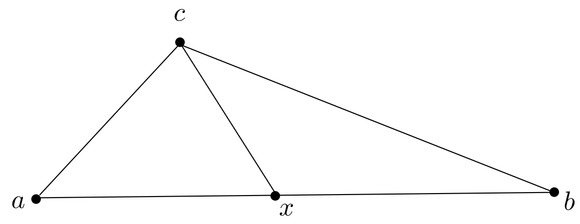
# ترتیب در صفحه‌های آفین و تصویری

بخش گسترده‌ای از ریاضیات نوین به ویژه آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها بر پایه‌ی ویژگی ترتیب در فضای اقلیدسی بنا شده است. برای درک اهمیت ترتیب به ویژه در هندسه به بررسی مفهوم سطح یک مثلث می‌پردازیم. یک مثلث به طور شهودی با سه نقطه‌ی متمایز و ناهم خط $a, b, c$ مشخص می‌شود. اگر فضای مورد نظر دارای ترتیب باشد می‌توان پاره‌خط‌های $[a, b], [b, c], [a, c]$ را نیز تعریف کرد. برای مثال می‌توان نوشت $[a, b] = \{x \in \overline{a, b} \mid a \leq x \leq b\}$. اکنون می‌توان سطح محصور شده به یک مثلث $\triangle(a, b, c)$ را به صورت $\triangle := \cup\{[c, x] : x \in [a, b]\}$ تعریف کرد(شکل ۱).




شکل ۱ سطح یک مثلث.

در هندسه‌ی مقدماتی به کمک مفهوم سطح مثلث مفهوم سطح یک چهارضلعی و سپس سطوح پیچیده‌تر قابل تعریف است. به کمک این روش می‌توان مفهوم مساحت را برای این گونه سطوح بیان کرد. به ویژه به کمک مفهوم انتگرال معین مساحت برای رده‌ی وسیعی از سطوح قابل تعریف است. این بحث قابل تعمیم به فضاهای با بعد بالاتر نیز هست.

با توجه به این‌که مفاهیم حد و مشتق و پیوستگی نیز بر اساس ویژگی ترتیب در اعداد حقیقی قابل بیان است بدون مفهوم ترتیب بخش وسیعی از آنالیز قابل بیان نخواهد بود. حوزه گسترده‌ی دیگری که در ریاضیات جدید مورد توجه قرار دارد میدان‌های محدب هستند. برای این حوزه نیز ترتیب یک ابزار بنیانی است.

گاوس در یکی از نامه‌هایش به بولیایی (پدر) می‌نویسد «در یک بازنویسی مجدد و کامل مبانی هندسه باید واژه‌هایی مانند «بین» به روشنی تعریف شوند و این کار مهم را تاکنون کسی به درستی انجام نداده است.» برای نخستین بار **پاش** مفاهیم وابسته به ترتیب را در کتاب خود « **درس هایی در مبانی هندسه‌ی جدید** » در سال ۱۸۸۲ مطرح کرد. به منظور درک ایده‌های پاش یادآوری می‌کنیم که گزاره‌های زیر بنابر برداشت شهودی ما بدیهی هستند.

۱) برای هر سه نقطه‌ی واقع بر یک خط همیشه یکی بین دوتای دیگر واقع است.

۲) برای هر دو نقطه‌ی متمایز $a$ و $b$ همواره نقطه‌ی $c$ واقع بر خط شامل چ $a$ و $b$ وجود دارد که $b$ بین $a$ و $c$ است و یک نقطه‌ی $d$ وجود دارد که بین $a$ و $b$ واقع است.

پاش برای یک رابطه‌ی سه تایی که آن را **بینیت** نامید به عنوان بنداشت گزاره‌هایی از این نوع را انتخاب کرد. پس از وی هیلبرت بنداشت‌های ترتیب خود را بر اساس بنداشت‌های پاش برای بنیان‌گذاری مبانی

