Aequationes Math. 58 (1999) 31–40
0001-9054/99/020031-10 \$ 1.50+0.20/0

Aequationes Mathematicae

Taktische Konfigurationen über Quasiringen

Günter Pickert

János Aczél zum 75. Geburtstag gewidmet

Summary. The well-known construction of an affine plane from a finite quasi-field is generalized by going over to a quasiring, i.e. admitting zero divisors. The tactical configurations resulting in this way are characterized geometrically. A quasiring with noncommutative addition is constructed.

Mathematics Subject Classification (1991). 51C05.

1. In Abschwächung der Quasikörperdefinition (s. [2], S. 92) werde $(R,+,\cdot)$ als *Quasiring*[1)] bezeichnet, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(R,+) \textit{ ist eine Gruppe (neutrales Element } 0\textit{).} \tag{1}$$

$$(R,\cdot) \textit{ besitzt ein neutrales Element } 1 \neq 0. \tag{2}$$

$$\forall_{a,b,c\in R} \quad a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c. \tag{3}$$

$$\forall_{a\in R} \quad 0\cdot a = 0. \tag{4}$$

Aus (1), (3) folgt

$$\forall_{a\in R} \quad a\cdot 0 = 0. \tag{4'}$$

Die Quasiringe, bei denen $(R\setminus\{0\},\cdot)$ eine Loop ist, sind also gerade die Quasikörper. Während die Addition bei einem Quasikörper bekanntlich kommutativ ist (s. [2], S. 90/91) braucht das bei einem Quasiring nicht der Fall zu sein, wie das Beispiel in **5** belegt. Ein Quasiring ist genau dann ein (evt. nichtassoziativer) Ring, wenn er auch noch das andere Distributivgesetz

$$\forall_{a,b,c\in R}\, (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \tag{3'}$$

1) In der systematischen Terminologie der Fastringtheorie: ,,nichtassoziativer nullsymmetrischer Linksfastring".

erfüllt; denn aus (3), (3′), (2) folgt

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(1+1) &= (a+b)+(a+b)\\ &= a\cdot(1+1)+b\cdot(1+1)=(a+a)+(b+b)\end{aligned}$$

und wegen (1) daher $a+b=b+a$.

Zu einem endlichen Quasiring $(R,+,\cdot)$ mit $|R| = k$ ($\geqq 2$) wird (wie bei der Konstruktion der affinen Ebene über einem Quasikörper) die taktische Konfiguration $\mathcal{K}_R$ folgendermaßen gebildet: R^2 ($= R\times R$) ist die Punktmenge von $\mathcal{K}_R$, und die Blöcke von $\mathcal{K}_R$ sind die Punktmengen

$$\left.\begin{aligned}[][u,v] &=_{\text{def}} \{(x,y)\mid x,y\in R,\ y=ux+v\} \quad (u,v\in R)\\ [w] &=_{\text{def}} \{w\}\times R \quad (w\in R).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Jeder Block enthält genau k der insgesamt k^2 Punkte. Zum Nachweis, daß es sich tatsächlich um eine taktische Konfiguration und zwar eine $(k^2,k,k+1)$-Konfiguration handelt (zu diesen Begriffen s. z.B. [1]), ist also nur noch zu beweisen, daß durch jeden Punkt (a,b) genau $k+1$ Blöcke gehen: Das ist einmal der Block $[a]$ und ferner die davon verschiedenen Blöcke $[u,-ua+b]$ $(u\in R)$; diese sind für verschiedene u-Werte verschieden, d.h.

$$u\neq u' \Rightarrow [u,v]\neq[u',v']$$

(für $v\neq v'$ hat man wegen (1), (3) $(0,v)\in[u,v]\setminus[u',v']$ und für $u\neq u'$ wegen (1), (2) $(1,u+v)\in[u,v]\setminus[u',v]$).

Die Bildung von $\mathcal{K}_R$ sowie die folgenden geometrischen Untersuchungen (einschließlich der Abschnitte **2** und **3**) benötigen die Endlichkeit von R nicht. Daher wird diese nicht vorausgesetzt und $\mathcal{K}_R$ nur als *Konfiguration* bezeichnet; darunter ist zu verstehen eine Menge, deren Elemente Punkte genannt werden, mit einer Menge von Teilmengen, Blöcke genannt (bei $\mathcal{K}_R$ durch (5) definiert).

