کمینگی ترتیبی

سخنرانی در همایش منطق ریاضی و کاربردهای آن

دانشگاه اراک

محسن خانی

دانشگاه صنعتی اصفهان

۱۰ شهریور ۱۳۹۸

فهرست مطالب

۱ مقدمه

منطق ریاضیِ اوایل قرن بیستم مسئول تحکیم پایه‌های اصول موضوعه‌ای ریاضی بوده است. قضایای اولیه در این راستا همه از بدرفتاریها (ناکاملی‌های) حساب می‌گویند: تئوری کامل اعداد طبیعی تصمیم‌پذیر نیست و هر تئوری‌ای که با الگوریتم برای حساب نوشته شود کامل نیست (گودل). این قضایا، به قضایای ناتمامیت معروفند.

اما تجلی منطق در ریاضیات، تنها برای نشان دادن بدرفتاری‌ها نیست. قضیه‌ی تمامیت در منطق، منجر به پیدایش نظریه‌ی مدل می‌شود که خوش‌رفتاری‌های ریاضی را در ساختارهای جبری، نظریه‌ی اعدادی و توپولوژیک با استفاده از بیانهای قوی منطقی نشان می‌دهد.

در واقع نظریه‌ی مدل یک دسته‌بندی برای تئوریهای ریاضی ارائه می‌کند که در آنها پدیده‌های بدرفتار مانند حساب و نظریه‌ی مجموعه‌ها در یک دسته‌اند و سایر پدیده‌ها نیز بر حسب ویژگی‌های مشترک در دسته‌های دیگری قرار می‌گیرند. یکی از این دسته‌ها حاوی ریاضیات خوش‌رفتاری مانند ریاضیات چندگوناهای جبری و مجموعه‌های شبه‌جبری است. هدف از این سخنرانی پرداختن به این دسته، و به طور خاص پرداختن به تئوری‌های کمینه‌ی ترتیبی است که زیبائی‌های هندسه‌ی جبری و توپولوژی و نظریه‌ی اعداد را در قالبی منطقی به تصویر می‌کشد. ون دن دریز، کمینگی ترتیبی را کاندیدای مناسبی برای توپولوژی رامِ مورد نظر گروتندیک می‌داند و در کتابی تحت عنوان «توپولوژی رام» [۱] به توجیه این گفته می‌پردازد.

معرفی کمینگی ترتیبی تنها در یک سخنرانی یک‌ساعته کار ساده‌ای نیست و من تنها کوشیده‌ام تا طعمی از آن را به مخاطب بچشانم. هر یک از موضوعاتی که در این سخنرانی بدانها اشاره شده است نیازمند پرداختن عمیق هستند، و از این رو فهم این یادداشت شاید برای خواننده دشوار باشد. بهتر است این یادداشت تنها به عنوان مرجعی کلی مورد استفاده قرار گیرد.

هم‌اکنون یک دوره‌ی ویژه در دانشگاه صنعتی اصفهان برگزار کرده‌ام که در آن به یکی از موضوعات اشاره شده در این سخنرانی، یعنی ساختار میدان اعداد حقیقی به همراه توابع تحلیلی، به صورت دقیق پرداخته‌ام. فیلمهای این دوره به صورت برخط موجود است و خواننده‌ی علاقه‌مند را تشویق به دیدن آنها در پیوندِ زیر می‌کنم.

https://mohsen-khani.github.io/o-minimal/

۲ ثُباتِ پیچیدگی مجموعه‌های تعریف‌پذیر

در مقدمه، اشاره‌ای به خوش‌رفتاری و بدرفتاری کرده‌ام. می‌خواهم باز هم نمونه‌ای از رفتار بد و خوب را بررسی کنم. نمونه‌ای از بدرفتاری نظریه‌ی مجموعه‌ای این است که با مکانیسمهای ساده‌ای مانند اجتماع، اشتراک، متمم‌گیری، ضرب دکارتی و تصویرگیری و با شروع از مجموعه‌های ساده‌ای مانند بازه‌ها، می‌توان به مجموعه‌های پیچیده‌ای از اعداد حقیقی رسید؛ مانند مجموعه‌های کانتور و به طور کلی مجموعه‌های اندازه‌پذیر بورل. ادامه‌ی روند تصویرگیری و اجتماع و اشتراک پیچیدگی مجموعه‌ها را بالاتر و بالاتر می‌برد و محتوای نظریه‌ی مجموعه‌ای را در برابر محتوای هندسی پررنگ‌تر می‌کند. اما نمونه‌ای از رفتارهای خوب، یا رام، این است که اگر گردایه‌ای از

[۱] tame topology

متشکل از زیرمجموعه‌های شبه‌جبریِ اعداد حقیقی را در نظر بگیریم، با روشهای یادشده، نمی‌توان به مجموعه‌های پیچیده‌تری از مجموعه‌های شبه‌جبری رسید.

دقت کنید که مورد اول از سرکشی‌های نظریه‌ی مجموعه‌ای است و مورد دوم از نوع خوشرفتاری هندسی؛ و من در اینجا می‌خواهم درباره‌ی مورد دوم صحبت کنم. بحث را با مقدماتی جبری پی می‌گیرم.

منظور از یگ چندگونای جبری، مجموعه‌ی ریشه‌های مشترک یک تعداد چندجمله‌ای است. در زیر با $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط را نشان داده‌ایم.

