انتگرال‌گیری چندگانه

۱) مطلوب است محاسبه‌ی هر یک از انتگرال‌های زیر.

(الف) $\int_{0}^{1}\int_{1}^{2}\frac{y}{x^{4}}\sin(\frac{\pi x}{2})dxdy+\int_{1}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2}\frac{y}{x^{4}}\sin(\frac{\pi x}{2})dxdy$

(ب) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-x^{2}}\frac{xe^{2y}}{4-y}dxdy$

(ج) $\int\int_{A}\sqrt{x^{2}+y^{2}}\ dA \quad , \quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2}; 1\leq x^{2}+y^{2}\leq 2\}$

(د) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\frac{dydx}{(1+x^{2}+y^{2})^{\frac{1}{2}}}+\int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{\sqrt{2-x^{2}}}\frac{dydx}{(1+x^{2}+y^{2})^{\frac{1}{2}}}$

(ه) $\int\int_{A}(x-y)\sin(x^{2}-y^{2})\ dA$

A ناحیه‌ی واقع بین خطوط $x+y=2\ ,\ y-x=1\ ,\ y-x=-1\ ,\ x+y=0$ است.

(و) $\int\int_{A}e^{\frac{y}{x+y}}\ dA$

A ناحیه‌ی واقع بین خطوط $x+y=1\ ,\ y=0\ ,\ x=0$ است.

(ز) $\int\int_{G}x\ dA$

G ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های $xy=1\ ,\ xy=3\ ,\ x(1-y)=2\ ,\ x(1-y)=1$ است.

(ح) $\int\int_{D}\frac{dA}{(xy)^{\frac{2}{3}}}$

D ناحیه‌ی محصور شده باخم $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ است.

۲) مساحت هر یک از نواحی زیر را تعیین نمایید.

الف) مساحت داخل دایره‌ی $x^{2}+y^{2}=4$ و سمت راست خط $x=1$.

ب) مساحت محصور بین منحنی‌های $xy=1$، $xy=2$ و خطوط $x=1$ و $x=2$.

ج) مساحت محصور توسط منحنی‌های $x=4-3y^{2}$ و $x=y^{2}$.

۳) انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{0}^{2}dx\int_{0}^{\ln x}e^{y}dy$$
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}y^{3}dy$$

۴) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}dydx$$
$$\int_0^8 \int_{x^{\frac{1}{3}}}^2 \frac{dydx}{y^4+1}$$

۵) فرض کنید تابع f پیوسته است. با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری مجموع زیر را به صورت یک انتگرال دوگانه بنویسید.

$$\int_0^3 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_3^6 dx \int_0^{6-x} f(x,y)dy$$

۶) مقدار کدامیک از انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر بیشتر است؟

$$\int\int_D (x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dA \qquad (i)$$
$$\int\int_R (4x^3y + 4xy^3)dA \qquad (ii)$$

۷) انتگرال دوگانه‌ی $\int\int_R xy\ dA$ را که در آن R ناحیه‌ای است محدود به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ محاسبه کنید.

۸) مجموعه‌ی D را **همبند** می‌نامیم اگر برای هر $P, Q \in D$، یک خم با معادلات پارامتری $x = x(t)\ ,\ y = y(t)$ به ازای $0 \leq t \leq 1$ وجود داشته باشد به قسمی که x و y توابعی پیوسته باشند، برای هر $t \in [0, 1]$ نقطه‌ی $(x(t), y(t))$ در D قرار گیرد، $P = (x(0), y(0))$ و $Q = (x(1), y(1))$.
نشان دهید اگر تابع دو متغیره‌ی f روی حوزه‌ی همبند D به مساحت A پیوسته باشد، آنگاه یک نقطه مثل (a, b) در D وجود دارد به قسمی که:

$$\int\int_R f(x,y)\ dA = Af(a,b)$$

(گزاره‌ی فوق قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌های دوگانه است.)

