به نام پروردگار یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی علوم ریاضی

مباحثی در آنالیز عددی

پایداری روش‌های عددی برالی حل معادلات دیفرانسیل عادی

پاییز ۱۳۹۲

گردآوری و تنظیم: دکتر سید قهرمان طاهریان.

دیباچه

این مجموعه برگرفته از سمینارهای دانشجویان کارشناسی‌ارشد رشته‌ی نساجی و برخی از پروژههای دانشجویان کارشناسی رشته‌های فنی دانشگاه صنعتی اصفهان است. مراجع اصلی ما چاپ هفتم کتاب Numerical Analysis تالیف آقایان Richard L. Burden و J. Douglas Fairies و چاپ دوم کتاب An Introduction to Numerical Analysis تالیف آقایان Stoer و Bulirsch بوده است. هدف از این مجموعه آشنایی دانشجویان با بخش کوچکی از کاربردهای بسیار گسترده و روزافزون روش‌های عددی در علوم فنی و مهندسی است. متاسفانه این درس در دوره‌های کارشناسی جدی گرفته نمی‌شود. در دوره‌های تکمیلی هم یک بحث حاشیه‌ای و تجملی محسوب می‌شود. برای تمامی محققین واقعی رشته‌های فنی و مهندسی روشن است که امروزه تحقیق ارزشمند و جدی بدون بینش عددی و استفاده‌ی صحیح از روش‌های عددی امکان‌پذیر نیست. امیدوارم این جزوه‌ی کوچک آغازی باشد برای ارج نهادن بر این ابزار پرقدرت تحقیقات علمی بویژه در بین مهندسین گرانقدری که آینده‌ی درخشان کشور عزیزمان در دست آنهاست. از همه‌ی دانشجویان عزیزی که در تهیه‌ی این جزوه باتمام توانشان زحمت کشیدند و با بردباری زیاد وسواسها و ایرادات مرا به کار پر ارزش خود پذیرفتند صمیمانه سپاسگزارم. امیدوارم بیشتر این بزرگواران را در آینده‌ی نزدیک در زمره‌ی محققین برجسته ببینیم. بدیهی است جز ذات یکتای پروردگار که آفرینشگر بی‌عیب است، چیز بی عیب و نقص وجود ندارد. دیدگاه‌های همکاران و دانشجویان گرامی را در بهبود و کاستن از عیوب این جزوه به دیده‌ی منت ارج مینهیم.

خرداد ماه ۱۳۸۷. دکتر سید قهرمان طاهریان.

فصل ۱

پایداری روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل عادی

هدف اصلی روش‌های عددی به دست آوردن بهترین تقریب‌ها با کمترین هزینه است. از این‌رو نیازمند معیاری هستیم که کارآیی روش‌های مختلف را با هم مقایسه کنیم. یک معیار ساده در بحث معادلات دیفرانسیل خطای برشی موضعی است. این خطا برای یک گام خاص، میزان انحراف تقریب معادله‌ی تفاضلی را از جواب واقعی نشان می‌دهد. یک روش تفاضلی تک گامی برای حل معادله دیفرانسیل

$$y' = f(x,y)\,, \qquad a \le x \le b\,, \quad y(a) = \alpha$$

به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + h\phi(x_i, w_i, h) \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \end{aligned} \tag{1}$$

برای مثال در روش اویلر $\phi(x,y,h) = f(x,y)$ و در روش تیلور مرتبه‌ی n

$$\phi(x,y,h) = f(x,y) + \frac{h}{2} f'(x,y) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(x,y)$$

به قسمی که $x_i = a + ih$، $h = \frac{b-1}{N}$ و w_i تقریبی از مقدار واقعی $y_i = y(x_i)$ است.

تعریف ۱.۱ برای روش تفاضلی (۱) خطای برشی موضعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - (y_i + h\phi(x_i, y_i, h))}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(x_i, y_i, h) \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2}$$

مثال ۲.۱ بنابر فرمول تیلور

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) = h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi_i)$$

به قسمی که $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. بنابراین

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi_i)$$

و در نتیجه برای روش اویلر به ازای $\phi(x,y,h) = f(x,y)$ خطای برشی موضعی عبارت است از:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{h}{2}\,y''(\xi_i) = O(h)$$