تعریف ۱. مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{C}^n$ را یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی می‌نامیم هرگاه ترکیبی بولی از مجموعه‌های به صورت زیر باشد:

$$\{\bar{x}|f(x)=0\}$$

که در آن $f(\bar{x}) \in \mathbb{C}[\bar{X}]$ یک چندجمله‌ای چندمتغیره است.

مجموعه‌های ساخته‌شدنی در واقع مجموعه‌های به شکل زیر هستند:

$$\{x \in K^n : \phi(\bar{x})\}$$

که در آن ϕ یک فرمول بدون سور در زبان میدانهاست. واضح است که مجموعه‌های ساخته‌شدنی تحت ترکیبات بولی بسته هستند. بنابراین استفاده از ترکیبات بولی، بر پیچیدگی نوع مجموعه‌ها نمی‌افزاید. اما چیزی فراتر از این هم درست است. این کلاس، تحت تصویر کردن مجموعه‌ها نیز بسته است.

قضیه ۲ (قضیه‌ی شوالی)**.** هر تصویری از یک مجموعه ساخته‌شدنی ساخته‌شدنی است. به بیان دیگر اگر $X \subseteq \mathbb{C}^{nm}$ یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی باشد، آنگاه تصویرِ X روی $\mathbb{C}^n$ یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی است.

دقت کنید که اگر $X \subseteq \mathbb{C}^{nm}$ یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی باشد آنگاه بنا بر آنچه در بالا گفته شد:

$$X = \{(x,y)|\phi(x,y)\}$$

که ϕ یک فرمول بدون سور است. تصویرِ X روی C^n به صورت زیر است:

$$\pi_{C^n}(X) = \{x \in \mathbb{C}^n | \exists y \in \mathbb{C}^m \quad \phi(x,y).\}$$

توجه ۳ (تارسکی)**.** تئوری کامل میدان اعداد مختلط (در زبان $L = \{\pm, \cdot, 0, 1\}$ سورها را حذف می‌کند؛ یعنی هر فرمول در این تئوری دارای یک فرمول معادلِ بدون سور است.

بنا به قضیه‌ی بالا، تصویر یادشده از یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی، با یک فرمول بدون سور نیز قابل تعریف است؛ پس این تصویرْ یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی است. پس قضیه‌ی تارسکی در بالا، حاوی همه‌ی اطلاعات جبری لازم درباره‌ی ثباتِ مجموعه‌های ساخته‌شدنی است. این قضیه کاربردهای جبری فراوانی دارد که یکی از آنها امکان ارائه‌ی اثباتی ساده برای قضیه‌ی ریشه‌های هیلبرت است که البته مجال پرداختن بدان در این سخنرانی نیست.

به موازات جبر و هندسه‌ی جبری مختلط، جبر و هندسه‌ی جبری حقیقی نیز جریان دارد. در زیر به متناظرِ مجموعه‌های ساخته‌شدنی در اعداد حقیقی پرداخته‌ایم.

تعریف ۴. مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ را شبه‌جبری می‌نامیم هرگاه ترکیبی بولی از مجموعه‌های به صورت زیر باشد:

$$\{\bar{x} | f(\bar{x}) > ۰\}$$

که در آن $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ یک چندجمله‌ای است.

واضح است که کلاس مجموعه‌های شبه‌جبری تحت ترکیبات بولی بسته است و از آن نیز بیشتر:

قضیه ۵. هر تصویری از یک مجموعه‌ی شبه‌جبری، مجموعه‌ای شبه‌جبری است.

خواننده باید به شباهت با حالت قبل پی برده باشد: مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ شبه‌جبری است اگروتنهااگر در ساختارِ $\bar{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, ۰, ۱, <)$ بدون سور تعریف شود. پس قضیه‌ی بالا، از قضیه‌ی نظریه‌ی مدلی زیر نتیجه می‌شود:

توجه ۶ (بیان نظریه‌ی مدلی قضیه‌ی تارسکی)**.** ساختار ترتیبی میدان اعداد حقیقی سورها را حذف می‌کند.

بیایید صورت «چندگوناها»ی بالا را تعمیم دهیم:

تعریف ۷.

- مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ را شبه‌تحلیلی [۲] می‌نامیم هرگاه برای هر $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ یک همسایگیِ $\bar{a} \in U_{\bar{a}}$ موجود باشد به طوری که $X \cap U_{\bar{a}}$ به صورت ترکیبی بولی از مجموعه‌هایی به صورت زیر قابل نوشتن باشد:

$$\{\bar{x} \in U_a | f(\bar{x}) > ۰\}$$

که در آن $f(\bar{x})$ یک تابع تحلیلی چندمتغیره است.

- مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ را زیرتحلیلی [۳] می‌نامیم هرگاه برای هر $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ یک همسایگیِ $U_{\bar{a}}$ از $\bar{a}$ موجود باشد به طوری که $X \cap U_{\bar{a}}$ تصویر یک مجموعه‌ی شبه‌تحلیلی باشد.

کلاس مجموعه‌های زیرتحلیلی تحت اجتماع و اشتراک و تصویرگیری بسته است؛ اما بسته بودن تحت متمم‌گیری قضیه‌ای دشوار است.

قضیه ۸ (گابرلیف)**.** متمم یک مجموعه‌ی زیرتحلیلی، زیرتحلیلی است.