۹) انتگرال $\int\int_D \frac{y}{x^2+y^2}\ dA$ را روی ناحیه‌ی D محصور به سهمی $y = x^2$ و خط $y = x$ به دست آورید.

۱۰) الف) نشان دهید که اگر f و g دو تابع پیوسته بر فاصله‌ی $[a, b]$ باشند، آنگاه

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

(راهنمایی: از انتگرال $\int\int_A (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2\ dA$ روی ناحیه‌ی مناسب A، استفاده کنید)

ب) اگر تابع f تابعی پیوسته و مثبت روی $[a, b]$ باشد، نشان دهید

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^۲$$

۱۱) $\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx$ را به دست آورید (راهنمایی: $\int_۰^\infty \int_۰^\infty e^{-(x^۲+y^۲)}dxdy = \int_۰^\infty e^{-x^۲}dx \int_۰^\infty e^{-y^۲}dy$ را با استفاده از مختصات قطبی به دست آورید.)

۱۲) انتگرال $\int_۰^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ را حساب کنید. (راهنمایی: از رابطه‌ی $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}dy$ استفاده کنید.)

۱۳) انتگرال‌های دو یا سه‌گانه‌ی زیر را به کمک تغییر متغیرهای مناسب محاسبه کنید.

الف) $\int\int_D \frac{x^۲ \sin xy}{y}\, dA$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $x^۲ = \pi y$، $x^۲ = \frac{\pi y}{۲}$، $y^۲ = x$ و $y^۲ = \frac{x}{۲}$ می‌باشد.

ب) $\int\int_D \cos\frac{x-y}{x+y}\, dA$ که در آن D محدود است به خطوط $y = ۰$، $y = x$ و $x+y = \frac{\pi}{۲}$.

ج) $\int\int\int_T yz\, dV$ که در آن T ناحیه‌ی محدود به صفحات $x+y+z = ۲$، $x+y+z = -۲$، $x-y+z = ۳$، $x-y+z = -۳$، $x+y-z = ۱$ و $x+y-z = -۱$ می‌باشد.

۱۴) به کمک تغییر متغیرهای $x = u\cos^۴ v$ و $y = u\sin^۴ v$ انتگرال دوگانه‌ی

$$\int\int_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\, dA$$

را محاسبه کنید که در آن D ناحیه‌ی محدود به خطوط $x = ۰$، $y = ۰$ و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y} = ۱$ است.

۱۵) با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت‌های زیر را پیدا کنید.

الف) سطح داخل کاردیوئید $r = a(۱-\cos\theta)$ و خارج دایره‌ی $r = a$.

ب) سطح محصور بین دوایر $x^۲+y^۲ = x$ و $x^۲+y^۲ = ۲x$ و خطوط $y = ۰$ و $y = x$.

ج) سطح بین مارپیچ‌های $r = \theta$ و $r = ۲\theta$ به ازای $۰ \leq \theta \leq ۴\pi$.

۱۶) حجم محصور از بالا به کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲ = a^۲$، از زیر به مخروط $z^۲ = (x^۲+y^۲)\cot^۲\beta$ و از دو طرف به صفحات $y = x\tan\alpha$ و $y = ۰$ را به دست آورید. (α و β اعداد حقیقی ثابت و $۰ < \alpha, \beta < \frac{\pi}{۲}$ هستند.)

۱۷) ناحیه‌ی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : \pi^۲ \leq x^۲+y^۲ \leq ۴\pi^۲\}$ و تابع $f(x,y) = \sin\sqrt{x^۲+y^۲}$ مفروض هستند. $\int\int_D f(x,y)\, dA$ را به‌دست آورید.

۱۸) فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر باشد. برای هر عدد مثبت t تعریف می‌کنیم

$$D_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq t^2\}$$
$$g(t) = \int\int\int_{D_t} f(x^2+y^2+z^2)\ dV$$

مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{dg}{dt}$ بر حسب تابع f.