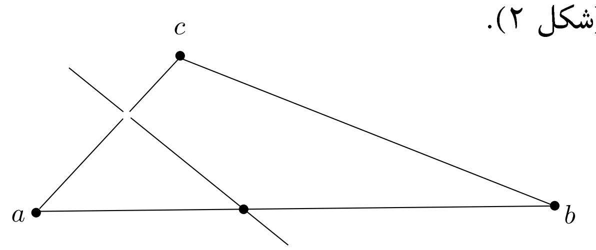
هندسه به کار برد. بر اساس مفهوم وقوع که به وسیله‌ی هیلبرت مطرح شد و بنداشت های ترتیب مفهوم فضای وقوعی مرتب قابل تعریف است. یک فضای وقوعی به معنای هیلبرت را **فضای مرتب** گوییم هرگاه برای هر سه نقطه‌ی این مجموعه، وقوع این نقاط و بینیت این نقاط به قسمی مشخص شده باشد که بنداشت های زیر برقرار باشند:

$(\mathbf{A}_1)$ هرگاه نقطه‌ی $b$ بین نقاط $a$ و $c$ واقع شده باشد آنگاه $a$، $b$ و $c$ سه نقطه‌ی متمایز واقع بر یک خط هستند و $b$ بین $a$ و $c$ واقع است.

$(\mathbf{A}_2)$ برای هر دو نقطه‌ی $a$ و $c$ دست کم یک نقطه‌ی $b \in \overline{a,c}$ وجود دارد که $c$ بین $a$ و $b$ واقع است.

$(\mathbf{A}_3)$ به ازای هر سه نقطه‌ی واقع بر یک خط حداکثر یکی از آنها بین دوتای دیگر واقع است.

$(\mathbf{A}_4)$ ( **بُنداشت پاش** ) فرض کنیم $a$، $b$ و $c$ سه نقطه‌ی غیر هم خط باشند و $A$ خطی در صفحه‌ی شامل نقاط $a$، $b$ و $c$ باشد به قسمی که هیچ یک از نقاط $a$، $b$ و $c$ بر این خط واقع نیستند. در این صورت اگر خط $A$ خط $\overline{a,b}$ را در یک نقطه‌ی بین $a$ و $b$ قطع کند آنگاه یکی از خط‌های $\overline{b,c}$ و $\overline{a,c}$ را هم در یک نقطه‌ی بین $a$ و $c$ یا $c$ و $b$ قطع خواهد کرد(شکل ۲).




شکل ۲ بنداشت پاش.

تعریف هیلبرت برای فضای وقوعی مرتب اساساً سه بعدی است ولی می‌توان یک فضای وقوعی $(P, \mathfrak{G})$ را برای بعد دلخواه نیز تعریف کرد. این مفهوم فقط بر مبنای مفاهیم نقطه و مجموعه خطوط تعریف می‌شود. فرض کنیم $\mathcal{P}$ یک مجموعه‌ی ناتهی باشد که اعضای آن را **نقطه** و $\mathcal{L}$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی توانی $\mathcal{P}$ باشد که اعضای آن را **خط** می‌نامیم. زوج $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ را یک فضای وقوعی می‌نامیم، هر گاه بُنداشت‌های زیر برقرار باشند.

$\mathbf{I}_1$. برای هر $x, y \in \mathcal{P}$ که $x \neq y$، دقیقاً یک خط $G \in \mathcal{L}$ وجود دارد که $x, y \in G$ .

$\mathbf{I}_2$. برای هر $G \in \mathcal{L}$ همواره $|G| \geq 2$ .

برای هر $x, y \in \mathcal{P}$، خط منحصر به فردی را که $\mathbf{I}_1$ مشخص می‌کند با $\overline{x,y}$ نشان می‌دهیم. اگر $x \in G$، اصطلاحاً می‌گوییم $x$ بر خط $G$ واقع است، $x$ نقطه‌ای از $G$ است یا $x$ روی $G$ قرار دارد.

مجموعه‌ای از نقاط مانند $M \subseteq \mathcal{P}$ **هم‌خط** نامیده می‌شوند هر گاه بر یک خط واقع باشند.

اکنون می‌توان یک فضای وقوعی مرتب را به شکل زیر تعریف کرد. فرض کنیم $(P^3)' := \{(a,b,c) \in P^3 | a \neq b, c\}$. همچنین فرض کنیم $\zeta : (P^3)' \to \{-1, 1\}$ یک تابع یک به یک باشد به قسمی که برای آن شرط‌های زیر برقرار هستند (گاهی به جای $\zeta(a,b,c)$ می‌نویسیم $(a|b,c)$ و در حالتی که $(a|b,c) = -1$ می‌گوییم $a$ بین $b$ و $c$ واقع است).