تعریف ۳.۱ یک روش تفاضل تک گامی با خطای برشی موضعی $\tau_i(h)$ در گام iام را با معادله‌ی دیفرانسیلی که تقریب می‌زند سازگار می‌نامیم هر گاه داشته باشیم:

$$\lim_{h\to 0}\ \max_{1\le i\le N}|\tau_i(h)| = 0 \tag{3}$$

این تعریف یک تعریف موضعی است زیرا برای هر یک از مقادیر $\tau_i(h)$ فرض شده است که مقدار تقریبی w_{i-1} و جواب واقعی $y(x_{i-1})$ یکی هستند. یک برداشت واقع‌بینانه‌تر از تحلیل میزان تأثیر کاهش طول گام h عبارت است از تعریف یک معیار فراگیر.
این معیار ماکزیمم خطای روش تفاضلی است با این فرض که روش تفاضلی فقط به ازای مقدار اولیه‌ی x_0 جواب واقعی را به دست می‌دهد و بقیه‌ی مقادیر دارای خطا هستند.

تعریف ۴.۱ یک روش تفاضلی تک گامی نسبت به معادله‌ی دیفرانسیلی که تقریب می‌زند همگرا نامیده می‌شود هر گاه داشته باشیم:

$$\lim_{h\to 0}\ \max_{1\le i\le N}|w_i - y(x_i)| = 0 \tag{4}$$

به قسمی که $y(x_i)$ مقدار واقعی جواب معادله‌ی دیفرانسیل و w_i مقدار تقریبی است که در گام iام به وسیله‌ی روش تفاضلی به دست‌آمده است.

مثال ۵.۱ برای روش اویلر می‌توان ثابت کرد روی بازه‌ی $[a,b]$ و به ازای رده‌ای از توابع f

$$\max_{1\leq i\leq N}|w_i-y(x_i)| \ \leq \frac{Mh}{2L}|e^{L(b-a)}-1|$$

که L و M اعداد ثابتی هستند. به این ترتیب برای این توابع روش اویلر همگراست.

یک روش تک گامی دقیقاً وقتی سازگار است که با میل نمودن h به سمت صفر معادله‌ی تفاضلی این روش به معادله‌ی دیفرانسیل نظیرش میل کند. به عبارت دیگر وقتی طول گام به سمت صفر میل کند خطای برشی موضعی به سمت صفر میل نماید. همگرایی نیز مضمون مشابهی دارد. نوع دیگر کران خطا که هنگام استفاده از روش‌های تفاضلی برای حل معادلات دیفرانسیل پیش می آید به دلیل استفاده از اعداد تقریبی است. به ویژه نه مقدار اولیه و نه محاسبات میانی به طور دقیق مورد استفاده قرار نمی‌گیرند زیرا حساب با ارقام باپایان منجر به خطای گرد کردن می‌شود. در این قسمت می‌خواهیم ببینیم کدام روش تفاضلی پایدار است، به این معنی که تغییرات اندک یا آشفتگی کوچک در مقدار اولیه منجر به تغییرات اندک و آشفتگی کم در جواب‌های تقریبی می‌شود. به عبارت دیگر روش پایدار روشی است که جواب‌های تقریبی به طور پیوسته به مقادیر اولیه وابسته هستند.

قضیه ۶.۱ فرض کنیم مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$y'=f(x,y)\,, \qquad a\leq x\leq b\,, \quad y(a)=\alpha$$

به وسیله‌ی روش تفاضلی تک گامی به شکل زیر تقریب زده شود.

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i+h\phi(x_i,w_i,h) \qquad i=0,1,\ldots,N-1 \end{aligned}$$

همچنین فرض کنیم به ازای یک $h_0>0$ تابع ϕ روی مجموعه‌ی D به صورت زیر پیوسته است

$$D=\{(x,w,h)\ \mid a\leq x\leq b\,,\ -\infty<w<\infty\,,\ 0\leq h\leq h_0\}$$

و روی D نسبت به متغیر w در شرط لیپ‌شیتس صدق کند یعنی به ازای یک عدد ثابت L داشته باشیم

$$\forall(x,w_1,h),(x,w_2,h)\in D \qquad |\phi(x,w_2,h)-\phi(x,w_1,h)|\leq L|w_2-w_1|$$

در این صورت

- روش تفاضلی پایدار است.