برای بیان صورت نظریه‌ی مدلی قضیه‌ی بالا، ساختارِ

$$\mathbb{R}_{an} = (\mathbb{R}, \{f\}_{f \in F})$$

را در نظر بگیرید که در آن F مجموعه‌ی همه‌ی جرم همه‌ی توابع تحلیلی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ است (که در آن n متغیر است). به راحتی می‌توان دید که مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ شبه‌تحلیلی است اگروتنهااگر

$$\bar{B}_n^r \cap X$$

[۲] semianalytic
[۳] subanalytic

برای هر $r \in \mathbb{R}$ در ساختارِ $\mathbb{R}_{an}$ بدون سور تعریف شود؛ که در آن

$$\bar{B}^r_n = \{(x_۱, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq r\}.$$

حال اطلاعات بالا درقضیه‌ی زیر خلاصه می‌شوند:

توجه ۹ (صورت نظریه‌ی مدلی، دنف و ون‌دن‌دریز)**.** ساختار $\mathbb{R}_{an}$ مدل‌کامل است؛ یعنی هر فرمول در تئوری این ساختار دارای یک معادل است که تنها با سور وجودی نوشته می‌شود.

دقت کنید که صورت خلاصه‌ی بالا حاوی همه‌ی اطلاعات مربوط به ثبات چندگوناهای تحلیلی است.

در قضیه‌ی بالا با جرم توابع تحلیلی سروکار داشتیم. در زیر تابع نمائی را به صورت نامحدود در نظر گرفته‌ایم و مشابه تعاریف بالا را آورده‌ایم.

تعریف ۱۰. مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ را شبه‌جبری‌نمائی می‌نامیم هرگاه ترکیبی بولی از مجموعه‌هائی به صورت زیر باشد:

$$\{\bar{x}|f(\bar{x}) > ۰\}$$

که در آن f یک چندجمله‌ی نمائی است؛ بدین معنی که $f = f(x_۱, \ldots, x_n, e^{x_۱}, \ldots, e^{x_n})$ که $f(x, y) \in \mathbb{R}[X, Y]$. همچنین X را زیرشبه‌جبری‌نمائی می‌نامیم هرگاه تصویر یک مجموعه‌ی شبه‌جبری‌نمائی باشد.

قضیه ۱۱. متمم یک مجموعه‌ی زیرشبه‌جبری نمائی، زیرشبه‌جبری نمائی است.

برای بیان محتوای منطقی قضیه‌ی بالا ساختارِ معروفِ

$$\mathbb{R}_{exp} = (\mathbb{R}, +, \cdot, ۰, ۱, \exp)$$

را در نظر می‌گیریم. هر مجموعه‌ی شبه‌جبری‌نمائی توسط یک فرمول بدون سور در این ساختار قابل تعریف است. محتوای قضیه‌ی بالا در یک قضیه‌ی نظریه‌مدلی به صورت زیر خلاصه می‌شود.

توجه ۱۲ (محتوای منطقی)**.** در ساختار میدان اعداد حقیقی به همراه تابع نمائی هر فرمول دارای یک معادل وجودی است.

در سه ساختارِ $\bar{\mathbb{R}}$ و $\mathbb{R}_{an}$ و $\mathbb{R}_{\exp}$ شباهتی میان ویژگی‌های الگوی مجموعه‌های تعریف‌پذیر وجود دارد که این شباهت از یک ویژگی مشترک ناشی می‌شود. این ویژگی که توسط پیلی و استاینهورن [۴] مشاهده شده است این است که هر زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}$ که با استفاده از توابع در ساختارهای یادشده ایجاد شود، اجتماعی از بازه‌ها و نقطه‌هاست و همین ویژگی ساده است که سایر خوش‌رفتاریهای بعدی را نتیجه می‌دهد. نامی که برای این ویژگی انتخاب شده است، کمینگی ترتیبی [۵] است و در بخش بعدی مفصل‌تر بدان پرداخته‌ام.

[۴] Pillay, Steinhorn

[۵] o-minimality

۳ تئوریهای کمینه‌ی ترتیبی

ساختارِ مرتبه‌ی اول $(M, <, \dots)$ را کمینه‌ی ترتیبی می‌نامیم هرگاه هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر (با پارامتر) از M اجتماعی متناهی از بازه‌های باز و نقطه‌ها باشد. به بیان دیگر، ساختار M زمانی کمینه‌ی ترتیبی است که هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر از M را بتوان تنها با استفاده از نمادهای $\{=, <\}$ در زبان تعریف کرد. دقت کنید که این ویژگی در تئوریِ کامل ساختارِ M محفوظ است؛ به بیان دیگر اگر N یک Lساختارِ دیگر باشد و $M \equiv N$ (یعنی دو ساختار یادشده، هم‌ارز مقدماتی باشند)، آنگاه N نیز کمینه‌ی ترتیبی است (این گفته، بدیهی نیست و نیاز به اثبات دارد).

هر سه ساختاری که پیش از شروع این قسمت به آنها اشاره شد، کمینه‌ی ترتیبی هستند. اثبات کمینگی ترتیبی هر کدام با استفاده از مطالعه‌ی دقیق جبر این ساختارها (حذف سور) صورت می‌گیرد.

۱.۳ ویژگی‌های عمومی

توجه ۱۳. به طور کلی میدان مرتبِ M کمینه‌ی ترتیبی است اگروتنهااگر با میدان مرتب اعداد حقیقی از نظر منطقی معادل مقدماتی باشد.