($\mathbf{Z}_1$) برای هر چهار نقطه‌ی هم خط $a,b,c,d$ که $a \neq b,c,d$ داریم:

$$(a|b,c)(a|c,d) = (a|b,d)$$

($\mathbf{Z}_2$) برای هر سه نقطه‌ی متمایز $a,b,c$ دقیقاً یکی از مقادیر $(a|b,c),(b|c,a),(c|a,b)$ برابر با $-1$ است.

($\mathbf{Z}_3$) برای هر دو نقطه‌ی متمایز $a,b$ دست کم یک نقطه‌ی $c$ واقع بر $\overline{a,b}$ وجود دارد که $(b|a,c) = -1$.

($\mathbf{Z}_4$) فرض کنیم $a$، $b$ و $c$ سه نقطه‌ی غیر هم‌خط باشند و $x$ یک نقطه واقع بر **پاره خط باز** $]b,c[:= \{p \in \overline{b,c} | (p|b,c) = -1\}$ باشد. در این صورت اگر $y$ یک نقطه واقع بر پاره خط باز $]a,x[$ باشد آنگاه $\overline{c,y} \cap ]a,b[ \neq \emptyset$.

با این شرایط سه تایی $(P,\mathfrak{G},\zeta)$ یک **فضای وقوعی مرتب** نامیده می‌شود.

بر این اساس **پاره خط بسته‌ی** $[b,c]$، مجموعه‌ی محدب و نیم خط به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[b,c] := ]b,c[ \cup \{b,c\}$$

یک زیرمجموعه‌ی $C$ از $P$ را **محدب** می‌نامیم هرگاه برای هر $a,b$ متعلق به $C$ داشته باشیم $[a,b] \subset C$.
هر زیرمجموعه‌ی $P$ به شکل $\overrightarrow{a,b} := \{x \in \overline{a,b} \mid (a|b,x) = 1\}$ **نیم خط** نامیده می‌شود.

بنابر برداشت شهودی از مفهوم جهت روی خط با مشخص کردن دو نقطه روی آن، یک جهت مشخص می‌شود. بر اساس بنداشت‌های ($\mathbf{Z}_1$) و ($\mathbf{Z}_2$) می‌توان روی هر خط دلخواه $G$ با مشخص کردن دو نقطه‌ی ثابت $1$ ,$0$ متعلق به $G$ دقیقاً یک ترتیب کامل $>$ تعریف کرد به قسمی که $0 > 1$ و داشته باشیم:

$$(x|y,z) = -1 \Longleftrightarrow y < x < z \quad , \quad z < x < y \qquad (*)$$

بنابر بنداشت ($\mathbf{Z}_3$) هر خط دلخواه شامل بی‌نهایت نقطه است. علاوه بر این به کمک یک ترتیب کامل روی یک خط، یک رابطه‌ی بینیت منحصر به فرد مشخص می‌شود که برای آن شرط‌های ($\mathbf{Z}_1$) و ($\mathbf{Z}_2$) و شرط ($*$) برقرار هستند. یک مجموعه‌ی $M$ با یک ترتیب کامل را یک **مجموعه‌ی مرتب** می‌نامیم. در حالتی که فضای وقوعی مرتب $(P,\mathfrak{G},\zeta)$، دو یا سه بعدی باشد نسبت به مفهوم بینیت یک فضای مرتب به معنای مورد نظر هیلبرت است. به عکس از یک رابطه‌ی بینیت به معنای مورد نظر هیلبرت می‌توان یک نگاشت بینیت $\zeta$ به دست آورد. کافی است برای سه نقطه‌ی هم خط $a$، $b$ و $c$ که $a \neq b,c$ قرار دهیم:

$$(a|b,c) = 1 \quad , \quad (a|b,c) = -1$$

بیان ترتیب به کمک یک نگاشت (در اینجا به کمک نگاشت بینیت) در سال ۱۹۱۹ به وسیله‌ی تائر [1] و پس از وی در سال ۱۹۴۴ به وسیله‌ی اشپرنر [2] مطرح شده بود. علاوه بر این بنداشت‌های هیلبرت بر اساس بی مرز بودن خط بیان شده‌اند. بر این اساس وی بنداشت‌های وقوع و ترتیب را به طور جداگانه مطرح کرد. در

