پاسخ امتحان پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱، ترم اول ۹۳-۹۲

---

۱. الف) اگر $f(x) = \int_{x^۲}^{x^۳} \frac{e^t}{t}\, dt$، مطلوبست محاسبه‌ی ضابطه‌ی $f'(x)$.

ب) مطلوبست محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱}{\ln x} \int_{x^۲}^{x^۳} \frac{e^t}{t}\, dt$.

حل. الف) (۱۵ نمره)

قرار می‌دهیم $g(t) = \frac{e^t}{t}$. دامنه پیوستگی g مجموعه $\mathbb{R} - \{۰\}$ است. بنابر این f بر بازه $(۰, \infty)$ مشتق‌پذیر است. بنابر قضایای مربوط به انتگرال معین، قانون زنجیری مشتق و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، داریم

$$f(x) = \int_{۱}^{x^۳} \frac{e^t}{t}\, dt - \int_{۱}^{x^۲} \frac{e^t}{t}\, dt$$

و

$$f'(x) = ۳x^۲\, \frac{e^{x^۳}}{x^۳} - ۲x\, \frac{e^{x^۲}}{x^۲} = \frac{۳e^{x^۳} - ۲e^{x^۲}}{x}$$

ب) (۱۵ نمره)

شرایط استفاده از قضیه هوپیتال برقرار است. زیرا اگر قرار دهیم $f(x) = \int_{x^۲}^{x^۳} \frac{e^t}{t}\, dt$ و $h(x) = \ln x$ آنگاه f و h در یک همسایگی ۱ مشتق‌پذیر هستند و $h'(x) = \frac{۱}{x} \neq ۰$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to ۱} \frac{۱}{\ln x} \int_{x^۲}^{x^۳} \frac{e^t}{t}\, dt &= \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)}{h(x)} \\
&= \lim_{x\to ۱} \frac{f'(x)}{h'(x)} \\
&= \lim_{x\to ۱} \frac{\frac{۳e^{x^۳} - ۲e^{x^۲}}{x}}{\frac{۱}{x}} = e
\end{aligned}$$

۲. نامساوی زیر را برای هر $x > 0$ نشان دهید.

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \sinh^{-1}(x) < x$$

حل.

راه حل اول:

تابع $f(x) = \sinh^{-1} x$ برای هر $x > 0$ بر بازه $[0, x]$ پیوسته و بر بازه $(0, x)$ مشتق پذیر است. در نتیجه بنا به قضیه مقدار میانگین نقطه $c \in (0, x)$ وجود دارد به طوری که

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{\sinh^{-1} x}{x}.$$

از طرفی $0 < c < x$ نتیجه می‌دهد

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} < 1.$$

در نتیجه

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \sinh^{-1} x < x.$$

راه حل دوم: دو تابع $f(x) = \sinh^{-1} x - x$ و $g(x) = \sinh^{-1} x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ را برای $x > 0$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 < 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(1 - \frac{1}{1+x^2}) > 0$$

در نتیجه تابع $f(x)$ نزولی و تابع $g(x)$ صعودی است. پس برای هر $x > 0$ داریم

$$f(x) < f(0), \qquad g(x) > g(0).$$

در نتیجه

$$\sinh^{-1} x - x < 0, \qquad \sinh^{-1} x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \sinh^{-1} x < x.$$

۳. هر یک از انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\int \frac{x \ln x}{(۱+x^۲)^۲}\, dx$ ب) $\int_{-۱}^{۱} x^۲ \sqrt{(۱-x^۲)} dx$

حل. الف) (۱۵ نمره)

با فرض $u = \ln x$ و $dv = \frac{x}{(۱+x^۲)^۲}\, dx$ خواهیم داشت $du = \frac{۱}{x}\, dx$ و $v = -\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۱+x^۲}$. در نتیجه

$$\int \frac{x\ln x}{(۱+x^۲)^۲}\, dx = -\frac{۱}{۲}(\frac{\ln x}{۱+x^۲}) + \frac{۱}{۲}\int \frac{dx}{x(۱+x^۲)}$$

برای انتگرال اخیر، با استفاده از روش تجزیه کسرها

$$\frac{۱}{x(۱+x^۲)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{۱+x^۲}$$

با استفاده از رابطه فوق، $A = ۱$، $B = -۱$ و $C = ۰$. در نتیجه

$$\int \frac{۱}{x(۱+x^۲)}\, dx = \int (\frac{۱}{x} + \frac{-x}{۱+x^۲})dx = \ln|x| - \frac{۱}{۲}\ln(۱+x^۲) + C = \ln(\frac{|x|}{\sqrt{۱+x^۲}}) + C$$

و از آنجا

$$\int \frac{x\ln x}{(۱+x^۲)^۲}\, dx = -\frac{۱}{۲}(\frac{\ln x}{۱+x^۲}) + \frac{۱}{۲}\ln(\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}) + C$$

ب) (۱۵ نمره)

با استفاده از تغییر متغیر $x = \sin t$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}dx &= \int \frac{\sin^۲ t}{\cos t}\cos t\, dt = \int \sin^۲ t\, dt \\
&= \int \frac{۱-\cos ۲t}{۲}\, dt = \frac{۱}{۲}(t - \frac{۱}{۲}\sin ۲t) + C \\
&= \frac{۱}{۲}(\sin^{-۱} x - x\sqrt{۱-x^۲}) + C
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} \frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}\, dt = \frac{۱}{۲}(\sin^{-۱} x - x\sqrt{۱-x^۲})\Big|_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} = \frac{\pi}{۶} - \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

۴. همگرایی انتگرال ناسره $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}dx$ را بررسی کنید.

حل. انتگرال ناسره $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}\,dx$ را به صورت مجموع انتگرال‌های ناسره نوع اول و دوم به شکل زیر بیان می‌کنیم. (۴ نمره)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}dx = \int_{0}^{1} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}dx + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}dx$$

توجه داریم چون $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}} = \infty$، پس انتگرال اول ناسره است.

توابع $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}$ و $\frac{1}{\sqrt{x}}$ در بازه $(0, 1]$ مثبت هستند و

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x+1}} = 1$$

پس بنابر آزمون مقایسه حدی، از اینکه $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ همگرا است نتیجه می‌شود $\int_{0}^{1} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}dx$ همگرا است. (۱۳ نمره)

توابع $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}$ و $\frac{1}{x^2}$ در بازه $[1, \infty)$ مثبت هستند و

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} = 0$$

بنابر آزمون مقایسه حدی، از همگرایی انتگرال ناسره $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ همگرایی $\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}dx$ نتیجه می‌شود.

به این ترتیب، انتگرال داده شده نیز همگرا است. (۱۳ نمره)