صفحات تصویری و آفین توپولوژیک:

توپولوژی که یکی از شاخه‌های جدید ریاضیات است، در قرن بیستم به عنوان یکی از شاخه‌های مستقل ریاضی تثبیت شد. پیشرفت این بخش از ریاضی مدیون تلاش‌های قرن‌های ۲۰ و ۲۱ برای دقت بخشیدن به مبانی ریاضیات و بنیانگذاری نظریه‌های ریاضی بر پایه اصول دقیق بوده است. بازنویسی شاخه‌های ریاضیات بر مبانی هرچه دقیق‌تر با توجه به گسترش دائمی و پیوسته‌ی آن ضروری است. برای مثال اعداد مختلط که به آن‌ها اعداد موهومی نیز می‌گویند در پی تعبیر هندسی این اعداد به عنوان بردارهایی در صفحه اقلیدسی ویژگی مرموز خود را از دست دادند و به اعدادی کاملاً عادی در ریاضیات تبدیل شدند.

هندسه‌ی تحلیلی با گذر از ابعاد ۲ و ۳ به حالت n بعدی و گذر از اعداد حقیقی به اعداد مختلط گام مهمی در تکامل هندسه برداشت.

از زمان موبیوس[۱] در سال ۱۹۶۳ مفهوم نگاشت توپولوژیک با کارهای وی در هندسه مطرح شده بود. همچنین کلاین[۲] در سال ۱۸۷۲ در برنامه‌ی گسترده خود موسوم به برنامه‌ی ارلانگن نگاشت‌های توپولوژیک را مد نظر قرار داد.

یکی از مفاهیم اساسی توپولوژیک مفهوم پیوستگی است. تعریف معروف $\varepsilon - \delta$ پیوستگی که ابتدا به وسیله‌ی کشی[۳] مطرح شد بر اساس مفاهیم ترتیب و متر قابل بیان است.

در پی تحقیقات هاوسدورف[۴] در اوایل قرن بیستم مفاهیم توپولوژیک، نگاشت پیوسته و نگاشت توپولوژیک مطرح شدند. هاوسدورف به‌جای فضای n—بعدی $\mathbb{R}^n$ یک مجموعه‌ی دلخواه M را قرار داد و به‌جای همسایگی نقطه‌ی $x \in \mathbb{R}^n$ و به شعاع δ یعنی

$$\begin{aligned} B_\delta &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \; \| x - x_\circ \| \delta\} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \delta\} \end{aligned}$$

یک زیرمجموعه‌ی $U_{x_\circ}$ از M را قرارداد که در شرایط خاصی صدق می‌کند. به این ترتیب مفهوم یک فضای توپولوژیک (M, τ) به صورت مجرد تعریف شد. در این‌جا τ مجموعه‌ای است از زیرمجموعه‌های M موسوم به همسایگی‌ها. این مجموعه‌ها به اصطلاح یک ساختار توپولوژیک به مجموعه‌ی M می‌دهند.

اکنون می‌توان برای دو مجموعه‌ی M_1 و M_2 که هر کدام به‌وسیله‌ی τ_1 و τ_2 به ساختارهای توپولوژیک تبدیل‌شده‌اند. مفهوم تابع پیوسته‌ی $f : M_1 \longrightarrow M_2$ را تعریف کرد. تابع f را در نقطه‌ی $m \in M_1$ پیوسته نامیم هرگاه برای هر همسایگی $u_2 \in U_2(f(x))$ ($U_2(f(x))$ مجموعه همسایگی‌های حول نقطه‌ی $f(x)$ است) همسایگی $u_1 \in U_1(x)$ ($U_1(x)$ مجموعه همسایگی‌های حول نقطه‌ی x است) وجود داشته باشد به

[۱] Möbius
[۲] Klein
[۳] Cauchy
[۴] Hausdorff

قسمی که $f(U_۱) \subset U_۲$. نگاشت f توپولوژیک نامیده می‌شود هرگاه دوسویی و معکوس آن نیز پیوسته باشد.

نگاشت‌های توپولوژیک در یک فضای توپولوژیک تشکیل یک گروه می‌دهند. این نگاشت‌ها همان طور که گفته شد مورد توجه موبیوس و کلاین نیز قرار گرفتند.

در ابتدا ریاضیدان‌ها متوجه شدند که توپولوژی فضاهای اقلیدسی و به ویژه اعداد حقیقی را می‌توان تنها به کمک مفهوم ترتیب بیان کرد. بر این اساس و با این الگو هر فضای آفین مرتب و هر کج‌میدان مرتب با یک فضای توپولوژیک مرتبط است.