[1] Thaer
[2] Sperner

حالی‌که پاش و اقلیدس بنداشت‌های خود را بر اساس پاره‌خط‌ها مطرح کرده بودند. از این رو بنداشت‌های وقوع و ترتیب پاش در هم تنیده و با هم مطرح می‌شوند. اما باید توجه داشت که بنداشت‌های پاش به اندازه‌ی کافی دقیق نیستند. برای مثال مفهوم یک صفحه‌ی مسطح که وی مطرح می‌کند روشن نیست. یک بیان دقیق از ایده‌های پاش برای نخستین بار به وسیله‌ی وبلن [۳] در سال ۱۹۰۴ برای تعریف فضای مرتب بیان شد. وبلن با یک مجموعه‌ی ناتهی $P$ به نام مجموعه‌ی نقاط شروع می‌کند که با یک رابطه‌ی سه‌تایی $Z$ موسوم به بین آن را مرتب می‌کند. به این ترتیب وبلن برای بیان مفهوم ترتیب نیازی به مفهوم خط ندارد. نخستین بنداشت‌های وی به شکل زیر هستند:

۱) از $(a,b,c) \in Z$ نتیجه می‌شود $(c,b,a) \in Z$.

۲) از $(a,b,c) \in Z$ نتیجه می‌شود $(b,c,a) \notin Z$.

۳) از $(a,b,c) \in Z$ نتیجه می‌شود $a \neq c$.

۴) برای هر دو نقطه‌ی متمایز $a,b \in P$ نقطه‌ی $c \in P$ وجود دارد به قسمی که $(a,b,c) \in Z$.

بر اساس این بنداشت‌ها وبلن مفهوم خط گذرنده از $a$ و $b$ را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\overline{a,b} := \{x \in P | (a,b,x) \in Z, (a,x,b) \in Z, (x,a,b) \in Z\} \cup \{a,b\}$$

وی مفهوم پاره خط باز را به صورت زیر بیان می‌کند:

$$]a,b[:= \{x \in P | (a,x,b) \in Z\}$$

بنداشت های بعدی وی منجر به خوش‌تعریفی مفهوم خط می‌شود.

۵)برای دو نقطه‌ی متمایز $c,d \in \overline{a,b}$ داریم $a \in \overline{c,d}$.

علاوه بر این بنداشت ها، وی بنداشت پاش $(\mathbf{A}_4)$ را به شکل زیر می‌پذیرد.

٦) فرض کنیم $a,b,c$ سه نقطه‌ی ناهم خط باشند و برای $d,e \in P$ داشته باشیم $(b,c,d),(c,e,a) \in Z$. در این صورت $]a,b[\, \cap \overline{d,e} \neq \emptyset$.

بر اساس بنداشت پاش مفهوم صفحه را به عنوان مجموعه‌ی شامل سه نقطه‌ی غیر هم خط تعریف می‌کنیم. اگر علاوه بر اینها بپذیریم که سه نقطه‌ی ناهم خط وجود دارد مفهوم فضای مرتب قابل بیان است. وبلن وجود چهار خط غیر واقع بر یک صفحه مانند $(a,b,c,d)$ را می‌پذیرد به قسمی که هر نقطه‌ی $x \in P$ در بستار مجموعه‌ای $a,b,c,d$ به شکل زیر واقع است.

$$\{\overline{a,b,c,d}\} = \cap \mathcal{T}_{\{a,b,c,d\} \subseteq \mathcal{T} \in \mathcal{I}}$$

$\mathcal{I}$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرفضاهای فضای وقوعی موردنظر است. بر این مبنا می‌توان فضاهای مرتب سه بعدی را مشخص کرد. برای تعریف یک فضای آفین مرتب، کافی است بنداشت‌های $(\mathbf{Z}_1)$ و $(\mathbf{Z}_2)$ و بنداشت $(\mathbf{Z}'_4)$

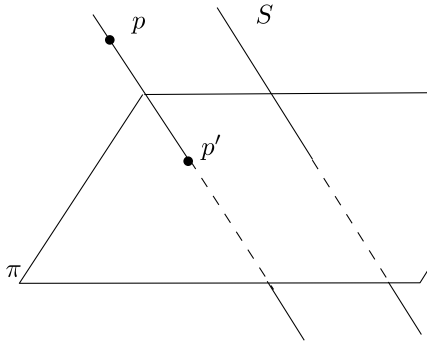
[۳] Veblen

را به صورت زیر به کار برد که حالت ضعیف‌تری از $(\mathbf{Z}_۴)$ است.