- روش تفاضلی همگراست اگر و تنها اگر سازگار باشد و این معادل است با این که برای هر $a \leq x \leq b$ داشته باشیم $\phi(x, y, ۰) = f(x, y)$

- اگر تابعی مانند τ وجود داشته باشد که با ازای $i = ۱, ۲, \dots, N$ و خطای برشی موضعی و $۰ \leq h \leq h_۰$ داشته باشیم $|\tau_i(h)| \leq \tau(h)$ آنگاه

$$|y(x_i) - w_i| \leq \frac{\tau(h)}{L}\, e^{L(x_i - a)}$$

مثال ۷.۱ روش اویلر اصلاح شده را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} w_۰ &= ۰ \\ w_{i+۱} &= w_i + \frac{h}{۲}\left[f(x_i, w_i) + f(x_{i+۱}, w_i + hf(x_i, w_i))\right] \quad i = ۰, \dots, N-۱ \end{aligned}$$

نشان می‌دهیم که این روش شرایط قضیه (۱) را دارد. برای این روش

$$\phi(x, w, h) = \frac{۱}{۲} f(x, w) + \frac{۱}{۲} f(x + h, w + hf(x, w))$$

گیریم f نسبت به متغیر w با ازای ثابت L در شرط لیپ‌شیتس روی مجموعه‌ی زیر صدق کند

$$D_۱ = \{(x, w) \ \mid a \leq x \leq b\ ,\ -\infty < w < \infty\}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \phi(x, w, h) - \phi(x, \bar{w}, h) &= \frac{۱}{۲} f(x, w) + \frac{۱}{۲} f(x + h, w + hf(x, w)) \\ &- \frac{۱}{۲} f(x, \bar{w}) - \frac{۱}{۲} f(x + h, \bar{w} + hf(x, \bar{w})) \end{aligned}$$

از شرط لیپ‌شیتس برای f نتیجه می‌شود

$$|\phi(x, w, h) - \phi(x, \bar{w}, h)| = \frac{۱}{۲} L|w - \bar{w}| + \frac{۱}{۲} L|w + hf(x, w) - \bar{w} - hf(x, \bar{w})|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad L|w-\bar{w}| + \frac{۱}{۲} L|hf(x,w) - hf(x,\bar{w})| \\
&\leq \quad L|w-\bar{w}| + \frac{۱}{۲} hL^{۲}|w-\bar{w}| \\
&= \quad (L + \frac{۱}{۲} hL^{۲})|w-\bar{w}|
\end{aligned}
$$

به این ترتیب ϕ نیز نسبت به متغیر w در شرط لیپ‌شیتس روی مجوعه زیر صدق می‌کند

$$D_{۲} = \{(x,w,h) \ \ | \ a \leq x \leq b \ , \ -\infty < w < \infty \ , \ \circ \leq h \leq h_{\circ}\}$$

که $h_{\circ} > \circ$ دلخواه و ثابت مورد نظر عبارت است از $L' = L + \frac{۱}{۲} h_{\circ} L^{۲}$.
و سرانجام اگر f روی $D_{۱}$ پیوسته باشد، ϕ روی $D_{۲}$ پیوسته است. بنابراین طبق قضیه (۱) روش اویلر اصلاح شده پایدار است. اگر قرار دهیم $h = \circ$ آنگاه

$$\phi(x,w,\circ) = \frac{۱}{۲} f(x,w) + \frac{۱}{۲} f(x+\circ, w+\circ f(x,w)) = f(x,w)$$

بنابراین شرط سازگاری که در قضیه (۱) مطرح شده برقرار است و در نتیجه روش اویلر اصلاح شده همگراست. می‌توان نشان داد که خطای برشی موضعی برای این روش $O(h^{۲})$ است، پس همگرایی روش اویلر اصلاح شده نیز $O(h^{۲})$ است.

برای روش‌های چندگامی مسائل مربوط به سازگاری، همگرایی و پایداری به دلیل تعدد تقریب‌ها در هر گام، مسائل ترکیبی هستند. در روش‌های تک گامی تقریب $w_{i+۱}$ به طور مستقیم وابسته به تقریب قبلی w_i است. اما برای روش‌های چندگامی برای تقریب $w_{i+۱}$ دست کم به دو تقریب قبلی نیاز داریم. روش‌های معمول حتی به تقریب‌های بیشتری نیز نیاز دارند.

