} فاز، یک آرایش پایانی θ روی راس‌های غیر چاهک تکرار می‌شود. فرض کنید از اولین مشاهده θ تا دومین مشاهده آن M فاز طول بکشد. حال گراف جدید G' از گراف G به اضافه کردن یک راس جدید r و وصل کردن آن با یک یال جهت‌دار به s بسازید. سپس M چیپ روی r و $1 + d^+(k)$ چیپ روی راس‌های غیر چاهک قدیمی قرار دهید. حال می‌توانیم M فاز اول بازی چرتکه را به عنوان یک بازی شلیک چیپ واحد روی G' اجرا کنیم با این قانون که راس r تنها در صورت ضرورت شلیک شود. اسم این بازی را «بازی ۱» بگذارید. از طرفی می‌توانیم یک بازی شلیک چیپ دیگر را روی G' اجرا کنیم. ابتدا روی هر راس قدیمی k تعداد $1 + d^+(k) - \theta(k)$ چیپ را «منجمد» کرده و تصور می‌کنیم که روی هر راس k تنها $\theta(k)$ چیپ وجود

دارد. سپس با این چپ‌های باقی‌مانده، M فازی که از اولین مشاهده θ تا دومین مشاهده آن در بازی چرتکه انجام می‌شود را روی G' به عنوان یک بازی شلیک چپ واحد اجرا می‌کنیم. نام این بازی را هم «بازی ۲» بگذارید. طبق ساختار داده شده، بازی ۲ با آرایش مرزی روی راس‌های غیر چاهک و بدون چپ روی راس r پایان می‌گیرد. بنابراین طبق نتیجه ۲-۱-۳ برای بازی ۱ نیز همین اتفاق رخ می‌دهد. در نتیجه آرایش مرزی بعد از M فاز دوباره ظاهر می‌شود. ■

۱. بورنر و دیگران در [۷] یک گراف معرفی کرده‌اند که تعداد فازها در بازی چرتکه احتمالاتی روی آن از مرتبه‌نمایی نسبت به n است. بنابراین کران بالای ارایه شده در قضیه فوق کران مناسبی است. فرض کنید چرتکه احتمالاتی در M فاز پایان می‌پذیرد و a بردار امتیاز اجرای کامل آن است. هم‌چنین M_j را تعداد چپ‌های روی راس چاهک t_j قرار دهید. چون در هر فاز یک چپ به تعداد کل چپ‌ها افزوده می‌شود و تعداد کل چپ‌های روی راس‌های غیر چاهک در آغاز و پایان بازی یکسان است، بنابراین واضح است که $\sum_{j=1}^h M_j = M$.

قضیه ۲-۶-۲ [۱۴، ۱۵] فرض کنید M و M_j ، $1 \leq j \leq h$ ، مقادیر تعریف شده در بالا باشند. در این صورت

الف) اگر $1 \leq j \leq h$ ، p_j احتمال توقف گشت تصادفی در راس چاهک t_j با شروع از راس s باشد، آن‌گاه

$$p_j = \frac{M_j}{M}$$

ب) اگر $h = 1$ ، آن‌گاه $\text{acc}(s, t_1) = \frac{\|a\|}{M}$.

برهان. الف) ما قصد داریم کل فرایند چرتکه احتمالاتی را به عنوان یک دوره تناوب یک بازی شلیک چپ واحد اجرا کنیم. برای این کار یک راس جدید r به گراف G اضافه کرده و با یک یال جهت‌دار r را به s وصل کنید. هم‌چنین هر راس t_j را با یک یال جهت‌دار به r وصل کنید. گراف جدید را G' بنامید و روی هر راس غیر چاهک قدیمی k به تعداد $d^+(k) - 1$ و روی r یک چپ قرار دهید. اگر همواره این دو قانون را رعایت کنیم که (۱) تنها در صورت ضرورت r را شلیک کنیم و (۲) هر راس t_j را در هر زمان که مقدور بود شلیک کنیم. آن‌گاه دقیقاً کل فرایند چرتکه احتمالاتی روی G را به عنوان یک بازی شلیک چپ واحد روی G' اجرا کنیم. هنگامی که بعد از M فاز به آرایش مرزی برگشتیم، در واقع یک دوره تناوب از بازی را روی G' کامل کرده‌ایم. علاوه بر این تعداد دفعاتی که t_j شلیک شده است برابر M_j ، تعداد چپ‌هایی است که در چرتکه احتمالاتی روی t_j انباشته شده است. بنابراین اگر بردار امتیاز این دوره تناوب را w بنامیم، آن‌گاه $w_{t_j} = M_j$ برای هر $1 \leq j \leq h$ و چون G' قویاً همبند است، طبق گزاره ۲-۵-۲ داریم $w = tv(G)$ ، برای یک عدد طبیعی t که $v(G)$ دوره تناوب اولیه بازی است.

حال می‌توانیم گشت‌های تصادفی روی G را با گشت‌های تصادفی روی G' مرتبط کنیم به این صورت که هرگاه گشت‌زن تصادفی روی G متوقف شد، روی G' به r و سپس به s برمی‌گردد و دوباره از اول شروع می‌کند. در نتیجه اگر q توزیع ایستای گشت تصادفی روی G' باشد، آن‌گاه p_j برابر نسبت احتمال راس t_j در q است، یعنی $p_j = q_{t_j} / (\sum_k q_{t_k})$. لذا طبق معادله ۵.۲ داریم

$$p_j = \frac{w_{t_j} / \|w\|}{(\sum_k w_{t_k}) / \|w\|} = \frac{M_j}{\sum_k M_k} = \frac{M_j}{M}.$$

(ب) در این حالت تنها یک راس چاهک $t = t_1$ وجود دارد. علاوه بر آرایش مرزی روی راس‌های غیر چاهک، M چیپ اضافه نیز روی s قرار دهید. بنابراین کل فرایند چرتکه احتمالی را می‌توان به عنوان یک بازی شلیک چیپ واحد روی G با بردار امتیاز a در نظر گرفت. اجرای این بازی تنها باعث می‌شود که M چیپ اضافی از راس s به راس t منتقل شود. بنابراین $La = M(e_t - e_s)$. در نتیجه طبق لم ۲-۴-۱۰ داریم $\text{acc}(s, t) = \|a\|/M$. توجه داشته باشید که در لم ۲-۴-۱۰، G قویاً همبند فرض شده است، برای تضمین این شرط می‌توانیم با یک یال جهت‌دار t را به s وصل کنیم که این یال تاثیری در روند بازی ندارد. ■

فصل ۳

بازی دلار و گروه بحرانی

در این فصل یک نوع تغییر یافته از بازی شلیک چپ را روی گراف‌های غیر جهت‌دار بررسی می‌کنیم. این بازی روی گراف غیر جهت‌دار همبند $G = (V, E)$ اجرا می‌شود (یال چندگانه و طوقه مجاز است) که یک راس خاص $q \in V$ مشخص شده و تعدادی چپ روی راس‌های دیگر غیر از q توزیع شده است. در هر نوبت می‌توانیم یک راس آماده غیر از q (راسی که حداقل به تعداد درجه‌اش چپ دارد) را شلیک کنیم. بازی تا جایی ادامه پیدا می‌کند که هیچ راس آماده‌ای غیر از q وجود نداشته باشد. در این حالت راس q شلیک می‌شود و بازی ادامه پیدا می‌کند. بنابراین راس q می‌تواند شلیک کند اگر و تنها اگر هیچ راس آماده‌ای غیر از q وجود نداشته باشد. وجود راس q تضمین می‌کند که بازی هیچ‌گاه پایان نپذیرد. در واقع می‌توانیم به جای چپ‌ها با دلارها بازی کنیم و بازی را به عنوان یک "اقتصاد" و راس q را به عنوان "دولت" در نظر بگیریم. اقتصاد حرکت می‌کند و هر جا که به بن‌بست رسید دولت مقداری دلار به آن تزریق می‌کند و دوباره حرکت ادامه پیدا می‌کند. به همین دلیل این بازی به بازی دلار معروف است. بازی دلار اولین بار توسط ن. بیگز [۴] معرفی شد. در این فصل نشان می‌دهیم که به کمک این بازی می‌توانیم یک گروه آبدلی به هر گراف نسبت دهیم که گروه بحرانی نام دارد. در واقع خواهیم دید که مرتبه این گروه برابر تعداد درخت‌های فراگیر گراف G است. ما به کمک قضیه اساسی گروه‌های آبدلی، ساختار این گروه را بررسی کرده و به ارتباط آن با چندجمله‌ای تات می‌پردازیم. در سراسر این فصل، جز در جایی که ذکر کنیم، G را همبند فرض می‌کنیم.

۳-۱ تعاریف و مقدمات

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف غیر جهت دار همبند باشد که راس‌های آن را با اعداد $1, 2, \dots, n$ برچسب‌گذاری کرده‌ایم. یک راس $q \in V$ مشخص شده است، می‌توانیم فرض کنیم $q = n$. از نمادهای تعریف نشده در این بخش همان تعاریف بخش ۱-۱ را مراد می‌کنیم.

تعریف ۳-۱-۱ [۳۳] منظور از یک آرایش یک تابع $\theta: V \rightarrow \mathbb{Z}$ است که برای هر راس $k \neq q$ ، $\theta(k) \geq 0$ که در واقع $\theta(k)$ تعداد چیپ‌های روی راس k را نشان می‌دهد. همچنین $\theta(q) = -\sum_{k \neq q} \theta(k)$. در یک آرایش θ ، راس $k \neq q$ را آماده گوئیم هرگاه $\theta(k) \geq \deg(k)$ و راس q را آماده می‌خوانیم هرگاه هیچ راس دیگری آماده نباشد.

با توجه به تعریف فوق تابع آرایش در واقع چگونگی توزیع چیپ‌ها روی راس‌های گراف را در طول بازی نشان می‌دهد. تعریف $\theta(q)$ در واقع یک قرارداد است که برای سهولت در انجام محاسبات جبری صورت گرفته است، اما برای شهود بهتر تصور کنید q یک منبع نامتناهی از چیپ‌ها دارد. به یمن این قرارداد اگر θ را برداری در $\mathbb{Z}^{|V|}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم $1^T \theta = 0$.

در یک حرکت می‌توانیم یک راس آماده در آرایش موجود را انتخاب و آن را شلیک کنیم. پس از شلیک راس آماده $i \in V$ ، از چیپ‌های روی راس i به تعداد $\text{exdeg}(i)$ کم شده و به هر راس $j \neq i$ به اندازه $d_{i,j}$ چیپ اضافه می‌شود. بنابراین آرایش θ به آرایش θ' تبدیل می‌گردد که θ' به صورت زیر تعریف شده است:

$$\theta'(j) = \begin{cases} \theta(j) + d_{i,j} & i \neq j, \\ \theta(i) - \text{exdeg}(i) & i = j. \end{cases}$$

با توجه به آن‌چه گفته شد راس q تنها وقتی شلیک می‌شود که راس آماده دیگری وجود نداشته باشد و این شلیک آن قدر ادامه می‌یابد تا یک راس دیگر غیر از q آماده شود.

تعریف ۳-۱-۲ [۳۳] یک دنباله قانونی σ برای آرایش شروع θ ، یک دنباله از راس‌های $(k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$ است که برای هر $0 \leq i \leq n-1$ ، راس k_i در آرایش θ_i آماده است و آرایش θ_{i+1} از آرایش θ_i با شلیک راس k_i به دست می‌آید. فرایند شلیک متوالی راس‌های یک دنباله قانونی را یک بازی قانونی گویند. اگر بتوانیم با یک بازی قانونی از آرایش θ_1 به آرایش θ_2 برسیم، آن‌گاه می‌نویسیم $\theta_1 \rightarrow \theta_2$. امتیاز یک دنباله قانونی σ ، یک بردار $[\sigma] \in \mathbb{Z}^{|V|}$ تعریف می‌شود که برای هر $k \in V$ ، $[\sigma]_k$ برابر تعداد دفعات شلیک راس k در آن دنباله است.

با توجه به توضیحات بخش ۱-۱ بعد از بازی قانونی σ با شروع از آرایش θ ، یک آرایش θ' به دست می‌آید که $\theta' = \theta - L[\sigma]$ و L ماتریس لاپلاسین گراف G است. بنابراین نتیجه‌ای مشابه نتیجه ۱-۱-۴ را در کف داریم.

نتیجه ۳-۱-۳ در یک بازی دلار روی یک گراف غیرجهت‌دار، آرایش نهایی بعد از شلیک یک دنباله قانونی σ ، تنها به امتیاز دنباله σ یعنی $[\sigma]$ بستگی دارد.

۲-۳ آرایش‌های بحرانی

همان‌طور که می‌دانیم ممکن است در یک آرایش چند راس آماده وجود داشته باشد و در نتیجه از یک آرایش شروع بازی‌های قانونی مختلفی میسر باشد. در این بخش نشان خواهیم داد که بازی‌های قانونی مختلف از یک آرایش شروع ثابت در یک معنا به یک نتیجه ثابت منجر می‌شوند. ابتدا اجازه دهید مفهومی به نام آرایش‌های بحرانی را تعریف کنیم که خواهیم دید نقشی مشابه آرایش‌های پایانی را در بازی شلیک چپ ایفا می‌کنند.

تعریف ۳-۲-۱ [۴] فرض کنید G یک گراف همبند باشد. یک آرایش θ را پایدار گوئیم هرگاه برای هر راس q $\theta(k) < \deg(k)$ ، $k \neq q$. در یک آرایش پایدار تنها راس آماده، راس q است. اگر گراف G تنها از حلقه‌ها تشکیل نشده باشد، آن‌گاه آرایش θ را بازگشتی می‌گوئیم هرگاه یک دنباله قانونی σ با طول l ، $l \geq 1$ یافت شود که با شروع از آرایش θ و شلیک دنباله قانونی σ به آرایش θ باز گردیم. یک آرایش پایدار و بازگشتی را یک آرایش بحرانی می‌نامیم.

قضیه زیر نشان می‌دهد که از هر آرایش θ می‌توان با یک بازی قانونی به یک آرایش بحرانی رسید.

قضیه ۳-۲-۲ [۴] برای گراف همبند G و آرایش شروع θ ، هر دنباله قانونی با شروع از θ را می‌توان به گونه‌ای توسیع داد که به یک آرایش بحرانی منجر شود.

برهان. با رعایت قوانین شلیک، بازی را روی G شروع می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم بدون شلیک راس q ، هیچ راس $k \neq q$ نمی‌تواند نامتناهی بار شلیک شود. به خلف فرض کنید که یک راس $k \neq q$ باشد که بدون این‌که راس q ، شلیک شود، نامتناهی بار شلیک گردد. در این صورت چون تعداد کل چپ‌ها افزایش نمی‌یابد، بنابراین راس‌های مجاور k نیز نامتناهی بار شلیک شده‌اند. حال چون گراف G همبند است لذا یک مسیر از k به

q وجود دارد. در نتیجه راس q نیز بی‌نهایت بار شلیک شده است (اثبات لم ۱-۳-۲). این خلاف این فرض است که q شلیک نشده است. در نتیجه بدون شلیک q هیچ راس غیر از q نمی‌تواند نامتناهی بار شلیک شود. این نشان می‌دهد که حتماً بعد از تعداد متناهی حرکت به یک آرایش پایدار می‌رسیم. سپس می‌توانیم راس q را به تعداد لازم شلیک کنیم و بازی را مجدداً ادامه دهیم تا به یک آرایش پایدار دیگر برسیم. اما می‌دانیم در هر آرایش پایدار تعداد کل چپ‌ها روی راس‌های غیر از q کمتر از $|E|/2$ است. بنابراین تعداد کل آرایش‌های پایدار متناهی است. در نتیجه در روند فوق حتماً یک آرایش پایدار تکرار می‌شود. آرایش پایدار تکرار شده یک آرایش بحرانی است. ■

در واقع آن‌چه از این قضیه برداشت می‌شود این است که آرایش‌های بحرانی در بازی دلار، نقشی مشابه آرایش‌های پایانی در بازی شلیک چپ را دارند. بنابراین سوالی که در فصل ۱ درباره استقلال آرایش‌های پایانی از نحوه اجرای بازی در بازی شلیک چپ مطرح شد، این‌جا نیز درباره آرایش‌های بحرانی مطرح می‌شود: آیا آرایش بحرانی که از یک آرایش شروع θ با شلیک دنباله قانونی σ به دست می‌آید مستقل از دنباله قانونی σ است؟ به عبارت بهتر آیا آرایش بحرانی به دست آمده از یک آرایش شروع θ یکتاست؟ این سوالی است که باز هم پاسخ مثبت خود را در نظریه گریدهای با تکرار می‌یابد. البته اثبات‌های دیگری نیز برای این موضوع وجود دارد. به عنوان مثال می‌توانید یک اثبات مستقیم شمارشی را در [۴] ببینید.

فرض کنید گراف همبند G و آرایش شروع $\theta = \theta_0$ داده شده است. دنباله قانونی $\sigma = (k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$ برای آرایش شروع θ را اولیه گوئیم هرگاه هیچ‌کدام از آرایش‌های $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ بحرانی نباشند که آرایش θ_{i+1} از آرایش θ_i با شلیک راس k_i به دست می‌آید.

لم ۳-۲-۳ [۳۳] برای گراف G و آرایش شروع θ ، زبان $\mathcal{L}$ متشکل از همه دنباله‌های قانونی اولیه، یک زبان موروثی-چپ، موضعاً آزاد و جایگشت پذیر است.

برهان. موروثی بودن $\mathcal{L}$ بدیهی است. فرض کنید $\alpha \in \mathcal{L}$ یک دنباله قانونی اولیه و $x, y \in V(G)$ دو راس متمایز باشند که $\alpha x \in \mathcal{L}$ و $\alpha y \in \mathcal{L}$ ، در این صورت پس از شلیک متوالی دنباله راس‌های α به وضعیتی می‌رسیم که هر دو راس x و y در آن آماده هستند. لذا $x, y \neq q$ و هم‌چنین شلیک متوالی دنباله αx به آرایش پایدار نمی‌انجامد. از طرفی چون با شلیک راس x ، تعداد چپ‌های روی y کاهش نمی‌یابد، لذا y پس از شلیک متوالی دنباله αx نیز آماده است و در نتیجه $\alpha xy \in \mathcal{L}$ و موضعاً آزاد است. حال فرض کنید $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ ، $x \in V$ و $[\alpha] = [\beta]$ ، $\alpha x \in \mathcal{L}$ ، در این صورت طبق نتیجه ۳-۱-۳ آرایش حاصل پس از شلیک α با آرایش حاصل پس از شلیک β یکسان است. در نتیجه چون $\alpha x \in \mathcal{L}$ آرایش بعد از شلیک α بحرانی نیست و x پس

از شلیک α آماده است، لذا آرایش بعد از شلیک β نیز بحرانی نیست و x پس از شلیک β آماده است. لذا $\beta x \in \mathcal{L}$ و $\mathcal{L}$ جایگشت پذیر است. ■

قضیه ۳-۲-۴ [۳۳] برای گراف G و آرایش θ ، یک آرایش بحرانی یکتا κ وجود دارد به طوری که $\theta \rightarrow \kappa$.

برهان. فرض کنید $\mathcal{L}$ زبان همه دنباله‌های قانونی اولیه برای آرایش θ باشد. در این صورت یک کلمه اساسی در این زبان در واقع یک دنباله قانونی σ است که شلیک آن به یک آرایش بحرانی ختم می‌شود. اما هیچ کدام از آرایش‌های میانی به وجود آمده در شلیک σ ، بحرانی نیستند. از طرفی طبق لم ۳-۲-۳، قضیه ۱-۲-۵ و لم ۱-۲-۷، کلمه‌های اساسی در $\mathcal{L}$ دارای طول و امتیاز یکسان هستند. در نتیجه همه کلمه‌های اساسی به یک آرایش بحرانی ختم می‌شوند. ■

قضیه اخیر نشان می‌دهد که نحوه انتخاب و ترتیب شلیک راس‌های آماده تاثیری در آرایش بحرانی که در نهایت به آن خواهیم رسید ندارد. در این جا شایسته است ذکر کنیم که تعداد شلیک‌های لازم برای رسیدن به یک آرایش بحرانی از یک آرایش شروع θ نسبت به تعداد یال‌های گراف G و هم‌چنین تعداد کل چیپ‌ها در آرایش شروع، چند جمله‌ای است [۴۰].

نتیجه ۳-۲-۵ [۳۳] اگر κ و θ دو آرایش بحرانی باشند به طوری که $\theta \rightarrow \kappa$ ، آن گاه $\theta = \kappa$.

برهان. چون θ بازگشتی است، بنابراین $\theta \rightarrow \theta$. در نتیجه طبق قضیه بالا $\theta = \kappa$. ■

مثال ۳-۲-۶ فرض کنید گراف $G = (V, E)$ از گراف K_4 با حذف یک یال به دست می‌آید که $V = \{1, 2, 3, 4\}$ و راس‌های ۱ و ۲ راس‌های درجه ۳ هستند و راس ۴ به عنوان راس q در نظر گرفته شده است. هر آرایش روی G را با یک بردار در $\mathbb{Z}^3$ نشان می‌دهیم که مولفه i -ام تعداد چیپ‌های روی راس i را نشان می‌دهد. تنها آرایش‌های پایدار، آرایش‌های (x, y, z) برای $1, 2, x, y = 0$ و $1, z = 0$ هستند. از این میان آرایش‌های $(0, 2, 1)$ ، $(0, 2, 2)$ ، $(1, 0, 2)$ ، $(1, 1, 2)$ و $(1, 2, 2)$ بحرانی هستند، زیرا بازی‌های قانونی زیر را داریم.

$$(0, 2, 1) \rightarrow (0, 3, 2) \rightarrow (1, 0, 3) \rightarrow (2, 1, 0) \rightarrow (0, 2, 1),$$

$$\begin{aligned}
 (0, 2, 2) &\rightarrow (0, 3, 3) \rightarrow (1, 0, 4) \rightarrow (2, 1, 1) \rightarrow (0, 2, 2), \\
 (1, 0, 2) &\rightarrow (1, 1, 3) \rightarrow (2, 2, 0) \rightarrow (0, 3, 1) \rightarrow (1, 0, 2), \\
 (1, 1, 2) &\rightarrow (1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 0) \rightarrow (3, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 2), \\
 (1, 2, 2) &\rightarrow (1, 3, 3) \rightarrow (2, 0, 4) \rightarrow (3, 1, 1) \rightarrow (1, 2, 2).
 \end{aligned}$$

در ضمن با توجه به تقارن گراف، آرایش‌های $(0, 1, 2)$ ، $(1, 2, 0)$ و $(1, 2, 1)$ نیز بحرانی هستند. تا این جا ۸ آرایش بحرانی به دست آورده‌ایم. ۱۰ آرایش پایدار دیگر همگی پس از یک یا دو شلیک به یکی از ۸ آرایش بحرانی فوق تبدیل می‌شوند. لذا طبق نتیجه ۳-۲-۵ این ۱۰ آرایش، بحرانی نیستند. در نتیجه مجموعه همه آرایش‌های بحرانی روی گراف G برابر $\{x = 0, 1\}; (1, 2, 0), (1, 2, 1), (x, 2, 2), (x, 2, 1), (x, 1, 2)\}$ است.