$(\mathbf{Z}_۴)'$ برای سه نقطه‌ی هم خط متمایز $a, b, c$ و افکنش موازی $\theta$ داریم:

$$(a|b, c) = (\theta(a)|\theta(b), \theta(c))$$

در اینجا تعریف یک افکنش موازی یادآوری می‌کنیم. برای توصیف نگاشت افکنش موازی فرض کنیم $S$ یک خط و $\pi$ صفحه‌ای ناموازی با $S$ باشند. این نگاشت به هر نقطه‌ی $p$ از فضا نقطه‌ی $p'$، محل تلاقی $\pi$ با خط موازی با $S$ و واقع بر $p$ را نظیر می‌کند (شکل ۳).




شکل ۳ نگاشت افکنش موازی.

مفهوم ترتیب موردنظر پاش و هیلبرت که بر پایه‌ی رابطه‌ی بینیت مطرح می‌شود هم برای هندسه‌های اقلیدسی و هم برای هندسه‌های هذلولوی مناسب است، ولی برای هندسه‌ی تصویری و بیضوی مناسب نیست. ساختار وقوعی یک هندسه‌ی وقوعی یک ساختار تصویری است.

برای بیان مفهوم ترتیب در هندسه‌ی تصویری باید مفهوم بینیت به وسیله‌ی مفهوم موسوم به جداسازی جایگزین شود. برای مثال در صفحه‌ی تصویری حقیقی نمی‌توان ترتیب را به کمک یک رابطه‌ی بینیت بیان کرد. این صفحه بستار تصویری صفحه‌ی آفین اقلیدسی است و بهتر است در این صفحه خطوط را مانند دایره تصور کنیم. در حالی‌که یک خط در صفحه‌ی آفین به وسیله‌ی یک نقطه به دو قسمت تقسیم می‌شود، یک دایره را به وسیله‌ی دو نقطه می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد. به این ترتیب برای مشخص کردن یک جهت روی خط به دو نقطه و برای جهت روی دایره به سه نقطه نیاز داریم. مفهوم فضای تصویری مرتب نخستین بار در سال ۱۹۰۵ به وسیله‌ی واهلن $(Vahlen)$ در کتاب **هندسه‌ی مجرد** مطرح شد.

یک تعریف کوتاه برای فضای تصویری مرتب $(P, G, \tau)$ به شکل زیر قابل بیان است. فرض کنیم $(P^۴)' = \{(a,b,c,d) \in P^۴ \mid a,b \neq c,d\}$. نگاشت $\tau : (P^۴)' \to \{-۱, ۱\}$ را با ضابطه‌ی $(a,b,c,d) \mapsto \tau(a,b,c,d) := [a,b|c,d]$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم برای $\tau$ ویژگی های زیر برقرار است.

$(\mathbf{T}_۱)$ برای پنج نقطه‌ی هم خط $a,b,c,d,e$ که $a,b \neq c,d,e$ داریم $[a,b,|c,d][a,b|d,e] = [a,b|c,e]$

$(\mathbf{T}_۲)$ برای چهار نقطه‌ی متمایز و هم خط $a,b,c,d$ دقیقاً یکی از مقادیر $[a,d|b,c]$، $[a,c|d,b]$ یا $[a,b|c,d]$ برابر $-۱$ است.