شرط ساده‌ای که برای زیرمجموعه‌های تعریف‌پذیرِ M در تعریف کمینگی ترتیبی آمده است، زیرمجموعه‌های تعریف‌پذیرِ M^n برای $n \in \mathbb{N}$ را با استفاده از توابع تعریف‌پذیر در ساختار، مشخص می‌سازد. پیش از توضیح بیشتر، نیاز به تعریف مفهوم سلول است.

یک زیرمجموعه از M را یک سلول می‌نامیم هرگاه یک بازه‌ی باز یا یک نقطه باشد. اگر $C \subseteq M^n$ یک سلول باشد آنگاه سلولها در M^{n+1} به صورت زیر هستند.

اگر $f, g : C \to M$ توابع تعریف‌پذیر پیوسته باشند به طوری که روی C داشته باشیم $f < g$ آنگاه مجموعه‌ی زیر یک سلول در $\mathbb{R}^{n+1}$ است:

$$\{(x, y) : x \in C, y \in M, f(x) < y < g(x)\}.$$

در عبارت بالا $\leq$ نیز می‌تواند جایگزینِ $<$ شود؛ توابع f, g می‌توانند برابر باشند و ممکن است (برای خلاصه‌سازیِ نمادها) f یا g برابر با $\pm\infty$ باشند.

قضیه ۱۴ (تجزیه‌ی سلولی)**.** هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر از M^n اجتماعی متناهی از سلولهاست.

پس زیرمجموعه‌های تعریف‌پذیر از $\mathbb{R}^n$ در ساختار میدانی مرتبِ $\mathbb{R}$ سلولهائی هستند که در آنها از توابع شبه‌جبری (به طور خاص چندجمله‌ها) استفاده می‌شود؛ زیرمجموعه‌های تعریف‌پذیر از $\mathbb{R}^n$ در ساختارِ $\mathbb{R}_{an}$ متشکل از سلولهائی هستند که با استفاده از توابع تحلیلی تعریف می‌شوند؛ و زیرمجموعه‌های تعریف‌پذیر از $\mathbb{R}^n$ در ساختارِ $\mathbb{R}_{\exp}$ متشکل از سلولهائی هستند که با استفاده از چندجمله‌ای‌های نمائی تعریف می‌شوند. در زیر چند ویژگی مهم دیگر از تئوریهای کمینه‌ی ترتیبی را فهرست‌وار آورده‌ام.

قضیه ۱۵ (همنوائی)**.** اگر $f : M \to M$ تعریف‌پذیر باشد آنگاه عناصرِ

$$a_{۰} = -\infty < a_{۱} < \ldots < a_n < a_{n+۱} = \infty$$

در M موجودند به طوری که در هر بازه‌ی $(a_i, a_{i+۱})$ تابع f پیوسته و اکیداًیکنوا است.

قضیه ۱۶ (ویژگی تناهی یکنواخت)**.** اگر $\phi(\bar{x}, y)$ یک فرمول باشد، آنگاه عدد $k \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که برای هر $\bar{a} \in M^n$ مجموعه‌ی $\phi(M, \bar{a})$ اجتماع حداکثر k بازه (باز یا بسته) است. در ابعاد بالاتر هم این قضیه برقرار است و بیانگر این است که تعداد سلولهای موجود در تجزیه حداکثر k است.

قضیه ۱۷ (توابع اسکولم تعریف‌پذیر)**.** اگر $(M, <, +, ۰, \lambda, \ldots)$ یک ساختار کمینه‌ی ترتیبی باشد به طوری که $(M, < .+, ۰)$ یک گروه آبلی مرتب باشد و λ عنصری ناصفر در M باشد، آنگاه برای هر مجموعه‌ی تعریف‌پذیرِ $A \subseteq M^{n+m}$ یک تابع تعریف‌پذیرِ $f : M^n \to M^m$ موجود است به طوری که

$$\forall a \in M^n \quad \big((\exists b \in M^m (a, b) \in A) \leftrightarrow (a, f(a)) \in A\big)$$

قضیه ۱۸. اگر M یک بسط کمینه‌ی ترتیبی از ساختار میدان مرتب اعداد حقیقی باشد، از دو خارج نیست: یا همه‌ی توابع تعریف‌پذیرش توسط چندجمله‌ای‌ها کراندارند؛ یا تابع نمائی در آن تعریف می‌شود.

قضیه ۱۹ (انتخاب خم)**.** فرض کنید که $(M, +, <, \ldots)$ بسطی کمینه‌ی ترتیبی از یک گروه مرتب باشد، و $X \subseteq M^n$ یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر باشد و $y \in \bar{X} - X$. آنگاه یک تابعِ تعریف‌پذیر پیوسته‌ی

$$\gamma : (۰, a) \to X$$

موجود است به طوری که

$$\lim_{t \to ۰} \gamma(t) = y.$$

۴ ویژگی‌های مهمتر

۱.۴ بُعد

یکی از مهمترین ویژگی‌های تئوری کمینه‌ی ترتیبی این است که مدلهای آنها دارای بُعدِ خوش‌تعریف هستند.