ثابت می‌شود که نگاشت‌های جبری جمع، ضرب و نگاشت وارون نگاشت‌های پیوسته هستند. سپس مفاهیم گروه‌های توپولوژیک و میدان‌های توپولوژیک مطرح شدند. پایه‌ی اصلی مفهوم گروه توپولوژیک در هندسه است. این مفهوم در کارهای لی[۵] بین سال‌های ۱۸۸۸ تا ۱۸۹۳ در مورد تبدیلات پیوسته‌ی لی مطرح شد. هیلبرت[۶] در سال ۱۹۰۰ در پرسش‌های پنجگانه‌ی معروف خود این پرسش را مطرح کرد که آیا نتایج لی را بدون شرایط مشتق‌پذیری می‌توان ثابت کرد؟

در سال ۱۹۲۶ شرایر[۷] مفهوم گروه پیوسته مجرد را مطرح کرد که بئر[۸] آن را در سال ۱۹۲۹ گروه توپولوژیک نامید. رده‌ای از کج‌میدان‌های توپولوژیک، کج‌میدان‌های پیوسته هستند که توپولوژی روی آن‌ها در دو شرط دیگر صدق می‌کند؛این فضاهای توپولوژیک باید موضعاً فشرده و همبند باشند. برای مثال توپولوژی طبیعی روی اعداد حقیقی این دو ویژگی را دارد.

در سال ۱۹۳۲ پونتریاگین[۹] این قضیه‌ی اساسی را ثابت کرد که اعداد حقیقی ، اعداد مختلط و کواترنیون‌ها روی $\mathbb{R}$ تنها کج‌میدانهای پیوسته هستند و به این ترتیب یک ویژگی مشترک اعداد حقیقی و مختلط در چهارچوب نظریه‌ی میدان‌های مرتب امکان‌پذیر شد.

یک صفحه‌ی تصویری (P,G) که مجموعه‌ی نقاط و خطوط آن به وسیله توپولوژی‌های τ_P و τ_G به فضاهای توپولوژیک تبدیل شده‌اند یک صفحه‌ی تصویری توپولوژیک نامیده می‌شود، هرگاه نگاشت‌های زیر پیوسته باشند.

$$
\begin{aligned}
v : \{(p,q) \in P^۲ \mid p \neq q\} &\longrightarrow G \\
(p,q) &\longmapsto \overline{p,q} \\
s : \{(X,Y) \in G^۲ \mid X \neq Y\} &\longrightarrow P \\
(X,Y) &\longmapsto X \cap Y
\end{aligned}
$$

[۵] Li
[۶] Hilbert
[۷] Shreier
[۸] Bear
[۹] Pontryagin

مفهوم فضای تصویری توپولوژیک با بعد دلخواه در سال‌های ۱۹٦۸ و ۱۹٦۹ به‌وسیله‌ی میسفلد[۱۰] و سورنسون[۱۱] مطرح شدند. یک فضای تصویری $n-$بعدی (P, G) به قسمی که روی مجموعه نقاط آن و روی $\mathcal{H}$(مجموعه ابرصفحه‌های آن) دو توپولوژی τ_1 و τ_2 تعریف شده، یک فضای تصویری توپولوژیک نامیده می‌شود هر گاه شرایط زیر برقرار باشند:
۱ $-$ نگاشت $v : P^{(n)} \longmapsto \mathcal{H}$ پیوسته باشد.
در این‌جا $P^{(n)}$ مجموعه‌ی همه‌ی $n-$تایی های مستقل خطی است (یعنی هیچ زیرمجموعه‌ای از این نقاط در بستار بقیه قرار ندارد).
۲ـنگاشت $v : P^{(n)} \longmapsto \mathcal{H}$ پیوسته باشد. در این‌جا $\mathcal{H}$ مجموعه‌ی همه‌ی $n-$تایی هایی از ابرصفحه‌های (P, G) است که یک و تنها یک نقطه‌ی مشترک دارند.