$(\mathbf{T}_۳)$ برای هر $(a,b,c,d) \in (P^۴)'$ و هر افکنش $\pi$ داریم $[a,b|c,d] = [\pi(a), \pi(b)|\pi(c), \pi(d)]$

اصطلاحاً می‌گوییم زوج نقاط $(a,b)$ زوج $(c,d)$ را از هم جدا می‌کند هرگاه داشته باشیم $[a,b|c,d] = -۱$.
به این ترتیب در یک هندسه‌ی تصویری سه نقطه‌ی هم خط $a,b,c$ پاره خط های زیر را مشخص می‌کنند:

$$[a,b]_c^- := \{x \in \overline{a,b} \mid [a,b|c,x] = -۱\} \quad , \quad [a,b]_c^+ := \{x \in \overline{a,b} \mid [a,b|c,x] = ۱\}$$

در نتیجه $\overline{a,b} = [a,b]_c^- \cup [a,b]_c^+ \cup \{a,b\}$ یک اجتماع از مجموعه‌های مجزا است. جهتی را که روی یک خط $G$ به کمک سه نقطه‌ی ثابت $۰, ۱, \infty$ مشخص می‌شود منجر به یک ترتیب اصطلاحاً **دایره‌ای** می‌شود. این نوع ترتیب به وسیله‌ی یک رابطه‌ی سه تایی موسوم به جداسازی $\omega$ قابل بیان است. این ترتیب به کمک تابع جداسازی $\tau$ به قسمی تعریف می‌شود که داشته باشیم $(۰, ۱, \infty) \in \omega$ و

$$[a,b|c,d] = -۱ \iff (a,c,b),(b,d,a) \in \omega ? (b,c,a),(a,d,b) \in \omega$$

بین فضای آفین مرتب و فضای تصویری مرتب رابطه‌ی بسیار نزدیکی وجود دارد. از یک فضای تصویری مرتب می‌توان به سادگی یک فضای آفین مرتب بدست آورد. در حالیکه گسترش یک صفحه‌ی آفین مرتب به صفحه‌ی تصویری مرتب کار ساده‌ای نیست.
**قضیه.** فرض کنیم $(P,G,\tau)$ یک فضای تصویری مرتب و $U$ یک ابر صفحه‌ی $(P,G)$ باشد(زیرفضایی که بعد آن یکی کمتر از فضا است). همچنین فرض کنیم $(P_U,G_U)$ فضای آفین حاصل از حذف $U$ در صفحه‌ی تصویری $(p,G)$ باشد. اگر برای $(a,b,c) \in (P_U^۳)'$ قرار دهیم $\zeta(a,b,c) := [a,d|b,c]$ به قسمی که $d \in U$ نقطه‌ی دور خط $\overline{a,b}$ است، آنگاه $(P_U,G_U,\zeta)$ یک فضای آفین مرتب است.
یک زیر مجموعه‌ی $A$ از یک فضای تصویری مرتب $(P,G,\tau)$ **محدب تصویری** نامیده می‌شود هرگاه برای هر چهار نقطه‌ی هم خط $a,b,c,d$ به قسمی که $[a,b|c,d] = -۱$، $a,b \in A$ و $d \in P \setminus A$ داشته باشیم $c \in A$.
**قضیه.** فرض کنیم $(P,G,\zeta)$ یک فضای آفین مرتب و $(P,G)$ بستار تصویری آن باشد. در این صورت دقیقاً یک تابع جداسازی مانند $\tau$ وجود دارد به قسمی که $(P,G,\tau)$ یک فضای تصویری مرتب است و بر اساس قضیه‌ی قبل $(P,G,\zeta)$ را می‌توان از $(P,G,\tau)$ بدست آورد.
در حالتی که $(P,G)$ دزارگی باشد این قضیه را می‌توان به صورت تحلیلی ثابت کرد.
در حالتی که صفحه‌ی آفین غیردزارگی باشد $JOUSSEN$ و $KARZEL$ با پیش شرطهای دیگر می‌توان هر فضای مرتب $(P,G,\tau)$ نشاند. فضای $(P,G,\zeta)$ را فضای دزارگی مرتب می‌نامند هرگاه بنداشت بزرگ دزارگ $AD$ در آن برقرار باشد. به روش متعارف می‌توان نشان داد که هر فضای مرتب حداقل سه بعدی دزارگی است.
قضیه. هر فضای دزارگی مرتب $(P,G,\zeta)$ را می‌توان در یک فضای تصویری مرتب $(P',G',\tau)$ با همان بعد نشاند به قسمی که $i(P)$ یک زیرمجموعه‌ی محدب $P'$ است و برای هر چهار نقطه‌ی هم خط $a,b,c,d$ متعلق به $P$ همواره داریم :

