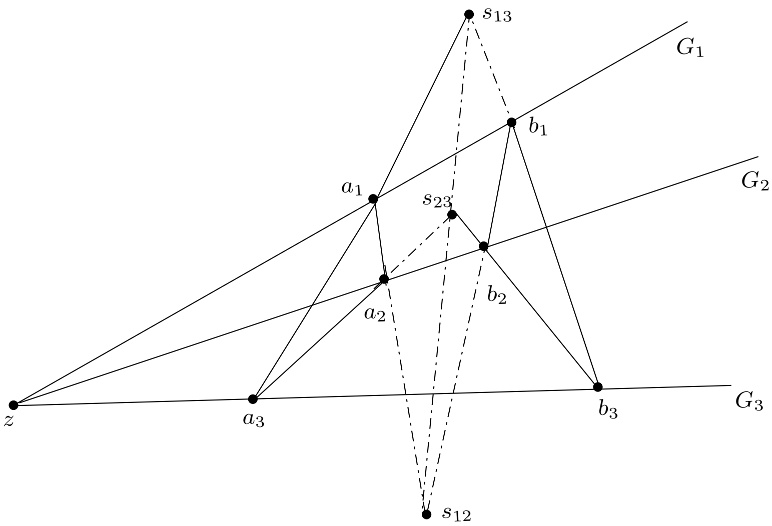
رده‌بندی لنتز – بارلوتی برای صفحات تصویری

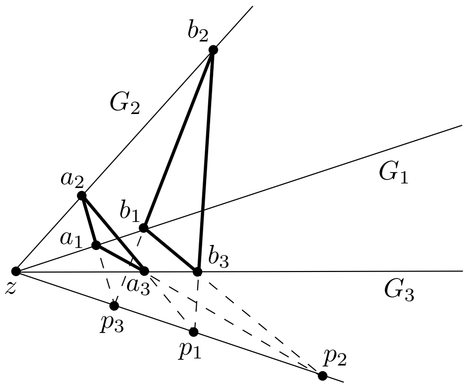
در یک صفحه‌ی تصویری دزارگی، همه‌ی صفحات آفینی که با برداشتن یک خط از صفحه‌ی تصویری به‌دست می‌آیند یکریخت هستند، زیرا گروه خودریختی این صفحات روی خطوط انتقالی عمل می‌کند. هیچ یک از صفحه‌های تصویری غیردزارگی ارائه شده به وسیله‌ی «**هیلبرت**»، «**مولتون**»، «**واهلن**»، «**وبلن**» و «**ودربورن**» این ویژگی را ندارند. با این وجود، ویژگی فوق صفحات دزارگی را مشخص نمی‌کند زیرا در سال ۱۹۴۷، «**هال**» نشان داد که صفحات تصویری غیر دزارگی وجود دارند که گروه خودریختی آنها دوری است و روی مجموعه‌ی خطوط به صورت انتقالی عمل می کند [۱۳]. یک صفحه تصویری را **دوری** می‌نامند هرگاه گروه خودریختی آن حاوی یک زیرگروه دوری باشد به قسمی که روی مجموعه‌ی خطوط یا نقاط صفحه انتقالی عمل کند. «**براندیس**» و «**کارتسل**» نشان دادند که هر صفحه‌ی تصویری دوری بی‌پایان غیردزارگی است در حالی که هر صفحه‌ی تصویری دزارگی باپایان دوری است. این پرسش که آیا صفحات تصویری دوری غیردزارگی باپایان وجود دارد هنوز یک مساله‌ی باز است. در سال ۱۹۳۲ «**مفانگ**» رده‌ی دیگری از صفحات تصویری غیردزارگی کشف کرد که گروه خودریختی آنها روی مجموعه‌ی خطوط انتقالی عمل می‌کند. این صفحات که صفحات مفانگ نامیده می‌شوند به وسیله قضیه‌ی کوچک دزارگ (Id) یا به طور معادل (Id') مشخص می‌شوند. در اینجا ابتدا قضیه‌ی بزرگ دزارگ (ID) را بیان می‌کنیم.