In $\mathcal{K}_R$ wird ein *Parallelismus* ($\|$) dadurch erklärt, daß er nur in den folgenden Fällen bestehen soll:

$$[w]\|[w'], \quad [u,v]\|[u,v'];$$

in der Tat ist $\|$ offenbar eine Äquivalenzrelation auf der Blockmenge $\mathcal{B}$, und mittels (1), (5) folgt, daß es zu jedem Punkt (x,y) und jedem Block B genau einen Block B' mit $(x,y)\in B'\|B$ gibt. Die Klassen von $\|$ sind die *Parallelscharen*

$$\mathcal{S}_\infty =_{\text{def}} \{[w]\mid w\in R\}, \quad \mathcal{S}_u =_{\text{def}} \{[u,v]\mid v\in R\} \quad (u\in R). \tag{5′}$$

Nach (5), (5′) hat man für alle Blöcke B, B'

$$B\in\mathcal{S}_\infty,\ B'\notin\mathcal{S}_\infty \Rightarrow |B\cap B'|=1 \tag{S_∞}$$

und erhält weiter mittels (1), (2), (4), (5), (5′)

$$B \in \mathcal{S}_1,\ B' \in \mathcal{S}_0 \Rightarrow |B \cap B'| = 1. \qquad (S_{01})$$

Wegen (1) bilden die durch

$$\forall_{x,y \in R}\ (x,y)^{\tau_{a,b}} = (x+a, y+b) \qquad (6)$$

erklärten Translationen $\tau_{a,b}$ $(a, b \in R)$ eine scharf transitive Permutationsgruppe T auf R^2. Man erhält aus (5), (6)

$$[w]^{\tau_{a,b}} = [w+a] \qquad (7_1)$$

und mittels (1), (3) weiter

$$[u,v]^{\tau_{a,b}} = [u, -ua + v + b]; \qquad (7_2)$$

die Translationen sind also Automorphismen von $\mathcal{K}_R$. Aus $(7_{1,2})$ folgt ferner, daß sie jede Parallelschar festlassen, d.h.

$$\forall_{\tau \in \mathrm{T}}\ \forall_{B \in \mathcal{B}}\ B \| B^\tau. \qquad (I_\|)$$

Ferner ergibt sich aus (7_1) mittels (1) die Eigenschaft

$$\forall_{\tau \in \mathrm{T}}\ \forall_{B \in \mathcal{B}}\ (B^\tau = B \in \mathcal{S} \Rightarrow \forall_{B \in \mathcal{S}}\ B^\tau = B) \qquad (\mathcal{S})$$

für $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\infty$ und aus (7_2) mittels (1), (3) für $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$; bei kommutativer Addition gilt $(\mathcal{S}_u)$ sogar für alle $u \in R$.

Man hat ferner die Eigenschaft:

(V) *Es gibt $B_1 \in \mathcal{S}_\infty$ und einen Punkt $o \notin B_1$ derart, daß jeder Punkt von B_1 mit o durch einen Block verbunden ist.*

Denn mit $B_1 = [1]$, $o = (0,0)$ hat man wegen (1), (2), (3) $(1,u), o \in [u,0]$.

2. Durch die in **1** angeführten Eigenschaften der $\mathcal{K}_R$ (mit Quasiring R) lassen sich diese bis auf Isomorphie kennzeichnen:

Satz 1. *Eine Konfiguration $\mathcal{C}$ ist genau dann isomorph zu einer über einem Quasiring R gebildeten Konfiguration $\mathcal{K}_R$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$\mathcal{C}$ besitzt einen Parallelismus $\|$ sowie eine scharf transitive Automorphismengruppe T mit $(I_\|)$, und es gibt Parallelscharen $\mathcal{S}_\infty$, $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ mit (S_∞), (S_{01}), $(\mathcal{S}_\infty)$, $(\mathcal{S}_0)$, (V).

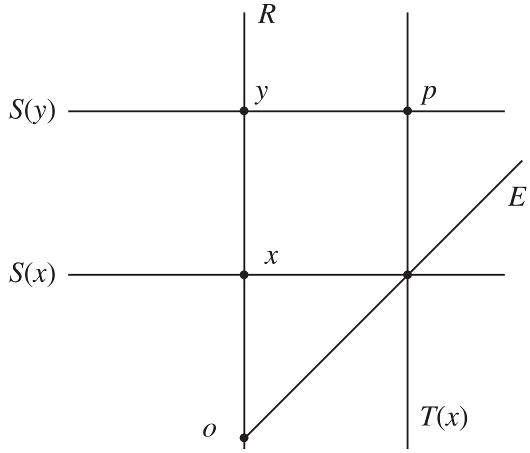
Im Fall $|R| = k \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{K}_R$ eine taktische Konfiguration und zwar eine $(k^2, k, k+1)$-Konfiguration.

