حل مسائل آزمون میان ترم ریاضی عمومی ۱ ترم اول ۹۵-۹۴

---

۱. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$

ب) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log_3 n}$

حل. الف) با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ ، سری فوق شرط لازم همگرایی را ندارد. پس واگرا است. (۵نمره)

ب) توابع $f(x)=x$ و $g(x)=\log_3 x$ صعودی و در نتیجه حاصل ضربشان صعودی است. پس

$$\forall n\geq 2,\quad n\log_3 n \leq (n+1)\log_3(n+1)$$

و از آنجا $\frac{1}{n\log_3 n} \geq \frac{1}{(n+1)\log_3(n+1)}$. یعنی دنبالهٔ $\{\frac{1}{n\log_3 n}\}$ دنباله‌ای نزولی است. همچنین، چون $\lim_{n\to\infty} n\log_3 n = \infty$، خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\log_3 n}=0$. در نتیجه بنابر آزمون لایب‌نیتس، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log_3 n}$ همگرا است. (۵ نمره)

---

۲. مقادیر $p>0$ را چنان تعیین کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{3n^p+1}-\sqrt{3n^p-3})$ همگرا باشد.

حل. قرار می‌دهیم $a_n=\sqrt{3n^p+1}-\sqrt{3n^p-3}$. با ضرب کردن صورت و مخرج a_n در مزدوج آن، خواهیم داشت

$$a_n=\frac{4}{\sqrt{3n^p+1}+\sqrt{3n^p-3}}=\frac{4}{n^{\frac{p}{2}}\left(\sqrt{3+\frac{1}{n^p}}+\sqrt{3-\frac{3}{n^p}}\right)}$$

اگر قرار دهیم $b_n=\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

در نتیجه، بنابر آزمون مقایسهٔ حدی، هر دو سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ از بابت همگرایی یا واگرایی یک رفتار دارند. سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ برای $0<p\leq 2$ واگرا و برای $p>2$ همگرا است. پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز برای مقادیر $0<p\leq 2$ واگرا و برای $p>2$ همگرا است. (۵ نمره)

۳. نشان دهید تابع f با ضابطهٔ زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} (e^x - ۱)\ln x & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ |x|^{\cos x} & x < ۰ \end{cases}$$

حل. برای نقطهٔ دلخواه $x_۰ \in \mathbb{R}$ سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $x_۰ > ۰$. در این حالت با توجه به پیوستگی هر یک از توابع $(e^x - ۱)$ و $\ln x$ در این نقطه، تابع $(e^x - ۱)\ln x$ نیز در این نقطه پیوسته خواهد بود. (۳ نمره)

ب) $x_۰ < ۰$. در این حالت با توجه به پیوستگی هر یک از توابع $\cos x$ و $\ln|x|$ در این نقطه، تابع $\cos x \ln|x|$ نیز در این نقطه پیوسته است. با استفاده از پیوستگی تابع $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع $\exp(\cos x \ln|x|) = |x|^{\cos x}$ نیز در این نقطه پیوسته است. (۴ نمره)

ج) $x_۰ = ۰$. در این حالت نشان می‌دهیم $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = f(۰) = ۰$.

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} |x|^{\cos x} = \lim_{x\to ۰^-} e^{\cos x \ln|x|}$$

با توجه به اینکه $\lim_{x\to ۰^-} \cos x = ۱$ و $\lim_{x\to ۰^-} \ln|x| = -\infty$ داریم $\lim\limits_{x\to ۰^-} \cos x \ln|x| = -\infty$. در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۰$.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} (e^x - ۱)\ln x = \lim_{x\to ۰^+} (\frac{e^x - ۱}{x}) x \ln x$$

بنابر مثال‌های حل شده، $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{e^x - ۱}{x} = ۱$ (این عبارت برابر مشتق راست تابع نمایی در نقطه $x = ۰$ است). همچنین $\lim\limits_{x\to ۰^+} x\ln x = ۰$. در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۱ \times ۰ = ۰$.

به این ترتیب، تابع f در $x_۰ = ۰$ نیز پیوسته و در نتیجه بر سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته است. (۸ نمره)

---

۴. نشان دهید عدد مثبت c وجود دارد که $۲^c = c^۳$.

حل. تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲^x-x^۳=e^{x\ln ۲}-x^۳$ تفاضل دو تابع پیوسته و در نتیجه تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ است. داریم

$$f(۰)=۲^۰-۰=۱>۰ \quad \text{و} \quad f(۲)=۲^۲-۲^۳=-۴<۰$$

پس بنابر قضیهٔ بولتسانو، $c\in(۰,۲)$ وجود دارد که $f(c)=۲^c-c^۳=۰$. (۱۰ نمره)

---

۵. فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x^۲\tanh(\frac{۱}{x}) & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$.

الف) ضابطه f' را به دست آورید.

ب) پیوستگی f' در $x=۰$ را بررسی کنید.

حل. الف) برای $x\neq ۰$، با استفاده از مشتق تابع مرکب، خواهیم داشت

$$f'(x)=۲x\tanh(\frac{۱}{x})+x^۲\big(-\frac{۱}{x^۲}\big)\big(۱-\tanh^۲(\frac{۱}{x})\big)=۲x\tanh(\frac{۱}{x})+\tanh^۲(\frac{۱}{x})-۱$$

برای $x=۰$ با استفاده از تعریف و توجه به اینکه تابع $\tanh$ تابعی کراندار بر $\mathbb{R}$ است خواهیم داشت

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}x\tanh(\frac{۱}{x})=۰$$

پس $f'(x)=\begin{cases} ۲x\tanh(\frac{۱}{x})+\tanh^۲(\frac{۱}{x})-۱ & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$. (۱۲ نمره)

ب) با توجه به اینکه $\lim_{x\to\infty}\tanh x=۱$ و $\lim_{x\to-\infty}\tanh x=-۱$، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x\to ۰^+}f'(x) &= \lim_{x\to ۰^+}\big(۲x\tanh(\frac{۱}{x})+\tanh^۲(\frac{۱}{x})-۱\big)=۰+(۱)^۲-۱=۰ \\ \lim_{x\to ۰^-}f'(x) &= \lim_{x\to ۰^-}\big(۲x\tanh(\frac{۱}{x})+\tanh^۲(\frac{۱}{x})-۱\big)=۰+(-۱)^۲-۱=۰ \end{aligned}$$

در نتیجه $\lim_{x\to ۰}f'(x)=۰=f'(۰)$. پس تابع مشتق در $x=۰$ پیوسته است. (۸نمره)