۱۹) مساحت ناحیه‌ی محصور به خم‌های $y = x^2$, $x^2 = 2y$, $x^3 = y^2$, $x^3 = 2y^2$ را به دست آورید.

۲۰) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int\int\int_T z\ dV$ که در آن T ناحیه‌ی بین صفحه‌ی z و نیمه‌ی بالایی کره‌ی $x^2+y^2+z^2 = 1$ است.

(ب) $\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} e^{\sin x} dxdy$.

۲۱) مساحت ناحیه‌ی محدود به خم‌های $x^2+y^2 = 2x$ و $x^2+y^2 = 4x$ و خطوط $y = x$ و $y = 0$ را به دست آورید.

۲۲) حجم ناحیه‌ی محدود به استوانه‌های $y^2 = 4 - 3x$ و $x = y^2$ و صفحات $z = 9$ و $z = -9$ را به دست آورید.

۲۳) حجم ناحیه‌ای را به دست آورید که توسط سه رویه‌ی $z^2 = 2xy$, $x+y = 2$, $x+y = 1$ مشخص شده است.

۲۴) با استفاده از تغییر متغیرهای $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$، انتگرال دوگانه‌ی $\int\int_D x^2y^2(x^2+y^2)\ dA$ را به دست آورید که D ناحیه‌ای در ربع اول و محدود به هذلولی‌های $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 1$, $xy = 2$ است.

۲۵) مطلوبست محاسبه انتگرال دوگانه‌ی $\int_0^2 (\int_{y/2}^1 \cos(\frac{\pi}{2}x^2)dx)dy$.

۲۶) انتگرال دوگانه $\int\int_D |x-y|e^{x-y}\ dA$ را حساب کنید که در آن ناحیه‌ی D محدود به خطوط $x-y = 0$، $x-y = -4$ ، $x+y = 0$ و $x+y = 4$ است.

۲۷) تابع $f(x,y) = \frac{y}{x^4}\sin\frac{\pi x}{2}$ مفروض است. انتگرال $\int_1^2 f(x,y)dxdy$ $\int_0^1$ روی ناحیه‌ی D از صفحه‌ی xy و انتگرال $\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dxdy$ روی ناحیه‌ی E از صفحه‌ی xy تعریف شده‌اند.

(الف) نواحی D و E را در صفحه‌ی xy مشخص کنید.

(ب) مطلوب است محاسبه‌ی $\int\int_{D\cup E} f(x,y)dydx$.

۲۸) G ناحیه‌ی محصور به خم‌های $xy = ۱$ و $xy = ۳$ و $x(۱ - y) = ۲$ و $x(۱ - y) = ۱$ است. مطلوب است انتگرال

$$\int\int_G x\ dA$$

۲۹) انتگرال $\int\int_D \cos(\frac{x-y}{x+y})\ dA$ را روی ناحیه‌ی D محصور به خطوط $x = ۰$ و $y = ۰$ و $x + y = ۲$ بیابید.

۳۰) با استفاده از انتگرال دوگانه در مختصات قطبی حجم ناحیه‌ی T را در هر یک از حالت‌های زیر پیدا کنید.

الف) T محدود به سهمیگون $az = x^۲ + y^۲$ و صفحه‌ی $z = a$ است $(a > ۰)$.

ب) T بین کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ و سهمیگون $x^۲ + y^۲ = ۴(۱ - z)$ محصور است.

(ج) T در خارج از مخروط $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$ و داخل کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۹$ قرار دارد.

۳۱) با استفاده از مختصات قطبی انتگرال دوگانه‌ی

$$\int\int_D \sqrt{\frac{۱ - x^۲ - y^۲}{۱ + x^۲ + y^۲}}\ dA$$

را محاسبه کنید. که در آن D قرص واحد $\{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$ می‌باشد.

۳۲) انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را حساب کنید.