Beweis. Nach dem in **1** Ausgeführten muß man nur noch zu $\mathcal{C}$ unter den angeführten Bedingungen einen Quasiring R bilden, für den $\mathcal{C}$ isomorph zu $\mathcal{K}_R$ ist. Ausgehend von o, B_1 mit der in (V) genannten Eigenschaft wird R bestimmt durch $o \in R \in \mathcal{S}_\infty$ und der Block E durch $o \in E \in \mathcal{S}_1$. Zu jedem $x \in R$ werden die Blöcke $S(x), T(x)$ durch

$$x \in S(x) \in \mathcal{S}_0, \qquad (S(x) \cap E) \subset T(x) \in \mathcal{S}_\infty$$

festgelegt; das ist wegen (S_{01}) möglich, und man hat dann

$$\mathcal{S}_\infty = \{T(x) \mid x \in R\}, \qquad \mathcal{S}_0 = \{S(x) \mid x \in R\}.$$



Die beiden Elemente $0, 1$ von R werden durch $R = T(0)$ (also $0 = o$), $B_1 = T(1)$ bestimmt. Jedem Punkt p ordnet man das Paar $(x, y) \in R^2$ mit $\{p\} = T(x) \cap S(y)$ zu (siehe Figur), und wegen (S_∞) ist dadurch eine Bijektion der Punktmenge von $\mathcal{C}$ auf R^2 bestimmt, so daß man identifizieren darf: $p = (x, y)$. Dann erhält man

$$T(x) = [x] \quad (= \{(x, y) \mid y \in R\}),$$

also die Blöcke in der zweiten Zeile von (5). Man muß nun noch Addition und Multiplikation in R so definieren, daß sich auch die Blöcke in der ersten Zeile von (5) ergeben. Dazu wird zuerst die Untergruppe $\mathrm{T}_0 = \{\tau \in \mathrm{T} \mid R^\tau = R\}$ von T gebildet. Für $x \in R$, $\tau \in \mathrm{T}$, $x^\tau \in R$ erhält man $x^\tau \in R \cap R^\tau$ und wegen $(I_\|)$ daher $R^\tau = R$, also $\tau \in \mathrm{T}_0$. Somit ist T_0 scharf transitiv auf $R = \{0^\tau \mid \tau \in \mathrm{T}_0\}$. Daher läßt sich eine Addition auf R durch

$$\forall_{\tau, \tau' \in \mathrm{T}_0}\ 0^\tau + 0^{\tau'} = 0^{\tau\tau'},$$

also

$$\forall_{x\in R}\,\forall_{\tau\in \mathrm{T}_0}\; x+0^\tau = x^\tau \tag{8}$$

erklären, und die Einschränkung von $\tau \mapsto 0^\tau$ auf T_0 ist dann ein Isomorphismus von T_0 auf $(R,+)$. Also ist $(R,+)$ eine Gruppe mit dem neutralen Element 0. Wegen (S_{01}), (V) wird durch

$$\{o,(1,u)\} \subset \beta(u)$$

eine Bijektion β von R auf die Menge der Blöcke $\neq R$ durch o bestimmt. Das Produkt ux legt man dann durch

$$T(x)\cap\beta(u) \subset S(ux)$$

fest. Man erhält

$$\beta(u) = [u,0] \quad (= \{(x,y) \mid y = ux\})$$

sowie $1x = x$, $u1 = u$ (d.h. 1 ist neutrales Element der Multiplikation) und $0x = 0$, $u0 = 0$. Um die entsprechende Darstellung für einen Block $B\|\beta(u)$ zu finden, wird w durch $w \in R\cap B$ bestimmt (nach (S_∞) möglich) und die Abbildung $\tau\in\mathrm{T}_0$ mit $0^\tau = w$ verwendet. Nach $(\mathcal{S}_\infty)$ ist $T(x)^\tau = T(x)$ und wegen $(I_\|)$, (8) $S(y)^\tau = S(x+w)$, so daß sich