شکل ۱. بنداشت (ID)

(ID) **(قضیه‌ی بزرگ دزارگ)** فرض کنیم $G_{۳}, G_{۲}, G_{۱}$ سه خط متمایز باشند که از نقطه‌ی مشترک z می‌گذرند، $a_i, b_i \in G_i \setminus \{z\}$ $(i = ۱, ۲, ۳)$ و $a_i \neq b_i$ شش نقطه‌ی متمایز باشند. در این صورت اگر نقاط $s_{ij} = \overline{a_i, a_j} \cap \overline{b_i, b_j}$، $(i, j \in ۱, ۲, ۳), i \leq j)$ وجود داشته باشند آنگاه این نقاط هم خط هستند.

(Id) **(قضیه‌ی کوچک دزارگ)** در بنداشت (ID) شرط $z \in \overline{s_{۱۲}, s_{۱۳}}$ پذیرفته می‌شود.



شکل ۲. بنداشت Id

(Id') در بنداشت (ID) شرط‌های $s_{۱۲} \in G_۳$ و $s_{۲۳} \in G_۱$ پذیرفته می‌شوند.

مفانگ شرایط معادل زیادی برای (Id) به دست آورد [۱۲]. به کمک این قضایای بستاری وی روش هندسی هیلبرت را در تعریف جمع وضرب به کاربرد و برای ساختار جبری به دست آمده به جز شرکت پذیری ضرب، تمام قوانین میدان را ثابت نمود. به جای شرکت پذیری ضرب، وی قضیه‌ی زیر را به دست آورد.

قضیه ۱ (A') برای هر $a \in \mathbb{K}$ عنصر $a^{-۱} \in \mathbb{K}$ وجود دارد به قسمی که $aa^{-۱} = ۱ = a^{-۱}a$ و برای هر $b \in \mathbb{K}$، $a^{-۱}(ab) = b = (ba)a^{-۱}$.

به این ترتیب وی توانست پیش از «آرتین» و «زُرن» مفهوم **میدان متناوب** را تعریف کند. منظور از یک میدان متناوب $(\mathbb{K}, +, \cdot)$، شبه‌میدانی است که در آن (A') و قواعد توزیع پذیری برقرار است. یادآوری می‌کنیم که در یک شبه میدان $(\mathbb{K}, +, \cdot)$، ساختار $(\mathbb{K}, +)$ یک گروه جابجایی و $(K^*, \cdot)$ به ازای $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{۰\}$ یک **دور** (loop) است و در آن قانون توزیع پذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع برقرار است. یک مثال معروف از میدان‌های متناوب که میدان نیستند ۸ تایی‌ها هستند که جبرهای «**کیلی — دیکسون**» هم نامیده می‌شوند. این ساختارها با شروع از میدان اعداد مختلط و بر اساس روندی موسوم به **زوج‌سازی** به‌دست می‌آیند. برای مثال مجموعه‌ی چهارتایی‌های «**هامیلتون**» عبارت است از $H = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{C}\}$ با اعمال $\cdot$ و $+$ که با $\overline{(x, y)} = (\bar{x}, -y)$ (به ازای $x \in \mathbb{R}$، $\bar{x} = x$) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$(a_۱, a_۲) + (b_۱, b_۲) = (a_۱ + b_۱, a_۲ + b_۲) \ , \quad (a_۱, a_۲) \cdot (b_۱, b_۲) = (a_۱ b_۱ - b_۲ \bar{a}_۲, b_۱ a_۲ + \bar{a}_۱ b_۲)$$

با روندی مشابه، هشت‌تایی‌های O از H به‌دست می‌آیند. با هر بار استفاده از این روند، ویژگی‌های اعداد حقیقی گام به گام از بین می‌رود. مثلا در میدان اعداد مختلط دیگر ترتیب نداریم (زیرا ۱ — یک مربع