در فصل قبل لم جالب ۲-۵-۴ را در مورد دنباله‌های قانونی در بازی شلیک چپ ثابت کردیم. با تقلید از اثباتی که در آن جا ذکر شد می‌توانیم این لم را مورد بازی دلار نیز ثابت کنیم. بنابراین نص لم ۲-۵-۴ عیناً در مورد بازی دلار نیز برقرار است. این لم در اثبات قضیه زیر و هم‌چنین قضیه مهم فصل بعد نقش کلیدی دارد.

قضیه ۳-۲-۷ [۴] اگر آرایش ρ یک آرایش بازگشتی باشد، آن گاه یک دنباله قانونی با شروع از ρ وجود دارد که بردار امتیاز آن بردار 1 است، یعنی هر راس $k \in V$ دقیقاً یک بار شلیک شده است و به آرایش شروع ρ باز می‌گردد.

برهان. چون ρ بازگشتی است، یک دنباله قانونی σ با شروع از آرایش ρ وجود دارد که به آرایش ρ باز می‌گردد. اگر a بردار امتیاز σ باشد، آن گاه $\rho = \rho - La$. اما با توجه به این که هر گراف غیر جهت‌دار همبند را می‌توان با دو طرفه کردن هر یال به عنوان یک گراف جهت‌دار اولیه در نظر گرفت، طبق قضیه ۳-۳-۳ (iii) داریم $a = \lambda 1$ ، برای یک عدد طبیعی λ . حال اگر σ' یک زیر دنباله از σ باشد که با حذف اولین $\lambda - 1$ شلیک راس k ، برای هر $k \in V$ به دست می‌آید، آن گاه طبق لم ۲-۵-۴، σ' یک دنباله قانونی با شروع از ρ است. اما واضح است که هر راس k در σ' یک بار ظاهر شده و لذا $[\sigma'] = 1$. از طرفی $\rho - L((\lambda - 1)1) = \rho$ است. با شروع از ρ به آرایش $\rho - L[\sigma'] = \rho$ منجر می‌شود. در نتیجه σ' دنباله قانونی مطلوب است. ■

تعریف ۳-۲-۸ برای هر آرایش بحرانی κ ، دنباله قانونی مصرح در قضیه ۳-۲-۷ را یک دنباله بحرانی برای κ می‌گوییم.

۳-۳ گروه بحرانی یک گراف

در این بخش قصد داریم نشان دهیم که می‌توان مجموعه همه آرایش‌های بحرانی روی یک گراف همبند $G = (V, E)$ را به یک گروه آبلی تبدیل کرد. فرض کنید $C(G; \mathbb{Z})$ گروه همه توابع با مقادیر صحیح روی V باشد. همان طور که می‌دانید می‌توان هر عضو $C(G; \mathbb{Z})$ را به صورت یک بردار عمودی در $\mathbb{Z}^{|V|}$ در نظر گرفت. بنابراین می‌توانیم ماتریس لاپلاسیان گراف G را که در بخش ۱-۱ تعریف کردیم به عنوان یک همریختی $L : C(G; \mathbb{Z}) \rightarrow C(G; \mathbb{Z})$ در نظر بگیریم. هم چنین همریختی $\tau : C(G; \mathbb{Z}) \rightarrow C(G; \mathbb{Z})$ را به صورت $\tau(f) = \sum_{k \in V} f(k)$ تعریف می‌کنیم. طبق تعریف واضح است که هر آرایش θ روی گراف G در $\ker \tau$ قرار دارد.

لم ۳-۳-۱ تصویر همریختی L یک زیر گروه نرمال از هسته τ است.

برهان. با توجه به تعریف، مجموع درایه‌های هر ستون L برابر صفر است. بنابراین $\tau L = \mathbf{1}^T L = \mathbf{0}$ و برای هر $v = Lw \in \text{Im } L$ داریم $\tau(v) = \tau Lw = \mathbf{0}$. بنابراین $\text{Im } L$ یک زیر گروه از $\ker \tau$ است و چون گروه‌ها آبلی هستند این یک زیر گروه نرمال است. ■

مجموعه همه آرایش‌های بحرانی روی گراف G را با $\mathcal{C}(G)$ نشان می‌دهیم و برای هر آرایش θ ، از $\gamma(\theta)$ آرایش بحرانی یکنای تعیین شده در قضیه ۳-۲-۴ را مراد می‌کنیم. قضیه زیر ثابت می‌کند که می‌توانیم به $\mathcal{C}(G)$ ساختاریک گروه آبلی بدهیم. برای هر $f \in \ker \tau$ ، هم مجموعه f متناظر با $\text{Im } L$ را با $[f]$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳-۳-۲ [۴] بین مجموعه $\mathcal{C}(G)$ از آرایش‌های بحرانی روی گراف G و گروه آبلی $\ker \tau / \text{Im } L$ یک تناظر یک به یک برقرار است.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که هر هم مجموعه $[f] \in \ker \tau / \text{Im } L$ شامل یک آرایش است. فرض کنید $f \in \ker \tau$ و آرایش η را برای هر $k \neq q$ به صورت زیر تعریف کنید:

$$\eta(k) = \begin{cases} \deg(k) - 1 & f(k) \geq 0, \\ \deg(k) - 1 - f(k) & f(k) < 0, \end{cases}$$

و داریم $\eta(q) = \sum_{k \neq q} \eta(k)$. طبق قضیه ۳-۲-۲ یک دنباله قانونی وجود دارد که η را به یک آرایش پایدار κ تبدیل می‌کند. اگر a بردار امتیاز این دنباله باشد، آنگاه داریم $\kappa = \eta - La$. قرار دهید $\theta = f + \eta - \kappa$ ، بنابراین

$\theta = f + La$ و لذا $[\theta] = [f]$. از طرف دیگر برای هر $k \neq q$

$$\theta(k) = f(k) + \eta(k) - \kappa(k) \geq \deg(k) - 1 - \kappa(k) \geq 0$$

بنابراین θ یک آرایش در هم مجموعه $[f]$ است.

حال تابع $\varphi : \ker \tau / \text{Im } L \rightarrow \mathcal{C}(G)$ را به صورت $\varphi([f]) = \gamma(\theta)$ ، برای هر $[f] \in \ker \tau / \text{Im } L$ تعریف کنید که θ یک آرایش در هم مجموعه $[f]$ است. ابتدا باید نشان دهیم که تابع φ خوش تعریف است. فرض کنید θ و θ' دو آرایش باشند که $[\theta_1] = [\theta_2] = [f]$. بنابراین یک $g \in C(G, \mathbb{Z})$ یافت می شود که $\theta_1 - \theta_2 = Lg$. توابع نامنفی g_1 و g_2 یافت می شوند که $g = g_1 - g_2$. قرار می دهیم $\theta_0 = \theta_1 - Lg_1 = \theta_2 - Lg_2$. فرض کنید $\gamma(\theta_1) = \kappa_1$ و σ_1 یک دنباله قانونی با شروع از θ_1 باشد که منجر به آرایش κ_1 شود. چون κ_1 بازگشتی است، طبق قضیه ۳-۲-۷ می توانیم σ_1 را به گونه ای اختیار کنیم که در آن هر راس k حداقل $g_1(k)$ بار ظاهر شود. σ' را دنباله حاصل از حذف اولین $g_1(k)$ ظهور راس k در σ برای هر $k \in V$ قرار دهید. در نتیجه طبق لم ۲-۵-۴، σ' یک دنباله قانونی با شروع از آرایش θ_0 است که طبق ساختار از حذف دقیقاً $g_1(k)$ بار وقوع راس k از σ برای هر k به دست می آید. بنابراین $[\sigma'] = [\sigma] - g_1$ و لذا دنباله σ' با شروع از θ_0 به κ_1 منجر می شود. این نشان می دهد که $\gamma(\theta_0) = \kappa_1 = \gamma(\theta_1)$. به طور مشابه $\gamma(\theta_0) = \gamma(\theta_2)$. در نتیجه تابع φ خوش تعریف است.

برای اثبات پوشا بودن φ می بینیم که برای هر $\kappa \in \mathcal{C}(G)$ داریم $\varphi([\kappa]) = \gamma(\kappa) = \kappa$. همچنین برای اثبات یک به یک بودن φ می بینیم که اگر $\varphi([\theta_1]) = \varphi([\theta_2]) = \kappa$ آن گاه $\gamma(\theta_1) = \gamma(\theta_2) = \kappa$. بنابراین $\theta_1, \theta_2 \rightarrow \kappa$ و لذا بردارهای $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}^{|V|}$ یافت می شوند که $\theta_1 - Lv_1 = \theta_2 - Lv_2 = \kappa$. در نتیجه $\theta_1 - \theta_2 = L(v_1 - v_2)$ و لذا $[\theta_1] = [\theta_2]$. ■

با توجه به قضیه ۳-۳-۲ می توانیم مجموعه آرایش های بحرانی $\mathcal{C}(G)$ را به یک گروه آبدی تبدیل کنیم. در واقع طبق آنچه گفته شد $\mathcal{C}(G)$ همراه با عمل $\circ$ یک گروه آبدی است که $\varphi([\theta_1]) \circ \varphi([\theta_2]) = \varphi([\theta_1 + \theta_2])$. در نتیجه برای $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathcal{C}(G)$ داریم $\kappa_1 \circ \kappa_2 = \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)$.

تعریف ۳-۳-۳ [۴] برای گراف همبند G مجموعه همه آرایش های بحرانی روی G ، $\mathcal{C}(G)$ همراه با عمل $\circ$ تعریف شده در زیر را گروه بحرانی گراف G گوئیم. برای هر $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathcal{C}(G)$

$$\kappa_1 \circ \kappa_2 = \gamma(\kappa_1 + \kappa_2).$$

تخصیص گروه بحرانی به یک گراف همبند G ، این سوال را به ذهن متبادر می‌سازد که آیا ارتباطی بین خواص ذاتی این گروه و خواص ذاتی گراف G وجود دارد؟ در بخش بعد این نتیجه شگفت‌انگیز را اثبات می‌کنیم که: مرتبه گروه بحرانی گراف G برابر با تعداد زیر درخت‌های فراگیر G است. از طرف دیگر به یمن قضیه اساسی گروه‌های آبلی می‌توانیم نور بیشتری بر گروه بحرانی گراف‌ها بتابانیم و اطلاعات بیشتری از ساختار این گروه به دست آوریم. در بخش ۳-۵ به بررسی ساختاری این گروه خواهیم پرداخت.

۴-۳ چندجمله‌ای تات و گروه بحرانی

در این بخش به بررسی ارتباط چندجمله‌ای تات و گروه بحرانی یک گراف می‌پردازیم. ابتدا اجازه دهید تعریف چندجمله‌ای تات و برخی خواص آن را از نظر بگذرانیم. چون چندجمله‌ای تات برای گراف دلخواه و نه لزوماً همبند تعریف می‌شود، موقتاً شرط همبندی را برمی‌داریم. اما وقتی مجدداً به بحث گروه بحرانی باز می‌گردیم به همبندی نیاز داریم. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف غیر جهت‌دار باشد. برای هر مجموعه $A \subseteq E$ از یال‌ها، $k(A)$ را برابر با تعداد مولفه‌های همبندی زیرگراف G با مجموعه یال A و مجموعه راس V قرار می‌دهیم. در این صورت رتبه A را با $r(A)$ نمایش داده و به صورت $r(A) = |V| - k(A)$ تعریف می‌کنیم. با توجه به این که در هر گراف همبند G داریم $|E| \geq |V| - 1$ ، بنابراین $0 \leq r(A) \leq |A|$. یک زیر مجموعه $A \subseteq E$ را مستقل گوئیم هرگاه $r(A) = |A|$. هم‌چنین یک مجموعه مستقل ماکزیمال در مجموعه همه زیرمجموعه‌های E را یک پایه می‌نامیم.

به راحتی می‌توان نشان داد مجموعه $A \subseteq E$ مستقل است اگر و تنها اگر A یک زیر جنگل از G باشد.^۱ بنابراین برای هر مجموعه پایه A داریم $|A| = r(E)$. هم‌چنین اگر G همبند باشد، آنگاه عناصر پایه همان درخت‌های فراگیر G هستند و داریم $r(E) = |V| - 1$. با تشکر از دابلیو.ت. تات [۳۹]، چندجمله‌ای تات برای گراف G یک چندجمله‌ای دو متغیره در حلقه $\mathbb{Z}[x, y]$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x - 1)^{r(E) - r(A)} (y - 1)^{|A| - r(A)}.$$

چندجمله‌ای تات برای گراف G بسیاری از اطلاعات مربوط به G را در خود دارد. به عنوان مثال چندجمله‌ای رنگی، چندجمله‌ای شارش، احتمال اطمینان نهایی یک شبکه و تعداد درخت‌های فراگیر یک گراف همبند، همگی حالت خاصی از چندجمله‌ای تات در طول یک منحنی خاص در صفحه (x, y) هستند. ما در این پایان‌نامه قصد

^۱در این متن برای سهولت زیرگراف القایی A در G را با همان نماد A نشان می‌دهیم.

بررسی مبسوط خواص چندجمله‌ای تات را نداریم. خواننده می‌تواند برای یک بررسی اجمالی به [۱۰] مراجعه کند.

همان طور که می‌دانیم مجموعه $A \subseteq E$ پایه است اگر و تنها اگر $r(A) = |A| = r(E)$. بنابراین $T(G; 1, 1)$ تعداد عناصر پایه را در G به دست می‌دهد. در نتیجه برای گراف همبند G ، $T(G; 1, 1)$ برابر تعداد درخت‌های فراگیر G یا همان عدد درختی G است. چندجمله‌ای تات را می‌توان به صورت بازگشتی محاسبه کرد. برای یال $e = vw$ ، عمل یکی کردن راس‌های v و w و حذف یال e را انقباض روی e می‌گوییم. گراف G با یال منقبض شده e را با G/e و گراف G با یال حذف شده e را با $G \setminus e$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین یال $e = vw$ را طوقه می‌گوییم هرگاه $v = w$ و آن را هم‌طوقه یا پل می‌نامیم هرگاه برشی باشد، یعنی تعداد مولفه‌های همبندی $G \setminus e$ بیشتر از تعداد مولفه‌های همبندی G باشد.^۲

گزاره ۳-۴-۱ [۳۹] اگر گراف G بدون یال باشد، آن‌گاه $T(G; x, y) = 1$. در غیر این صورت برای هر $e \in E(G)$ داریم

(الف) اگر e طوقه باشد، آن‌گاه $T(G; x, y) = yT(G \setminus e; x, y)$

(ب) اگر e هم‌طوقه باشد، آن‌گاه $T(G; x, y) = xT(G/e; x, y)$

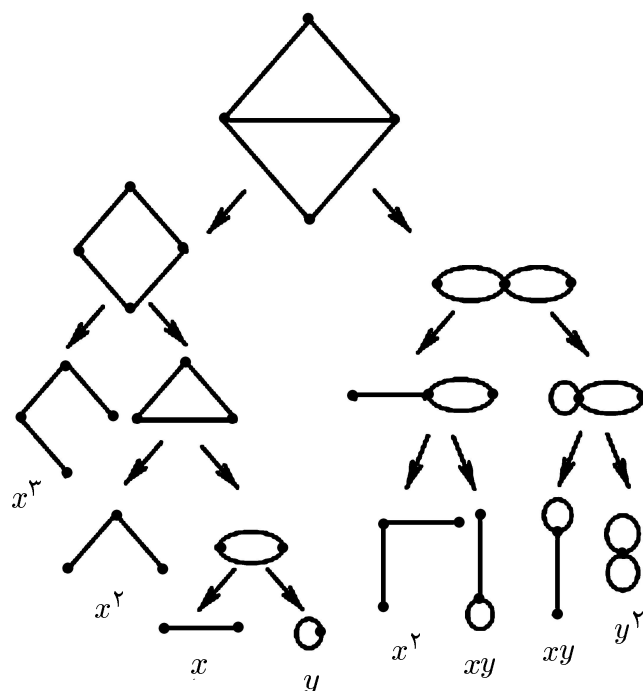
(ج) در غیر این صورت، $T(G; x, y) = T(G \setminus e; x, y) + T(G/e; x, y)$.

مثال ۳-۴-۲ فرض کنید G از گراف K_4 با حذف یک یال به دست می‌آید. در شکل ۳-۱ به کمک گزاره فوق، چندجمله‌ای تات این گراف را به صورت بازگشتی محاسبه کرده‌ایم. با جمع تک‌جمله‌ای‌ها در ذیل شکل به دست می‌آوریم $T(G; x, y) = x^3 + 2x^2 + x + 2xy + y + y^2$ بنابراین $T(G; 1, 1) = 8$ که دقیقاً برابر با تعداد درخت‌های فراگیر گراف G است.

بعد از معرفی مختصری درباره چندجمله‌ای تات به بازی دلار بازگردیم. در ادامه برای هر آرایش بحرانی یک سطح تعریف می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم می‌توان تعداد آرایش‌های بحرانی هر سطح را از چندجمله‌ای تات گراف به دست آورد. مجدداً G را یک گراف همبند فرض کنید.

تعریف ۳-۴-۳ [۳۲] برای یک آرایش θ روی گراف همبند G ، وزن θ را تعداد کل چیپ‌ها روی راس‌های غیر از q تعریف می‌کنیم و با $w(\theta)$ نمایش می‌دهیم. در واقع $\theta(k)$ $w(\theta) = \sum_{k \neq q} \theta(k)$. هم‌چنین برای هر آرایش بحرانی κ ، سطح κ را با $\text{level}(\kappa)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

^۲ ثابت می‌شود که یال e طوقه است اگر و تنها اگر در هیچ پایه‌ای نباشد و هم‌طوقه است اگر و تنها اگر در هر پایه‌ای حضور داشته باشد.



شکل ۳-۱ محاسبه چند جمله‌ای تات برای گراف $K_4 \setminus e$ به صورت بازگشتی.

$$\text{level}(\kappa) = w(\kappa) - |E(G)| + \deg(q).$$

مثال ۳-۴-۴ در مثال ۳-۲-۶ دیدیم که اگر G از گراف K_4 با حذف یک یال به دست آید، آنگاه داریم $\mathcal{C}(G) = \{(x, 1, 2), (x, 2, 1), (x, 2, 2), (1, 0, 2), (1, 2, 0); x = 0, 1\}$ چون $\deg(q) = 2$ و $|E(G)| = 5$. آرایش‌های بحرانی $(1, 2, 0)$ ، $(1, 0, 2)$ ، $(0, 2, 1)$ و $(0, 1, 2)$ از سطح ۰، آرایش‌های بحرانی $(0, 2, 2)$ ، $(1, 2, 1)$ و $(1, 1, 2)$ از سطح ۱ و آرایش بحرانی $(1, 2, 2)$ از سطح ۲ هستند.

چه اعدادی می‌توانند سطح یک آرایش بحرانی باشند؟ به عبارت بهتر آیا کرانی برای سطح آرایش‌های بحرانی وجود دارد. برای پاسخ به این سوال، ابتدا بازی دلار را با یک تغییر به بازی شلیک چیپ معمولی تبدیل می‌کنیم، سپس از کران قضیه ۱-۳-۳ استفاده می‌کنیم. فرض کنید θ یک آرایش پایدار در بازی دلار روی گراف G باشد. در این صورت با تعریف مجدد $\theta(q) = \deg(q)$ ، θ را به یک آرایش در بازی شلیک چیپ معمولی تبدیل می‌کنیم. این آرایش در بازی شلیک چیپ را توسعه θ می‌گوییم و با θ_q نشان می‌دهیم.

لم ۳-۴-۵ [۳۲] فرض کنید G یک گراف و κ یک آرایش بحرانی در بازی دلار روی G باشد. در این صورت بازی شلیک چیپ روی G با شروع از آرایش κ_q ، یک بازی نامتناهی است.

برهان. طبق لم ۳-۲-۷ یک بازی قانونی با شروع از κ وجود دارد که هر راس یک بار شلیک شده و به آرایش κ باز می‌گردیم. در ضمن در این بازی q اولین راسی است که شلیک می‌شود. بنابراین با توجه به این که $\deg(q) = \kappa_q(q)$ ، می‌توانیم این بازی قانونی را عیناً به عنوان یک بازی شلیک چیپ با شروع از آرایش κ_q اجرا کنیم و مجدداً به آرایش κ_q باز گردیم. با تکرار همین دنباله، بازی را ادامه داده و یک بازی نامتناهی به دست می‌آوریم. ■

قضیه زیر یک کران برای سطح یک آرایش بحرانی به دست می‌دهد.

قضیه ۳-۴-۶ [۳۲] فرض کنید G یک گراف و κ یک آرایش بحرانی باشد، در این صورت

$$0 \leq \text{level}(\kappa) \leq |E(G)| - |V(G)| + 1.$$

برهان. طبق لم فوق آرایش شروع κ_q که از آرایش بحرانی κ به دست می‌آید، یک بازی شلیک چیپ نامتناهی تولید می‌کند. بنابراین طبق قضیه ۱-۳-۳ (ج) تعداد کل چیپ‌ها در آرایش κ_q حداقل برابر $|E(G)|$ است. از طرف دیگر تعداد چیپ‌های روی هر راس $k \neq q$ در κ و κ_q برابر است. این نشان می‌دهد که $w(\kappa) + \deg(q) \geq |E(G)|$ و بنابراین $\text{level}(\kappa) \geq 0$. برای نشان دادن نامساوی راست کافی است توجه کنیم که هر آرایش بحرانی، پایدار است، لذا

$$w(\kappa) \leq \sum_{k \neq q} (\deg(k) - 1) = 2|E(G)| - \deg(q) - |V(G)| + 1.$$

و در نتیجه حکم ثابت می‌شود. ■

اکنون آماده‌ایم تا به ارتباط چندجمله‌ای تات و آرایش‌های بحرانی بپردازیم. فرض کنید G یک گراف همبند باشد و برای هر $i \geq 0$ ، تعداد آرایش بحرانی از سطح i را با c_i نشان دهید. با توجه به قضیه ۳-۴-۶ واضح است که $c_i = 0$ برای هر $i > |E(G)| - |V(G)| + 1$. حال تابع مولد آرایش‌های بحرانی را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$P_q(G; y) = \sum_{i=0}^{|E(G)|-|V(G)|+1} c_i y^i.$$

بی شک شگفت زده خواهید شد اگر بگوییم تابع مولد فوق در واقع همان چندجمله‌ای تات به ازای $x = 1$ است! به عنوان نمونه با توجه به مثال $3-4-4$ داریم $P_q(K_4 \setminus e; y) = 4 + 3y + y^2$ از طرف دیگر در مثال $3-4-2$ دیدیم که $T(K_4 \setminus e; 1, y) = 4 + 3y + y^2$.

قضیه $3-4-7$ [۳۲] برای یک گراف $G = (V, E)$ و یک راس $q \in V$ ، تابع مولد آرایش‌های بحرانی روی G برابر با چندجمله‌ای تات در طول خط $x = 1$ است؛ یعنی

$$P_q(G; y) = T(G; 1, y).$$

در نتیجه مقدار چندجمله‌ای سمت چپ مستقل از راس q می‌باشد.