(الف) $\int_۰^۱ \int_۰^۱ \int_۰^۱ (xy + yz + zx) dxdydz$

(ب) $\int_۰^۱ dx \int_۰^{\sqrt{۱-x^۲}} dy \int_۰^{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}} \frac{dz}{\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲ - z^۲}}$

۳۳) مقدار متوسط تابع سه متغیره‌ی f روی $T \subseteq \mathbb{R}^۳$، که حجم آن برابر V است به صورت

$$\frac{۱}{V} \int\int\int_T f(x, y, z) dV$$

تعریف می‌شود. با توجه به این تعریف، مقدار متوسط تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz$$

را روی هرمی که از برخورد صفحه‌ی $x + y + z = ۱$ با صفحات مختصات پدید می‌آید به دست آورید. آیا می‌توان روی T نقطه‌ای را به دست آورد که در آن f مقدار متوسط خود را اختیار کند؟

۳۴) مطلوب است انتگرال $\int\int\int_T \frac{xy}{\sqrt{z}}\ dV$ که در آن T ناحیه‌ای است در یک هشتم اول فضا محدود به مخروط بیضوی $z^۲ = \frac{۱}{۴}x^۲ + \frac{۱}{۹}y^۲$ و صفحات $x = ۰$ ، $y = ۰$ و $z = ۱$.

۳۵) انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را با تبدیل مختصات دکارتی به قطبی محاسبه کنید.

الف) $\int\int_D \sqrt{x^۲+y^۲}\ dA$ ، $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : x^۲+y^۲\leq ۹\}$

ب) $\int\int_D \frac{\sin\sqrt{x^۲+y^۲}}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\ dA$ ، $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : \frac{\pi^۲}{۱۶}\leq x^۲+y^۲\leq \frac{\pi^۲}{۹}\}$

ج) $\int\int_D \tan^{-۱}(\frac{y}{x})\ dA$ ، $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : ۱\leq x^۲+y^۲\leq ۴, \frac{x}{\sqrt{۳}}\leq y\leq \sqrt{۳}x\}$

۳۶) معادله‌ی $x^۲+y^۲-z^۲=۱$ را به معادله‌ای در مختصات استوانه‌ای تبدیل کنید.

۳۷) انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را با تبدیل به مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید.

الف) $\int\int\int_T x^۲y^۲\ dV$ که در آن T محدود است به مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و صفحه‌ی $z=a$ $(a>۰)$.

ب) $\int\int\int_T (x^۳+y^۳)\ dV$ که در آن T محدود است به استوانه‌ی $x^۲+y^۲=y$، سهمی‌گون $z=x^۲+y^۲$ و صفحه‌ی $z=۰$.

۳۸) با استفاده از مختصات استوانه‌ای حجم ناحیه‌ی T شامل مبدأ مختصات و محدود به هذلولی‌گون $x^۲+y^۲-z^۲=۱$ و کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۳$ را پیدا کنید.

۳۹) معادله‌ی $x^۲+y^۲=z^۲$ را در مختصات کروی بنویسید.

۴۰) مقدار انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را به کمک مختصات کروی پیدا کنید.

الف) $\int\int\int_T \frac{۱}{x^۲+y^۲+z^۲}\ dV$ که در آن T محدود است به استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۴$ و مخروط $x^۲+y^۲=z^۲$.

ب) $\int\int\int_T \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲+(z-۲)^۲}}\ dV$ که در آن T ناحیه‌ی درونی کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است.

ج) $\int\int\int_T \frac{۱}{\sqrt{((x^۲+y^۲+z^۲)^۳}}\ dV$ که در آن T بین دو کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=e$ قرار دارد.

۴۱) با استفاده از مختصات کروی حجم ناحیه‌ی مشترک بین کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۴z-۳$ و مخروط $z^۲=۴(x^۲+y^۲)$ را پیدا کنید.