کامل است)، چهارتایی‌ها آبلی نیستند و هشت‌تایی‌ها شرکت پذیر نیستند. برای هشت‌تایی‌ها به جای قانون شرکت‌پذیری، قانون تناوبی (A') برقرار است. روند زوج سازی را می‌توان برای میدان جابجایی و دلخواه $\mathbb{K}$ نیز به کار برد. با این روش می‌توان رده‌ی همه‌ی هشت‌تایی‌ها را به‌دست آورد. مرکز هشت‌تایی‌ها همان میدان $\mathbb{K}$ است و می‌توان هشت‌تایی‌ها را یک فضای هشت بعدی روی $\mathbb{K}$ در نظر گرفت. در اوایل دهه‌ی پنجم قرن بیستم، «**براک**»، «**کلاین فلد**» و «**اسکورنیاکوف**» قضیه‌ی زیر را ثابت کردند.

قضیه ۲ هر میدان متناوب غیر شرکت پذیر مانند $\mathbb{K}$ یک جبر هشت‌تایی است.

چون میدان‌های متناوب شبه میدان‌های مسطح هستند، شبیه به روشی که در هندسه‌ی تحلیلی متعارف وجود دارد می‌توان از یک میدان متناوب $\mathbb{K}$ یک صفحه‌ی آفین $A_{۲}(\mathbb{K})$ به‌دست آورد. مفانگ به کمک این صفحات، مثال‌هایی از صفحات تصویری غیردزارگی به‌دست آورد که امروزه **صفحات مفانگ** نامیده می‌شوند. به این ترتیب وی نشان داد که قضیه‌ی بزرگ دزارگ (ID) بر اساس قضیه‌ی کوچک دزارگ (Id) قابل اثبات نیست. قضیه‌ی نمایش زیر از نتایج مفانگ محسوب می‌شود.

قضیه ۳ الف) اگر $\mathbb{K}$ یک میدان متناوب باشد، صفحه تصویری $\Pi_{۲}(\mathbb{K})$ که از صفحه‌ی تصویری $A_{۲}(\mathbb{K})$ به‌دست می آید یک صفحه‌ی مفانگ است.

ب) اگر (P, G) یک صفحه‌ی مفانگ باشد، بر اساس روش‌های هسنبرگ یا هیلبرت، یک میدان متناوب $\mathbb{K}$ به‌دست می آید که صفحه‌ی مفانگ نظیر آن یعنی $\Pi_{۲}(\mathbb{K})$ با (P, G) یکریخت است.

به کمک این قضیه، برای صفحات مفانگ، به معنای تحلیلی، یک معادل جبری به‌دست می آید. به این ترتیب پرسش مربوط به نسبت ضربدری در صفحه های مفانگ قابل بررسی شد. «**فون شتاوت**» هر چهار عنصر را که به‌وسیله‌ی افکنش‌ها به یکدیگر تبدیل می‌شوند در یک کلاس هم ارزی به عنوان یک عدد در نظر گرفت. برای این منظور وی قضیه‌ی اساسی هندسه‌ی تصویری را پیش‌فرض قرار داده بود. بدون قضیه‌ی اساسی و براساس قضیه‌ی دزارگ، به جای یک اسکالر منحصر به فرد، می‌توان یک رده‌ی هم‌ارزی از عناصر مزدوج تحت عنوان نسبت ضربدری نظیر کرد. یادآوری می‌کنیم که بنابر قضیه‌ی اساسی هندسه‌ی تصویری، گروه افکنش های یک خط دلخواه A روی نقاط خط A اکیدا ۳ — انتقالی عمل می‌کند.

