پاسخ پرسش ۳ ریاضی عمومی ۲ فروردین ۱۶ ۱۳۹۳

۳. الف) طبق ε و δ،

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{xy\sin x}{x^2+y^2} - 0\right| \le \frac{|x|\,|y|\,|\sin x|}{x^2+y^2} \le \frac{(\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2} \overset{?}{<} \varepsilon$$

کافیست $\delta \le \varepsilon$ اختیار شود. (۴ نمره)

ب)

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{abt^2\sin(at)}{(a^2+b^2)t^2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} ab\,\frac{\sin(at)}{t} = a^2 b$$

(۴ نمره)

ج)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \Rightarrow \nabla f(0,0) . \vec{u} = 0$$

نتیجه اینکه به ازای $\vec{u}$ ، u ، $D_u f(0,0) = \nabla f(0,0) . u$ برقرار نیست پس f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد. (۴ نمره)

پاسخ پرسش ۴ ریاضی عمومی ۲ فروردین ۱۶ ۱۳۹۳

۴. با فرض تابع مشتق‌پذیر $z=z(x,y)$ وجود دارد که برای هر (x,y)

$$f(e^{x+z(x,y)}, y+z(x,y)) = 0$$

قرار دهیم $u(x,y) := e^{x+z(x,y)}$ و $v(x,y) = y+z(x,y)$ برای هر (x,y)

$$f(u(x,y), v(x,y)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\big(f(u(x,y), v(x,y))\big) = 0 \ , \ \frac{\partial}{\partial y}\big(f(u(x,y), v(x,y))\big) = 0$$

$$\Rightarrow f_u \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ , \ f_u \frac{\partial u}{\partial y} + f_v \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow f_u \left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right) e^{x+z(x,y)} + f_v\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u(x,y) f_u}{u f_u + f_v}$$