قضیه ۲۰. فرض کنید که M توسیع یک گروه آبلی باشد. آنگاه برای هر $S \subseteq M$ تعریف کنید:

$$dcl(S) = \{f(s_{۱}, \ldots, s_n) : n \geq ۰, n \in \mathbb{N}, s_{۱}, \ldots, s_n \in S, \text{ تعریف‌پذیراست } f\}$$

آنگاه dcl یک شبه‌هندسه روی M است. برای هر $S \subseteq M$ تعریف می‌کنیم

$$\dim S = \max\{|I| : I \subseteq S, \text{ مستقل است. } dcl \text{ یک مجموعه‌ی } I\}$$

همچنین برای هر $S \subseteq M^n$ تعریف می‌کنیم

$$\dim S = \max \dim\{s_۱, \ldots, s_n\} : (s_۱, \ldots, s_n) \in M^n\}$$

در این صورت بعدِ S دقیقا همان بُعدِ توپولوژیکِ S است؛ یعنی بعد بزرگترین زیرمجموعه‌ی باز آن.

فرض کنید $S \subseteq \mathbb{M}^{m+n}$ یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر باشد. برای هر $x \in M^m$ قرار دهید

$$S_x = \{y \in M^n : (x, y) \in S\}$$

خانواده‌ی $C = (S_x)_{x \in M^m}$ را یک خانواده‌ی تعریف‌پذیر مجموعه‌ها می‌نامیم. بنا به قضیه‌ی تجزیه‌ی سلولی (به بیان بهتر، قضیه‌ی تناهی یکنواخت) تعداد سلولهائی که هر S_x بدانها تجزیه می‌شود یکنواخت است و تنها به فرمولِ ϕ بستگی دارد. به طور خاص برای هر $d \in \{۰, ۱, \ldots, n\}$ مجموعه‌ی

$$S(d) = \{x \in M^m : dim(S_x) = d\}$$

یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر است و

$$\dim\{(x, y) \in S : \dim(S_x) = d\} = \dim(S(d)) + d.$$

۲.۴ وی‌سی‌بُعد

خانواده‌ی S در پایان قسمت قبلی را در نظر بگیرید. برای هر زیرمجموعه‌ی متناهیِ $F \subseteq M^n$ تعریف کنید

$$F \cap C = \{F \cap S_x\}_{x \in M^m}$$

حال تابعِ $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$g(k) = \max\{|F \cap C| : \text{ یک مجموعه‌ی } k \text{ عضوی است } F\}$$

آنگاه تابعِ g توسط دارای رشد چندجمله‌ای است. به طور خاص، خانواده‌ی C دارای وی‌سی‌بُعدِ متناهی است؛ یعنی عددِ $k \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که

$$g(k) \neq ۲^k.$$

۳.۴ ارزیابی استاندارد

روی توسیعهای کمینه‌ی ترتیبی اعداد حقیقی یک نگاشت ارزیابی قابل تعریف است. یک ویژگی از این ارزیابی، که به نامساوی ویلکی معروف است، در اثبات کمینگی ترتیبی ساختارِ $\mathbb{R}_{\exp}$ نقش بسیار مهمی بازی می‌کند.

فرض کنید که $\tilde{\mathbb{R}}$ یک توسیع کمینه‌ی ترتیبی از $\bar{\mathbb{R}}$ باشد و $M \equiv \tilde{\mathbb{R}}$. مجموعه‌های عناصر متناهی و بی‌نهایت‌کوچک به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Fin(M) = \{a \in M : \exists N \in \mathbb{Q} \quad |a| < N\}$$

$$\mu(M) = \{a \in M : \forall q \in \mathbb{Q}_{>}. \quad |a| < q\}$$

$Fin(M)$ یک حلقه‌ی موضعی است و $\mu(M)$ ایده‌آل ماکزیمال آن است. در واقع ایندو حلقه‌ی ارزیاب و ایده‌آل ماکزیمال مربوط بدان در ارزیابی زیر هستند.

دو عنصرِ x, y را هم‌کلاسِ ارشمیدسی بنامید هرگاه

$$\frac{x}{y}, \frac{y}{x} \in Fin(M)$$

در این صورت نگاشتی که هر عنصر را به «کلاس ارشمیدسی» آن می‌برد یک ارزیابی است. گروه متشکل از همه‌ی کلاسهای ارشمیدسی را با Γ و بُعدِ میدان پیمانه‌ها را با $resdim(M)$ نشان داده‌ایم. نامساوی‌های زیر به نامساوی ویلکی مشهورند.

قضیه ۲۱. فرض کنید $\tilde{\mathbb{R}}$ تقلیلی از $\mathbb{R}_{an}$ باشد که $\mathbb{R}$ را توسیع می‌دهد. در این صورت برای هر $M \equiv \tilde{\mathbb{R}}$ که $\dim(M)$ متناهی است، داریم

$$\dim(M) \geq resdim(M) + \dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma).$$

و اگر $\dim_{M.}(M)$ متناهی باشد، آنگاه

$$\dim_{M.}(M) \geq resrank_{M.} M + \dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma/\Gamma.).$$

۵ محتوای دیوفانتی چندگوناها و یک قضیه‌ی مُرْدِلیک درباره‌ی ساختارهای کمینه‌ی ترتیبی

این که نظریه‌ی مدل زبانی زیبا و سودمند برای جبر مهیا می‌کند شاید جای اختلاف نباشد؛ اما این که سهم نظریه‌ی مدل در پیشرفت جبر و یا اثباتهای جبری چقدر است، جای بحث دارد. اثبات هراشوفسکی برای تعمیمی از قضیه‌ی مُردل ـ لَنگ در هندسه‌ی جبری، معمولاً حجت منطقدانان در مواجهه با این سوال است. قضایای مردل ـ لنگ را معمولا در صفحات آخرین کتابهای هندسه‌ی جبری می‌توان جستجو کرد، و فهم آنها نیازمند آشنائی عمیق با هندسه‌ی جبری است؛ با این حال در این بخش کوشیده‌ام تا معرفی‌ای اجمالی از آنها داشته باشم. ربط این موضوعات به تئوری‌های کمینه‌ی ترتیبی، قضیه‌ی پیلا و ویلکی درباره‌ی تعداد نقاط گویای مجموعه‌های تعریف‌پذیر در ساختارهای کمینه‌ی ترتیبی است که در پایان این قسمت بدان اشاره شده است.