این ایده را می‌توان برای صفحات مفانگ نیز مطرح کرد. در این مورد «**هاول**» و «**شلایرماخر**» تحقیق نمودند. دراینجا صفحه‌ی مفانگ را به عنوان بستار صفحه‌ی مختصات آفین یک میدان متناوب در نظر می‌گیریم. به این ترتیب نسبت ضربدری برای چهار نقطه‌ی $a = (a, ۰), b = (c, ۰), c = (c, ۰), d = (d, ۰)$ روی محور x به‌وسیله‌ی رده‌ی $[((\mathrm{a}-\mathrm{d})^{-1}(\mathrm{b}-\mathrm{d}))((\mathrm{b}-\mathrm{c})^{-1}(\mathrm{a}-\mathrm{c}))]$ تعریف می‌شود به‌قسمی که $[x] = \{(yx)y^{-۱} \mid y \in \mathbb{A}^*\}$ مشخص کننده‌ی رده‌ی مزدوج‌های x است. باید به این نکته توجه داشت که در یک میدان متناوب $\mathbb{A}$ به ازای $x, y \in \mathbb{A}$ همواره $y(xy) = (yx)y$ و $(yx)^{-۱} = y(xy^{-۱}$. اگر در صفحه‌ی

مفانگ نقطه‌ی واقع در بینهایت محور x را با نماد ∞ نمایش دهیم، آنگاه مفهوم نسبت ضربدری در صفحه‌ی تصویری به شکل زیر توسیع داده می‌شود.

$DV(\infty, b, c, d) = [(b-d)(b-c)^{-1}]$

$DV(a, \infty, c, d) = [(a-d)^{-1}(a-c)]$

$DV(a, b, \infty, d) = [(a-d)^{-1}(b-d)]$

$DV(a, b, c, \infty) = [(b-c)^{-1}(a-c)]$

با این تعریف نسبت ضربدری به ازای تمام افکنش‌هایی که محور x را به خودش تبدیل می‌کنند ناوردا است [۱۱]. به این ترتیب می‌توان نسبت ضربدری را برای مجموعه‌ی همه‌ی چهارتایی‌هایی که هم خط هستند توسیع داد به قسمی که قضیه‌ی زیر برای آن‌ها برقرار باشد.

قضیه ۴ فرض کنیم a, b, c, d و a', b', c', d' دو چهارتایی از نقاط متمایز یک صفحه تصویری دزارگی باشند. در این صورت یک افکنش وجود دارد که $a \mapsto a', b \mapsto b', c \mapsto c', d \mapsto d'$ اگر و تنها اگر $DV(a, b, c, d) = DV(a', b', c', d')$.

قضیه ۵ فرض کنید $\mathbb{K}$ میدان نظیر صفحه‌ی مفانگ باشد، قرار می‌دهیم $\bar{\mathbb{K}} \cup \{\infty\}$ و Γ' را گروه تولید شده به‌وسیله‌ی سه دسته جایگشت زیر در نظر می‌گیریم.

۱) $a^+ : \bar{\mathbb{K}} \to \bar{\mathbb{K}}, \quad a \in \bar{\mathbb{K}}^* = \bar{\mathbb{K}} \setminus \{0\}, \quad a \mapsto a + x, \quad a^+(\infty) = \infty$

۲) $a^{\cdot} : \bar{\mathbb{K}} \to \bar{\mathbb{K}}, \quad a \in \bar{\mathbb{K}}^* = \bar{\mathbb{K}} \setminus \{0\}, \quad a \mapsto a \cdot x, \quad a^{\cdot}(\infty) = \infty$

۳) $\iota : \bar{\mathbb{K}} \to \bar{\mathbb{K}}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \quad (x \neq 0, \infty), \quad 0 \mapsto \infty, \quad \infty \longmapsto 0$

در این صورت گروه افکنش‌های صفحه‌ی تصویری مفانگ، Γ با گروه جایگشتی $(\Gamma', \bar{\mathbb{K}})$ یکریخت است.