برهان. قضیه با استقرا روی $|E|$ ثابت می‌شود. ابتدا می‌دانیم که اگر گراف G تنها از یک یال غیر طوقه $e = qu$ تشکیل شده باشد، آن‌گاه تنها یک آرایش بحرانی وجود دارد که وزن آن صفر است. بنابراین سطح آن برابر است با $0 = -|E| + \deg(q)$ ، در نتیجه $P_q(G; y) = 1 = T(G; 1, y)$. هم‌چنین اگر گراف G تنها از یک طوقه $e = qq$ تشکیل شده باشد، آن‌گاه تنها یک آرایش بحرانی وجود دارد که وزن آن صفر است. بنابراین سطح آن برابر است با $1 = -|E| + \deg(q)$ ، در نتیجه $P_q(G; y) = y = T(G; 1, y)$.

حال فرض کنید گراف G حداقل دو یال دارد و $e = qu$ یک یال G با یک سر q باشد که u می‌تواند خود q نیز باشد. سه حالت در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. فرض کنید یال e یک هم‌طوقه است. برای هر آرایش بحرانی κ' روی G/e ، آرایش κ روی G را به صورت $\kappa(k) = \kappa'(k)$ برای هر $k \neq u, q$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $\kappa(u) = \deg(u) - 1$. در این صورت κ یک آرایش بحرانی روی G است زیرا بعد از شلیک q می‌توانیم u را شلیک کنیم و سپس دنباله بحرانی κ' را عیناً اجرا کنیم تا به κ بازگردیم (تعریف $3-2-8$). بنابراین به هر آرایش بحرانی روی G/e ، یک آرایش بحرانی روی G نسبت می‌دهیم. اما این تابع دوسویی است زیرا با توجه به برشی بودن e ، هر آرایش بحرانی روی G به راس u به تعداد $\deg(u) - 1$ چپ می‌دهد. از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned} \text{level}(\kappa') &= \sum_{k \neq q, u} \kappa'(k) - |E(G/e)| + \deg_{G/e}(q) \\ &= \sum_{k \neq q, u} \kappa(k) - (|E(G)| - 1) + (\deg_G(q) + \deg_G(u) - 2) \\ &= \sum_{k \neq q, u} \kappa(k) + (\deg_G(u) - 1) - |E(G)| + \deg_G(q) \\ &= \sum_{k \neq q} \kappa(k) - |E(G)| + \deg_G(q) \end{aligned}$$

$$= \text{level}(\kappa).$$

در نتیجه تابع مولد دو گراف G و G/e برابر است،

$$P_q(G; y) = P_q(G/e; y). \quad (۱.۳)$$

حالت ۲. فرض کنید یال e یک طوقه است. پس $G \setminus e$ همبند است. با بحثی مشابه بحث حالت اول به هر آرایش بحرانی κ' روی $G \setminus e$ ، یک آرایش بحرانی κ روی G با ضابطه $\kappa(k) = \kappa'(k)$ ، برای هر $k \neq q$ ، نسبت می‌دهیم. می‌دانیم κ روی G بحرانی است زیرا دنباله بحرانی κ' روی $G \setminus e$ عیناً روی G قابل اجرا است. در ضمن واضح است که این تابع دوسویی است و داریم

$$\begin{aligned} \text{level}(\kappa') &= \sum_{k \neq q} \kappa'(k) - |E(G \setminus e)| + \deg_{G \setminus e}(q) \\ &= \sum_{k \neq q} \kappa(k) - (|E(G)| - ۱) + (\deg_G(q) - ۲) \\ &= \text{level}(\kappa) - ۱. \end{aligned}$$

بنابراین توابع مولد دو گراف G و $G \setminus e$ در رابطه زیر صدق می‌کنند،

$$P_q(G; y) = y P_q(G \setminus e; y). \quad (۲.۳)$$

حالت ۳. در نهایت فرض کنید یال e نه هم طوقه و نه طوقه است. پس $G \setminus e$ همبند است. آرایش‌های بحرانی گراف G را به دو دسته تقسیم کنید. آرایش‌های بحرانی κ که $\kappa(u) = \deg(u) - ۱$ را در کلاس A و بقیه آرایش‌های بحرانی را در کلاس A' قرار دهید. به هر آرایش κ در A ، یک آرایش κ' روی G/e با ضابطه $\kappa'(k) = \kappa(k)$ ، برای هر $k \neq u, q$ ، نسبت می‌دهیم. نشان می‌دهیم κ' بحرانی است. یک دنباله بحرانی برای κ روی G در نظر بگیرید. با توجه به این که $\kappa(u) = \deg(u) - ۱$ ، بعد از شلیک راس q ، راس u آماده است و شلیک آن از تعداد چیپ‌های روی راس‌های دیگر نمی‌کاهد، لذا بدون کم شدن کلیت می‌توانیم فرض کنیم اولین دو شلیک در این دنباله بحرانی q و u هستند. اما پس از شلیک u برای شلیک راس‌های دیگر، وضعیت در دو گراف یکسان است. لذا می‌توانیم از این به بعد دنباله قانونی روی G را روی G/e اجرا کرده و به κ' برگردیم. در ضمن با انجام عکس عملیات فوق می‌توانیم به هر آرایش بحرانی κ' روی G/e یک آرایش κ روی G با ضابطه $\kappa(k) = \kappa'(k)$ ، برای هر $k \neq q, u$ و $\kappa(u) = \deg(u) - ۱$ نسبت دهیم. این آرایش بحرانی است زیرا

بعد از شلیک راس‌های q و u همان آرایشی را به دست می‌آوریم که بعد از شلیک راس q در G/e داشتیم. با ادامه دنباله بحرانی مربوط به κ' به آرایش κ باز می‌گردیم زیرا هر راس دقیقاً یک بار شلیک شده و داریم $\kappa - L1 = \kappa$. این نشان می‌دهد که تابع نسبت κ به κ' روی A دوسویی است. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \text{level}(\kappa) &= \sum_{k \neq q} \kappa(k) - |E(G)| + \deg_G(q) \\ &= \sum_{k \neq u, q} \kappa'(k) + \deg_G(u) - 1 - (|E(G/e)| + 1) + \deg_G(q) \\ &= \sum_{k \neq u, q} \kappa'(k) - |E(G/e)| + \deg_{G/e}(q) \\ &= \text{level}(\kappa'). \end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان یک تناظر یک به یک بین آرایش‌های کلاس A' و آرایش‌های بحرانی روی $G \setminus e$ برقرار کرد. برای هر آرایش بحرانی κ در A' ، آرایش κ' را روی $G \setminus e$ مشابه κ تعریف می‌کنیم. واضح است که هر دنباله بحرانی در $G \setminus e$ ، در G نیز یک دنباله بحرانی است. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \text{level}(\kappa) &= \sum_{k \neq q} \kappa(k) - |E(G)| + \deg_G(q) \\ &= \sum_{k \neq q} \kappa'(k) - (|E(G \setminus e)| + 1) + (\deg_{G \setminus e}(q) + 1) \\ &= \text{level}(\kappa'). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$P_q(G; y) = P_q(G \setminus e; y) + P_q(G/e; y). \quad (۳.۳)$$

بنابراین با توجه به گزاره ۳-۴-۱ و روابط (۱.۳)، (۲.۳) و (۳.۳)، با استقرا روی $|E|$ حکم ثابت می‌شود. ■

یک نتیجه از قضیه فوق برابری مرتبه گروه بحرانی با تعداد درخت‌های فراگیر گراف همبند G است. البته این نتیجه اولین بار مستقل از قضیه فوق اثبات شده و در واقع خود به عنوان یک مشاهده در حدس ابتدایی این قضیه مفید بوده است. برای یک اثبات با ابزارهای نظریه جبری گراف [۴] و برای یک تناظر دوسویی صریح [۶] را ببینید. برای مشاهده ارتباط‌های بیشتر چندجمله‌ای تات و گروه بحرانی یک گراف [۵] را ببینید.

نتیجه ۳-۴-۸ [۴] برای گراف همبند G ، مرتبه گروه بحرانی $\mathcal{C}(G)$ برابر تعداد درخت‌های فراگیر G یا همان عدد درختی G است.

برهان. فرض کنید برای $i, i \geq 0$ برابر تعداد آرایش‌های بحرانی در سطح i باشد. بنابراین $|\mathcal{C}(G)| = \sum_{i=0}^{\infty} c_i = P_q(G; 1)$. از طرفی طبق قضیه ۳-۴-۷ $P_q(G; 1) = T(G; 1, 1)$ و $T(G; 1, 1)$ برابر با تعداد درخت‌های فراگیر G است. ■

۳-۵ بررسی ساختاری گروه بحرانی

این بخش را که بخش پایانی این فصل است به بررسی ساختاری گروه بحرانی گراف G اختصاص داده‌ایم. همان‌طور که دیدیم مجموعه آرایش‌های بحرانی یک گراف G ساختاریک گروه آبلی را دارد که آن را با $\mathcal{C}(G)$ نمایش می‌دهیم. طبق قضیه اساسی گروه‌های آبلی، هر گروه آبلی را می‌توان به صورت مجموع مستقیم گروه‌های دوری نوشت. در واقع با توجه به این که $\mathcal{C}(G)$ یک گروه آبلی متناهیاً تولید شده است، مطلب بیشتری می‌دانیم. قضیه زیر به قضیه ساختار معروف است، ساختار گروه‌های آبلی متناهیاً تولید شده را به نحو بارزی شفاف می‌کند.

قضیه ۳-۵-۱ اگر A یک گروه آبلی متناهیاً تولید شده باشد، آنگاه

$$A \cong (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z},$$

که $d_1, \dots, d_r$ اعداد صحیح مثبت هستند که برای $1 \leq i = 1 \leq r-1$ ، $d_i | d_{i+1}$. در ضمن تحت شرط اخیر، این نمایش یکتا است.

در ادامه قصد داریم روشی را برای پیدا کردن فاکتورهای نوردای یک گروه آبلی ارائه کنیم. ابتدا به طور مختصر مطالبی در مورد ماتریس‌ها روی حلقه $\mathbb{Z}$ بیان می‌کنیم.

مجموعه کلیه ماتریس‌های $n \times n$ روی حلقه $\mathbb{Z}$ را با $M(n, \mathbb{Z})$ نشان داده و مجموعه همه ماتریس‌های $A \in M(n, \mathbb{Z})$ که در $M(n, \mathbb{Z})$ وارون دارند را با $GL(n, \mathbb{Z})$ نمایش می‌دهیم. حال فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ روی حلقه $\mathbb{Z}$ باشد. هر یک از سه عمل زیر را یک عمل سطری مقدماتی روی ماتریس A گوئیم.

(۱) اضافه کردن مضربی از یک سطر به سطر دیگر،

(۲) ضرب یک سطر در عدد ± 1 و

(۳) تعویض دو سطر.

به طور مشابه می‌توانیم اعمال ستونی مقدماتی را تعریف کنیم. قضیه زیر نشان می‌دهد که با به کارگیری اعمال سطری و ستونی مقدماتی روی یک ماتریس A ، می‌توانیم آن را به یک فرم ساده تبدیل کنیم.

قضیه ۳-۵-۲^۴ فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ روی حلقه $\mathbb{Z}$ باشد. در این صورت می‌توان با به کارگیری اعمال سطری و ستونی مقدماتی روی A ، آن را به یک ماتریس به فرم $N = \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}$ تبدیل کرد، که D یک ماتریس قطری $r \times r$ با درایه‌های قطری $d_1, d_2, \dots, d_r$ بوده و O یک ماتریس صفر از اندازه مناسب است. علاوه بر این d_i ها اعداد صحیح مثبت هستند و $d_i | d_{i+1}$ برای $1 \leq i \leq r-1$. اعداد $d_1, \dots, d_r$ و d_r به طور یکتا به وسیله A تعیین می‌شوند. هم‌چنین ماتریس‌های $R_1 \in GL(m, \mathbb{Z})$ و $R_2 \in GL(n, \mathbb{Z})$ یافت می‌شوند که $N = R_1 A R_2$.

اعداد طبیعی $d_1, \dots, d_r$ ذکر شده در قضیه فوق را فاکتورهای ناوردای ماتریس A گوئیم و ماتریس $N = \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}$ را فرم اسمیت نرمال از A می‌خوانیم. برای بحث بیشتر در این باره [۱۲] بخش 4.2.6 را ببینید. در ادامه مطالبی در مورد گروه‌های آبلی متناهیاً تولید شده بیان می‌کنیم.

زیرمجموعه X از گروه آبلی F را یک پایه برای F گوئیم هرگاه (1) مجموعه X گروه F را تولید کند و (2) مجموعه X مستقل خطی باشد، یعنی برای اعضای متمایز $x_1, \dots, x_t \in X$ و اعداد صحیح $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_t x_t = 0 \quad \Rightarrow \quad n_i = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq t.$$

گروه آبلی F را یک گروه آبلی آزاد روی مجموعه X می‌گوئیم هرگاه X یک پایه برای F باشد. هر عضو عادی $f \in F$ را می‌توان به صورت یکتا به فرم $f = n_1 x_1 + \dots + n_t x_t$ نوشت که $n_i \in \mathbb{Z}$ و $x_i \in X$. به راحتی می‌توان نشان داد که اگر F یک گروه آبلی آزاد روی مجموعه X باشد آن گاه برای هر $x \in X$ ، $A_x \cong \mathbb{Z}$.^۵

گروه آبلی A را گروه آبلی تعریف شده توسط مجموعه مولد $\{a_1, \dots, a_m\}$ و روابط

$$\sum_j r_{ij} a_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

برای $r_{ij} \in \mathbb{Z}$ ، هرگاه $A \cong F/K$ ، که F گروه آبلی آزاد روی مجموعه $\{a_1, \dots, a_m\}$ و K زیرگروه F تولید شده به وسیله اعضای $b_i = \sum_j r_{ij} a_j$ ، $1 \leq i \leq n$ ، است. ماتریس $n \times m$ که به صورت $R = (r_{ij})$ تعریف

^۴[۱۲] قضیه 4.29
^۵[۲۲] قضیه II.1.1.

می‌شود را ماتریس روابط گروه A می‌خوانیم. می‌توان نشان داد که اگر R' از به کارگیری اعمال سطری و ستونی مقدماتی روی R به دست آید، آن گاه مجموعه مولد $\{a'_1, \dots, a'_m\}$ برای F یافت می‌شود که A گروه آبلی تولید شده توسط این مجموعه مولد و ماتریس روابط R' است.^۶ از تلفیق این مطلب با قضیه ۳-۵-۲ نتیجه اصلی حاصل می‌شود. این نتیجه روشی برای به دست آوردن فاکتورهای ناوردای گروه‌های آبلی متناهیاً تولید شده به دست می‌دهد.

نتیجه ۳-۵-۳ فرض کنید A یک گروه آبلی تعریف شده توسط مجموعه مولد $\{a_1, \dots, a_m\}$ ، $a_i \in A$ و ماتریس روابط R باشد. اگر $N = \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}$ فرم اسمیت نرمال ماتریس R باشد، که یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری $d_1, \dots, d_r$ است، آن گاه اعداد صحیح $d_1, \dots, d_r$ فاکتورهای ناوردای گروه A هستند و داریم

$$A \cong (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z},$$

که تعداد جمعوئدهای $\mathbb{Z}$ برابر $m - r$ است.

برهان. فرض کنید $N = (n_{ij})$. طبق آنچه ذکر شد، اگر K زیرگروه F تولید شده توسط بردارهای $b_i = \sum_j n_{ij} a_j$ باشد، آن گاه داریم $A \cong F/K$. اما با توجه به فرم N داریم $N \cong d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus d_r\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0$. در نتیجه

$$\begin{aligned} A &\cong (\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}) / (d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus d_r\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0) \\ &\cong (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

■

و حکم ثابت می‌شود.

برای بحث بیشتر درباره گروه‌های آبلی متناهیاً تولید شده [۲۲] بخش VII.2.app را ببینید. بعد از مرور مختصر نتایج کلاسیک درباره گروه‌های آبلی متناهیاً تولید شده، به بازی دلار باز گردیم. چگونه می‌توان فاکتورهای ناوردای گروه بحرانی $\mathcal{C}(G)$ را به دست آورد؟ برای پاسخ به این سوال از نتیجه ۳-۵-۳ استفاده می‌کنیم. ابتدا باید برای $\mathcal{C}(G)$ یک مجموعه مولد و تعدادی رابطه ارایه کنیم. قضیه زیر ما را به طرز شگفت آوری در این کار پیش می‌برد. ماتریسی که از حذف سطر و ستون مربوط به راس q در ماتریس لاپلاسین گراف G به دست می‌آید را ماتریس لاپلاسین تقلیل یافته گراف G گوئیم و با L_q نشان می‌دهیم. این قضیه بیان می‌کند که ماتریس روابط گروه $\mathcal{C}(G)$ همان ماتریس L_q است.

^۶ برای اثبات این مطلب [۲۲] بخش VII.2.app را ببینید.

قضیه ۳-۵-۴ [۴] فرض کنید L_q ماتریس لاپلاسیین تقلیل یافته گراف همبند $G = (V, E)$ باشد. در این صورت می توان برای گروه $\mathcal{C}(G)$ مولدها و روابطی انتخاب کرد به طوری که ماتریس روابط این گروه ماتریس L_q باشد.

برهان. برای هر راس $k \neq q$ ، قرار دهید $a_k = e_k - e_q$ که e_k تابع شاخص راس k در $C(G; \mathbb{Z})$ است. در این صورت مجموعه $X = \{a_k : k \in V, k \neq q\}$ یک مجموعه مولد برای $\ker \tau$ است، زیرا برای هر $f \in \ker \tau$ داریم $f(q) = -\sum_{k \neq q} f(k)$ و لذا

$$f = \sum_k f(k)e_k = \sum_{k \neq q} f(k)e_k + f(q)e_q = \sum_{k \neq q} f(k)a_k.$$

از طرف دیگر واضح است که مجموعه X مستقل خطی است. بنابراین X یک پایه برای گروه $\ker \tau$ است. حال فرض کنید $L = (l_{ij})$ و برای هر راس $i \neq q$ قرار دهید $b_i = \sum_{j \neq q} l_{ij}a_j = Le_i$. ادعا می کنیم مجموعه $\{b_i : i \in V, i \neq q\}$ یک مجموعه مولد برای $\text{Im } L$ است. برای هر $v = Lw \in \text{Im } L$ ، با توجه به این که $v \in \ker \tau$ داریم

$$\begin{aligned} v &= \sum_{k \neq q} (Lw)_k a_k = \sum_{k \neq q} \sum_j l_{kj} w_j a_k \\ &= \sum_{j \neq q} w_j b_j + w_q \sum_{k \neq q} l_{kq} a_k = \sum_{j \neq q} w_j b_j + w_q (Le_q) \\ &= \sum_{j \neq q} w_j b_j - w_q \sum_{j \neq q} Le_j = \sum_{j \neq q} (w_j - w_q) b_j, \end{aligned}$$

و ادعا ثابت می شود. در نتیجه گروه $\mathcal{C}(G) \cong \ker \tau / \text{Im } L$ طبق تعریف گروه آبلی تعریف شده توسط مجموعه مولد X و روابط $\{\sum_{j \neq q} l_{ij}a_j = 0; i \in V, i \neq q\}$ است. بنابراین ماتریس روابط این گروه برابر L_q است. ■

با کنار هم گذاشتن نتیجه ۳-۵-۳ و قضیه ۳-۵-۴ می توانیم فاکتورهای ناوردای گروه $\mathcal{C}(G)$ را به دست آوریم. برای این کار کافی است فرم اسمیت نرمال ماتریس L_q را پیدا کنیم.

مثال ۳-۵-۵ فرض کنید $L_q = (l_{ij})$ ماتریس لاپلاسیین تقلیل یافته گراف دور به طول n ، $G = C_n$ باشد. در این صورت

$$l_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j, & 1 \leq j \leq n-1, \\ -1 & i = j+1, & 1 \leq j \leq n-2, \\ -1 & j = i+1, & 1 \leq i \leq n-2, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

قرار دهید $R_1 = T^2$ که T ماتریسی که درایه‌های روی قطر و پایین قطر آن یک و بقیه درایه‌های آن صفر است. هم‌چنین قرار دهید $R_2 = (r_{ij})$ که

$$r_{ij} = \begin{cases} -1 & i = j + 1 \pmod{n-1}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ j & j = n-1, \quad 2 \leq i \leq n-1, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

داریم $1 = |\det R_2| = \det R_1$ و لذا $R_1, R_2 \in GL(n-1, \mathbb{Z})$. علاوه بر این

$$R_1 L_q R_2 = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & n \end{pmatrix},$$

که I ماتریس همانی $(n-2) \times (n-2)$ است. بنابراین ماتریس سمت راست معادله فوق فرم اسمیت نرمال L_q بوده و فاکتورهای ناوردای آن 1 ($n-2$ مرتبه) و n هستند. این نشان می‌دهد که

$$\mathcal{C}(C_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

مثال فوق ما را به گزاره زیر رهنمون می‌سازد.

گزاره ۳-۵-۶ فرض کنید $n_1, n_2, \dots, n_k$ اعداد طبیعی دلخواه داده شده باشند، در این صورت گراف G یافت می‌شود که

$$\mathcal{C}(G) \cong (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}).$$

برهان. فرض کنید گراف G از k دور $C_{n_1}, C_{n_2}, \dots, C_{n_k}$ که همگی در یک راس q مشترک هستند تشکیل شده است. اگر $L_q^{n_i}$ ماتریس لاپلاسین تقلیل یافته دور C_{n_i} و L_q ماتریس لاپلاسین تقلیل یافته G باشد، آنگاه L_q فرم بلوکی زیر را دارد،

$$L_q = \begin{pmatrix} L_q^{n_1} & & & \\ & L_q^{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_q^{n_k} \end{pmatrix}.$$

بنابراین با توجه به مطالب گفته شده در مثال ۳-۵-۵ می‌توانیم با به‌کارگیری اعمال سطری و ستونی مقدماتی روی L_q به ماتریس زیر برسیم

$$\begin{pmatrix} A_{n_1} & & & \\ & A_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{n_k} \end{pmatrix},$$

که A_{n_i} یک ماتریس $(n_i - 1) \times (n_i - 1)$ به فرم $\begin{pmatrix} I & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & n_i \end{pmatrix}$ است. در نتیجه طبق قضیه ۳-۵-۴ داریم

$$\mathcal{C}(G) \cong (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}).$$

■

و حکم ثابت می‌شود.