تعریف ۸.۱ یک روش چندگامی برای تقریب جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل با مقدار اولیه‌ی

$$y' = f(x,y) \, , \qquad a \leq x \leq b \, , \quad y(a) = \alpha$$

به شکل کلی زیر است

$$w_{\circ} = \alpha \ , \ w_{۱} = \alpha_{۱} \ , \cdots \ , \ w_{m-۱} = \alpha_{m-۱}$$

$$w_{i+۱} = a_{m-۱} w_i + a_{m-۲} w_{i-۱} + \cdots + a_{\circ} w_{i+۱-m} + hF(x_i, h, w_{i+۱}, w_i, \ldots, w_{i+۱-m}) \quad (۵)$$

به قسمی که $i = m-۱, m, \ldots, N-۱$ و $a_{m+۱}, \ldots, a_{۱}, a_{\circ}$ مقادیر ثابت هستند و مطابق معمول $h = (b-a)/N \ \ , \ x_i = a + ih$

خطای برشی موضعی روش چندگامی به شکل زیر تعریف می شود

$$
\begin{aligned}
\tau_{i+۱}(h) \quad &= \quad \frac{y(x_{i+۱}) - a_{m-۱} y(x_i) - \cdots - a_{\circ} y(x_{i+۱-m})}{h} \\
&- \quad F(x_i, h, y(x_{i+۱}), \ldots, y(x_{i+۱-m}))
\end{aligned}
$$

به قسمی که $i = m-1, m, \ldots, N-1$. همانند روش‌های تک گامی خطای برشی موضعی معیاری است برای اندازه‌گیری میزان انحراف جواب تقریب زده شده از جواب واقعی.

مثال ۹.۱ برای فرمول چهارگامی آدامز– بشفورت به صورت:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[55f(x_i, w_i) - 59f(x_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, w_{i-3})]$$

خطای برشی موضعی عبارت است از $\tau_{i+1}(h) = \frac{251}{720}y^{(5)}(\mu_i)h^4 = O(h^4)$ به قسمی که $\mu_i \in (x_{i-3}, x_{i+1})$. البته به شرط اینکه $y \in C^5[a,b]$.

تعریف ۱۰.۱ برای روش چندگامی (۵) چندجمله‌ای مشخص عبارت است از

$$P(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - a_{m-2}\lambda^{m-2} - \cdots - a_1\lambda - a_0 \qquad (6)$$

خواهیم دید که پایداری یک روش چندگامی نسبت به خطای گردکردن براساس قدر مطلق ریشه‌های این چندجمله‌ای مشخص می‌شود. فرض کنیم روش چندگامی (۵) برای معادله‌ی دیفرانسیل مقدار اولیه‌ی بدیهی زیر به کار برده شود.

$$y' \equiv 0\ , \quad y(\alpha) = \alpha\ , \quad \alpha \neq 0 \qquad (7)$$

روشن است که جواب دقیق این معادله $y(x) = \alpha$ است. به سادگی می‌توان نشان داد که از لحاظ نظری هر روش چندگامی جواب واقعی معادله (۷) را به دست می‌آورد. تنها منبع خطا خطای گرد کردن است. چون سمت راست معادله‌ی (۷) صفر است می‌توان فرض کرد در روش چندگامی $F \equiv 0$. به این ترتیب روش چندگامی (۵) به صورت زیر خواهد بود.

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} \qquad (8)$$

فرض کنیم λ یک ریشه‌ی چند جمله‌ای مشخص روش چندگامی (۵) باشد. در این صورت $w = \lambda^n$ به ازای هر n یک جواب معادله‌ی (۸) خواهد بود زیرا

$$\lambda^{i+1} - a_{m-1}\lambda^i - a_{m-2}\lambda^{i-1} - \cdots - a_0\lambda^{i+1-m} = \lambda^{i+1-m}[\lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - \cdots - a_0] = 0$$

در واقع اگر $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ریشه‌های متمایز چندجمله‌ای مشخص روش (۵) باشند می‌توان نشان داد که هر جواب معادله‌ی (۸) به شکل زیر قابل نمایش است.

$$w_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i^n \qquad (9)$$

به قسمی که $c_1, \ldots, c_m$ ثابت‌های منحصر به فردی هستند. چون جواب واقعی معادله‌ی (۷) برابر $y(x) = \alpha$ است، مقدار $w_n = \alpha$ به ازای تمام مقادیر n، جوابی از معادله‌ی (۸) است. بنابراین

$$0 = \alpha - \alpha a_{m-1} - \alpha a_{m-2} - \cdots - \alpha a_0 = \alpha[1 - a_{m-1} - a_{m-2} - \cdots - a_0]$$

در نتیجه $\lambda = 1$ یکی از ریشه‌های چندجمله‌ای مشخص است. می‌توان فرض کرد که در معادله‌ی (۹)، $\lambda_1 = 1$ و $c_1 = \alpha$. بنابراین جواب‌های معادله‌ی (۸) به صورت زیر قابل بیان هستند.