برای هر فضای تصویری $n-$ بعدی روی یک کج‌میدان $\mathbb{K}$ که روی آن یک توپولوژی τ داریم، به شکل طبیعی می‌توان یک توپولوژی تعریف کرد. برای این منظور $\mathbb{K}^{n+1}$ همراه با توپولوژی حاصل‌ضربی را در نظر می‌گیریم. علاوه بر این یک فضای برداری توپولوژیک روی کج میدان $\mathbb{K}$ تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$(\frac{{\mathbb{K}^{n+1}}^*}{\mathbb{K}^*})_\ell = \{\mathbb{K}^* u | u \in {\mathbb{K}^{n+1}}^*\}$$
$$(\frac{{\mathbb{K}^{n+1}}^*}{\mathbb{K}^*})_r = \{X\mathbb{K}^* | X \in {\mathbb{K}^{n+1}}^*\}$$

به قسمی که با توپولوژی‌های خارج‌قسمتی τ_ℓ و τ_r فضای توپولوژیک هستند. با توجه به این‌که مجموعه‌ی $(\frac{{\mathbb{K}^{n+1}}^*}{\mathbb{K}^*})_r$ را با مجموعه P و $(\frac{{\mathbb{K}^{n+1}}^*}{\mathbb{K}^*})_\ell$ را با مجموعه‌ی ابرصفحه‌ها می‌توان یکی در نظرگرفت، توپولوژی‌های τ_r روی مجموعه نقاط P و τ_ℓ روی ابرصفحه‌ها قابل تعریف است. (یادآوری می‌کنیم که در این حالت ابرصفحه‌ی $\mathbb{K}^* u$ نقطه‌ی $x\mathbb{K}^*$ را در بردارد اگر و فقط اگر $x \cdot u = 0$).

سورنسون در سال ۱۹٦۹ قضیه‌ی مهم زیر را ثابت کرد.

قضیه ۱ الف) فرض کنید (K, τ) یک کج‌میدان توپولوژیک و $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، در این صورت $(P, \tau_\gamma, \mathcal{H}, \tau_\ell)$ برای $P := (\frac{{\mathbb{K}^{n+1}}^*}{\mathbb{K}^*})_r$ و $\mathcal{H} := (\frac{{\mathbb{K}^{n+1}}^*}{\mathbb{K}^*})_\ell$ یک فضای توپولوژیک است.
ب) اگر $(P, \tau_r, \mathcal{H}, \tau_\ell)$ یک فضای توپولوژیک $n-$بعدی درازگی باشد، آن‌گاه یک کج‌میدان توپولوژیک یکتای (K, τ) وجود دارد که فضای تصویری توپولوژیک حاصل از آن بر اساس قسمت (الف) با $(P, \tau_r, \mathcal{H}, \tau_\ell)$ یکریخت هستند.

پیش از میسفلد، سورنسون، کارتسل[۱۲] و لنتس[۱۳] هم تعاریفی برای فضای تصویری توپولوژیک ارائه کرده

[۱۰] Misfeld
[۱۱] Sörensen
[۱۲] Karzel
[۱۳] Lenz

بودند که بر اساس آن قضیه‌ی نمایش فوق قابل اثبات نبود. بر اساس نتایج پونتریاگین و کولموگروف[۱۴] نتیجه‌ی زیر از قضیه‌ی نمایش فوق به سادگی به‌دست می‌آید.

قضیه ۲ هر فضای تصویری توپولوژیک دزارگی موضعاً فشرده و همبند، فضای تصویری کلاسیک روی یکی از کج‌میدان‌های توپولوژیک $\mathbb{R}$(اعداد حقیقی)، $\mathbb{C}$(اعداد مختلط) و یا $\mathbb{H}$(کواترنیون‌ها روی اعداد حقیقی) است.

یک تعریف رضایت‌بخش برای فضاهای توپولوژیک n—بعدی آفین در سال ۱۹۹۷ به‌وسیله‌ی سورنسون و در همان سال به‌وسیله‌ی $FICK$ مطرح شد. فرض کنیم P مجموعه‌ی نقاط و $\mathcal{H}$ مجموعه‌ی ابرصفحه‌ها به وسیله‌ی توپولوژی‌های τ_r و τ_ℓ فضاهای توپولوژیک باشند. در این‌صورت $(P, \tau_r, \mathcal{H}, \tau_\ell)$ یک فضای آفین توپولوژیک نامیده می‌شود هرگاه نگاشت‌های وصل کردن دو نقطه و اشتراک دو خط (بر اساس شرایط ۱و۲) پیوسته باشند و علاوه بر آن نگاشت

$$p : P \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$
$$(X, H) \longmapsto \{x \| H\}$$

پیوسته باشد. در این‌جا منظور از $\{X \| H\}$ ابر صفحه‌ای است که نقطه‌ی X را دربردارد و موازی H است.

در این‌جا توپولوژی روی نقاط یعنی τ_r همان توپولوژی حاصل‌ضرب کج‌میدان توپولوژیک است. سورنسون و$FICK$ قضیه‌ی زیر را ثابت کردند. این قضیه رابطه‌ی بین فضاهای توپولوژیک آفین و تصویری را مطرح می‌کند.