مثال ۳-۵-۷ ماتریس L_q برای گراف کامل $G = K_n$ برابر ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ ، $nI - J$ است که J ماتریسی با همه درایه‌های یک می‌باشد. در این صورت

$$L_q = \begin{pmatrix} n-1 & -\mathbf{1}^T \\ -\mathbf{1} & nI - J \end{pmatrix},$$

که در این جا I, J ماتریس‌های $(n-2) \times (n-2)$ هستند. قرار دهید

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & I + J \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{1}^T \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}.$$

داریم $\det R_1 = \det R_2 = 1$ ، لذا $R_1, R_2 \in GL(n-1, \mathbb{Z})$. علاوه بر این

$$R_1 L_q R_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & nI \end{pmatrix}.$$

بنابراین ماتریس سمت راست معادله فوق فرم اسمیت نرمال L_q است و فاکتورهای نوردای آن ۱ و $n-2$ مرتبه هستند. این نشان می‌دهد که

$$\mathcal{C}(K_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

با توجه به آنچه گفته شد و به کمک نتیجه ۳-۴-۸ به دست می‌آوریم که تعداد درخت‌های فراگیر گراف K_n برابر n^{n-2} است. این استدلال اثباتی دیگری برای فرمول کیلی فراهم می‌کند.

اخیراً مطالعات در زمینه بررسی ساختاری گروه $\mathcal{C}(G)$ رشد فزاینده‌ای داشته است. ساختار این گروه علاوه بر گراف‌های بالا برای چرخ‌ها، W_n [۴]، n -مکعب‌ها، Q_n [۲]، گراف‌های چندبخشی کامل، حاصل ضرب دکارتی گراف‌های کامل [۲۴] و درخت‌های منتظم [۳۸] بررسی شده است. هم‌چنین ثابت شده است که اگر G یک گراف مسطح و G^* گراف دوگان آن باشد، آنگاه $\mathcal{C}(G) \cong \mathcal{C}(G^*)$ [۱۳]. برای اطلاعات بیشتر درباره بازی دلار و گروه بحرانی [۳۳] را ببینید.

قسمت دوم

b —رنگ آمیزی گراف‌ها

فصل ۴

b -رنگ آمیزی حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد (یال چندگانه و طوقه مجاز نیست). یادآوری می‌کنیم که یک k -رنگ آمیزی معتبر برای گراف G یک نگاشت c از مجموعه V به روی مجموعه رنگ‌های $C = \{1, 2, \dots, k\}$ است، به طوری که هر دو راس مجاور در G دارای رنگ‌های متفاوت باشد. در حقیقت برای هر $i, 1 \leq i \leq k$ ، مجموعه $c^{-1}(\{i\})$ یک مجموعه مستقل از راس‌هاست که آن را یک کلاس رنگی می‌نامیم. می‌نیم k که G دارای یک k -رنگ آمیزی معتبر است را عدد رنگی G گفته و با $\chi(G)$ نشان می‌دهیم.

یک b -رنگ آمیزی از گراف G با k رنگ، یک k -رنگ آمیزی معتبر از G است به طوری که در هر کلاس رنگی i یک راس x_i وجود دارد که در همه $k - 1$ کلاس رنگی دیگر همسایه دارد. راس x_i را یک راس b -احاطه‌گرمجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ را یک سیستم b -احاطه‌گر می‌نامیم. بزرگترین عدد k که G دارای یک b -رنگ آمیزی با k رنگ است را عدد b -رنگی گراف G گفته و با $\varphi(G)$ نشان می‌دهیم. یک کران بدیهی و مفید برای $\varphi(G)$ به صورت زیر است.

$$\chi(G) \leq \varphi(G) \leq \Delta(G) + 1, \quad (1.4)$$

که $\Delta(G)$ بزرگترین درجه راس‌ها در G است. مفهوم b -رنگ آمیزی اولین بار توسط ایروینگ و منلاو [۲۳] معرفی شده است. تاکنون تحقیقات گوناگونی در مورد این موضوع انجام شده و همچنان سوالات باز زیادی در این رابطه وجود دارد [۲۰]، [۲۷]، [۲۸] و [۲۹]. مروری جامع بر این نتایج در [۳۶] انجام گرفته است.

حاصل ضرب دکارتی دو گراف G_1 و G_2 که با $G_1 \square G_2$ نشان می‌دهیم، گراف ساده‌ای با مجموعه راس‌های $V(G_1) \times V(G_2)$ است که دو راس (u_1, v_1) و (u_2, v_2) در $G_1 \square G_2$ مجاورند اگر و تنها اگر $u_1 = u_2$ و v_1, v_2 در G_2 مجاور باشند یا u_2, u_1 در G_1 مجاور باشند و $v_1 = v_2$. در این فصل همه جا وقتی $|V(G_1)| = m$ و $|V(G_2)| = n$ ، مجموعه راس‌های $G_1 \square G_2$ را به صورت یک آرایه $m \times n$ در نظر می‌گیریم که هر درایه (i, j) متناظر با راس (i, j) در $G_1 \square G_2$ است که $i \in V(G_1)$ و $j \in V(G_2)$ و هر ستون یک کپی از گراف G_1 و هر سطر یک کپی از گراف G_2 را القا می‌کند. بنابراین همه مولفه‌های اول به پیمانه $|V(G_1)|$ و مولفه‌های دوم به پیمانه $|V(G_2)|$ هستند. وقتی $G_2 = C_n$ ، همسایه‌های راس (i, j) را راس‌های $(i, j \pm 1)$ در نظر گرفته و وقتی $G_2 = P_n$ ، همسایه‌های راس (i, j) را برای $2 \leq j \leq n-1$ ، راس‌های $(i, j \pm 1)$ و برای $j = 1$ راس $(i, 2)$ و برای $j = n$ راس $(i, n-1)$ قرار می‌دهیم.

عدد b -رنگی حاصل ضرب دکارتی بعضی از گراف‌ها مانند $C_n \square C_k$ ، $P_n \square P_k$ ، $K_{1,n} \square P_k$ ، $K_{1,n} \square K_{1,n}$ و $C_n \square P_k$ مطالعه شده است [۲۷]. در این فصل به مطالعه این مفهوم برای حاصل ضرب دکارتی گراف کامل و هر گراف دلخواه G و به طور خاص دورها، مسیرها و گراف کامل می‌پردازیم [۳۴].

۱-۴ عدد b -رنگی گراف $K_m \square G$

در این بخش نتایجی در مورد حاصل ضرب دکارتی گراف کامل و هر گراف دلخواه G بیان می‌کنیم.

گزاره ۱-۴-۱ اگر c یک b -رنگ آمیزی برای گراف $K_m \square G$ با φ رنگ باشد که $\varphi > m$ ، آن گاه ستون متناظر با یک راس $v \in V(G)$ شامل حداکثر $\deg_G(v)$ راس b -احاطه‌گر است.

برهان. بنا به فرض $\varphi > m$ ، بنابراین در b -رنگ آمیزی c حداقل یک رنگ هست که در ستون متناظر با راس v ، K_m^v ظاهر نشده است. از طرف دیگر این رنگ باید در همسایه‌گی همه راس‌های b -احاطه‌گر در ستون K_m^v ظاهر شود که به وضوح باید در ستون‌های متفاوت باشند. بنابراین تعداد راس‌های b -احاطه‌گر در ستون K_m^v حداکثر $\deg_G(v)$ است. ■

فرض کنید $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ دنباله درجه گراف G با n راس باشد. بنا به گزاره ۴-۱-۱، هر ستون $K_m^{(i)}$ ، $1 \leq i \leq n$ ، شامل حداکثر d_i راس b -احاطه گر است. بنابراین تعداد راس های یک سیستم b -احاطه گر در $K_m \square G$ حداکثر $\sum_{i=1}^n d_i$ است. به این ترتیب برای $\varphi(K_m \square G)$ کران زیر به دست می آید که کران های موجود در [۲۷] را بهبود می بخشد.

نتیجه ۴-۱-۲ اگر $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ دنباله درجه گراف G با n راس و e پال باشد، آنگاه

$$\varphi(K_m \square G) \leq \sum_{i=1}^n d_i = 2e.$$

در زیر یک لم در مورد تکمیل پذیری یک رنگ آمیزی معتبر جزئی از گراف $K_m \square G$ برای هر گراف دلخواه G ارائه می کنیم. یک رنگ آمیزی معتبر جزئی از یک گراف، یک تخصیص از رنگ ها به بعضی از راس های G است به طوری که هر دو راس مجاور دارای رنگ های متفاوت باشد.

فرض کنید $S_1, S_2, \dots, S_n$ تعدادی مجموعه باشند. یک سیستم نمایندگی مجزا (SDR) برای این مجموعه ها یک n -تایی $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ است که دارای دو شرط زیر باشد. (۱) برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، $x_i \in S_i$ و (۲) برای $i \neq j$ ، $x_i \neq x_j$. قضیه معروف هال^۱، شرط لازم و کافی برای وجود SDR را بیان می کند به این صورت که خانواده $\{S_i\}_{i=1}^n$ دارای SDR است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعه $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ، داشته باشیم $|\cup_{i \in I} S_i| \geq |I|$. [۱۱].

لم ۴-۱-۳ فرض کنید G یک گراف و m یک عدد صحیح مثبت باشد که $2\Delta(G) \leq m$. اگر c یک رنگ آمیزی معتبر جزئی برای گراف $K_m \square G$ با m رنگ باشد به طوری که هر ستون یا به طور کامل رنگ شده باشد یا حداقل $2\Delta(G)$ راس رنگ نشده داشته باشد، آنگاه c را می توان به یک رنگ آمیزی معتبر برای گراف $K_m \square G$ با m رنگ توسعه داد.

برهان. در یک رنگ آمیزی معتبر جزئی از گراف $K_m \square G$ با m رنگ، یک ستون با راس های رنگ نشده $v_1, v_2, \dots, v_k$ که $k \geq 2\Delta(G)$ را در نظر می گیریم. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید این k رنگ ظاهر نشده رنگ های $1, 2, \dots, k$ باشند. برای هر $i = 1, 2, \dots, k$ ، S_i را مجموعه رنگ هایی در نظر می گیریم که می توانند برای رنگ آمیزی معتبر راس v_i استفاده شوند، پس $S_i \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$. برای توسعه این رنگ آمیزی به یک رنگ آمیزی معتبر برای این ستون، کافی است یک SDR برای خانواده $\{S_i\}_{i=1}^k$ بیابیم. برای

این منظور ثابت می کنیم این خانواده در شرط هال صدق می کند. فرض کنید $I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ و $|I| = r$. اگر $r \leq \Delta(G)$ آن گاه برای یک $i_0 \in I$ داریم

$$|\cup_{i \in I} S_i| \geq |S_{i_0}| \geq k - \Delta(G) \geq \Delta(G) \geq r = |I|.$$

اگر $r > \Delta(G)$ آن گاه $\cup_{i \in I} S_i = \{1, 2, \dots, k\}$. زیرا اگر یک رنگ مانند $i_0, 1 \leq i_0 \leq k$ در هیچ یک از S_i ها ظاهر نشود، آن گاه باید در همسایگی هر راس $v_i, i \in I$ یک راس u_i با رنگ i_0 وجود داشته باشد. راس های $u_i, i \in I$ هم رنگ هستند، پس در ستون های متفاوت ظاهر می شوند. بنابراین $r = |I| \leq \Delta(G)$ که تناقض است. در نتیجه

$$|\cup_{i \in I} S_i| = k \geq |I|.$$

لذا رنگ آمیزی هر ستون تکمیل پذیر است و اثبات پایان می یابد. ■

گزاره ۴-۱-۴. برای هر دو گراف G و H ، اگر گراف H' از جایگذاری یک یال H با مسیری به طول ۳ به دست آید، آن گاه $\varphi(G \square H') \geq \varphi(G \square H)$.

برهان. فرض کنید $e = xy$ یک یال در گراف H و گراف H' حاصل از جایگذاری یال e با مسیر $xwzy$ باشد. علاوه بر این فرض کنید c یک b-رنگ آمیزی از گراف $G \square H$ با $\varphi(G \square H)$ رنگ باشد. یک b-رنگ آمیزی c' برای گراف $G \square H'$ به صورت زیر ارائه می دهیم. ستون های متناظر با راس های w و z در H' را همانند ستون های متناظر با راس های x و y در رنگ آمیزی c رنگ می کنیم. سایر راس ها را دقیقاً مانند رنگ آمیزی c رنگ می کنیم. به راحتی دیده می شود که c' یک b-رنگ آمیزی از $G \square H'$ است. ■

نتیجه ۴-۱-۵. برای اعداد صحیح و مثبت n, m

$$\varphi(K_m \square P_{n+2}) \geq \varphi(K_m \square C_n), \quad \varphi(K_m \square C_{n+2}) \geq \varphi(K_m \square C_n).$$

برهان. فرض کنید $\varphi(K_m \square C_n) = k$. گراف C_{n+2} از جایگذاری یال $e = xy$ در گراف C_n با مسیر $xwzy$ به دست می آید. بنابراین بنا به گزاره ۴-۱-۴، یک b-رنگ آمیزی c برای گراف $K_m \square C_{n+2}$ با k رنگ به

فصل ۴. b -رنگ آمیزی حاصل ضرب دکارتی گراف ها _____ ۷۰

دست می آید. علاوه بر این بنا به اثبات گزاره ۴-۱-۴، در رنگ آمیزی c در ستون های متناظر با راس های w و z هیچ راس b -احاطه گری وجود ندارد. بنابراین با حذف یال wz هم چنان c یک b -رنگ آمیزی برای گراف $K_m \square P_{n+2}$ خواهد بود. ■

۲-۴ عدد b -رنگی گراف $K_m \square C_n$

در این بخش مقدار دقیق $\varphi(K_m \square C_n)$ را مشخص می کنیم. می دانیم که $\chi(K_m \square C_n) = m$ و $\Delta(K_m \square C_n) = m + 1$. در نتیجه بنا به رابطه (۱.۴)،

$$m \leq \varphi(K_m \square C_n) \leq m + 2. \quad (2.4)$$

برای اثبات قضیه اصلی به لم زیر نیاز داریم.

لم ۴-۲-۱ اگر c یک b -رنگ آمیزی برای گراف $K_m \square C_n$ با k رنگ و S یک سیستم b -احاطه گر باشد به طوری که:

(الف) یک راس b -احاطه گر در یک کلاس رنگی x ، مانند (r, s) ، $r \neq m$ ، وجود دارد به طوری که راس های (r, s) و $(r, s \pm 1)$ در S نیستند،

(ب) سطر m دارای راسی در S نیست،

(ج) وقتی n فرد باشد، $c(m, s - 1) \neq x$ ،

آنگاه $\varphi(K_{m+1} \square C_n) \geq k + 1$.

برهان. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می کنیم $(r, s) = (1, 1)$. یک b -رنگ آمیزی c' برای گراف $K_{m+1} \square C_n$ با $k + 1$ رنگ مانند زیرارایه می دهیم.

$$c'(i, j) = \begin{cases} x & (i, j) = (m+1, 1), \\ k+1 & (i, j) = (1, 1), \\ k+1 & (i, j) = (m+1, 2t), \quad 1 \leq t \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ c(m, 2t-1) & (i, j) = (m+1, 2t-1), \quad 2 \leq t \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ k+1 & (i, j) = (m, 2t-1), \quad 2 \leq t \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ c(i, j) & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

بنا به تعریف c' و خاصیت (ج)، به آسانی دیده می‌شود که c' یک رنگ آمیزی معتبر است. علاوه بر این بنا به خواص (الف) و (ب) و از آنجا که در رنگ آمیزی c' هر ستون دارای راسی با رنگ $k+1$ است، هر راس در S یک راس b -احاطه‌گر در c' بوده و هم‌چنین راس $(1, 1)$ یک راس b -احاطه‌گر با رنگ $k+1$ است. در نتیجه c' یک b -رنگ آمیزی با $k+1$ رنگ است. ■

قضیه ۴-۲-۲ برای اعداد صحیح مثبت $m, n \geq 4$ داریم:

$$\varphi(K_m \square C_n) = \begin{cases} m & m \geq 2n, \\ m+1 & m = 2n-1, \\ m+2 & m \leq 2n-2. \end{cases}$$

برهان. فرض کنید $m \geq 2n$. بنا به نتیجه ۴-۱-۲، $\varphi(K_m \square C_n) \leq 2n$. بنابراین بنا به رابطه (۲.۴)، داریم $\varphi(K_m \square C_n) = m$.
حال فرض کنید $m = 2n-1$. بنا به نتیجه ۴-۱-۲، $\varphi(K_m \square C_n) \leq 2n = m+1$. برای اثبات تساوی، یک رنگ آمیزی برای گراف $K_m \square C_n$ با $m+1$ رنگ ارائه می‌دهیم.
یک آرایه $(m+1) \times n$ با تعدادی درایه پر مطابق زیرارایه می‌دهیم. این رنگ آمیزی جزئی را c می‌نامیم.
داریم $1 \leq j \leq n$ ، $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ و $r = 0, 1$.

$$\begin{aligned} c(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor - r, j) &= 2j - r, \\ c(2k, 2k-2) &= 4k-1, \quad c(2k, 2k+1) = 4k-3, \\ c(m+1, 2k-r) &= 4k+2r-3. \end{aligned}$$

اگر n فرد باشد، هم‌چنین قرار می‌دهیم:

$$c(m+1, n) = c(n, n-1) = c(n+1, 1) = 4.$$

در شکل ۴-۱، این آرایه برای $n = 4$ نشان داده شده است.

۱	۳		
۲	۴	۱	۳
		۵	۷
۵	۷	۶	۸
۳	۱	۷	۵

شکل ۴-۱ یک b -رنگ آمیزی جزئی از گراف $K_8 \square C_4$.

در این آرایه درایه‌های داده شده یک رنگ آمیزی جزئی از گراف $K_{m+1} \square C_n$ است، که هرستون دارای سه درایه پر است. چون $m = 2n - 1 \geq 7$ ، هرستون حداقل ۴ راس رنگ نشده دارد، بنا به لم ۴-۱-۳، c را می‌توان به یک رنگ آمیزی برای گراف $K_{m+1} \square C_n$ با $m + 1$ رنگ توسعه داد. حال برای به دست آوردن رنگ آمیزی دلخواه آخرین سطر را حذف می‌کنیم. در این رنگ آمیزی هرستون دقیقاً یک رنگ غایب دارد. مجموعه راس‌های $\{(2\lceil j/2 \rceil - r, j) \mid 1 \leq j \leq n, r = 0, 1\}$ یک سیستم b -احاطه‌گراست. زیرا برای $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ ، رنگ غایب درستون $2k$ ، $4k - 3$ است که رنگ درایه‌های $(2k, 2k + 1)$ و $(2k - 1, 2k - 1)$ می‌باشد. همچنین رنگ غایب درستون $2k + 1$ ، $4k - 1$ است که رنگ درایه‌های $(2k, 2k - 2)$ و $(2k - 1, 2k)$ می‌باشد.

حال اگر $2n - 2 \leq m \leq 9$ ، آنگاه بنا به رابطه (۲.۴)، $\varphi(K_m \square C_n) \leq m + 2$ ، برای اثبات تساوی، یک b -رنگ آمیزی احاطه‌گر برای $K_m \square C_n$ با $m + 2$ رنگ ارایه می‌دهیم. یک آرایه $(m + 2) \times n$ با درایه‌های پر شده مطابق زیر در نظر می‌گیریم. این رنگ آمیزی جزئی را c می‌نامیم. داریم $1 \leq j \leq \lceil m/2 \rceil + 1$ و $1 \leq k \leq \lceil \frac{m}{4} \rceil$ و $r = 0, 1$.

$$c(2\lceil \frac{j}{2} \rceil - r, j) = 2j - r,$$

$$c(2k - r, 2k - 2) = 4k + r - 1, \quad c(2k - r, 2k + 1) = 4k + r - 3,$$

$$c(m + 1, 2k - r) = 4k + 2r - 3, \quad c(m + 2, 2k - r) = 4k + 2r - 2.$$

اگر $m \equiv 0, 3 \pmod{4}$ ، آن گاه تعریف می کنیم.

$$c(\lceil m/2 \rceil + 2 - r, \lceil m/2 \rceil) = 6 - r,$$

$$c(\lceil m/2 \rceil + 2 - r, \lceil m/2 \rceil + 2) = 5 + r,$$

$$c(m + 1 + r, \lceil m/2 \rceil + 1) = 6 - r.$$

در شکل ۴-۲ این آرایه برای $m = 9$ و $n = 6$ داده شده است.

۱	۳	۲			۴
۲	۴	۱			۳
	۸	۵	۷	۶	
	۷	۶	۸	۵	
۱۰			۱	۹	۱۱
۹			۱۱	۱۰	۱
۳	۱	۷	۵	۱۱	۹
۴	۲	۸	۶	۱	۱۰

شکل ۴-۲ یک b-رنگ آمیزی جزئی از گراف $K_{11} \square C_6$.

این آرایه با درایه های داده شده یک رنگ آمیزی جزئی برای گراف $K_{m+2} \square C_n$ است که هر ستون دارای ۶ درایه پراست. چون $m \geq 9$ ، هر ستون حداقل چهار راس رنگ نشده دارد، در نتیجه بنا به لم ۴-۱-۳، c را می توان به یک رنگ آمیزی از گراف $K_{m+2} \square C_n$ با $m+2$ رنگ توسعه داد. برای به دست آوردن رنگ آمیزی مطلوب دو سطر آخر را حذف می کنیم. در این رنگ آمیزی در هر ستون دقیقاً دو رنگ غایب وجود دارد. مجموعه $\{(\lceil j/2 \rceil - r, j) \mid 1 \leq j \leq \lceil m/2 \rceil + 1, r = 0, 1\}$ یک سیستم b-احاطه گراست. زیرا برای $1 \leq k \leq \lceil \frac{m}{4} \rceil$ ، رنگ های غایب در ستون $2k$ ، $4k-2$ و $4k-3$ هستند و داریم $c(2k-1, 2k+1) = c(2k, 2k-1) = 4k-2$ و $c(2k, 2k+1) = c(2k-1, 2k-1) = 4k-3$. هم چنین رنگ های غایب ستون $2k+1$ و $4k$ هستند و داریم $c(2k-1, 2k-2) = c(2k, 2k) = 4k$ و $c(2k, 2k-2) = c(2k-1, 2k) = 4k-1$.

حال فرض کنید $4 \leq m \leq 2n-2$ و در شکل ۴-۳، یک b-رنگ آمیزی برای گراف های $K_4 \square C_n$ ، $n=4, 5$ و $K_5 \square C_n$ ، $n=5, 6$ داده شده است. مجموعه راس ها در سیستم b-احاطه گر S در

۱	۲	۵	۶
۲	۶	۲	۳
۵	۴	۱	۴
۴	۲	۴	۲

۱	۳	۵	۲	۶
۲	۶	۴	۶	۳
۵	۴	۱	۵	۴
۴	۲	۶	۳	۵

۳	۲	۵	۹	۱
۴	۱	۴	۸	۲
۷	۵	۹	۴	۸
۶	۳	۸	۶	۷
۸	۴	۱	۲	۵
۹	۶	۷	۳	۴
۵	۸	۲	۷	۶

۱	۳	۲	۳	۷	۴
۲	۴	۱	۴	۸	۳
۷	۸	۵	۷	۶	۹
۹	۷	۶	۸	۵	۸
۵	۹	۴	۱	۹	۲
۶	۵	۹	۲	۳	۱
۸	۶	۳	۹	۴	۷

شکل ۳-۴ یک b -رنگ آمیزی از گراف‌های $K_4 \square C_n$ ، $n = 4, 5$ و $K_5 \square C_n$ ، $n = 5, 6$.