همان گونه که در بخش اول دیدیم چندگوناهای جبری از مفاهیم مورد علاقه در جبر و هندسه‌ی جبری هستند. این اشیاء، دارای اهمیت جبری هستند، زیرا با چندجمله‌ایها تعریف می‌شوند؛ دارای اهمیت توپولوژیک هستند زیرا توپولوژی زاریسکی را تعریف می‌کنند؛ و دارای اهمیت در نظریه‌ی اعداد هستند؛ زیرا در نظریه‌ی اعداد، یکی از موضوعات مورد علاقه، دانستن تعداد نقاط با مختصات گویای خمها یا جبری یا چندگوناهای جبری است. در واقع یافتن تعداد پاسخهای صحیح (یا گویای) معادلات دیوفانتی، یعنی معادلاتی با ضرایب در اعداد گویا، از موضوعات

بسیار قدیمی در ریاضیات است. مثلاً قضیه‌ی فرما درباره‌ی یافتن نقاط صحیح مثبت صادق در معادله‌ای به صورت $x^n + y^n = z^n$ است. در ادامه‌ی این بخش نخست به بیان قضایای معروف در این زمینه در هندسه‌ی جبری می‌پردازم و در پایانِ آن سهم نظریه‌ی مدل در این اثباتها را بیان می‌کنم. سپس به موضوعی متناظر در ساختارهای کمینه‌ی ترتیبی، یعنی موضوع تعداد نقاط گویای مجموعه‌های شبه‌جبری خواهم پرداخت.

منظور از یک میدان عددی میدانی شامل $\mathbb{Q}$ است که بُعدِ آن روی $\mathbb{Q}$ به عنوان یک فضای برداری متناهی است. منظور از یک خم جبری، مجموعه‌ی ریشه‌های یک چندجمله‌ی دومتغیره است. تعریف دقیق گونای یک خم در حوصله‌ی این یادداشت نمی‌گنجد؛ تعبیر هندسی گونا (برای خمهای با ویژگی‌های مطلوب)، تعداد حفره‌ها یا دسته‌های (دسته به معنی محل قرار دادن دست) یک خم است.

قضیه ۲۲ (سیگل، ۱۹۲۰)**.** هر خم آفینِ دارای گونای $g \geq 1$ دارای تعداد متناهی نقطه‌ی صحیح است.

توجه کنید که یک چندگونای آبلی، یک چندگونای تصویری است که همزمان یک گروه جبری است؛ و یک گروه جبری یک منیفلد است که دارای اعمال ضرب و وارونی است که مرفیسمهای منیفلدی هستند.

قضیه ۲۳ (مُرْدِل و وِیْل)**.** اگر A یک چندگونای آبلی روی یک میدان عددیِ K باشد، آنگاه گروه $A(K)$، متشکل از نقاط Kگویای A، متناهیاًتولیدشده است.

حدس ۲۴ (حدس مُرْدِل ۱۹۲۲، اثبات شده توسط فالتینگ، ۱۹۸۳)**.** فرض کنید که F یک میدان عددی باشد و X یک خم تصویری با گونای اکیداً بزرگتر از ۱ باشد. آنگاه X دارای تنها تعداد متناهی نقطه‌ی F گویا است.

از آنجا که یک خم با گونای ۱ یک خم بیضوی است، حدس مردل را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد.

حدس ۲۵ (مُردِل)**.** فرض کنید که A یک چندگونای آبلی در $\mathbb{C}$ باشد و X یک منحنی در $\mathbb{C}$ باشد که در A نشانده شده است و G یک زیرگروه متناهیاًتولیدشده از A باشد. آنگاه یا X یک خم بیضوی است یا $X \cap G$ متناهی است.

حدس ۲۶ (منین و مانفورد)**.** فرض کنید که A یک چندگونای آبلی در $\mathbb{C}$ باشد و X یک خم نشانده شده در آن باشد و $G = tor(A)$ گروه تابی A باشد. آنگاه X یا یک خم بیضوی است یا $X \cap G$ متناهی است.

گروه G را از نوع متناهی می‌نامیم هرگاه دارای یک زیرگروه متناهیاً تولیدشده‌ی S باشد به طوری که برای هر $g \in G$ عدد طبیعی m موجود باشد به طوری که $mg \in S$.

حدس ۲۷ (مُردِل و لَنگ، تعمیم دو حدس بالا)**.** فرض کنید که A یک چندگونای آبلی در $\mathbb{C}$ باشد و X یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی از A باشد و G یک زیرگروه با نوع متناهی از A باشد آنگاه $X \cap G$ اجتماعی متناهی از هم‌مجموعه‌های زیرگروههای G است.