$$[i(a),i(b)|i(c),i(d)] = (a|c,d)(b|c,d)$$

نگاشت $i$ همان نگاشت نشانیدن است.
یک نگاشت یک به یک $i : P \longrightarrow P'$ را نگاشت نشانیدن می‌نامیم هرگاه:
۱) $\forall x \in G : \overline{i(x)} \in G'$
۲) $\forall x, y \in G x \neq y : i(x) \neq i(y)$
یک پرسش طبیعی که در اینجا مطرح می‌شود آن است که آیا یک فضای دزارگی مرتب $(P, G, \zeta)$ را می‌توان به گونه‌ای در یک فضای آفین مرتب نشاند که $i(P)$ یک زیرمجموعه‌ی محدب از فضای آفین باشد؟
وبلن نشان داد که فضاهای مرتب $(P, G, \zeta)$ وجود دارد که ساختار وقوعی آنها یعنی $(P, G)$ تصویری است.
مفهوم فضای آفین و تصویری مرتب به وسیله‌ی اشپرنر بر اساس تابع ترتیب توسیع داده شد.
فضای آفین $(P, G, \zeta)$ **نیم مرتب** نامیده می‌شود هرگاه برای بینیت فقط بنداشت های $Z1$ و $Z4'$ برقرار باشد.
به همین ترتیب فضای تصویری $(P, G, \tau)$ نیم مرتب نامیده می‌شود هرگاه در مورد بینیت بنداشت های $T1$ و $T3$ برقرار باشد.

**ترتیب ارشمیدسی و پیوسته**

یک رده‌ی مهم از ترتیب ها، ترتیب های ارشمیدسی هستند. در نخستین چاپ از « مبانی هندسه » هیلبرت بنداشت ارشمیدسی را به عنوان تنها بنداشت پیوستگی می‌پذیرد. این بنداشت آخرین بنداشت دستگاه بنداشتی وی است. در فرمولبندی این بنداشت وی از امکان انتقال یک پاره خط استفاده می‌کند. از اینرو هیلبرت بنداشت ارشمیدس را بنداشت اندازه گیری هم می‌نامد که به گروه بنداشت های وابسته به خط است.
وی یک هندسه را **مرتب ارشمیدسی** می‌نامد هرگاه بتوان با شروع از یک نقطه‌ی ثابت و یک طول گام ثابت داده شده به هر نقطه‌ی دلخواه روی خط با تعداد گام‌های باپایان دست یافت. طول گام ثابت به وسیله‌ی یک پاره خط مشخص می‌شود.
در اینجا یک فرمولبندی بر اساس مفهوم انتقال برای بنداشت ارشمیدس مطرح می‌کنیم. در یک فضای مرتب $(P, G, \zeta)$ منظور از نگاشت انتقال $\alpha$ تابعی است که به هر زوج $(a, b)$ از نقاط متمایز یک نگاشت $\alpha_{a,b} : \overrightarrow{a, b} \longrightarrow \overrightarrow{a, b}$ نظیر می‌کند به قسمی که $\alpha_{a,b}$ بینیت را حفظ می‌کند و $\alpha_{a,b}(\overrightarrow{a, b}) = \overrightarrow{b, \alpha_{a,b}(b)}$.
فضای مرتب $(P, G, \zeta)$ را نسبت به انتقال $\alpha$ **ارشمیدسی** می‌نامیم هرگاه برای هر زوج از نقاط متمایز $a, b$ و هر نقطه‌ی $x \in \overrightarrow{a, b}$ عددد طبیعی $n$ وجود داشته باشد که $(x|a, \alpha^n_{a,b}(b)) = -1$.
دریک صفحه‌ی مطلق می‌توان از انتقال پاره خط ها برای ساختن نگاشت انتقال استفاده کرد. با این روش بنداشت هیلبرت در مورد ویژگی ارشمیدسی به دست می‌آید. اما برای فضاهای مرتبی که ساختار متریک ندارند تعریف مفهوم مرتب ارشمیدسی دشوارتر است.
در مورد هندسه‌های آفین و تصویری به شکل زیر عمل می‌شوند.
اگر فضای آفین $(P, G, \zeta)$ دزارگی یا انتقالی باشد، صفحه را **مرتب ارشمیدسی** می‌نامیم هرگاه نسبت به نگاشت انتقال ارشمیدسی باشد یعنی نسبت به نگاشتی که به هر زوج $(a, b)$ و $a \neq b$ انتقالی را نظیر می‌کند که $a$ را به $b$ می نگارد.