شکل با دایره مشخص شده است. حال لم ۱-۲-۴ را دوبار برای $K_4 \square C_4$ به کار می‌بریم، بار اول برای $(r, s) = (2, 3)$ و بار دوم برای $(r, s) = (3, 4)$. هم‌چنین برای گراف $K_4 \square C_5$ ، لم ۱-۲-۴ را دوبار، هر دو بار برای $(r, s) = (3, 4)$ به کار می‌بریم. به این ترتیب b -رنگ آمیزی مطلوب برای گراف‌های $K_m \square C_n$ ، $n = 4, 5$ و $m = 5, 6$ به دست می‌آید. هم‌چنین با به کارگیری لم ۱-۲-۴ برای گراف $K_5 \square C_6$ و $K_6 \square C_5$ برای $(r, s) = (6, 5)$ ، b -رنگ آمیزی مطلوب برای $K_6 \square C_n$ ، $n = 5, 6$ به دست می‌آید. بنا به نتیجه ۴-۱-۵، برای به دست آوردن b -رنگ آمیزی مطلوب برای $K_m \square C_n$ ، $n \geq t$ ، کافی است یک b -رنگ آمیزی برای گراف‌های $K_m \square C_t$ و $K_m \square C_{t+1}$ داشته باشیم. بنابراین از b -رنگ آمیزی‌های بالا رنگ آمیزی مطلوب برای گراف‌های $K_m \square C_n$ ، $4 \leq m \leq 8$ و $m \leq 2n - 2$ به دست می‌آید. ■

۳-۴ عدد b -رنگی گراف $K_m \square P_n$

در این بخش با استفاده از نتایج بخش قبل مقدار دقیق $\varphi(K_m \square P_n)$ را مشخص می‌کنیم. می‌دانیم که $\chi(K_m \square P_n) = m$ و $\Delta(K_m \square P_n) = m + 1$ در نتیجه بنا به رابطه (۱.۴)،

$$m \leq \varphi(K_m \square P_n) \leq m + 2. \quad (3.4)$$

قضیه ۴-۳-۱ برای اعداد صحیح مثبت $m, n \geq 4$ داریم:

$$\varphi(K_m \square P_n) = \begin{cases} m & m \geq 2n - 2, \\ m + 1 & 2n - 5 \leq m \leq 2n - 3, \\ m + 2 & m \leq 2n - 6. \end{cases}$$

برهان. فرض کنید $m \geq 2n - 2$. بنا به نتیجه ۴-۱-۲، $\varphi(K_m \square P_n) \leq 2(n - 1)$. بنابراین بنا به رابطه (۳.۴)، داریم $\varphi(K_m \square P_n) = m$.

اگر $\varphi(K_m \square P_n) = m + 2$ آن گاه در اولین و آخرین ستون گراف $K_m \square P_n$ هیچ راس b-احاطه گر وجود ندارد، زیرا درجه راس های ستون های اول و آخر m است. از طرف دیگر بنا به گزاره ۴-۱-۴ در بقیه ستون ها هر یک حداکثر دو راس b-احاطه گر وجود دارد. در نتیجه $2(n - 2) \geq \varphi(K_m \square P_n) = m + 2$. بنابراین برای $m \geq 2n - 5$ داریم $\varphi(K_m \square P_n) \leq m + 1$.

حال فرض کنید $2n - 3 \leq m \leq 2n - 5$ ، یک b-رنگ آمیزی برای $K_m \square P_n$ با $m + 1$ رنگ ارایه می دهیم.

حالت ۱. $m = 2n - 3$.

رنگ آمیزی $c: V(K_m \square P_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, m + 1\}$ را مطابق زیر تعریف می کنیم:

$$c(i, j) = \begin{cases} m - 1 & (i, j) = (m, 1), \\ m + 1 & (i, j) = (3j - 4, j), \quad 1 \leq j \leq n - 1, \\ m + 1 & (i, j) = (3n - 6, n), \\ i + j - 1 \pmod{m} & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

به آسانی دیده می شود که c یک رنگ آمیزی معتبر است و مجموعه

$$S = \{(m - 1, 1), (3n - 5, n), (3j - 5, j), (3j - 3, j) \mid 2 \leq j \leq n - 1\}$$

یک سیستم b-احاطه گراست. زیرا هر راس $n - 1$ همسایه در ستون خودش را احاطه می کند. پس کافی است رنگ غایب در آن ستون، در همسایگی آن راس ظاهر شود. رنگ غایب در ستون j ، $2 \leq j \leq n - 1$ ، برابر $4j - 5$ ، در ستون اول برابر m و در ستون n ، برابر $4n - 7$ است. علاوه بر این $c(m - 1, 2) = m$ ، $c(3j - 3, j - 1) = 4j - 5$ و $c(3j - 5, j + 1) = 4j - 5$ ، $c(3n - 5, n - 1) = 4n - 7$.

در نتیجه S یک سیستم b-احاطه گر با رنگ های $\{1, 2, \dots, m\}$ است. در شکل ۴-۵ (الف) این رنگ آمیزی برای $m = 5$ نشان داده شده است و راس های b-احاطه گر با دایره مشخص شده است.

حال فرض کنید $m = 2n - 5$ ، b -رنگ آمیزی داده شده در بالا برای گراف $K_m \square P_{n-1}$ با $m + 1$ رنگ را در نظر می گیریم. یک ستون اضافه کرده و آن را دقیقاً مانند ستون اول رنگ می کنیم. رنگ آمیزی حاصل یک b -رنگ آمیزی از گراف $K_m \square P_n$ با $m + 1$ رنگ است.

حالت ۲. $m = 2n - 4$.

همان گونه که در شکل ۴-۴ می بینیم $\varphi(K_4 \square P_4) = 5$.

۵	۲	۵	۴
۱	۳	۴	۱
۳	۵	۱	۲
۴	۱	۲	۳

شکل ۴-۴ یک b -رنگ آمیزی از گراف $K_4 \square P_4$ با ۵ رنگ.

برای $n \geq 5$ نگاشت $c: V(K_m \square P_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, m + 1\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$c(i, j) = \begin{cases} m - 1 & (i, j) = (m, 1), \\ m + 1 & (i, j) = (3j - 4, j), \quad 1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil, \\ m + 1 & (i, j) = (3j - 5, j), \quad \lceil \frac{n}{4} \rceil + 1 \leq j \leq n - 1, \\ m + 1 & (i, j) = (3n - 7, n), \\ i + j - 1 \pmod{m} & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

به آسانی دیده می شود که c یک رنگ آمیزی معتبر است. مشابه حالت ۱، مجموعه

$$S = \{(m - 1, 1), (3n - 6, n), (3j - 5, j), (3j - 3, j), (i, 3i - 6), (i, 3i - 4) \mid \lceil \frac{n}{4} \rceil + 1 \leq i \leq n - 1, 2 \leq j \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil\}$$

یک سیستم b -احاطه گراست. در شکل ۵-۴ (ب) این رنگ آمیزی برای $m = 6$ نشان داده شده و راس های b -احاطه گر با دایره مشخص شده است.

حال فرض کنید $m \leq 2n - 6$ ، قرار دهید $n' = n - 2$. چون $m \leq 2n' - 2$ بنا به قضیه ۴-۲، $\varphi(K_m \square C_{n'}) = m + 2$ ، $n' \geq 4$ ، لذا بنا به نتیجه ۴-۱، $\varphi(K_m \square P_n) \geq m + 2$ و بنا به رابطه (۳.۴)، $\varphi(K_m \square P_n) = m + 2$ ، برای $n \geq 6$ ، برای $n = 5$ یک b -رنگ آمیزی برای گراف $K_m \square P_n$ در شکل ۶-۴ نشان داده شده است. ■

۱	۲	۳	۶
۲	۶	۴	۵
۳	۴	۵	۱
۶	۵	۱	۲
۴	۱	۶	۳

(الف)

۱	۲	۳	۷	۵
۲	۷	۴	۵	۷
۳	۴	۵	۶	۱
۴	۵	۶	۱	۲
۷	۶	۷	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

(ب)

شکل ۴-۵ یک b -رنگ آمیزی از گراف $K_5 \square P_4$ و $K_6 \square P_5$ با ۶ و ۷ رنگ.

۵	۱	۶	۴	۶
۶	۲	۵	۳	۱
۴	۳	۴	۲	۴
۱	۴	۱	۶	۵

شکل ۴-۶ یک b -رنگ آمیزی از گراف $K_6 \square P_5$ با ۶ رنگ.

۴-۴ عدد b -رنگی گراف $K_n \square K_n$

می‌دانیم که $\chi(K_n \square K_n) = n$ و $\Delta(K_n \square K_n) = 2n - 2$. بنا به رابطه (۱.۴)، $n \leq \varphi(K_n \square K_n) \leq 2n - 1$. در این بخش این کران را بهبود داده و ثابت می‌کنیم $2n - 3 \leq \varphi(K_n \square K_n) \leq 2n - 2$. در نهایت حدس می‌زنیم که برای $n \geq 5$ ، $\varphi(K_n \square K_n) = 2n - 3$.

لم ۴-۴-۱ فرض کنید c یک b -رنگ آمیزی برای گراف $K_n \square K_n$ با $2n - 1$ رنگ باشد. اگر دو راس (i, t) و (i, j) راس‌های b -احاطه‌گر باشند، آن‌گاه در ستون‌های j و t هیچ راس b -احاطه‌گر دیگری وجود ندارد. برهان. فرض کنید c یک b -رنگ آمیزی برای گراف $K_n \square K_n$ با $2n - 1$ رنگ باشد. واضح است که اگر راس (x, y) یک راس b -احاطه‌گر باشد، آن‌گاه همه $2n - 2$ همسایه این راس دارای رنگ‌های متفاوت هستند. یعنی رنگ‌های راس‌های سطر x و ستون y متفاوتند. حال بنا به خلف فرض کنید راس‌های (i, t) و (i, j) و (i', j) ، $i \neq i'$ b -احاطه‌گر باشند. چون راس (i, t) یک راس b -احاطه‌گر است، رنگ‌های راس‌های سطر i و ستون t متفاوت هستند. در نتیجه اگر $c(i', t) = a$ آن‌گاه در سطر i راسی به رنگ a وجود ندارد. بنابراین راس

b -احاطه‌گر (i, j) باید در ستون j همسایه‌ای به رنگ a داشته باشد. پس در سطر i' و ستون j راسی با رنگ a وجود دارد و این با فرض این که (i', j) راس b -احاطه‌گر است تناقض دارد. به دلیل مشابه راس (i', t) ، $i' \neq i$ ، راس b -احاطه‌گر نیست. ■

قضیه ۴-۴-۲ برای اعداد صحیح و مثبت $n \geq 2$ ، داریم:

$$\varphi(K_n \square K_n) \leq 2n - 2.$$

برهان. می‌دانیم که $\varphi(K_n \square K_n) \leq 2n - 1$. فرض کنید $\varphi(K_n \square K_n) = 2n - 1$ و c یک b -رنگ آمیزی با $2n - 1$ رنگ باشد. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید سطرها ۱ تا r هر یک دارای حداقل دو راس b -احاطه‌گر و سطرها ۱ تا $r + 1$ هر یک حداکثر یک راس b -احاطه‌گر داشته باشند. هم‌چنین فرض کنید راس‌های b -احاطه‌گر در r سطر اول و در s ستون اول قرار داشته باشند. بنا به لم ۴-۴-۱، در هر ستون j ، $1 \leq j \leq s$ ، تنها یک راس b -احاطه‌گر وجود دارد. اگر $r = 0$ یا $s = n$ آن‌گاه حداکثر n راس b -احاطه‌گر خواهیم داشت که تناقض است. اندازه مجموعه سیستم b -احاطه‌گر در رنگ آمیزی c ، حداکثر $s + (n - r)$ است. حال اگر $0 < r < n$ و $s < n$ آن‌گاه این تعداد حداکثر $2n - 1 - r < 2n - 1 - s + (n - r) \leq 2n - 1$ بوده که متناقض با فرض است. ■

قضیه ۴-۴-۳ برای اعداد صحیح و مثبت $n \geq 5$ ، داریم:

$$\varphi(K_n \square K_n) \geq 2n - 3.$$

برهان. برای اثبات قضیه یک b -رنگ آمیزی c با $2n - 3$ رنگ در دو حالت n زوج و فرد ارائه می‌دهیم. ابتدا تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{فرد}, \\ x - 2 & \text{زوج}. \end{cases}$$

حالت ۱. n فرد است.

در این حالت نگاشت $c : V(K_n \square K_n) \rightarrow \mathbb{N}$ را مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$c((i, j)) = \begin{cases} i + j - 1 \pmod{n-1} & i \leq j \leq n-i-1, \\ f(i+j) \pmod{n-1} & n-i \leq j \leq n-2, i \leq j, \\ (i+j-2 \pmod{n-2}) + (n-1) & j < i \leq n-1, (i, j) \neq (n-1, n-2) \\ n-3 & (i, j) = (n-1, n-2). \end{cases}$$

برای ستون های $n-1$ و n و سطر n ، نگاشت c را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$c((i, n-1)) = \begin{cases} 2i-2 \pmod{n-1} & 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}, \\ 2i-1 \pmod{n-1} & \frac{n+1}{2} \leq i \leq n-2, \\ 2n-4 & i = n-1. \end{cases}$$

$$c((i, n)) = \begin{cases} (2i-2 \pmod{n-2}) + (n-1) & i \text{ فرد}, i \leq n-2, \\ i-2 \pmod{n-1} & i \text{ زوج}, i \leq n-2, \\ n-2 & i = n-1. \end{cases}$$

$$c((n, j)) = \begin{cases} j-1 \pmod{n-1} & j \text{ فرد}, j \leq n-3, \\ (2j-2 \pmod{n-2}) + (n-1) & j \text{ زوج}, \\ 2n-5 & j = n-2, \\ 1 & j = n. \end{cases}$$

نگاشت c یک b-رنگ آمیزی و $S = \{(i, i), (j+1, j) \mid 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-2\}$ یک سیستم b-احاطه گراست. زیرا راس های S دارای رنگ های متمایز و رنگ های سطر و ستون متناظر با هر راس در S همه غیر از دو تا متمایز هستند. به عنوان مثال این رنگ آمیزی برای $n=7$ در شکل ۴-۷ (الف) نشان داده شده است.

حالت ۲. n زوج است.

در این حالت نگاشت $c : V(K_n \square K_n) \rightarrow \mathbb{N}$ را مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$c((i, j)) = \begin{cases} i + j - 2 \pmod{n-2} & i+1 \leq j \leq n-i-1, \\ f(i+j-1) \pmod{n-2} & n-i \leq j \leq n-2, i+1 \leq j, \\ (i+j-1 \pmod{n-1}) + (n-2) & j \leq i \leq n-1, (i, j) \neq (n-1, n-2), \\ n-4 & (i, j) = (n-1, n-2). \end{cases}$$

برای ستون های ۱ و $n-1$ و سطر n ، نگاشت c را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$c((i, n-1)) = \begin{cases} 2i-2 \pmod{n-2} & 1 \leq i \leq \frac{n-2}{2}, \\ 2i-1 \pmod{n-2} & \frac{n}{2} \leq i \leq n-3, \\ 2n-5 & i = n-2, \\ 2n-4 & i = n-1, \\ n-3 & i = n. \end{cases}$$

$$c((i, n)) = \begin{cases} (2i-2 \pmod{n-1}) + (n-2) & i \text{ فرد}, i \leq n-2, \\ i-2 \pmod{n-2} & i \text{ زوج}, i \leq n-2, \\ n-3 & i = n-1, \\ 1 & i = n. \end{cases}$$

$$c((n, j)) = \begin{cases} (2j-2 \pmod{n-1}) + (n-2) & j \text{ فرد}, 3 \leq j \leq n-3, \\ j-2 \pmod{n-2} & j \text{ زوج}, j \leq n-3, \\ n-4 & j = 1, \\ 2n-5 & j = n-2. \end{cases}$$

نگاشت c یک b-رنگ آمیزی و $S = \{(i, i), (j-1, j) \mid 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{(n-1, n-2)\}$ را نشان می دهد. زیرا راس های S دارای رنگ های متمایزند و رنگ های سطر و ستون متناظر با هر راس در S همه غیر از دو تا متمایز هستند. به عنوان مثال این رنگ آمیزی برای $n=8$ در شکل ۴-۷ (ب) نشان داده شده است. ■

تذکر. برای $n=3$ به تقریب یکریختی تنها راه ممکن برای داشتن یک b-رنگ آمیزی با ۴ رنگ چیزی است که در شکل ۴-۸ (الف) نشان داده شده است که کامل کردن آن غیر ممکن است. در نتیجه $\varphi(K_3 \square K_3) = 3$. برای $n=4$ یک b-رنگ آمیزی با $2n-2=6$ رنگ در شکل ۴-۸ (ب) داده شده است.

در پایان در رابطه با قضیه فوق، حدس زیر را ارائه می کنیم.

حدس. برای هر عدد صحیح $n \geq 5$ ، $\varphi(K_n \square K_n) = 2n-3$.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۱۱
۷	۳	۴	۵	۱	۲	۶
۸	۹	۵	۱	۶	۴	۱۰
۹	۱۰	۱۱	۶	۳	۱	۲
۱۰	۱۱	۷	۸	۲	۳	۹
۱۱	۷	۸	۹	۴	۱۰	۵
۶	۸	۲	۷	۹	۱۱	۱

(الف)

۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۸
۸	۹	۳	۴	۵	۱	۲	۶
۹	۱۰	۱۱	۵	۱	۶	۴	۱۲
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۶	۳	۱	۲
۱۱	۱۲	۱۳	۷	۸	۲	۳	۹
۱۲	۱۳	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۴
۱۳	۷	۸	۹	۱۰	۴	۱۲	۵
۴	۶	۱۰	۲	۷	۱۱	۵	۱

(ب)

شکل ۴-۷ یک b-رنگ آمیزی از گراف $K_8 \square K_8$ و $K_7 \square K_7$ با ۱۱ و ۱۳ رنگ.

۱	۲	۳
۴	۳	۱
۲	۴	?

(الف)

۱	۲	۳	۴
۵	۴	۱	۲
۶	۵	۴	۳
۳	۶	۲	۱

(ب)

شکل ۴-۸ b-رنگ آمیزی گراف $K_4 \square K_4$ و $K_3 \square K_3$.

فصل ۵

b -رنگ آمیزی گراف‌های کنسر

پس از تعریف مفهوم b -رنگ آمیزی و عدد b -رنگی این سوال مطرح می‌شود که آیا برای گراف G و عدد صحیح k ، $\chi(G) \leq k \leq \varphi(G)$ یک b -رنگ آمیزی برای G با k رنگ وجود دارد؟ جواب این سوال در حالت کلی منفی است. به عنوان مثال برای گراف Q_3 داریم $\chi(Q_3) = 2$ و $\varphi(Q_3) = 4$ ، اما هیچ b -رنگ آمیزی با ۳ رنگ ندارد [۲۳]. گراف G b -پیوسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر عدد صحیح k ، $\chi(G) \leq k \leq \varphi(G)$ یک b -رنگ آمیزی برای G با k رنگ وجود داشته باشد. تعدادی کمی از گراف‌های b -پیوسته شناخته شده است [۱۷].

فرض کنید k و n دو عدد طبیعی هستند که $2k < n$. برای مجموعه T از اندازه n ، V را مجموعه همه زیرمجموعه‌های k عضوی S در نظر بگیرید. گراف کنسر با پارامترهای n و k که با $K(n, k)$ نشان داده می‌شود گرافی با مجموعه راس‌های V است به طوری که دو راس مجاورند اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌های متناظر آن‌ها مجزا باشند. گراف‌های کنسر از دیدگاه‌های مختلف مورد مطالعه بوده است. در این فصل به مطالعه b -رنگ آمیزی این دسته از گراف‌ها می‌پردازیم. در بخش اول مقدار دقیق $\varphi(K(n, 2))$ و $\varphi(K(2k+1, k))$ را مشخص می‌کنیم. در بخش دوم ثابت می‌کنیم گراف کنسر با پارامترهای $k = 2$ و $n \geq 16$ ، b -پیوسته هستند [۳۵].

برای اثبات قضیه‌های اصلی این فصل از ساختارهای طرح‌های سه‌تایی اشتاینر استفاده خواهیم کرد. به همین

جهت در بخش بعد معرفی مختصری از طرح های سه تایی اشتاینر ارایه می کنیم.

۵-۱ طرح های سه تایی اشتاینر

یک دو تایی (S, B) را یک طرح سه تایی اشتاینر می نامیم، هرگاه S مجموعه متناهی از نقطه ها یا نمادها و B خانواده ای از زیر مجموعه های ۳ عضوی S به نام بلوک ها باشد، به طوری که هر دو نقطه از S با هم دقیقاً در یک بلوک ظاهر شود. هرگاه $|S| = n$ ، طرح سه تایی اشتاینر را با $STS(n)$ نشان می دهیم. به راحتی ثابت می شود که شرط لازم برای وجود $STS(n)$ این است که $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$. این شرایط لازم، کافی نیز بوده و برای هر $n = 6k + 3$ و $n = 6k + 1$ ، یک $STS(n)$ موجود است. ساختارهای مختلفی برای این طرح ها ارایه شده است. در ادامه به بیان برخی از این ساختارها می پردازیم.

تعریف ۵-۱-۱ یک مربع لاتین از مرتبه k یک آرایه $k \times k$ است که هر سلول آن شامل یکی از نمادهای $\{1, 2, \dots, k\}$ بوده به طوری که در هر سطر و هر ستون از آرایه، هر یک از نمادهای $1, 2, \dots, k$ یک و فقط یک بار ظاهر شوند. منظور از یک شبه گروه از مرتبه k زوج $(Q, \circ)$ است که Q یک مجموعه از اندازه k و "و" یک عمل دو تایی روی Q است به طوری که برای هر دو عضو a و b در Q ، معادلات $y \circ a = b$ و $a \circ x = b$ دارای جواب یکتا باشند. در حقیقت هر شبه گروه متناظر با یک مربع لاتین است و برعکس. یک شبه گروه $(Q, \circ)$ را خودتوان گوئیم هرگاه برای هر $i, 1 \leq i \leq k$ ، $i \circ i = i$ و آن را متقارن می خوانیم هرگاه برای هر $i, 1 \leq i \leq k$ ، $j \circ i = i \circ j$ ، $1 \leq i, j \leq k$ ، $i \circ i = k + i \circ k + i = i$.