تعمیم ۲۸ (تعمیمی از همه‌ی قضیه‌های بالا)**.** فرض کنید $K_0 \subseteq K_1$ میدانهای بسته‌ی جبری باشند. فرض کنید که A یک چندگونای آبلی روی K باشد که هیچ زیرچندگونای آبلی‌ای نداشته باشد که با چندگونائی آبلی روی K_0 ایزومرف باشد. همچنین فرض کنید که X یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی از A باشد و G یک زیرگروه از A با نوع متناهی باشد. در این صورت $X \cap G$ اجتماعی متناهی از هم‌مجموعه‌های زیرگروههای G است.

تعمیم بالا برای مشخصه‌ی صفر توسط بویم [۶] و برای مشخصه‌ی دلخواهِ متناهی توسط هراشوفسکی [۷] ثابت شده است. اثبات هراشوفسکی، مرتبط با نظریه‌ی مدل میدانهای بسته‌ی دیفرانسیلی است؛ و هم از نظر جبری و هم از نظر منطقی بسیار غنی است.

اما در ادامه، به «قضیه‌ای مُردلیک»، یعنی قضیه‌ای در بافتارِ قضایای بالا، در ساختارهای کمینه‌ی ترتیبی پرداخته‌ام. پیلا و ویلکی [۸] ثابت کرده‌اند که اگر $X \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای تعریف‌پذیر در یک ساختار کمینه‌ی ترتیبی روی $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه تعداد نقاط گویایی از X که در یک زیرمجموعه‌ی شبه‌جبری خاص واقع نیستند، به تعبیری، کم است.

قضیه ۲۹ (پیلا، ویلکی)**.** فرض کنید که $X \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر باشد و $\epsilon > ۰$. آنگاه ثابتِ $c(X,\epsilon)$ چنان موجود است که

$$N(X - X^{alg}, T) \leq c(X,\epsilon)T^{\epsilon}.$$

در قضیه‌ی بالا $N(X,T)$ تعداد نقاط با مختصات گویا با ارتفاعِ حداکثر T است. به بیان دقیق‌تر: $N(X,T) = |X(\mathbb{Q},T)|$ و

$$X(\mathbb{Q},T) = \{P : \text{ گویاست } p \text{ مختصات } , H(P) \leq T\}$$

همچنین $H(\frac{a}{b}) = \max(|a|,b)$ در صورتی که $(a,b) = ۱$ و $H(\alpha_۱,\ldots,\alpha_n) = \max(H(\alpha_i)$. همچنین X^{alg} اجتماع همه‌ی زیرمجموعه‌های همبندِ شبه‌جبریِ X است.

۶ بررسی یک کاربرد در هوش مصنوعی

فرض کنید که S یک خانواده از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی X باشد. همان گونه که در بخشهای قبلی تعریف کردیم، مشابه آنچه در بخشهای قبلی دیدیم، می‌گوییم که S دارای vcبُعدِ متناهی است هرگاه $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که برای یک زیرمجموعه‌ی n عضویِ $Y \subseteq X$ داشته باشیم

$$P(Y) \neq \{Y \cap s : s \in S\}.$$

تئوری مرتبه‌ی اول T را وابسته می‌خوانیم هرگاه هر خانواده‌ی تعریف‌پذیرِ نامتناهی به صورت $\{\phi(M,\bar{a})\}_{\bar{a}\in A}$ دارای vcبُعدِ متناهی باشد.

قضیه ۳۰. هر تئوریِ کمینه‌ی ترتیبی، وابسته است.

اثبات قضیه‌ی بالا با استفاده از شمارش تعداد شریک‌ارثها بسیار ساده است؛ با این حال اثبات مستقیمی برای آن نیز در کتاب ون‌دن‌دریز نوشته شده است.

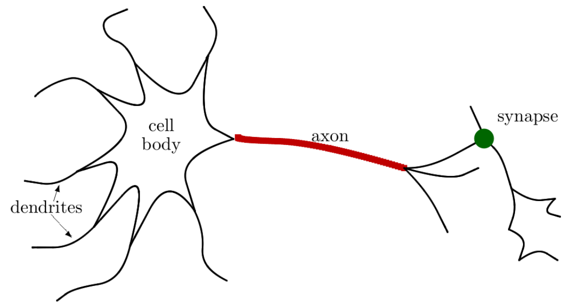
در ادامه به تعریف شبکه‌ی عصبی مصنوعی خواهم پرداخته‌ام. در شکل زیر، یک نورون، یا یاخته‌ی عصبی (طبیعی!) نشان داده شده است.

---

[۶] Buium

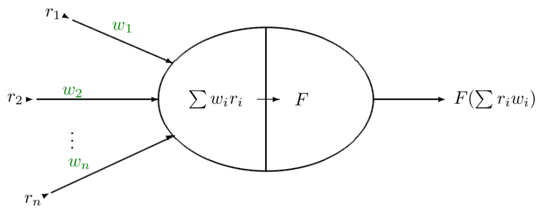
[۷] Hrushovski

[۸] Pila, Wilkie



سیگنالهای عصبی توسط شاخک‌ها (دندریتها) دریافت می‌شوند. بدنه‌ی سلول با استفاده از این ورودی‌ها، یک سیگنال به آکسون می‌فرستد که این سیگنال، از آنجا به صورت سیگنالی محرک به شاخک‌های سلولهای عصبی مجاور منتقل می‌شود.