$$w_n = \alpha + \sum_{i=2}^{m} c_i \lambda_i^m \tag{10}$$

اگر تمام محاسبات میانی دقیق بودند ثابت‌های $c_2, \ldots, c_m$ همگی صفر می‌بودند. در عمل به دلیل خطای گردکردن این ثابت‌ها صفر نیستند. در واقع خطای گردکردن به صورت نمایی رشد می‌کند مگر آنکه برای تمام ریشه‌های $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ داشته باشیم $|\lambda_i| < 1$. هر چه قدر مطلق این ریشه‌ها کوچک‌تر باشد روش چندگامی نسبت به خطای گردکردن پایدارتر است.
برای بدست آوردن فرمول (۱۰) فرض کردیم که تمامی ریشه‌های چندجمله‌ای مشخص متمایز هستند. اگر ریشه‌ها مکرر باشند وضعیت مشابهی داریم. برای مثال اگر $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+p}$ یعنی λ_k ریشه‌ی مکرر از مرتبه‌ی p باشد کافی است در فرمول (۱۰) به جای مجموع

$$c_k \lambda_k^n + c_{k+1} \lambda_{k+1}^n + \cdots + c_{k+p} \lambda_{k+p}^n$$

قرار دهیم

$$c_k \lambda_k^n + c_{k+1} n \lambda_k^{n-1} + c_{k+2} n(n-1) \lambda_k^{n-2} + \cdots + c_{k+p}[n(n-1)\cdots(n-p+1)] \lambda_k^{n-p}$$

اگر چه در این حالت شکل جواب عوض شده ولی در این حالت نیز اگر $|\lambda_k| > 1$ باشد خطای گردکردن به صورت نمایی رشد می‌کند.

اگر چه در بحث فوق معادله‌ی دیفرانسیل بدیهی (۷) را بررسی کردیم اما مشخصه‌ی پایداری این معادله، پایداری معادله‌ی کلی را (وقتی $f(x,y)$ متحد صفر نیست) تعیین می‌کند. زیرا جواب معادله‌ی (۷) که در واقع معادله‌ی همگن برای معادله‌ی $y' = f(x,y)$ محسوب می‌شود در جواب معادله‌ی $y' = f(x,y)$ مستتر است. تعریف‌های زیر بر اساس این ایده مطرح شده‌اند.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنیم $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ مشخص کننده‌ی ریشه‌های (نه لزوماً متمایز) چندجمله‌ای مشخصه‌ی

$$P(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - a_{m-2}\lambda^{m-2} - \cdots - a_1\lambda - a_0$$

وابسته به روش چندگامی (۵) باشند به قسمی که برای $i = 1, \ldots, m$ ، $|\lambda_i| \le 1$ و تمامی ریشه‌های با قدر مطلق برابر یک ریشه‌های ساده باشند در این‌صورت گوییم روش تفاضلی در شرط ریشه صدق می‌کند.

تعریف ۱۲.۱

۱) روش‌هایی که در شرط ریشه صدق کنند و $\lambda = ۱$ تنها ریشه با قدر مطلق یک برای چندجمله‌ای مشخصه باشد قویاً پایدار نامیده می‌شوند.

۲) روش‌هایی که در شرط ریشه صدق کنند ولی چندجمله‌ای مشخصه آنها بیش از یک ریشه با قدرمطلق یک دشته باشد پایدار ضعیف نامیده می‌شود.

۳) روش‌هایی که در شرط ریشه صدق نمی‌کنند ناپایدار نامیده می‌شوند.

قضیه ۱۳.۱ یک روش چندگامی به شکل (۵) پایدار است اگر و تنها اگر در شرط ریشه صدق کند.

مثال ۱۴.۱ روش چهارگامی آدامز– بشفورت را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$w_{i+۱} = w_i + hF(x_i, h, w_{i+۱}, w_i, \ldots, w_{i-۳})$$

به قسمی که

$$\begin{aligned} F(x_i, h, w_{i+۱}, w_i, \ldots, w_{i-۳}) &= \frac{h}{۲۴}[۵۵f(x_i, w_i) - ۵۹f(x_{i-۱}, w_{i-۱}) \\ &+ ۳۷f(x_{i-۲}, w_{i-۲}) - ۹f(x_{i-۳}, w_{i-۳})] \end{aligned}$$

در این صورت $m = ۴$، $a_۰ = a_۱ = a_۲ = ۰$ و $a_۳ = ۱$. معادله‌ی مشخص برای این روش عبارت است از $\lambda_۱ = ۰$ و $\lambda_۲ = \lambda_۳ = \lambda_۴ = ۰$. بنابراین روش فوق در شرط ریشه صدق می‌کند و قویاً پایدار است.