$$(x,y)^\tau = (x, y+w) \tag{9}$$

ergibt. Wegen der Folgerung $\beta(u)^\tau = B$ aus $(I_\|)$ erhält man daher

$$B = [u,w] \quad (= \{(x,y) \mid y = ux+w\}),$$

also gerade den Block in der ersten Zeile von (5). Wie in **1** sind die Parallelscharen die

$$\{[x] \mid x\in R\},\ \{[u,w] \mid w \in R\} \quad (u\in R).$$

Zum noch fehlenden Nachweis der Distributivität (3) wird zu $a\in R$ die Abbildung $\tau\in\mathrm{T}$ mit $0^\tau = (a,0)$ gebildet. Wegen $0,\ 0^\tau \in S(0)\ (=[0,0])$ hat man $0^\tau \in S(0)\cap S(0)^\tau$ und wegen $(I_\|)$ somit $S(0)^\tau = S(0)$. Wegen $(\mathcal{S}_0)$ gilt daher auch $S(y)^\tau = S(y)$ für alle $y\in R$, und wegen $T(x)^\tau\|T(x)$ gibt es eine Abbildung σ von R in sich mit $T(x)^\tau = T(x^\sigma)$, so daß sich wegen

$$(x,y)^\tau = T(x)^\tau \cap S(y)^\tau$$

die Gleichung

$$(x,y)^\tau = (x^\sigma, y) \tag{10}$$

ergibt. Nach $(I_\|)$ hat man $[u,w]^\tau\|[u,w]$, so daß es w' mit $[u,w]^\tau = [u,w']$ gibt. Wegen (10) und (5) besagt das

$$ux^\sigma + w' = ux + w. \tag{11}$$

Der Sonderfall $u = 1, w = 0$ liefert daraus die Existenz von $w_0 \in R$ mit

$$x^\sigma + w_0 = x \quad (\text{für alle } x \in R),$$

wegen $0^\sigma = a$ (als Folgerung aus $T(0^\sigma) = T(0)^\tau = T(a)$) also $a + w_0 = 0$ und daher

$$x^\sigma = x + a. \tag{10'}$$

In (11) eingesetzt ergibt das

$$u(x + a) + w' = ux + w, \tag{12}$$

mit $x = 0$ insbesondere $ua + w' = w$, zusammen mit (12) also gerade die Distributivität $u(x + a) = ux + ua$.

(10), (10′) liefern eine Abbildung $\tau \in \mathrm{T}$ mit

$$(x, y)^\tau = (x + a, y).$$

Nach (9) gibt es eine Abbildung $\tau' \in \mathrm{T}$ mit

$$(x, y)^{\tau'} = (x, y + b),$$

so daß für die Abbildung $\tau\tau'$ $(= \tau'\tau)$

$$(x, y)^{\tau\tau'} = (x + a, y + b)$$

folgt. Damit hat man für die Elemente von T wieder die Darstellung als Translationen aus **1**.

3. Es soll nun untersucht werden, wie sich das andere Distributivgesetz (3′) unter den Voraussetzungen von Satz 1 geometrisch darstellen läßt, d.h. unter welchen weiteren Bedingungen für $\mathcal{C}$ der im Beweis von Satz 1 konstruierte Quasiring R ein (evtl. nichtassoziativer) Ring ist. Man erhält

Satz 2. *Der Quasiring R in Satz 1 ist genau dann ein Ring, wenn es zu den nach Bedingung* (V) *existierenden o, B_1 eine Automorphismenmenge Σ von $\mathcal{C}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:*

(i) *Σ wirkt auf B_1 transitiv;*
(ii) $\forall_{\sigma\in\Sigma}\, \forall_{B,B'\in\mathcal{B}}\, (B \| B' \Rightarrow B^\sigma \| B'^\sigma)$*;*
(iii) $o \in B_0 \| B_1 \Rightarrow \forall_{\sigma\in\Sigma}\, \forall_{p\in B_0}\, p^\sigma = p$*;*
(iv) $\forall_{B\in\mathcal{B}}\, \forall_{\sigma\in\Sigma}\, (B \in \mathcal{S}_\infty \Rightarrow B^\sigma = B)$.

Σ ist dann eine zu $(R, +)$ isomorphe, auf B_1 scharf transitiv wirkende Gruppe und wird durch o, B_1 eindeutig bestimmt.