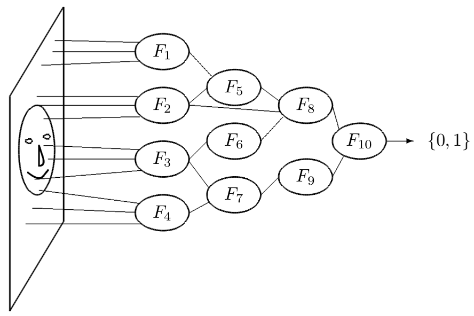
در یک نورن مصنوعی هم از همین ایده استفاده می‌شود: [۹]



اعداد حقیقیِ r_i به عنوان ورودی وارد می‌شوند، به هر کدام یک وزنِ w_i داده می‌شود و حاصل $\sum w_i r_i$ محاسبه می‌شود. دقت کنید که وزنهای w_i قابل تغییر هستند. سپس تابعِ فعالسازی F به $\sum w_i r_i$ اعمال می‌شود.

پس به بیان ریاضی، یک نورون مصنوعی، یک خانواده H از توابعِ $\bar{r} \mapsto F(\sum r_i w_i)$ است. دقت کنید که آنچه موجب ایجاد یک خانواده از توابع شده است، وزنهای مختلفی است که به ورودی‌ها داده می‌شود.

یک شبکه‌ی عصبی خانواده‌ای از نورونهای عصبیِ متصل به همدیگر است:



فرض کنید که X ورودی شبکه‌ی عصبی ما باشد. در شکل بالا این ورودی زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۲ \times \{۰, \dots, ۲۵۵\}$ است که متشکل از مختصات نقاط و ارزش رنگی آنها، یعنی شماره‌ی آرجی‌بیِ آنهاست. خروجی شبکه‌ی بالا عددی در مجموعه‌ی $\{۰, ۱\}$ است. در واقع اگر شبکه‌ی عصبی بالا چهره را درست تشخیص دهد خروجی ۱ و در غیر این صورت خروجی ما صفر است. شبکه‌ی بالا، با استفاده از همه‌ی توابع فعالسازی به کار رفته در تک تک سلولها، یک کلاسِ H از توابعِ از $X \to Y$ را محاسبه می‌کند. پس این شبکه‌ی عصبی، و به طور کلی هر شبکه‌ی عصبی، در تناظر با یک خانواده از توابع است.

[۹] عکسها از یادداشتهای مارکس ترسل برداشته شده است.

شبکه‌ی عصبی بالا، یک سری ورودی تمرینیِ (x, y) به صورت تصادفی دریافت می‌کند و هر بار با توجه به این که $h(x) = y$ یا نه، وزنهای توابع خود را تغییر می‌دهد. هدف این است که شبکه‌ی بالا پس از دریافت تعداد کافی ورودی آموزشی، بتواند به یک تابعِ h برسد که این تابع برای تشخیص خروجی، با دقت مناسبی، مناسب باشد. در این صورت، خانواده‌ی H از توابع مربوط به این شبکه را قابل یادگیری می‌نامیم. تعریف دقیق قابل یادگیری بودن نیاز به تعریف یک اندازه‌ی احتمالاتی است که بیان آن در این سخنرانی نمی‌گنجد. خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند این تعریف را در منابع معرفی شده در پایان این یادداشت بیابد. با این حال قابل یادگیری بودن با متناهی بودنِ بعدِ وی‌سی معادل است:

قضیه ۳۱. H قابل یادگیری است اگروتنهااگر خانواده‌ی

$$\{h^{-1}(1) | h \in H\}$$

دارای vcبُعدِ متناهی باشد.

نتیجه ۳۲. اگر H یک خانواده از توابع تعریف‌پذیر در یک بسط کمینه‌ی ترتیبی از $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه H قابل یادگیری است. به طور خاص اگر H در $\mathbb{R}_{an,\exp}$، یعنی ساختار اعداد حقیقی به همراه تمام توابع تحلیلی محدودشده و تابع نمائی نامحدود، یک خانواده‌ی تعریف‌پذیر باشد، قابل یادگیری است.

۷ معرفی منابع برای مطالعه‌ی بیشتر

برای بخش دوم، منابع زیر را پیشنهاد می‌کنم. روی لینکها کلیک کنید.

۱. برای آشنائی کامل با ساختارِ $\mathbb{R}_{an}$، محتویات کلاسی از خودم در دانشگاه صنعتی اصفهان به این آدرس.

۲. مقاله‌ی اصلی دنف و وِن‌دن‌دریز

۳. مقاله‌ی ویکلی (ترجمه)

۴. کتاب دیوید ماکر، فصل سوم

برای فصل سوم و چهارم منابع زیر را معرفی می‌کنم:

۱. کتاب وِن‌دن‌دریز

۲. یادداشتهای ترسل

۳. یادداشتهای مکفرسون

۴. سخنرانی ویلکی در کنفرانس چترارو

۵. یادداشتهای خودم در کلاس نظریه‌ی مدل جبری (موجود در وبسایت درسهایم).

برای فصل پنجم منابع زیر را پیشنهاد می‌کنم.

۱. کتاب درآمدی بر نظریه‌ی مدل جدید و کلاسیک

۲. نظریه‌ی مدل و هندسه‌ی جبری

۳. هندسه‌ی دیوفانتی

۴. خمهای بیضوی

۵. مقاله‌ی پیلا و ویکلی

و برای بخش ششم منابع زیر را پیشنهاد می‌کنم.

۱. یادداشتهای ترسل

۲. یادگیری در شبکه‌های عصبی