برای هندسه‌ی اقلیدسی که ساختار وقوعی آن یک فضای آفین است روش مبتنی بر انتقال پاره خط ها و روش فوق یکسان هستند. در حالتی که فضای آفین مرتب انتقالی نیست یک انتقال طبیعی برای آن وجود ندارد. برای تعریف مفهوم مرتب ارشمیدسی در این حالت ابتدا مفهوم ۳–شبکه‌ی مرتب را معرفی می‌کنیم.
مجموعه‌ی ناتهی $P$ که اعضای آن نقطه نامیده می‌شوند همراه با۳–شبکه‌ی $(P, G۱, G۲, G۳)$ مرتب نامیده می‌شود هرگاه یک تابع بینیت $\zeta$ روی تمام نقاط هم خط $a, b, c$ با $a \neq b, c$ تعریف شده باشد به قسمی که شرایط $Z۱$ و $Z۲$ و $Z۴'$ برای آن برقرار باشد. در اینجا نقاط $a, b, c$ هم خط نامیده می‌شوند هرگاه بر یکی از خطوط $G۱$ یا $G۲$ یا $G۳$ واقع باشند.
می‌توان در یک ۳–شبکه به طور طبیعی انتقال $A$ به شکل زیر تعریف کرد.
فرض کنید $a, b$ دو نقطه‌ی متمایز و هم خط باشند مثلاً فرض کنید $[a]_۳ = [b]_۳$ برای هر $x \in [a]_۳$ قرار می دهیم:

$$\alpha_{a,b}(x) := [[[a]_۱ \cap [b]_۲]_۳ \cap [x]_۱]_۲ \cap [a]_۳$$

در این صورت ۳–شبکه‌ی مرتب $(P, G۱, G۲, G۳, \zeta)$ **مرتب ارشمیدسی** نامیده می‌شود هرگاه نسبت به این انتقال ارشمیدسی باشد. در هر صفحه‌ی آفین مرتب هر یک از ۳–شبکه ها که با انتخاب ۳ دسته خطوط موازی به دست می‌آید یک ۳–شبکه‌ی مرتب خواهد بود. **پیکارد** یک صفحه‌ی آفین مرتب را **مرتب ارشمیدسی** می‌نامند هرگاه تمام ۳–شبکه‌های آن مرتب ارشمیدسی باشند. برای صفحه‌های آفین دزارگی این تعریف با تعریف قبلی به نتیجه یکسان منجر می‌شود. به این ترتیب می‌توان یک هندسه‌ی تصویری را **مرتب ارشمیدسی** نامید هرگاه تمام زیر هندسه‌های آفین آن مرتب ارشمیدسی باشند.
بستار تصویری یک صفحه‌ی آفین مرتب ارشمیدسی با توسیع این ترتیب ارشمیدسی خواهد بود هرگاه صفحه‌ی آفین دزارگی باشد. ولی $KALHOFF$ یکی از شاگردان یوسن $JOUSSEN$ نشان داد که صفحات آفین مرتب ارشمیدسی وجود دارد که بستار تصویری آنها ارشمیدسی مرتب نیست.
برخلاف مفهوم مرتب ارشمیدسی مفهوم مرتب پیوسته به شکل طبیعی به کمک بازهای تودرتوی ددکیند قابل بیان است.
یک فضای مرتب $(P, G, \zeta)$ **مرتب پیوسته** نامیده می‌شود هرگاه برای هر دنباله از فاصله ها مانند $\{[a_i, b_i]\}_{i=۰}^{\infty}$ به قسمی که $[a_{i+۱}, b_{i+۱}] \subset [a_i, b_i]$ نقاط $a, b \in P$ وجود داشته باشد به قسمی که $\cap\{[a_i, b_i] | i \in \mathbb{N}\} = [a, b]$ در اینجا $a, b$ می‌توانند مساوی باشند.
**قضیه.** یک فضای مرتب پیوسته مرتب ارشمیدسی نسبت به هر نگاشت انتقال است.