مثال ۵-۱-۲ فرض کنید $n = 2k + 1$ یک عدد فرد باشد و گروه جمعی $(\mathbb{Z}_n, +)$ را در نظر بگیرید. با توجه به این که n فرد است، برای هر $i, j \in \mathbb{Z}_n$ که $i \neq j$ داریم $2i \neq 2j$. بنابراین یک جایگشت σ روی مجموعه $\{1, \dots, n\}$ وجود دارد که برای هر $i \in \mathbb{Z}_n$ ، $\sigma(2i) = i$. حال شبه گروه $(Q, \circ)$ را به صورت $Q = \mathbb{Z}_n$ و $i \circ j = \sigma(i + j)$ برای هر $i, j \in Q$ ، تعریف می کنیم. این شبه گروه، یک شبه گروه متقارن خودتوان است. فرض کنید $n = 2k$ یک عدد زوج باشد و گروه جمعی $(\mathbb{Z}_n, +)$ را در نظر بگیرید. در این صورت برای هر $i, 1 \leq i \leq k$ ، $i + i = (i + k) + (i + k) = 2i$. حال جایگشت σ را جایگشتی بگیرید که برای هر $i, 1 \leq i \leq k$ ، $\sigma(2i) = i$. حال شبه گروه $(Q, \circ)$ را به صورت $Q = \mathbb{Z}_n$ و $i \circ j = \sigma(i + j)$ برای هر $i, j \in Q$ ، تعریف می کنیم. این شبه گروه، یک شبه گروه متقارن نیمه خودتوان است.

ساختار بوس^۱: ساختن سه تایی اشتاینر از مرتبه $6k + 3$.

فرض کنید $n = 6k + 3$ و $(Q, \circ)$ یک شبه گروه متقارن خودتوان از مرتبه $2k + 1$ باشد، که $Q = \{1, 2, 3, \dots, 2k + 1\}$. قرار می دهیم $S = Q \times \{1, 2, 3\}$ و B را شامل دو نوع سه تایی های زیر در نظر می گیریم.

نوع ۱. $\{(i, 1), (i, 2), (i, 3)\} \in B$ برای $1 \leq i \leq 2k + 1$.

نوع ۲. $\{(i, 1), (j, 1), (i \circ j, 2)\}, \{(i, 2), (j, 2), (i \circ j, 3)\}, \{(i, 3), (j, 3), (i \circ j, 1)\} \in B$ برای $1 \leq i < j \leq 2k + 1$.

(S, B) یک طرح سه تایی اشتاینر از مرتبه $6k + 3$ است. [۳۰]

ساختار اسکولم^۲: ساختن سه تایی اشتاینر از مرتبه $6k + 1$.

فرض کنید $n = 6k + 1$ و $(Q, \circ)$ یک شبه گروه متقارن نیمه خودتوان از مرتبه $2k$ باشد، که $Q = \{1, 2, 3, \dots, 2k\}$. قرار می دهیم $S = Q \times \{1, 2, 3\} \cup \{\infty\}$ و B را شامل سه نوع سه تایی های زیر در نظر می گیریم.

نوع ۱. $\{(i, 1), (i, 2), (i, 3)\} \in B$ برای $1 \leq i \leq k$.

نوع ۲. $\{(i, 1), (j, 1), (i \circ j, 2)\}, \{(i, 2), (j, 2), (i \circ j, 3)\}, \{(i, 3), (j, 3), (i \circ j, 1)\} \in B$ برای $1 \leq i < j \leq 2k$.

نوع ۳. $\{\infty, (k + i, 1), (i, 2)\}, \{\infty, (k + i, 2), (i, 3)\}, \{\infty, (k + i, 3), (i, 1)\} \in B$ برای $1 \leq i \leq k$.

(S, B) یک طرح سه تایی اشتاینر از مرتبه $6k + 1$ است. [۳۰]

گرچه طرح سه تایی اشتاینر برای $1, 3 \pmod{6}$ وجود ندارد، اما می توان ساختارهای نزدیک به طرح سه تایی اشتاینر یافت. این ساختارها طرح های متعادل دوگانه نام دارند. یک طرح متعادل دوگانه یک زوج مرتب (S, B) است، به طوری که S مجموعه متناهی از نقطه ها یا نمادها و B خانواده ای از زیرمجموعه های S به نام بلوک ها است، به طوری که هر دو نقطه از S با هم دقیقاً در یک بلوک ظاهر شود. هرگاه $|S| = n$ ، این ساختار را با $PBD(n)$ نشان می دهیم. در زیر ساختاری از $PBD(n)$ برای $n = 6k + 5$ ارایه می دهیم که در آن اندازه همه بلوک ها غیر از یکی ۳ و تنها یک بلوک از اندازه ۵ وجود دارد.

^۱Bose

^۲Skolem

ساختار $n = 6k + 5$.

فرض کنید $Q = \{1, 2, \dots, 2k + 1\}$ و $(Q, \circ)$ یک شبه گروه متقارن از مرتبه $2k + 1$ باشد. هم چنین فرض کنید α جایگشت $(1)(2, 3, \dots, 2k + 1)$ باشد. قرار می دهیم $S = \{\infty_1, \infty_2\} \cup (\{1, 2, \dots, 2k + 1\} \times \{1, 2, 3\})$ و B را شامل سه نوع سه تایی های زیر در نظر می گیریم.

نوع ۱. $\{\infty_1, \infty_2, (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

نوع ۲. $\{\infty_1, (2i, 1), (2i, 2), \{\infty_1, (2i, 3), (\alpha(2i), 1)\}\}$
 $\{\infty_2, (2i, 2), (2i, 3)\}, \{\infty_1, (\alpha(2i), 2), (\alpha(2i), 3)\}$
 برای $1 \leq i \leq k$ ، $\{\infty_2, (\alpha(2i), 1), (\alpha^{-1}(2i), 3)\}, \{\infty_2, (2i, 1), (\alpha(2i), 2)\}$

نوع ۳. $\{(i, 1), (j, 1), (i \circ j, 2)\}, \{(i, 2), (j, 2), (i \circ j, 3)\}, \{(i, 3), (j, 3), (\alpha(i \circ j), 1)\}$ — برای $1 \leq i \leq 2k + 1$.

(S, B) یک $PBD(6k + 5)$ با دقیقاً یک بلوک از اندازه ۵ و سایر بلوک ها از اندازه ۳ است.

تعریف ۵-۱-۳ فرض کنید $Q = \{1, 2, \dots, 2k\}$ و $H = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2k - 1, 2k\}\}$ در این صورت هر زیر مجموعه دو عضوی $\{2i - 1, 2i\} \in H$ حفره نامیده می شود. یک شبه گروه با حفره H یک شبه گروه $(Q, \circ)$ از مرتبه $2k$ به طوری که برای هر $h \in H$ یک زیر شبه گروه از $(Q, \circ)$ باشد.

گزاره ۵-۱-۴ $[3^0]$ برای هر $k \geq 3$ ، یک شبه گروه $(Q, \circ)$ متقارن از مرتبه $2k$ با حفره های $H = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2k - 1, 2k\}\}$ و سه عدد متمایز $1 \leq i, j, l \leq 2k$ وجود دارد، به طوری که $l \circ j = i$ و $i \circ l = j$ ، $i \circ j = l$.

با استفاده از یک شبه گروه متقارن از مرتبه $2k$ با حفره H ، می توان ساختارهایی برای $STS(6k + 1)$ ، $STS(6k + 3)$ و $PBD(6k + 5)$ ارایه داد. از این ساختارها در اثبات b-پیوستگی گراف $K(n, 2)$ استفاده خواهیم کرد.

ساختار طرح های سه تایی اشتاینر با استفاده از شبه گروه های متقارن حفره دار

فرض کنید $(\{1, 2, \dots, 2k\}, \circ)$ یک شبه گروه متقارن از مرتبه $2k$ با حفره H باشد. در این صورت:

الف) زوج (S, B) یک $STS(6k+1)$ است، که $S = \{\infty\} \cup (\{1, 2, \dots, 2k\} \times \{1, 2, 3\})$ و B به صورت زیر تعریف می شود.

(۱) برای $1 \leq i \leq k$ ، (S_i, B_i) را یک $STS(7)$ در نظر بگیرید به طوری که داشته باشیم $B_i \subset B$ و $S_i = \{\infty\} \cup \{2i-1, 2i\} \times \{1, 2, 3\}$.

(۲) برای $1 \leq i \neq j \leq 2k$ که $\{i, j\} \notin H$ ، سه تایی های $\{(i, 1), (j, 1), (i \circ j, 2)\}$ و $\{(i, 2), (j, 2), (i \circ j, 3)\}$ در B قرار دارند.

ب) زوج (S, B) یک $STS(6k+3)$ است، که $S = \{\infty_1, \infty_2, \infty_3\} \cup (\{1, 2, \dots, 2k\} \times \{1, 2, 3\})$ و B به صورت زیر تعریف می شود.

(۱) برای $1 \leq i \leq k$ ، (S_i, B_i) را یک $STS(9)$ در نظر بگیرید به طوری که داشته باشیم $B_i \subset B$ و $S_i = \{\infty_1, \infty_2, \infty_3\} \cup (\{2i-1, 2i\} \times \{1, 2, 3\})$.

(۲) برای $1 \leq i \neq j \leq 2k$ که $\{i, j\} \notin H$ ، سه تایی های $\{(i, 1), (j, 1), (i \circ j, 2)\}$ و $\{(i, 2), (j, 2), (i \circ j, 3)\}$ در B قرار دارند.

ج) زوج (S, B) یک $PBD(6k+5)$ با یک بلوک از اندازه ۵ و سایر بلوک ها از اندازه ۳ است، که $S = \{\infty_1, \infty_2, \infty_3, \infty_4, \infty_5\} \cup (\{1, 2, \dots, 2k\} \times \{1, 2, 3\})$ و B به صورت زیر تعریف می شود.

(۱) برای $1 \leq i \leq k$ ، (S_i, B_i) را یک $PBD(11)$ قرار دهید به طوری که داشته باشیم $B_i \subset B$ و $S_i = \{\infty_1, \infty_2, \infty_3, \infty_4, \infty_5\} \cup (\{2i-1, 2i\} \times \{1, 2, 3\})$ باشد. قرار دهید $B_i \subset B$.

(۲) برای $1 \leq i \neq j \leq 2k$ که $\{i, j\} \notin H$ ، سه تایی های $\{(i, 1), (j, 1), (i \circ j, 2)\}$ و $\{(i, 2), (j, 2), (i \circ j, 3)\}$ در B قرار دارند.

۵-۲ عدد b-رنگی گراف های کنسر

در این بخش نتایجی در مورد عدد b-رنگی گراف کنسر برای مقادیری از n و k به دست می آوریم.

قضیه ۵-۲-۱ برای هر عدد صحیح مثبت k ، $k \geq 3$ ، $\varphi(K(2k+1, k)) = k+2$.

برهان. می دانیم که $\Delta(K(2k+1, k)) = k+1$ ، لذا با توجه به رابطه (۱.۴)، $\varphi(K(2k+1, k)) \leq k+2$. فرض کنید $k \geq 3$ ، برای اثبات تساوی یک b-رنگ آمیزی با $k+2$ رنگ ارائه می دهیم. کلاس رنگی i ،

$1 \leq i \leq k$ را شامل مجموعه

$$\{\{k+1, \dots, 2k+1\} - \{k+i\}, \{1, \dots, k\} - \{i\} \cup \{k+j\}, 1 \leq j \leq k+1, j \neq i\}$$

قرار می دهیم. هم چنین کلاس رنگی $k+1$ را شامل مجموعه

$$\{\{k+1, \dots, 2k\}, \{1, \dots, k\} - \{j\} \cup \{k+j\}, 1 \leq j \leq k\}$$

و کلاس $k+2$ را شامل مجموعه $\{1, 2, \dots, k\}$ تعریف می کنیم. سایر راس های $\{1, 2, \dots, 2k+1\}$ $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2k+1\}$ را به صورت زیر رنگ می کنیم. اگر $2k+1 \in A$ آن گاه برای یک $i \in A \cap \{1, 2, \dots, 2k+1\}$ A را به کلاس i اضافه می کنیم. اگر $2k+1 \notin A$ و $2k \in A$ آن گاه برای یک $i \in A \cap \{1, 2, \dots, 2k+1\}$ A را به کلاس i اضافه می کنیم. اگر $2k, 2k+1 \notin A$ آن گاه A را به کلاس رنگی $k+2$ اضافه می کنیم.

به آسانی دیده می شود که اعضای هر کلاس دو به دو دارای اشتراک غیر تهی هستند، لذا هر کلاس یک مجموعه مستقل تشکیل می دهد. پس این یک رنگ آمیزی معتبر است. مجموعه $\{1, 2, \dots, k\}, \{k+1, \dots, 2k+1\} - \{k+i\}, 1 \leq i \leq k+1$ یک سیستم b -احاطه گراست. زیرا راس $\{1, 2, \dots, k\}$ به همه راس های $\{k+1, \dots, 2k+1\} - \{k+i\}, 1 \leq i \leq k+1$ متصل است. علاوه بر این برای یک i_0 ثابت، $1 \leq i_0 \leq k+1$ راس $\{k+1, \dots, 2k+1\} - \{k+i_0\}$ با راس های $\{1, \dots, k\}$ و $\{1, \dots, k\} - \{i_0\} \cup \{k+i_0\}$ برای هر $1 \leq i \leq k+1$ و $i \neq i_0$ مجاور است. هم چنین برای $1 \leq i_0 \leq k$ این راس با راس $\{1, \dots, k\} - \{i_0\} \cup \{k+i_0\}$ مجاور است. ■

یک مجموعه S از راس ها در گراف G را احاطه گر گوئیم هرگاه هر راس خارج از S یک همسایه در S داشته باشد. لم زیر مطلبی در مورد مجموعه های احاطه گر در گراف $K(n, k)$ بیان می کند.

لم ۵-۲-۲ اگر $T \subseteq \{1, \dots, n\}$ یک زیرمجموعه از اندازه $2k-1$ باشد، در این صورت مجموعه همه زیرمجموعه های k عضوی T یک مجموعه مستقل احاطه گر در گراف کنسر $K(n, k)$ است.

برهان. فرض کنید $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ یک زیرمجموعه k عضوی باشد که $A \not\subseteq T$. در این صورت $|A \cap T| \leq k-1$ ، پس یک زیرمجموعه k عضوی $B \subseteq T$ یافت می شود که $A \cap B = \emptyset$. لذا A و B در گراف $K(n, k)$ مجاورند. هم چنین واضح است که هر دو زیرمجموعه k عضوی T اشتراک دارند. لذا مجموعه همه زیرمجموعه های k عضوی T یک مجموعه مستقل احاطه گراست. ■

در صورت وجود طرح هایی با پارامترهای خاص، از لم فوق یک کران پایین برای عدد b -رنگی گراف های کنسر $K(n, k)$ به دست می آید. زوج مرتب (S, B) را یک طرح اشتاینر با پارامترهای (n, k, t) می نامیم، هرگاه $|S| = n$ و B خانواده ای از زیرمجموعه های k عضوی S باشد، به طوری که هر t عضو S با هم یک و فقط یک بار در اعضای B ظاهر شود.

نتیجه ۵-۲-۳ اگر (S, B) یک ساختار وقوع اشتاینر با پارامترهای $(n, 2k-1, k)$ باشد، آنگاه $\varphi(K(n, k)) \geq |B|$.

برهان. فرض کنید $B = \{B_1, B_2, \dots, B_B\}$. برای هر $1 \leq i \leq |B|$ ، کلاس رنگی i را مجموعه همه زیرمجموعه های k عضوی B_i تعریف می کنیم. بنا به لم ۵-۲-۲ هر کلاس i یک مجموعه مستقل است، پس این افراز یک رنگ آمیزی معتبر برای راس های گراف $K(n, k)$ است. علاوه بر این هر کلاس i تعریف شده در بالا بنا به لم ۵-۲-۲ یک مجموعه احاطه گراست. در نتیجه هر عضو در یک کلاس رنگی j در سایر کلاس ها دارای همسایه است. بنابراین این افراز یک b -رنگ آمیزی برای گراف $K(n, k)$ با $|B|$ رنگ است. ■

در ادامه قصد داریم عدد b -رنگی گراف های کنسر $K(n, 2)$ را به دست آوریم. ابتدا ذکر دو نکته ضروری به نظر می رسد.

تذکر ۱. هر راس در گراف کنسر $K(n, 2)$ که در حقیقت یک زیرمجموعه دو عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ است متناظر با یک یال در گراف کامل K_n با مجموعه راس های $\{1, 2, \dots, n\}$ است. در نتیجه دو راس در $K(n, 2)$ مستقل هستند اگر و تنها اگر دو یال متناظر آن ها در K_n مجاور باشند. فرض کنید A یک مجموعه مستقل از راس ها در گراف $K(n, 2)$ باشد، در این صورت یا همه راس ها در A در یک عضو مانند a مشترک هستند یا $A = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. به عبارت دیگر مجموعه راس های مستقل در $K(n, 2)$ متناظر با یک زیرگراف ستاره به مرکز a یا یک مثلث در K_n هستند. در ادامه مجموعه های مستقل به فرم اول را مجموعه مستقل ستاره ای به مرکز a و فرم دوم را مجموعه مستقل مثلثی می نامیم. هم چنین برای راحتی هر کلاس مثلثی $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ را به سادگی با مجموعه $\{a, b, c\}$ نشان می دهیم. از آنجا که هر رنگ آمیزی معتبر از یک گراف در واقع افراز راس های آن گراف به مجموعه های مستقل راسی است، می توان هر رنگ آمیزی معتبر گراف $K(n, 2)$ را افرازی از یال های گراف K_n به ستاره ها یا مثلث ها در نظر می گیریم.

تذکر ۲. از تعریف $STS(n)$ به راحتی مشاهده می شود که یک طرح اشتاینر سه تایی در حقیقت معادل با یک افراز از یال های گراف K_n به مثلث ها است. با توجه به این موضوع و توضیحات فوق هر طرح اشتاینر سه تایی با n نقطه یک رنگ آمیزی معتبر از گراف $K(n, 2)$ است.

لم ۵-۲-۴ اگر c یک b -رنگ آمیزی برای گراف $K(n, 2)$ باشد و در این رنگ آمیزی $A_1, A_2, \dots, A_t$ همه کلاس های رنگی ستاره ای با مراکز $a_1, a_2, \dots, a_t$ باشند، آن گاه a_i ها متمایزند و هر زیر مجموعه دو عضوی از $\{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ متعلق به $\cup_{i=1}^t A_i$ است.

برهان. بنا به خلف فرض می کنیم برای یک $a_i = a_j, i \neq j$. در نتیجه $A_i \cup A_j$ یک مجموعه مستقل است، یعنی هیچ راسی در کلاس A_i در کلاس A_j همسایه ندارد که این با b -رنگ آمیزی بودن c متناقض است. پس برای $a_i \neq a_j, 1 \leq i \neq j \leq t$.

حال یک زیرمجموعه دو عضوی دلخواه از $\{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ مانند $\{a_i, a_j\}$ را در نظر می گیریم. اگر $\{a_i, a_j\} \notin \cup_{i=1}^t A_i$ آن گاه این راس متعلق به یک کلاس رنگی مثلثی $\{a_i, a_j, b\}$ است. در این کلاس راس های $\{a_i, b\}$ و $\{a_j, b\}$ راس های b -احاطه گر نیستند زیرا در کلاس A_i همسایه ندارند. هم چنین راس $\{a_j, b\}$ در کلاس A_j همسایه ندارد پس b -احاطه گر نیست. این یک تناقض است در نتیجه $\{a_i, a_j\} \in \cup_{i=1}^t A_i$. ■

لم ۵-۲-۵ فرض کنید c یک رنگ آمیزی معتبر برای گراف $K(n, 2)$ باشد به طوری که $A_1, A_2, \dots, A_t$ همه کلاس های رنگی ستاره ای با مراکز $a_1, a_2, \dots, a_t$ باشند. اگر

(۱) برای هر $a_i, 1 \leq i \leq t$ ها متمایز باشند و $|A_i| \geq 3$ ،

(۲) هر زیر مجموعه دو عضوی از $\{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ متعلق به $\cup_{i=1}^t A_i$ باشد و

(۳) برای هر $1 \leq i \leq t$ ، یک $x_i \notin \{a_1, \dots, a_t\}$ وجود داشته باشد که $\{a_i, x_i\} \in A_i$ ،

آن گاه c یک b -رنگ آمیزی برای گراف $K(n, 2)$ است.

برهان. در رنگ آمیزی معتبر با خاصیت های (۱)، (۲) و (۳)، در هر کلاس رنگی راس های b -احاطه گر به صورت زیر وجود دارد. در کلاس های ستاره ای $A_i, 1 \leq i \leq t$ ، راس $\{a_i, x_i\}$ یک راس b -احاطه گر است زیرا طبق (۱) در هر کلاس A_j یک $\{a_j, y\}$ وجود دارد که $y \neq a_i, x_i$. هم چنین هر کلاس مثلثی طبق لم ۵-۲-۲ یک مجموعه احاطه گر است، بنابراین راس $\{a_i, y\}$ در هر کلاس مثلثی دارای همسایه است. از طرفی برای هر کلاس رنگی مثلثی $\{a, b, c\}$ طبق (۳)، $|\{a, b, c\} \cap \{a_1, a_2, \dots, a_t\}| \leq 1$ ، در نتیجه حداقل دو عضو در این مجموعه مثلاً a, b وجود دارد که $a, b \notin \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$. از این رو با توجه به (۱) راس $\{a, b\}$ در همه کلاس های رنگی همسایه دارد. در ضمن بنا به لم ۵-۲-۲ کلاس های مثلثی احاطه گر هستند. لذا راس $\{a, b\}$ یک راس b -احاطه گر است و این رنگ آمیزی یک b -رنگ آمیزی می باشد. ■

قضیه ۵-۲-۶ برای هر صحیح مثبت n داریم:

$$\varphi(K(n, 2)) = \begin{cases} \frac{n(n-3)}{6} + 3 & n = 6k, \\ \frac{n(n-1)}{6} & n = 6k+1, n = 6k+3, \\ \frac{n(n-3)+2}{6} + 3 & n = 6k+2, n = 6k+4, \\ \frac{n(n-1)}{6} - \frac{1}{3} & n = 6k+5. \end{cases}$$

برهان. قضیه را برای دو حالت n زوج و فرد اثبات می کنیم.

حالت ۱. n زوج است.

ابتدا یک کران بالا برای $\varphi(K(n, 2))$ ارایه می دهیم. فرض کنید c یک b -رنگ آمیزی برای $K(n, 2)$ با $\varphi = \varphi(K(n, 2))$ رنگ باشد و در این b -رنگ آمیزی t کلاس رنگی ستاره ای به مرکز i با n_i راس، $1 \leq i \leq t$ ، وجود داشته باشد. بنابراین داریم:

$$|S(K(n, 2))| = \binom{n}{2} = \sum_{i=1}^t n_i + 3(\varphi - t).$$

با توجه به تذکر ۲ رنگ آمیزی c معادل با افراز یال های K_n به ستاره ها و مثلث ها است. با توجه به این که درجه هر راس در K_n ، برای n زوج، فرد است و در هر مثلث از هر راس K_n ، صفر یا دو یال مصرف می شود، برای هر $t+1 \leq i \leq n$ ، یک راس شامل i در کلاس های ۱ تا t (کلاس های ستاره ای) وجود دارد. از طرف دیگر بنا به لم ۵-۲-۴، هر زیرمجموعه دو عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, t\}$ نیز در t کلاس ستاره ای هستند. در نتیجه

$$\sum_{i=1}^t n_i \geq (n-t) + \frac{t(t-1)}{2} = n + \frac{t(t-3)}{2}.$$

بنابراین

$$\binom{n}{2} \geq n + \frac{t(t-1)}{2} + 3\varphi.$$

پس

$$\varphi \leq \frac{n(n-3)}{6} - \frac{t(t-1)}{6}.$$

از آنجا که می نیمم $t(t-1)$ در $t=4$ اتفاق می افتد، داریم:

$$\varphi \leq \frac{n(n-3)}{6} + \frac{10}{3}.$$

حال به یافتن کران پایین می پردازیم.