قضیه ۳ الف) اگر از یک فضای تصویری توپولویک یک ابرصفحه را حذف کنیم، فضای رد[۱۵] ، (به معنای متعارف توپولوژیک و وقوعی) یک فضای آفین توپولوژیک است.
ب) بستار تصویری یک فضای آفین توپولوژیک ، یک فضای تصویری توپولوژیک یکتا است.

یک صفحه‌ی تصویری مرتب را می‌توان به شکل طبیعی‌تری به یک فضای توپولوژیک تبدیل کرد. وایلر[۱۶] و میسفلد در سالهای ۱۹۵۲ و ۱۹۷۶ ایده‌ی این کار را مطرح کردند. بنابر روش وایلر به کمک یک رابطه‌ی جداسازی، مجموعه‌های محدب باز تعریف می‌شوند که از آنها به عنوان پایه‌ای برای فضای توپولوژی استفاده می‌شود. در روش میسفلد ترتیب به وسیله‌ی یک تابع ترتیب a داده شده است و پایه‌ی توپولوژی به کمک برش‌ها تعریف می‌شود. منظور از برش در یک صفحه‌ی مرتب، مجموعه‌ای به شکل زیر است:

$$S(G, H, Y) = \{X \in P \setminus (G \cup H) | (G|Y, X).(H|Y, X) = ۱\}$$

[۱۴] Kolmogrov
[۱۵] trace space
[۱۶] Wyler

که در آن G و H دو خط هستند، Y نقطه‌ای غیر واقع بر G و H است و

$$(G|Y,X) := a(G,Y).a(G,X) := G(Y)G(X)$$

با هر دو روش فضای توپولوژیک تصویری یکسانی به‌دست می‌آید. این تعاریف را می‌توان برای فضای تصویری مرتب با بعد متناهی دلخواه تعمیم داد.

صفحات توپولوژیک غیر دزارگی:

در قضیه‌ی[۱] رابطه‌ی بین فضاهای تصویری توپولوژیک دزارگی و ساختارهای جبری توپولوژیک دزارگی را می‌توان به مسائل تحلیلی تبدیل کرد.

صفحات تصویری توپولوژیک غیر دزارگی برای نخستین بار در سال ۱۹۵۴ به‌وسیله‌ی اسکورنیوکف[۱۷] و در سال بعد به‌وسیله‌ی زالتسمان [۱۸] مورد بررسی قرار گرفتند.

مثال‌هایی از این نوع صفحات پیش از آن به‌وسیله‌ی هیلبرت، مولتن[۱۹] و مُهرمان[۲۰] داده شده بود.

در یک فضای توپولوژیک هر زیرمجموعه بر اساس توپولوژی رد یک فضای توپولوژیک است. این مطلب به‌ویژه برای مجموعه نقاط یک خط X در یک صفحه‌ی تصویری توپولوژیک نیز برقرار است. اگر توپولوژی روی مجموعه‌ی نقاط را با τ_P و توپولوژی رد روی خط X را با τ_X نمایش دهیم، می‌توان توپولوژی‌های τ_P و τ_G(توپولوژی روی مجموعه‌ی خطوط) را به کمک نگاشت حاصل‌ضرب از τ_X به‌دست آورد.

به این ترتیب روی هر حلقه‌ی سه‌تایی $\mathbb{K}$ از این صفحه‌ی تصویری یک توپولوژی τ قابل تعریف است که از روی آن‌ها می‌توان توپولوژی‌های τ_P و τ_G را به‌دست آورد. عمل‌های سه‌تایی T وابسته به این حلقه‌ی $\mathbb{K}$ و عمل عکس آن پیوسته هستند؛ یعنی $(\mathbb{K}, T, \tau')$ یک حلقه‌ی سه‌تایی توپولوژیک است.

به عکس این پرسش یعنی تحت چه شرایطی توپولوژی یک حلقه‌ی سه‌تایی از یک صفحه‌ی تصویری، آن صفحه را به یک صفحه‌ی تصویری توپولوژیک تبدیل می‌کند، تا کنون برای حلقه‌های سه‌تایی مرتب توپولوژیک ، کج‌میدان‌های متناوب و حلقه‌های سه‌تایی همبند موضعاً فشرده جواب داده شده است.

---

[۱۷] Skonjakov
[۱۸] Salzmann
[۱۹] Moulton
[۲۰] Mohrmann