مثال ۱۵.۱ روش چهارگامی میلن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$w_{i+۱} = w_{i-۳} + \frac{۴h}{۳}[۲f(x_i, w_i) - f(x_{i-۱}, w_{i-۱}) + ۲f(x_{i-۲}, w_{i-۲})]$$

در این صورت معادله‌ی مشخص $p(\lambda) = \lambda^۴ - ۱ = ۰$ است که چهار ریشه با قدر مطلق یک دارد. این ریشه‌ها $\lambda_۱ = ۱$، $\lambda_۲ = -۱$، $\lambda_۳ = i$ و $\lambda_۴ = -i$ هستند. پس روش پایدار است ولی پایدار ضعیف.

مثال ۱۶.۱ معادله‌ی دیفرانسیل با مقدار اولیه‌ی $y' = -6y + 6$ به ازای $0 \le x \le 1$ و $y(0) = 2$ مفروض است. جواب واقعی این معادله $y(x) = 1 + e^{-6x}$ است. به منظور مقایسه روش قویاً پایدار آدامز– بشفورت با روش پایدار ضعیف میلن در جدول زیر مقادیر عددی به دست آمده به ازای $h = 0/1$ داده شده‌اند.

جدول

x_i	مقدار واقعی $y(x_i)$	روش آدامز–بشفورت $w-i$	خطا $\lvert y_i - w_i \rvert$	روش میلن w_i	خطا $\lvert y_i - w_i \rvert$
۰٫۱۰۰۰۰۰۰۰		۱٫۵۴۸۸۱۱۶		۱٫۵۴۸۸۱۱۶	
۰٫۲۰۰۰۰۰۰۰		۱٫۳۰۱۱۹۴۲		۱٫۳۰۱۱۹۴۲	
۰٫۳۰۰۰۰۰۰۰		۱٫۱۶۵۲۹۸۹		۱٫۱۶۵۲۹۸۹	
۰٫۴۰۰۰۰۰۰۰	۱٫۰۹۰۷۱۸۰	۱٫۰۹۹۶۲۳۶	$۸٫۹۰۶ \times ۱۰^{-۳}$	۱٫۰۹۸۳۷۸۵	$۷٫۶۶۱ \times ۱۰^{-۳}$
۰٫۵۰۰۰۰۰۰۰	۱٫۰۴۹۷۸۷۱	۱٫۰۵۱۳۳۵۰	$۱٫۵۴۸ \times ۱۰^{-۳}$	۱٫۰۴۱۷۳۴۴	$۸٫۰۵۳ \times ۱۰^{-۳}$
۰٫۶۰۰۰۰۰۰۰	۱٫۰۲۷۳۲۳۷	۱٫۰۴۲۵۶۱۴	$۱٫۵۲۴ \times ۱۰^{-۳}$	۱٫۰۴۸۶۴۳۸	$۲٫۱۳۲ \times ۱۰^{-۳}$
۰٫۷۰۰۰۰۰۰۰	۱٫۰۱۴۹۹۵۶	۱٫۰۰۴۷۹۹۰	$۱٫۰۲۰ \times ۱۰^{-۳}$	۰٫۹۶۳۴۵۰۶	$۵٫۱۵۴ \times ۱۰^{-۳}$
۰٫۸۰۰۰۰۰۰۰	۱٫۰۰۸۲۲۹۷	۱٫۰۳۵۹۰۹۰	$۲٫۷۶۸ \times ۱۰^{-۳}$	۱٫۱۲۸۹۹۷۷	$۱٫۲۰۸ \times ۱۰^{-۳}$
۰٫۹۰۰۰۰۰۰۰	۱٫۰۰۴۵۱۶۶	۱٫۹۶۵۷۹۳۶	$۳٫۸۷۲ \times ۱۰^{-۳}$	۰٫۷۲۸۲۶۴۸	$۲٫۷۶۲ \times ۱۰^{-۳}$
۱٫۰۰۰۰۰۰۰۰	۱٫۰۰۲۴۷۸۸	۱٫۰۷۰۹۳۰۴	$۶٫۸۴۵ \times ۱۰^{-۳}$	۱٫۶۴۵۰۹۱۷	$۶٫۴۲۶ \times ۱۰^{-۳}$