Beweis. Bei zusätzlicher Voraussetzung von (3′) (und damit der Kommutativität der Addition) zu den Quasiringeigenschaften von $(R, +, \cdot)$ bilden die durch

$$(x, y)^{\sigma_a} = (x, ax + y) \tag{13}$$

für jedes $a \in R$ definierten Permutationen von $\mathcal{K}_R$ eine Gruppe: Wegen $\sigma_a\sigma_b = \sigma_{b+a} = \sigma_{a+b}$ ist $a \mapsto \sigma_a$ ein Isomorphismus von $(R, +)$ auf $\{\sigma_a \mid a \in R\}$. Wegen (1), (2) wirkt Σ auf $B_1 = [1]$ scharf transitiv. Aus (13), (5) folgt (iv) unmittelbar und ebenso (iii) wegen (4′). Da sich aus (3′), (1)

$$y = ux + v \Leftrightarrow ax + y = (a + u)x + v$$

ergibt, hat man $[u, v]^{\sigma_a} = [a + u, v]$ und damit (ii) sowie – in Anbetracht von (iv) – die Automorphismuseigenschaft von σ_a.

Es ist jetz umgekehrt (3′) aus der Existenz von Σ mit den in Satz 2 genannten Eigenschaften herzuleiten, wobei die im Beweis von Satz 1 gewonnene Darstellung von $\mathcal{C}$ als $\mathcal{K}_R$ benutzt werden darf. Zu jedem $\sigma \in \Sigma$ gibt es nach (iv) eine Abbildung f von R^2 in R mit

$$(x, y)^{\sigma} = (x, f(x, y)) \tag{14}$$

für alle $x, y \in R$. Nach (i) gibt es dann zu jedem $a \in R$ ein $\sigma \in \Sigma$ mit

$$f(1, 0) = a, \tag{15}$$

und aus (iii) mit $B_0 = [0]$ folgt

$$f(0, y) = y \tag{16}$$

für alle $y \in R$. Nach (ii), (iii) gibt es zu jedem $u \in R$ ein $u' \in R$ mit

$$[u, v] = [u', v] \quad \text{für alle } v \in R.$$

Das besagt nach (14), (5)

$$f(ux + v) = u'x + v, \tag{17}$$

für $x = 1$ insbesondere

$$f(1, u + v) = u' + v. \tag{17′}$$

Mit $v = 0$ gibt (17′)

$$f(1, u) = u', \tag{17″}$$

insbesondere wegen (15) $a = 0'$, so daß (17′) mit $u = 0$

$$f(1, v) = a + v$$

liefert, nach (17″) also $u' = a + u$. Mit $v = 0$ ergibt (17) daher

$$f(x, ux) = (a + u)x \tag{17$_1$}$$

und mit $u = 0$

$$f(x, v) = ax + v. \tag{17_2}$$

Setzt man in (17_2) $v = ux$, so liefert (17_1)

$$ax + ux = (a + u)x.$$

Da a in R beliebig wählbar war, hat man damit $(3')$ bewiesen.

Zusammen mit (17_2) zeigt (14), daß es sich bei $\sigma \in \Sigma$ mit (15) um die in (13) definierte Abbildung σ_a handelt. Damit ist nach dem zu (13) Festgestellten Σ als auf B_1 scharf transitiv wirkende Automorphismengruppe und zugleich als durch o, B_1 eindeutig bestimmt nachgewiesen.

4. Schwächer als in Satz 1 sei von einer (v, k, r)-Konfiguration mit Punktmenge $\mathcal{P}$ und Blockmenge $\mathcal{B}$ nur

$$v - 1 = r(k - 1) \qquad (k \geqq 2) \tag{18}$$

sowie die Existenz einer transitiven Automorphismengruppe vorausgesetzt. Mit der Bezeichnung

$$\lambda(p, q) =_{\text{def}} \bigl|\{B \mid B \in \mathcal{B}; p, q \in B\}\bigr| \qquad (p, q \in \mathcal{P}, p \neq q)$$

führt man die Parameter

$$\mu_i =_{\text{def}} \bigl|\{q \mid \lambda(p, q) = i,\ q \neq p\}\bigr| \qquad (p \in \mathcal{P}) \tag{19}$$

ein (wegen der transitiven Automorphismengruppe hängt das Definiens nicht von p ab). Wählt man $d \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\forall_{i \in \mathbb{N}}\ (i > d \Rightarrow \mu_i = 0)$$