علاوه بر صفحات مفانگ، ساختار گروه Γ، برای برخی از صفحات غیردزارگی دیگر نیز مشخص شده یا موضوع تحقیق بوده است. این کار برای صفحات تصویری باپایان در سال ۱۹۵۹ به وسیله‌ی «**بارلوتی**» شروع شد. وی نشان داد که برای صفحات غیردزارگی مرتبه‌ی ۹، این گروه با گروه متقارن S_{10} و برای صفحات انتقالی مرتبه‌ی ۱۶ با گروه متناوب A_{17} یکریخت است [۱]. پس از وی «**جوسن**»، «**هرتز**»، «**لانگ**» و «**تیتز**» به تحقیق در مورد تعیین این گروه برای رده‌های مختلف صفحات انتقالی غیر دزارگی پرداختند. «**بِتِن**» این گروه را برای صفحه‌ی مولتون مشخص نمود. « **گرند هوفر**» نشان داد که برای همه‌ی صفحات انتقالی غیر دزارگی، این گروه، گروه متناوب را در بردارد. بر اساس رده‌بندی گروه‌های ساده‌ی متناهی، وی توانست این مطلب را برای همه‌ی صفحات تصویری که مرتبه‌ی مخالف ۲۳ دارند ثابت کند. حتی برای این صفحات گروه Γ یک گروه ۵ — انتقالی است. رده‌ای از صفحات تصویری آزاد بنابر

نتایج جوسن ترتیب پذیر هستند و در نتیجه Γ چهار انتقالی نیست. در همان زمان بارلوتی ثابت کرد که اگر افکنشی از یک صفحه‌ی آزاد ٦ نقطه را ثابت نگه دارد نگاشت همانی است. به این ترتیب قضیه‌ی شلایرماخر را نمی‌توان قوی‌تر کرد. برای صفحات تصویری آزاد، هر افکنش موازی که چهار نقطه را ثابت نگه دارد همانی است.

مختصاتی کردن صفحات تصویری غیر دزارگی با **حلقه‌های سه‌تائی**

پس ازآن که مفانگ در سال ۱۹۳۳ نشان داد صفحات تصویری مفانگ را می‌توان از نظر جبری به وسیله میدان های متناوب نمایش داد، این سوال مطرح شد که آیا صفحاتی که در آنها قضایای بستاری برقرار نیستند به کمک یک ساختار جبری قابل نمایش هستند؟ به این پرسش در سال ۱۹۴۳ به کمک مفهوم حلقه‌ی سه تایی توسط هال پاسخ داده شد. وی دو عمل جمع و ضرب روی مجموعه‌ی K را با یک عمل سه‌تایی جایگزین نمود که‌به هر سه عنصر K عنصر منحصربه‌فردی نظیر می‌کند. زوج (K,T) شامل مجموعه‌ی K که در آن دو عنصر متمایز $\circ$ و ۱ را مشخص کرده‌ایم همراه با عمل $T : K^{\text{۳}} \to K$ حلقه‌ی سه‌تایی نامیده می‌شود هرگاه:

$T_{\text{۱}}$. برای هر $m, a, c \in T$، $T(a, \circ, c) = T(\circ .m, c) = c$.

$T_{\text{۲}}$. برای هر $m, a, c \in K$، دقیقا یک $z \in K$ وجود دارد که $T(a, m, z) = c$.

$T_{\text{۳}}$. به ازای هر $m_{\text{۱}}, m_{\text{۲}}, b_{\text{۱}}, b_{\text{۲}} \in K$ به قسمی که $m_{\text{۱}} \neq m_{\text{۲}}$ دقیقا یک $x \in K$ وجود دارد که $T(x, m_{\text{۱}}, b_{\text{۱}}) = T(x, m_{\text{۲}}, b_{\text{۲}})$.

$T_{\text{۴}}$. برای هر $a_{\text{۱}}, a_{\text{۲}}, c_{\text{۱}}, c_{\text{۲}} \in K$ به قسمی که $a_{\text{۱}} \neq a_{\text{۲}}$، دقیقا یک زوج $(m, b) \in K^{\text{۲}}$ وجود دارد که $T(a_{\text{۱}}, m, b) = c_{\text{۱}}$ و $T(a_{\text{۲}}, m, b) = c_{\text{۲}}$.