حالت ۱.۱. $n = 6k$.

ابتدا یک $STS(6k-3)$ با ساختار بوس را در نظر می گیریم. در این ساختار توجه کنید که $2k-1$ مثلث نوع (۱) راس مجزا هستند. مثلث های نوع (۱) را با $\{a_1, b_1, c_1\}, \{a_2, b_2, c_2\}, \dots, \{a_{2k-1}, b_{2k-1}, c_{2k-1}\}$ نشان می دهیم. بنا به تذکر ۲، این طرح یک تجزیه از یال های K_{n-3} به $\frac{(n-3)(n-4)}{6}$ مثلث است. حال سه راس جدید a, b, c را اضافه کرده و یک b-رنگ آمیزی با $\varphi_0 = \frac{n(n-3)}{6} + 3$ رنگ یا به طور معادل یک تجزیه از یال های K_n به φ_0 مثلث و ستاره ارایه می دهیم.

هر مثلث از نوع (۲) را یک کلاس رنگی در نظر می گیریم. سایر کلاس ها را نیز به این صورت تعریف می کنیم. کلاس a شامل $\{a, b\}, \{a, c_1\}, \{a, c_2\}, \dots, \{a, c_{2n-1}\}$ ، کلاس b شامل $\{b, c\}, \{b, a_1\}, \{b, a_2\}, \dots, \{b, a_{2n-1}\}$ و کلاس c شامل $\{c, a\}, \{c, b_1\}, \{c, b_2\}, \dots, \{c, b_{2n-1}\}$ ، هم چنین $6k-3$ کلاس رنگی مثلثی به صورت $\{a, a_i, b_i\}, \{b, b_i, c_i\}, \{c, c_i, a_i\}$ برای $1 \leq i \leq 2k-1$ تعریف می کنیم. تعداد کلاس های رنگی معرفی شده عبارت است از

$$\varphi_0 = \frac{(n-3)(n-4)}{6} - \frac{2n-6}{6} + 3 + 3\frac{2n-6}{6} = \frac{n(n-3)}{6} + 3.$$

با توجه به این که تنها سه کلاس ستاره ای داریم به راحتی می بینیم که این رنگ آمیزی شرایط لم ۵-۲-۵ را برآورده می کند و لذا یک b-رنگ آمیزی است.

حالت ۲.۱. $n = 6k+2, (k \geq 2), n = 6k+4$.

ابتدا یک $STS(n-1)$ با ساختار بوس یا اسکولم و سه مثلث مجزا $\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\}$ و $\{c_1, c_2, c_3\}$ به طوری که $\{a_1, b_1, c_1\}$ مثلث باشد را در نظر می گیریم. یک راس جدید d اضافه کرده و یک b-رنگ آمیزی با $\varphi_0 = \frac{n(n-3)+20}{6}$ به صورت زیر ارایه می دهیم.

هر مثلث در $STS(n-1)$ را به جز چهار مثلث $\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\}, \{c_1, c_2, c_3\}$ و $\{a_1, b_1, c_1\}$ را یک کلاس رنگی در نظر می گیریم. علاوه بر این کلاس a را شامل راس های $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, d\}, \{a_1, b_1\}, \{b_1, b_2\}, \{b_1, b_3\}, \{b_1, d\}, \{b_1, c_1\}$ ، کلاس b را شامل راس های $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, d\}, \{a_1, b_1\}, \{b_1, b_2\}, \{b_1, b_3\}, \{b_1, d\}, \{b_1, c_1\}$ ، کلاس c را شامل راس های $\{c_1, c_2\}, \{c_1, c_3\}, \{c_1, d\}, \{c_1, a_1\}$ ، کلاس d را شامل راس های $\{d, x\}$ ، $1 \leq i \leq 3, x \neq a_i, b_i, c_i$ و سه کلاس دیگر مثلث های $\{a_2, a_3, d\}$ و $\{b_2, b_3, d\}, \{c_2, c_3, d\}$ تعریف می کنیم. تعداد این کلاس ها برابر است با

$$\varphi_0 = \frac{(n-1)(n-2)}{6} - 4 + 4 + 3 = \frac{n(n-3)}{6} + \frac{10}{3}.$$

با توجه به این که تنها چهار کلاس ستاره ای داریم به راحتی می بینیم که این رنگ آمیزی شرایط لم ۵-۲-۵ را برآورده می کند و لذا یک b-رنگ آمیزی است.

حالت ۲. n فرد است.

ابتدا یک کران بالا برای $\varphi(K(n, 2))$ ارایه می دهیم. فرض کنید c یک b-رنگ آمیزی برای $K(n, 2)$ با $\varphi = \varphi(K(n, 2))$ باشد و در این b-رنگ آمیزی t کلاس رنگی ستاره ای به مرکز i با n_i راس، $1 \leq i \leq t$ ، وجود داشته باشد. بنابراین داریم:

$$|V(K(n, 2))| = \binom{n}{2} = \sum_{i=1}^t n_i + 3(\varphi - t).$$

بنا به لم ۵-۲-۴، هر زیرمجموعه دو عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, t\}$ نیز در t کلاس ستاره ای هستند، هم چنین در کلاس i یک راس b-احاطه گر مانند $\{i, x\}$ ، $x \in \{t+1, t+2, \dots, n\}$ وجود دارد. در نتیجه

$$\sum_{i=1}^t n_i \geq \frac{t(t-1)}{2} + t = \frac{t(t+1)}{2}.$$

بنابراین

$$\binom{n}{2} = \sum_{i=1}^t n_i + 3(\varphi - t) \geq 3\varphi + \frac{t(t+1)}{2} - 3t = 3\varphi + \frac{t(t-5)}{2}.$$

پس

$$\varphi \leq \frac{n(n-1)}{6} - \frac{t(t-5)}{6}.$$

عبارت $t(t-5)$ در $t=2$ و $t=3$ ماکزیمم می شود، در نتیجه

$$\varphi \leq \frac{n(n-1)}{6} + 1.$$

حال ثابت می کنیم $\varphi \leq \frac{n(n-1)}{6}$. فرض کنید $\varphi = \frac{n(n-1)}{6} + 1$ پس $t=2$ یا $t=3$. از آنجا که درجه راس های K_n زوج است و در هر مثلث از هر راس K_n صفر یا دو یال مصرف می شود، هر راس K_n تعداد زوج یال در کلاس های رنگی ستاره ای دارد. اگر $t=3$ آن گاه یال های $\{1, 2\}$ ، $\{1, 3\}$ و $\{2, 3\}$ در کلاس های ۱، ۲ و ۳ هستند. بنابراین راس i، $1 \leq i \leq 3$ ، به حداقل دو راس غیر از $\{1, 2, 3\}$ مجاور است و این یال ها در کلاس i قرار دارند. در نتیجه $\sum_{i=1}^3 n_i \geq 3 + 2 \times 3 = 9$ ، پس $3\varphi = 9 + 3(\varphi - 3) \geq \binom{n}{2}$ و در نتیجه $\varphi \leq \frac{n(n-1)}{6}$. اگر $t=2$ آن گاه فرض کنید کلاس ۱ شامل راس های $\{1, 2\}$ و $\{1, 3\}$ باشند. از آنجا که یال های واقع بر راس ۳ در کلاس های ۱ و ۲ زوج هستند، کلاس ۲ شامل راس $\{2, 3\}$ است که با $\{1, 2\}$ و $\{1, 3\}$ مجاور نیست. کلاس های ۱ و ۲ شامل حداقل یک یال دیگر هستند و یال های واقع بر ۱ و یال های

واقع بر ۲ در کلاس‌های ۱ و ۲ زوج هستند، پس راس‌های ۱ و ۲ هر کدام حداقل به سه راس دیگر غیر از $\{1, 2\}$ مجاور است و آن یال در کلاس‌های ۱ و ۲ است. در نتیجه $\sum_{i=1}^2 n_i = 1 + 2 \times 3 = 7$ و

$$\binom{n}{2} \geq 7 + 3(\varphi - 2) = 3\varphi + 1.$$

پس

$$\varphi \leq \frac{n(n-1)}{6}.$$

حال یک کران بالا برای $\varphi(K(n, 2))$ ارائه می‌دهیم. اگر $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$ آن گاه $STS(n)$ وجود دارد، پس بنا به نتیجه ۵-۲-۳ یک b -رنگ آمیزی با $\frac{n(n-1)}{6}$ وجود دارد.

اگر $n \equiv 5 \pmod{5}$ آن گاه بنا به ساختار $6k + 5$ ، یک PBD با یک بلوک از اندازه ۵ مانند $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ و سایر بلوک‌ها که تعداد آن‌ها $\frac{1}{3} - \frac{n(n-1)}{6}$ است، از اندازه ۳ وجود دارد. هر بلوک از اندازه ۳ را به عنوان یک کلاس رنگی در نظر می‌گیریم و کلاس‌های دیگر را به صورت $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}\}$ ، $\{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}\}$ و $\{\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین

$$\varphi \geq \frac{n(n-1)}{6} - \frac{10}{3} + 3 = \frac{n(n-1)}{6} - \frac{1}{3}.$$

■

با توجه به این که گراف پترسن^۳ همان $K(5, 2)$ است، نتیجه زیر از قضیه ۵-۲-۶ ناشی می‌شود.

نتیجه ۵-۲-۷ اگر P گراف پترسن باشد، آن گاه $\varphi(P) = 3$.

۳-۵ b -پیوستگی گراف‌های کنسر

در این بخش ثابت می‌کنیم که گراف‌های کنسر $K(n, 2)$ برای $n \geq 16$ ، b -پیوسته هستند.

لم ۵-۳-۱

^۳Peterson

(الف) فرض کنید $n = 6k + 1$ یا $n = 6k + 3$ و (S, B) یک $STS(n)$ باشد. b-رنگ آمیزی متناظر با این STS ارایه شده در اثبات قضیه ۵-۲-۶ با $\varphi = \frac{n(n-1)}{4}$ را در نظر می گیریم. اگر $H \subseteq S = \{1, 2, \dots, n\}$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $|H| = m \geq 4$ و H شامل t کلاس رنگی به شکل مثلث باشد،

(۲) به ازای هر $i \in H$ یک $j \in H$ موجود باشد که مثلث حاوی $\{i, j\}$ به طور کامل مشمول در H نباشد. آنگاه یک b-رنگ آمیزی برای $K(n, 2)$ با $\varphi - (\frac{m(m-3)}{4} - 2t)$ رنگ وجود دارد.

(ب) فرض کنید $n = 6k + 5$ و (S, B) یک $PBD(n)$ با بلوک ۵ عضوی $\{1, 2, n, n-1, n-2\}$ باشد. b-رنگ آمیزی متناظر با این PBD ارایه شده در اثبات قضیه ۵-۲-۶ با $\varphi = \frac{n(n-1)}{4} - \frac{1}{4}$ را در نظر می گیریم به طوری که راس های ۱ و ۲ راس های مرکزی در کلاس های مرکزی باشند. اگر $H \subseteq S = \{1, 2, \dots, n\}$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $|H| = m \geq 4$ و H شامل t کلاس رنگی به شکل مثلث باشد،

(۲) به ازای هر $i \in H$ ، $i \neq 1, 2$ یک $j \in H$ موجود باشد که مثلث حاوی $\{i, j\}$ به طور کامل مشمول در H نباشد و

(۳) $\{1, 2\} \subset H$ و $n, n-1, n-2 \notin H$.

آنگاه یک b-رنگ آمیزی برای $K(n, 2)$ با $\varphi - (\frac{m(m-3)}{4} - 2t) + 1$ رنگ وجود دارد.

برهان. همه کلاس های مثلث هایی که شامل یک راس $\{i, j\}$ هستند که $\{i, j\} \subseteq H$ را منحل می کنیم.

(الف) چون هر راس $\{i, j\} \subseteq H$ در یک مثلث قرار داشته و t مثلث به طور کامل درون H قرار دارند، تعداد کلاس های مثلثی منحل شده برابر $(\frac{m(m-1)}{4} - 3t + t)$ است. حال فرض می کنیم $H = \{1, 2, \dots, m\}$ و m کلاس جدید به صورت زیر تشکیل می دهیم: کلاس جدید $3 \leq i \leq m-2$ را شامل راس های $\{i, j\} \mid i+1 \leq j \leq m\}$ قرار دهید و کلاس های ۱، ۲، $m-1$ و m را به ترتیب شامل راس های $\{i, j\} : 2 \leq j \leq m-2\}$ ، $\{i, j\} : 3 \leq j \leq m-1\}$ ، $\{m-1, m\}$ ، $\{m-1, 1\}$ و $\{m, 1\}$ قرار دهید. همچنین اگر یک راس $\{i, x\}$ برای $i \in H$ و $x \notin H$ در یکی از مثلث های منحل شده باشد، این راس را در کلاس i قرار دهید. کلاس های جدید ۱ تا m همراه با کلاس های قدیمی منحل نشده یک رنگ آمیزی معتبر جدید به دست می دهد که تعداد کلاس های رنگی آن $\varphi - (\frac{m(m-1)}{4} - 2t) + m$ است.

(ب) چون هر راس $\{i, j\} \subseteq H$ به جز $\{1, 2\}$ در یک مثلث قرار داشته و t مثلث به طور کامل درون H قرار دارند، تعداد کلاس های مثلثی منحل شده برابر $(\frac{m(m-1)}{4} - 1 - 3t + t)$ است. حال فرض کنید $H = \{1, 2, \dots, m\}$ و $m-2$ کلاس جدید به صورت زیر تشکیل می دهیم:

کلاس جدید $3 \leq i \leq m$ را شامل راس های $\{i, 1\}, \{i, 2\}, \{i, j\}$ و $1 \leq j \leq k + 1$ قرار دهید. هم چنین اگر یک راس $\{i, x\}$ برای $i \in H$ و $x \notin H$ در یکی از مثلث های منحل شده باشد، این راس را در کلاس i قرار دهید. کلاس های جدید ۳ تا m همراه با کلاس های قدیمی مثلثی منحل نشده و دو کلاس قدیمی مرکزی یک رنگ آمیزی معتبر جدید به دست می دهد که تعداد کلاس های رنگی آن $\varphi - (\frac{m(m-1)}{3} - 1 - 2t) + m - 2$ است.

با توجه به شرایط موجود برای مجموعه H در صورت لم، رنگ آمیزی های ارایه شده در (الف) و (ب) شرایط لم ۵-۲-۵ را برآورده کرده و لذا b -رنگ آمیزی هستند. ■

لم ۵-۳-۲ اگر n یک عدد فرد بزرگتر یا مساوی ۱۳ باشد و $k = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. آن گاه برای هر عدد صحیح فرد $5 \leq m \leq k + 4$ و $0 \leq t \leq \frac{2(m-1)}{3}$ به جز $(m, t) = (5, 2), (7, 5)$ یک b -رنگ آمیزی با φ رنگ برای $K(n, 2)$ و یک مجموعه H ، m عضوی شامل t مثلث موجود است که شرایط لم ۵-۳-۱ را برآورده می کند.

برهان. برای $n = 6k + 3$ یا $n = 6k + 5$ ، قرار دهید $l = 2k + 1$ و برای $n = 6k + 1$ ، قرار دهید $l = 2k$. بسته به هریک از موارد فوق یک $STS(n)$ یا یک $PBD(n)$ طبق ساختارهای بوس، اسکولم یا $6k + 5$ ساخته شده توسط شبه گروه های مثال ۵-۱-۲ را در نظر گرفته و b -رنگ آمیزی متناظر با هر کدام را مطابق اثبات مندرج در قضیه ۵-۲-۶ در نظر بگیرید. توجه کنید که در حالت $n = 6k + 5$ ، راس های مرکزی در دو کلاس مرکزی را راس های $\{l, 1\}$ و $\{l, 2\}$ قرار دهید. فرض کنید $4 \leq m \leq k + 5$ ، در این صورت:

الف) اگر $0 \leq t \leq \frac{m-5}{3}$ آن گاه قرار دهید:

$$H = \{(l, 1), (i, 1), (l - i, 1); 1 \leq i \leq t, (j, 1); t + 1 \leq j \leq m - 4 - t, (\sigma(l), 2), (1, 3), (\sigma^{-1}(k + 1) - 1, 3)\}.$$

ب) $5 < t < m - 5$ آن گاه قرار دهید:

$$H = \{(l, 1), (i, 1), (l - i, 1); 1 \leq i \leq \frac{m-5}{3}, (\sigma(l), 2), (\sigma((2(m - 5) - t)), 2), (\sigma(m - 5), 2), (\sigma(2l - m - 5), 2)\}.$$

ج) اگر $(\frac{m-5}{4}) \leq t \leq m-5$ آن گاه قرار دهید:

$$H = \{(l, 1), (i, 1), (l-i, 1); 1 \leq i \leq \frac{m-5}{4}, \\ (\sigma(l), 2), (\sigma(1), 2), (\sigma(3(m-5)-2t), 2), (\sigma(2l-m-5), 2)\}.$$

د) اگر $2m-10 \leq t < 3(\frac{m-5}{4})$ آن گاه قرار دهید:

$$H = \{(l, 1), (i, 1), (l-i, 1); 1 \leq i \leq \frac{m-5}{4}, \\ (\sigma(l), 2), (\sigma(1), 2), (\sigma(l-1), 2), (\sigma(4(m-5)-2t), 2)\}.$$

مجموعه های H تعریف شده در بالا در شرایط لم ۵-۳-۱ صدق می کنند. هم چنین اگر $m \geq 11$ آن گاه $2m-11 \geq \frac{3m-11}{4}$ ، بنابراین برای هر $4 \leq m \leq k+11$ و $\frac{3m-11}{4} \leq t \leq 0$ ، یک مجموعه H صادق در شرایط لم ۵-۳-۱ وجود دارد. هم چنین طبق ساختار بالا، برای $(m, t) = (m=9, 0 \leq t \leq 7)$ ، چنین مجموعه H ای وجود دارد. برای $(m, t) = (7, 4)$ مجموعه H به صورت $(l-1, 1), (2, 1), (l-1, 1), (1, 1)$ ، $(m, t) = (5, 0 \leq t \leq 1)$ ، $(m, t) = (m=7, 0 \leq t \leq 3)$ چنین مجموعه H ای وجود دارد. اثبات وجود $(m, t) = (9, 8)$ از وجود $(m, t) = (8, 8)$ است. اثبات وجود $(m, t) = (9, 8)$ از وجود $(m, t) = (8, 8)$ است. ■

لم ۵-۳-۳ اگر n یک عدد فرد بزرگتر یا مساوی ۱۳ باشد و $k = \lceil \frac{n}{4} \rceil$ ، آن گاه برای هر عدد صحیح زوج $4 \leq m \leq k+4$ و $0 \leq t \leq m-4$ ، یک b -رنگ آمیزی با φ رنگ برای $K(n, 2)$ و یک مجموعه H ، m عضوی شامل t مثلث موجود است که شرایط لم ۵-۳-۱ را برآورده می کند. هم چنین اگر $n \geq 19$ ، $n \neq 6k+5$ آن گاه برای $(m, t) = (6, 4), (8, 8)$ چنین مجموعه H ای وجود دارد.

برهان. b -رنگ آمیزی ها را همان b -رنگ آمیزی های اثبات لم ۵-۳-۱ در نظر گرفته و قرار می دهیم $l = 2k$.

الف) اگر $0 \leq t \leq \frac{m-4}{4}$ آن گاه قرار دهید:

$$H = \{(l, 1), (i, 1), (l-i, 1); 1 \leq i \leq t, (j, 1); t+1 \leq j \leq m-3-t, \\ (\sigma(l), 2), (\sigma(2t), 2)\}.$$

(ب) اگر $\frac{m-4}{4} < t < m-4$ ، آن گاه قرار دهید:

$$H = \{(l, 1), (i, 1), (l-i, 1); 1 \leq i \leq \frac{m-4}{4}, \\ (\sigma(l), 2), (\sigma(2m-8-2t), 2), (\sigma(m-4), 2)\}.$$

(ج) اگر $t = m-4$ آن گاه قرار دهید:

$$H = \{(l, 1), (i, 1), (l-i, 1); 1 \leq i \leq \frac{m-4}{4}, \\ (\sigma(l), 2), (\sigma(1), 2), (\sigma(m-4), 2)\}.$$

اثبات وجود $(m, t) = (6, 4), (8, 8)$ با استفاده از ساختار شبه گروه با حفره ها:

فرض کنید $n = 6k + 1$ یا $n = 6k + 3$ و $n \geq 3$ یک شبه گروه جابجایی از مرتبه $2k$ با حفره های $h = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2k-1, 2k\}\}$ معرفی شده در گزاره ۵-۴ باشد. (S, B) را یک $STS(n)$ به دست آمده از این شبه گروه با حفره مندرج در بخش ۵-۱ در نظر بگیرید. حال b-رنگ آمیزی متناظر با این $STS(n)$ را برای گراف $K(n, 2)$ با $\frac{n(n-1)}{4}$ رنگ در نظر می گیریم. همان گونه که در گزاره ۵-۴ آمده است، سه عدد متمایز $1 \leq i, j, l \leq 2k$ وجود دارد به طوری که $i \circ j = l$ و $i \circ l = j$ و $l \circ j = i$. حال قرار می دهیم $S = \{(i, 1), (j, 1), (l, 1), (j, 2), (l, 3), \infty_1\}$ هم چنین در صورت لزوم با تغییر نام، کاری می کنیم که در (S, B) ، $STS(9)$ مندرج در ساختار شبه گروه با حفره $\{\infty_1, (l, 1), (l, 2)\}$ و $\{\infty_1, (j, 1), (j, 2)\}$ هر کدام یک مثلث باشند. در این صورت مجموعه S علاوه بر این دو مثلث حاوی مثلث های $\{(i, 1), (l, 1), (j, 2)\}$ و $\{(i, 1), (j, 1), (l, 2)\}$ نیز هست. بنابراین پارامتر $(m, t) = (6, 4)$ به دست می آید.

برای $(k, t) = (8, 8)$ ، قرار دهید: $S = \{(i, 1), (j, 1), (l, 1), (i, 2), (j, 2), (l, 2), (j, 3), (l, 3)\}$ و در صورت لزوم با تغییر نام کاری می کنیم که در (S, B) ، $STS(9)$ مندرج در ساختار شبه گروه با حفره $\{(j, 1), (j, 2), (j, 3)\}$ و $\{(l, 1), (l, 2), (l, 3)\}$ هر کدام یک مثلث باشند. در این صورت در مجموعه S علاوه بر این دو مثلث شش مثلث $\{(i, x), (l, x), (j, x+1)\}$ ، $1 \leq x \leq 2$ ، $\{(i, y), (j, y), (l, y+1)\}$ ، $1 \leq y \leq 2$ و $\{(j, z), (l, z), (i, z+1 \pmod{3})\}$ ، $z = 1, 3$ قرار دارد. بنابراین پارامتر $(m, t) = (8, 8)$ نیز به دست می آید. برای به دست آوردن $(m, t) = (9, 8)$ کافی است راس $(i+1, 3)$ را به مجموعه S با پارامتر $(8, 8)$ اضافه کنیم. ■

قضیه ۵-۳-۴ گراف کنسر $K(n, 2)$ برای $n \geq 16$ b-پیوسته است.

