به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱ ترم اول ۹۳

---

۱. الف) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$

$a_n = n \tan \frac{1}{n} = \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ (۲ نمره)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{\frac{1}{n}\to 0} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ (۳ نمره)

بنابراین، طبق آزمون جمله عمومی، سری واگراست. (۱ نمره)

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}$

$a_n = \frac{\tanh n}{n^2}$ چون $n > 0$، داریم $0 < \tanh n \leq 1$ لذا $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2}$. (۳ نمره)

میدانیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ طبق دستور سری فوق همساز همگراست. (۲ نمره)

در نتیجه طبق آزمون مقایسه سری همگراست. (۲ نمره)

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{ne^n}$

$a_n = \frac{1}{ne^n} > 0$ (۱ نمره)

چون ne^n صعودی است پس $\frac{1}{ne^n}$ نزولی است. (۳ نمره)

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{ne^n} = 0$ (۱ نمره)

در نتیجه طبق آزمون سری متناوب (لایپ نیتس) سری همگراست. (۲ نمره)

۲. الف) برای $x > ۰$ داریم $f(x) = x^{\frac{۱}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. از پیوستگی توابع x، $\ln x$ و e^x و با توجه به اینکه $x > ۰$ بنابر قضایای پیوستگی، نتیجه میشود $\frac{\ln x}{x}$ و $e^{\frac{\ln x}{x}}$ پیوسته هستند. (۳ نمره)

به همین ترتیب برای $x < ۰$ و از پیوستگی توابع $x^۲$ و $\sinh x$ نتیجه میشود $f(x) = \sinh x^۲$ پیوسته است. (۳ نمره)

از سوی دیگر

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} x^{\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to ۰^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = ۰$$

زیرا $\lim_{x\to ۰^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to -\infty} e^x = ۰$

حال اگر $x_n \to ۰$ و $x_n > ۰$، آنگاه $\frac{۱}{x_n} \to +\infty$ و $\ln x_n \to -\infty$ در نتیجه $\frac{\ln x_n}{x_n} \to -\infty$ پس $e^{\frac{\ln x_n}{x_n}} \to ۰$ (۴ نمره)

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} \sinh x^۲ = \sinh(\lim_{x\to ۰^-} x^۲) = \sinh ۰ = ۰$$

زیرا $\sinh x$ در $x = ۰$ پیوسته است.

در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = ۰ = \lim_{x\to ۰^+} f(x) = f(۰)$$

پس f در صفر نیز پیوسته است. (۴ نمره)

ب) بنا بر (الف) تابع f با ضابطه $f(x) = x^{\frac{۱}{x}} - \frac{۱}{۲}$ بر $(۰, +\infty)$ پیوسته است. (۲ نمره)

$f(۱) = ۱ - \frac{۱}{۲} > ۰$ (۱ نمره)

$f(\frac{۱}{۲}) = (\frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۲} < ۰$ (۱ نمره)

پس بنابر قضیه بولترانو عدد $c \in (\frac{۱}{۲}, ۱)$ وجود دارد که $f(c) = ۰$ یعنی $c^{\frac{۱}{c}} = \frac{۱}{۲}$. (۲ نمره)

۳. الف)

$$f'_+(\circ) = \lim_{h\to\circ^+} \frac{f(\circ+h)-f(\circ)}{h} = \lim_{h\to\circ^+} \frac{h^{\frac{۳}{۲}}\ln h}{h} = \lim_{h\to\circ^+} h^{\frac{۱}{۲}}\ln h = \circ$$

بنابر مثال حل شده کتاب برای $r > \circ$، $\lim_{x\to\circ^+} x^r \ln x = \circ$. (۶ نمره)

$$f'_-(\circ) = \lim_{h\to\circ^-} \frac{f(\circ+h)-f(\circ)}{h} = \lim_{h\to\circ^-} \frac{h^۲ ۳^h}{h} = \lim_{h\to\circ^-} h۳^h = \circ \times ۱ = \circ$$

در نتیجه $f'_+(\circ) = f'_-(\circ) = \circ$. یعنی f در صفر مشتق پذیر است و $f'(\circ) = \circ$. (۶ نمره)

ب) برای $x > \circ$ داریم $f(x) = x^{\frac{۳}{۲}}\ln x$. پس از مشتق پذیری $\ln x$ و $x^{\frac{۳}{۲}}$ نتیجه میگیریم f مشتق پذیر است. به همین ترتیب از مشتق پذیری ۳^x و $x^۲$ نتیجه میگیریم برای $x < \circ$ تابع f مشتق پذیر است.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}\ln x + x^{\frac{۱}{۲}} & x > \circ \\ ۲x۳^x + x^۲ \ln x\ ۳^x & x \le \circ \end{cases}$$

(۸ نمره)