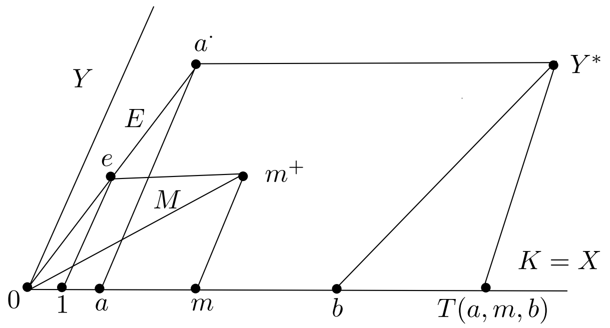
$T_{\text{۵}}$. برای هر $m, a \in K$، $T(a, \text{۱}, \circ) = a, \quad T(\text{۱}, m, \circ) = m$.

روی هر کج میدان متناوب و به طور کلی روی هر شبه‌میدان می‌توان یک حلقه‌ی سه‌تایی با ضابطه‌ی $T(a, m, b) = m \cdot a + b$ تعریف کرد. به عکس برای هر حلقه‌ی سه‌تایی (K, T) می‌توان دو عمل «$+$» و «$\cdot$» با ضابطه‌های زیر مشخص نمود.

$$a + b = T(a, \text{۱}, b), \quad a \cdot b = T(b, a, \circ)$$

در این صورت $(K, +)$ و $(K^*, \cdot)$ به ازای $K^* = K \setminus \{\circ\}$، لوپ هستند و در حالت کلی تساوی $T(a, m, b) = m \cdot a + b = T(T(a, m, \circ), \text{۱}, b)$ برقرار نیست. برقراری این تساوی منجر به یک رده‌بندی اساسی حلقه‌های سه‌تایی می‌شود. این تساوی فقط در حلقه‌های سه‌تایی به اصطلاح **خطی** برقرار است. برای هر حلقه‌ی سه‌تایی می‌توان صفحه‌ی آفین $A_{\text{۲}}(K)$ و سپس بستار تصویری آن را تعریف

نمود. در این صفحه، K^2 مجموعه‌ی نقاط و $G = \{\langle m,c\rangle | m,c \in K\} \cup \{\langle c\rangle | c \in K\}$ مجموعه‌ی خطوط است به قسمی که $\langle c\rangle = \{(c,y) | y \in K\}$ و $\langle m,c\rangle = \{(x,y) \in K^2 | y = T(x,m,c)\}$. هال نشان داد که به هر صفحه‌ی آفین (P,G) می توان یک حلقه‌ی سه‌تایی (K,T) نظیر کرد به قسمی که روی صفحه‌ی مختصات (K,T) به شکل فوق قابل نمایش است. برای این کار کافی است یک دستگاه مرجع (X,Y,e) در نظر بگیریم که در آن X,Y دو خط متقاطع هستند و $e \notin X,Y$. سپس قرار می‌دهیم $K = X$، $\{0\} = K \cap Y$، $E = \overline{0,e}$، $K^+ = \{e \| K\}$ و برای $m,a,b \in K$، $a^{\cdot} = \{a \| Y\} \cap E$، $M = \overline{0,m^+}$، $m^+ = \{m \| Y\} \cap K^+$، $Y^* = \{b \| M\} \cap \{a^{\cdot} \| K\}$ و $T(a,m,b) = K \cap \{Y^* \| Y\}$.



شکل ۳.

در این صورت (K,T) یک حلقه‌ی سه‌تایی است. باید توجه داشت که حلقه‌ی سه‌تایی به دستگاه مرجع انتخاب شده وابسته است. صفحات آزادی وجود دارند که در آنها اساسا هیچ قضیه‌ی بستاری برقرار نیست و به نظرمی‌رسد حلقه‌ی سه‌تایی آنها ساختار خاصی نداشته باشد ولی هال نشان داد که قضیه‌ی زیر برقرار است.

قضیه ۶ الف) برای هر شبه‌میدان مسطح $(\mathbb{K},+,\cdot)$، صفحه‌ی $A_2(\mathbb{K})$ یک صفحه‌ی انتقالی است.