برهان. قضیه را ابتدا برای n های فرد و با استقرا ثابت می کنیم. فرض کنید n یک عدد فرد و گراف $K(n-2, 2)$ یک گراف b -پیوسته باشد. بنابراین برای هر عدد $\lfloor \frac{(n-2)(n-3)}{4} \rfloor \leq x \leq n-4$ یک b -رنگ آمیزی با x رنگ وجود دارد. یک b -رنگ آمیزی از گراف $K(n-2, 2)$ با x رنگ در نظر گرفته و آن را به یک b -رنگ آمیزی از گراف $K(n, 2)$ با $x+2$ رنگ تبدیل می کنیم. برای این کار دو کلاس رنگی جدید $\{n, i\} : 1 \leq i \leq n-1$ و $\{n-1, i\} : 1 \leq i \leq n-2$ را اضافه می کنیم. این رنگ آمیزی در شرایط لم ۵-۲-۵ صدق می کند، لذا یک b -رنگ آمیزی است. بنابراین برای b -پیوسته بودن گراف $K(n, 2)$ کافی است ثابت کنیم برای هر $\varphi = \lfloor \frac{n(n-1)}{4} \rfloor - \lfloor \frac{(n-2)(n-3)}{4} \rfloor - 3 \leq x \leq 3 + \lfloor \frac{(n-2)(n-3)}{4} \rfloor$ یک b -رنگ آمیزی از $K(n, 2)$ با x رنگ وجود دارد. قرار دهید $\psi = \lfloor \frac{n(n-1)}{4} \rfloor - \lfloor \frac{(n-2)(n-3)}{4} \rfloor - 3$ ، در نتیجه برای $k = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ داریم $\psi \leq 4k-1$. ادعا. ثابت می کنیم برای هر $1 \leq x \leq \psi$ یک b -رنگ آمیزی با x رنگ وجود دارد. مجموعه A را مجموعه همه اعداد طبیعی x قرار دهید که اعداد m و t و یک مجموعه $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ وجود دارد که در شرایط لم ۵-۳-۱ صدق کند و $2t = x + \frac{m(m-3)}{2}$.

حالت ۱. $n = 6k+1$ یا $n = 6k+3$.

برای اثبات ادعا، طبق لم ۵-۳-۱ (الف) کافی است ثابت کنیم، برای هر $1 \leq x \leq \psi$ ، $x \in A$. طبق لم ۵-۳-۳ یک مجموعه S با پارامترهای $(m, t) = (6, 4)$ و $(m, t) = (8, 8)$ وجود دارد. بنابراین $1, 4 \in A$. هم چنین طبق لم ۵-۳-۲ برای هر عدد فرد m ، $5 \leq m \leq k+4$ ، داریم:

$$\frac{m(m-3)}{2}, \frac{m(m-3)}{2} - 2, \dots, \frac{m(m-3)}{2} - (3m-1) = \frac{(m-3)(m-6)}{2} + 2 \in A.$$

طبق لم ۵-۳-۳ به ازای هر عدد زوج m ، $4 \leq m \leq k+6$ ، داریم:

$$\frac{m(m-3)}{2}, \frac{m(m-3)}{2} - 2, \dots, \frac{m(m-3)}{2} - 2\frac{m-4}{2} = \frac{(m-1)(m-4)}{2} + 2 \in A.$$

بنابراین برای هر عدد $5 \leq m \leq k+4$ کلیه اعداد ۱ تا $\frac{m(m-3)}{2}$ که زوجیت آن ها با $\frac{m(m-3)}{2}$ یکسان است، عضوی از A هستند. در نتیجه $1, 2, 3, 4, \dots, \frac{(k+4)(k+1)}{4} \in A$. اما همواره $\psi \geq 4k-1 > \frac{(k+4)(k+1)}{4}$.

حالت ۲. $n = 6k+5$.

در این حالت برای اثبات ادعا، طبق لم ۵-۳-۱ (ب)، ابتدا ثابت می کنیم برای هر $1 \leq x \leq \psi-1$ به جز $x=4$ ، $x \in A$. همه مطالب گفته شده در حالت اول این جا نیز صادق است مگر برای مجموعه S با پارامترهای $(m, t) = (6, 4), (8, 8)$. بنابراین طبق آنچه گفته شد $\{4\} \subseteq \{2, 3, \dots, \frac{(k+4)(k+1)}{4}\} \subseteq A$. از طرفی به راحتی مجموعه S با پارامترهای $(m, t) = (3, 0), (4, 1)$ صادق در شرایط لم ۵-۳-۱ پیدا می شود، پس $0 \in A$ و چون $\frac{(m+4)(m+1)}{4} \geq \psi-1$ ، طبق لم ۵-۳-۱ (ب) برای هر $1 \leq x \leq \psi-1$ ، به جز $x=2, 5$ یک b -رنگ آمیزی برای گراف $K(n, 2)$ با x رنگ وجود دارد. برای کامل شدن این حالت یک b -رنگ آمیزی

با $\varphi - ۲$ و $\varphi - ۵$ ارایه می دهیم. ابتدا یک $PBD(n)$ با یک بلوک ۵ عضوی به نام $F = \{a, b, c, d, e\}$ در نظر بگیرید و از روی آن یک b -رنگ آمیزی با φ رنگ بسازید که راس های مرکزی در آن a و b باشند. فرض کنید $f, g \notin F$ و $\{b, f, g\}$ یک مثلث در $PBD(n)$ باشد. حال قرار می دهیم $S = \{a, b, c, f, g\}$ و همه مثلث هایی که حداقل دو راس در S دارند را منحل می کنیم و سه کلاس جدید ایجاد می کنیم. فرض کنید کلاس های منحل شده $\{c, g, x_۴\}$, $\{a, g, x_۲\}$, $\{a, f, x_۱\}$, $\{b, f, g\}$ و $\{c, f, x_۳\}$ باشند. سه کلاس جدید را به صورت $c_۱ = \{\{c, f\}, \{c, g\}, \{c, c_۳\}, \{c, x_۴\}\}$, $c_۲ = \{\{f, a\}, \{f, b\}, \{f, g\}, \{f, x_۱\}, \{f, x_۳\}\}$, $c_۳ = \{\{g, a\}, \{g, b\}, \{g, x_۲\}, \{g, x_۴\}\}$ تعریف می کنیم و راس های $\{a, x_۱\}$ و $\{a, x_۲\}$ را به کلاس مرکزی a اضافه می کنیم. در این صورت یک b -رنگ آمیزی جدید با ۵ کلاس مرکزی و $\varphi - ۲$ رنگ به دست می آوریم. حال فرض کنید $f, g, h \notin F$ و $\{a, f, g\}$, $\{b, g, h\}$ و $\{c, f, h\}$ مثلث هایی در $PBD(n)$ باشند. قرار می دهیم $S = \{a, b, c, d, f, g, h\}$ و همه مثلث هایی که حداقل دو راس در S را منحل کرده و ۵ کلاس جدید ایجاد می کنیم. دقیقاً ۱۰ مثلث منحل شده و ۵ کلاس مرکزی c, f, g, h, d اضافه می شود. لذا یک b -رنگ آمیزی با $\varphi - ۵$ رنگ خواهیم داشت.

تا این جا ثابت کردیم برای هر عدد فرد $n \geq ۱۷$ گراف $K(n, ۲)$ ، b -پیوسته است. حال فرض کنید $n \geq ۱۶$ یک عدد زوج باشد. در این صورت گراف $K(n-۱, ۲)$ ، b -پیوسته است. بنابراین برای هر $n-۳ \leq x \leq \lfloor \frac{(n-۱)(n-۲)}{۴} \rfloor$ یک b -رنگ آمیزی برای $K(n-۱, ۲)$ با x رنگ وجود دارد. حال یک راس جدید n اضافه کرده و یک کلاس جدید $\{n, i\} \mid ۱ \leq i \leq n-۱$ به این b -رنگ آمیزی اضافه می کنیم. حاصل یک b -رنگ آمیزی برای $K(n, ۲)$ با $x+۱$ رنگ است. بنابراین برای هر $\varphi - ۲ = \lfloor \frac{(n-۱)(n-۲)}{۴} \rfloor + ۱ \leq y \leq n-۲$ یک b -رنگ آمیزی برای $K(n, ۲)$ با y رنگ وجود دارد. در نتیجه برای اثبات b -پیوسته بودن گراف $K(n, ۲)$ کافی است یک b -رنگ آمیزی با $۲ = \lfloor \frac{(n-۱)(n-۲)}{۴} \rfloor + ۱ = \varphi - ۱$ ارایه دهیم. برای این کار b -رنگ آمیزی مندرج در اثبات قضیه ۵-۲-۶ را در نظر بگیرید و دو مثلث $\{a, b_۱, c_۱\}$ و $\{b, a_۱, b_۱\}$ را منحل کنید. یک کلاس جدید مرکزی $\{b_۱, a_۱\}, \{b_۱, c_۱\}, \{b_۱, b\}, \{b_۱, a\}$ را اضافه کنید و راس $\{a, c_۱\}$ را به کلاس مرکزی a ، راس $\{b, a_۱\}$ را به کلاس مرکزی b منتقل کنید. حاصل یک b -رنگ آمیزی با $\varphi - ۱$ رنگ است. ■

واژه‌نامه

فارسی به انگلیسی

configuration	آرایش
transition probability	احتمال انتقال
score	امتیاز
alphabet	الفبا
contraction	انقباض
reccurent configuration	بازگشتی، آرایش —
legal game	بازی قانونی
critical configuration	بحرانی، آرایش —
reduced vector	بردار تقلیل یافته
period vector	بردار تناوب
primitive period vector	بردار تناوب اولیه
antimatroid	پادمتروید
stable configuration	پایدار، آرایش —
basis	پایه
bridge	پل

b -continious	b —پیوسته
prefix	پیشوند
irreducible	تحویل ناپذیر
stationary distribution	توزیع ایستا
extension	توسیع
permutable	جایگشت‌پذیر
probabilistic abacus	چرتکه احتمالاتی
Tutte polynomial	چندجمله‌ای تات
cartesian product	حاصل ضرب دکارتی
strong exchange property	خاصیت تبدیل قوی
greedoid exchange property	خاصیت تبدیل گریدوید
critical sequence	دنباله بحرانی
legal sequence	دنباله قانونی
ready vertex	راس آماده
b -dominating vertex	راس b —احاطه‌گر
rank	رتبه
b -chromatic number	b —رنگ آمیزی
legal coloring	رنگ آمیزی معتبر

partial –	–جزیی
language	زبان
simple–	–ساده
access time	زمان دسترسی
Markov chain	زنجیر مارکوف
subword	زیر کلمه
configuration's level	سطح آرایش
b -dominating system	سیستم b –احاطه‌گر
system of distinct representatives	سیستم نمایندگی مجزا
quasi-group	شبه گروه
–with holes	–با حفره
idempotent–	–خودتوان
commutative–	–متقارن
half-idempotent–	–نیمه خودتوان
spectral radius	شعاع طیفی
fire	شلیک
steiner system	طرح اشتاینر
steiner triple system	طرح سه‌تایی اشتاینر
pairwise balanced design	طرح متعادل دوگانه
loop	طوقه
tree number	عدد درختی
chromatic number	عدد رنگی

b -chromatic number	عدد b —رنگی
elementary row operation	عمل سطری مقدماتی
invariant factors	فاکتورهای ناورد
stochastic process	فرایند تصادفی
Markov process	فرایند مارکوف
Smith normal form	فرم اسمیت نرمال
Peron-Ferobenius Theorem	قضیه پرون—فروبنیوس
Structure Theorem	قضیه ساختار
strongly connected	قویاً همبند
word	کلمه
basic—	—اساسی
Kneser graph	گراف کنسر
free abelian group	گروه آبدلی آزاد
critical group	گروه بحرانی
greedoid	گریدوید
random walk	گشت تصادفی
Latin square	مربع لاتین
transition matrix	ماتریس انتقال
relation matrix	ماتریس روابط
Laplacian matrix	ماتریس لاپلاسیان

reduced Laplacian matrix	ماتریس لاپلاسین تقلیل یافته
matroid	متروید
dominating set	مجموعه احاطه‌گر
independent	مستقل
linearly independent	مستقل خطی
left-hereditary	موروئی-چپ
locally free	موضعیاً آزاد
sink component	مولفه چاهک
strongly connected component	مولفه قویاً همبند
positive semi-definite	نیم-معین مثبت
configuration's weight	وزن آرایش
weakly connected	همبند ضعیف
coloop	هم‌طوقه

نمایه

- آرایش، ۶، ۱۹، ۴۵
بازگشتی، ۴۶
بحرانی، ۴۶
پایدار، ۴۶
مرزی، ۴۱
احتمال انتقال، ۲۶
الفبا، ۸
امتیاز، ۷، ۴۵
انقباض، ۵۳
اویلری، ۱۹
بازی دلار، ۴۴
بازی قانونی، ۷، ۴۵
بردار تقلیل یافته، ۳۶
بردار تناوب، ۳۴
اولیه، ۳۴
پاد متروید، ۹
پایه، ۵۲، ۶۰
پل، ۵۳
پیشوند، ۸
b-پیوسته، ۸۲
تحويل ناپذیر، ۲۳
توزیع ایستا، ۲۷
توسیع آرایش، ۵۴
جایگشت پذیر، ۸
چرتکه احتمالاتی، ۴۰
چند جمله ای تات، ۵۲
حاصل ضرب دکارتی، ۶۷
خاصیت تبدیل قوی، ۹
خاصیت تبدیل گریدوید، ۹
دنباله اولیه، ۴۷
دنباله بحرانی، ۴۹
دنباله قانونی، ۶، ۴۵
دوره تناوب، ۳۴
راس b-احاطه گر، ۶۶
راس آماده، ۶، ۱۹، ۴۵
راس چاهک، ۱۹
رتبه زبان، ۱۱
رتبه زیرگراف، ۵۲
b-رنگ آمیزی، ۶۶
زبان، ۸
ساده، ۹
زمان دسترسی، ۲۸

- زنجیر مارکوف، ۲۷
زیر کلمه، ۸
سطح آرایش، ۵۳
سیستم b -احاطه‌گر، ۶۶
سیستم نمایندگی مجزا، ۶۸
شبه‌گروه، ۸۳
با حفره، ۸۵
خودتوان، ۸۳
متقارن، ۸۳
نیمه خودتوان، ۸۳
شعاع طیفی، ۲۳
شلیک، ۶، ۱۹، ۴۵
طرح اشتاینر، ۸۷
طرح سه‌تایی اشتاینر، ۸۳
طرح متعادل دوگانه، ۸۴
طوقه، ۵۳
طول بازی، ۱۴، ۳۷
عدد b -رنگی، ۶۶
عدد درختی، ۵۳
عمل سطری مقدماتی، ۵۹
فاکتورهای ناورد، ۶۰
فرایند تصادفی، ۲۶
فرایند مارکوف، ۲۶
فرم اسمیت نرمال، ۶۰
قضیه پرون-فروینوس، ۲۳
قضیه ساختار، ۵۹
گویاً همبند، ۱۹
کلمه، ۸
اساسی، ۱۰
گراف زمینه، ۱۹، ۲۳
گراف کنسر، ۸۲
گروه آبلی آزاد، ۶۰
گروه آبلی متناهی تولید شده، ۶۰
گروه بحرانی، ۵۱
گریدوید، ۹
گریدوید با تکرار، ۹
گشت تصادفی، ۲۷
ماتریس
انتقال، ۲۷
روابط، ۶۱
لاپلاسن، ۷
تقلیل یافته، ۶۱
جهت‌دار، ۲۲
ماتریس‌ها روی حلقه $\mathbb{Z}$ ، ۵۹
متروید، ۹
مجموعه احاطه‌گر، ۸۷
مربع لاتین، ۸۳
مستقل، ۵۲
موروئی-چپ، ۸
موضعی آزاد، ۸
مولفه چاهک، ۲۰
وزن آرایش، ۵۳
هم‌طوقه، ۵۳

کتاب نامه

- [1] ALON N., BALOGH J., BOLLOBÁS B. AND SZABÓ T., *Game domination number*, Discrete Math., 256 (2002), pp. 23–33.
- [2] BAI H., *On the critical group of the n -cube*, Linear Algebr. Appl., 369 (2003), pp. 251–261.
- [3] BECK J., *Ramsey games*, Discrete Math., 249 (2002), pp. 3–30.
- [4] BIGGS N., *Chip firing and the critical group of a graph*, J. Algebraic Combin., 9 (1999), pp. 25–45.
- [5] ———, *The tutte polynomial as a growth function*, J. Algebraic Combin., 10 (1999), pp. 115–133.
- [6] BIGGS N. AND WINKLER E., *Chip-firing and the chromatic polynomial*, CDAM Research Report Series, LSE-CDAM-97-03, (1997).
- [7] BJÖRNER A. AND LOVÁSZ L., *Chip-firing games on directed graphs*, J. Algebraic Combin., 1 (1992), pp. 305–328.
- [8] BJÖRNER A., LOVÁSZ L. AND SHOR P., *Chip-firing games on graphs*, European J. Combin., 12 (1991), pp. 283–291.
- [9] BJÖRNER A. AND ZIEGLER G., *Introduction to greedoids*, in Matroid Applications, N. White, ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1992, pp. 284–357.
- [10] BRYLAWSKI T. AND OXLEY J., *The tutte polynomial and its applications*, in Matroid Applications, N. White, ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1992, pp. 123–225.

- [11] CAMERON P., *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, 1996.
- [12] ———, *Introduction to Algebra*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [13] CORI R. AND ROSSIN D., *On the sandpile group of dual graphs*, European J. Combin., 21 (2000), pp. 447–459.
- [14] ENGEL A., *The probabilistic abacus*, Educ. Stud. in Math., 6 (1975), pp. 1–22.
- [15] ———, *Why does the probabilistic abacus work?*, Educ. Stud. in Math., 7 (1976), pp. 59–69.
- [16] ERICKSSON K., *No polynomial bound for the chip firing game on directed graphs*, Proc. Amer. Math. Soc., 112 (1989), pp. 1203–1205.
- [17] FAIK T., *About the b -continuity of graphs*, Electronic Notes in Discrete Math., 17 (2004), pp. 151–156.
- [18] GODSIL C. AND ROYLE G., *Algebraic graph theory*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [19] GRUNDY P., *Mathematics and games*, Eureka, 2 (1939), pp. 6–8.
- [20] HOÀNG C. AND KOUIDER M., *On the b -dominating coloring of graphs*, Discrete Appl. Math., 152 (2005), pp. 176–186.
- [21] HOORY S., LINIAL N. AND WIGDERSON A., *Expander graphs and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 43 (2006), pp. 439–561.
- [22] HUNGERFORD T., *Algebra*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1974.
- [23] IRVING R. AND MANLOVE D., *The b -chromatic number of a graph*, Discrete Appl. Math., 91 (1999), pp. 127–141.
- [24] JACOBSON B., NIEDERMAIER A. AND REINER V., *Critical groups for complete multipartite graphs and cartesian products of complete graphs*, J. Graph Theory., 44 (2003), pp. 231–250.
- [25] KEMENY J. AND SNELL J., *Finite Markov Chains*, Van Nostrad, Princeton, NJ, 1960.

- [26] KORTE B., LOVÁSZ L. AND SCHRADER R., *Greedoids*, in Algorithms and Combinatorics, vol. 4, Springer, Berlin, 1991.
- [27] KOUIDER M. AND MAHÉO M., *Some bounds for the b-chromatic number of a graph*, Discrete Math., 256 (2002), pp. 267–277.
- [28] ———, *The b-chromatic number of the Cartesian product of two graphs*, Studia Sci. Math. Hungar., 44 (2007), pp. 49–55.
- [29] KOUIDER M. AND ZAKER M., *Bounds for the b-chromatic number of some families of graphs*, Discrete Math., 306 (2006), pp. 617–623.
- [30] LINDNER C. AND RODGER C., *Design Theory*, CRC Press, 1997.
- [31] LOVÁSZ L., *Random walks on graphs: A survey*, Combinatorics. Paul Erdős is Eighty, 2 (1993), pp. 1–46.
- [32] MERINO C., *Chip-firing and the tutte polynomial*, Ann. Combin., 1 (1997), pp. 253–260.
- [33] ———, *The chip-firing game*, Discrete Math., 302 (2005), pp. 188–210.
- [34] OMOOMI B. AND JAVADI R., *On the b-coloring of cartesian product of graphs*. submitted.
- [35] ———, *On the b-coloring of kneser graphs*. manuscript.
- [36] RAMEZANI F., *Dominating Coloring in graphs*, Master thesis, Isfahan Univ. of Tech., Isfahan, 2007.
- [37] TARDOS G., *Polynomial bound for a chip firing game on graphs*, SIAM J. Discrete Math., 1 (1988), pp. 397–398.
- [38] TOUMPAKARI E., *On the sandpile group of regular trees*, European J. Combin., 28 (2007), pp. 822–842.
- [39] TUTTE W., *A contribution to the theory of chromatic polynomials*, Canad. J. Math., 6 (1954), pp. 80–91.

- [40] VAN DEN HEUVEL H., *Algorithmic aspects of a chip-firing game*, tech. report, CDAM, 1999. LSE-CDAM-99-09.
- [41] ZHU X., *The game coloring number of planar graphs*, J. Combin. Theory Ser. B, 75 (1999), pp. 245–258.

Abstract:

This thesis is divided into two parts. In the first part a game or a process on a graph, called chip-firing game has been studied. The chip-firing game is one person game or a diffusion process on a graph. Although it has been around for no more than 20 years, but it has rapidly become an important and interesting object of study in structural combinatorics. The reason for this, is due to its relation with important concepts like random walks, Laplacian matrix, the Tutte polynomial, the chromatic polynomial, algebraic graph theory, group theory and theoretical physics. So far many variants of the chip-firing game have been defined and studied. In this part we survey results on the chip-firing game on graphs, directed graphs, and also a variant of it called dollar game and overview the numerous connections that the chip-firing game has with some other parts of combinatorics.

In the second part we answer to some open problems on a kind of vertex coloring on graphs called b -coloring. In this part the b -coloring of cartesian products of paths, cycles and complete graphs, also Kneser graphs has been studied.



Isfahan University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Chip-firing game and the b -coloring on graphs

A Thesis

Submitted in partial fulfillment of the requirements

for the degree of Master of Science

By

RAMIN JAVADI JOURTANI

Evaluated and Approved by the Thesis Committee, on August 16, 2007

1- Behnaz Omoomi, Assistant Professor (Supervisor)

2- Seyed Ebadollah Mahmoodian, Professor (Advisor)

3- Bijan Taeri, Associated Professor (Examiner)

4- Gholamreza Omid, Assistant Professor (Examiner)

Department Graduate Coordinator