gilt (wegen $\lambda(p, q) \leqq r$ z.B. bei $d = r$ erfüllt), hat man

$$v - 1 = \sum_{i=0}^{d} \mu_i, \tag{20}$$

$$r(k - 1) = \sum_{i=1}^{d} i\mu_i, \tag{20$'$}$$

wegen (18) also

$$\mu_0 = \sum_{i=2}^{d} (i - 1)\mu_i. \tag{21}$$

Ist insbesondere

$$\mu_2 = \ldots = \mu_{d-1} = 0, \tag{22}$$

so folgt mittels (21)

$$\mu_0 = (d-1)\mu_d \tag{23}$$

und umgekehrt wieder (22) aus (23). Mittels (20) ergeben (22), (23)

$$\mu_1 = v - 1 - d\mu_d. \tag{23$'$}$$

Verzichtet man auf die Existenz einer transitiven Automorphismengruppe, so hängen die in (19) definierten Parameter μ_i noch von p ab. Die auch dann noch gültige Äquivalenz von (22) und (23) liefert sehr einfach den bekannten Satz: *Eine* (v,k,r)*-Konfiguration mit* (18) *und* $\lambda(p,q) \neq 0$ *für alle Punkte* p,q $(p \neq q)$ *ist ein* $(v,k,1)$*-Blockplan.* Denn für $d > r$ hat man $\mu_d = 0$, wegen $\mu_0 = 0$ (nach Voraussetzung) also (23), damit (23′) und daher $\mu_1 = v-1$.

Der Fall (22) liegt bei $\mathcal{K}_R$ z.B. vor, wenn man für R den Restklassenring Z/p^2 mit einer Primzahl p nimmt:

$$\mu_0 = p(p-1)^2,\ \mu_1 = (p-1)(p^3+p+1),\ \mu_p = p(p-1),\ \mu_i = 0 \text{ für } i \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,p\}.$$

5. Um zu zeigen, daß die Addition eines Quasiringes nicht kommutativ zu sein braucht, wird als $(R,+)$ die (additiv geschriebene) Diedergruppe der Ordnung 8 genommen, wobei die „Drehungen" mit 0, 1, 2, 3 (Addition mod. 4) und die „Spiegelungen" mit $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ bezeichnet sind:

$$\begin{aligned} 2' &= 1'+1, \qquad 3' = 1'+2, \quad 4' = 1'+3,\\ 1+1' &= 1'+3, \quad 1'+1' = 0. \end{aligned}$$

Die Multiplikation wird durch

$$x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x \quad (\text{für alle } x \in R)$$

und die folgende Verknüpfungstafel erklärt:

	1	2	3	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$
1	1	2	3	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$
2	2	0	2	$1'$	$3'$	$1'$	$3'$
3	3	2	1	$1'$	$4'$	$3'$	$2'$
$1''$	$1'$	0	$1'$	$1'$	0	$1'$	0
$2''$	$2'$	0	$2'$	$2'$	0	$2'$	0
$3''$	$3'$	0	$3'$	$3'$	0	$3'$	0
$4''$	$4'$	0	$4'$	$4'$	0	$4'$	0

Die Distributivität (3) besagt, daß jede Zeile dieser Tafel einen Endomorphismus von $(R,+)$ liefert, und das verifiziert man leicht. Damit ist $(R,+,\cdot)$ als Quasiring nachgewiesen.

Am Beispiel dieses Quasirings wird ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Parameter μ_i ($i = 0,\dots,d$ und $\mu_i = 0$ für $i > d$; hier $d = 6$) vorgeführt: Entsprechend der Gleichung $y = ux$ für $[u,0]$ bestimmt man in jeder Spalte der Multiplikationstafel, also für jeden Wert $x \neq 0$ die Anzahl $\nu_i(x)$ derjenigen Produktwerte (y-Werte), die in genau i Zeilen (u-Werte) vorkommen und setzt $\nu_1(0) = k-1$ (hier 7), $\nu_i(0) = 0$ für $i \neq 1$; dann ist $\mu_i = \sum\limits_{x\in R} \nu_i(x)$.

$x =$	0	1	2	3	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$	μ_i
$i = 0$			6		3	4	3	4	20
1	7	8		8	4	3	3	3	36
2			1				1		2
3							1		1
4					1				1
5						1		1	2
6			1						1

Literatur

[1] Th. Beth, D. Jungnickel and H. Lenz, *Design Theory*, Bibliographisches Institut, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim – Wien – Zürich, 1985.

[2] G. Pickert, *Projektive Ebenen*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1975.

G. Pickert
Eichendorffring 39
D–35394 Gießen
Germany

Manuscript received: August 6, 1998 and, in final form, October 12, 1998.