ب) برای هر صفحه‌ی انتقالی، یک شبه‌میدان مسطح $(\mathbb{K},+,\cdot)$ وجود دارد به قسمی که می‌توان این صفحه را به صورت $A_2(\mathbb{K})$ نمایش داد.

یادآوری می‌کنیم که منظور از یک **شبه‌میدان**، سه‌تایی $(\mathbb{K},+,\cdot)$ است به قسمی که $(\mathbb{K},+)$ یک گروه آبلی و $(K^*,\cdot)$ یک لوپ است و قانون توزیع‌پذیری از چپ، $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ برقرار است.

منظور از یک شبه‌میدان **مسطح** شبه‌میدانی است که برای هر $a \neq b$، معادله‌ی $ax = bx + c$ در آن جوابی منحصربه فرد دارد.

همچنین قابل ذکر است که به دلیل هم ارز بودن شرط بزرگ تامسن وبنداشت پاپوس، قضیه‌ی زیر به دست می آید.

قضیه ۷ اگر در یک صفحه‌ی آفین برای هر دستگاه مرجع، عمل ضرب حلقه سه‌تایی، یعنی $a\cdot b = T(b,a,0)$ آبلی باشد آنگاه این صفحه پاپوسی و در نتیجه حلقه سه‌تایی نظیر آن یک میدان است.

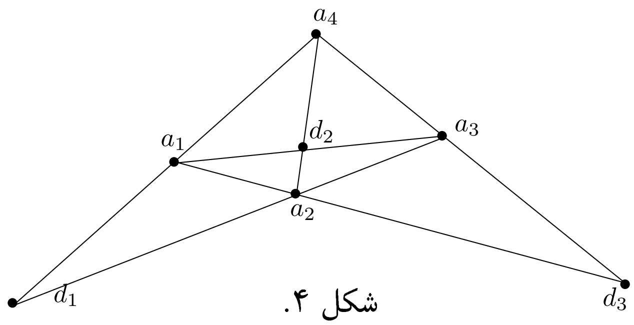
روش هال در مختصاتی کردن صفحه‌های تصویری غیردزارگی به کمک حلقه سه‌تایی، بررسی این صفحات رادرمسیر روشمندتری قرارداد.

رده‌بندی صفحات تصویری

نخستین رده از صفحات تصویری غیردزارگی که به شکل روشمندی مطالعه شدند، صفحات تصویری مفانگ بودند. صفحات تصویری مفانگ را می‌توان به شکل‌های مختلفی مشخص نمود. استفاده از بنداشت کوچک دزارگ که در آن مرکز بر محور منطبق است، یکی از این روش‌ها است. یک مشخصه‌ی دیگر صفحات تصویری مفانگ این است که تمامی صفحات آفین مشتق، انتقالی هستند. روش دیگری برای مشخص کردن این صفحات بر اساس قضیه‌ی زیر است.

قضیه ۸ هر صفحه‌ی تصویری که حلقه سه تایی نظیر آن (K,T) همراه با عمل جمع و ضرب پدید آمده یک میدان متناوب باشد یک صفحه‌ی مفانگ است.

مفانگ در تحقیقات خود قضیه‌ای را با عنوان **بنداشت چهارضلعی کامل** (V) مفروض گرفت. یادآوری می‌کنیم که منظور از یک چهار ضلعی کامل (a_1, a_2, a_3, a_4)، چهارنقطه‌ی متمایز است که هیچ سه تای آنها هم خط نیستند (شکل ۴) و **بنداشت پادفانو** به معنای آن است که نقاط $d_1 = \overline{a_4, a_1} \cap \overline{a_2, a_3}$، $d_2 = \overline{a_4, a_2} \cap \overline{a_3, a_1}$ و $d_3 = \overline{a_4, a_3} \cap \overline{a_1, a_2}$ هم خط هستند (شکل ۴).



شکل ۴.

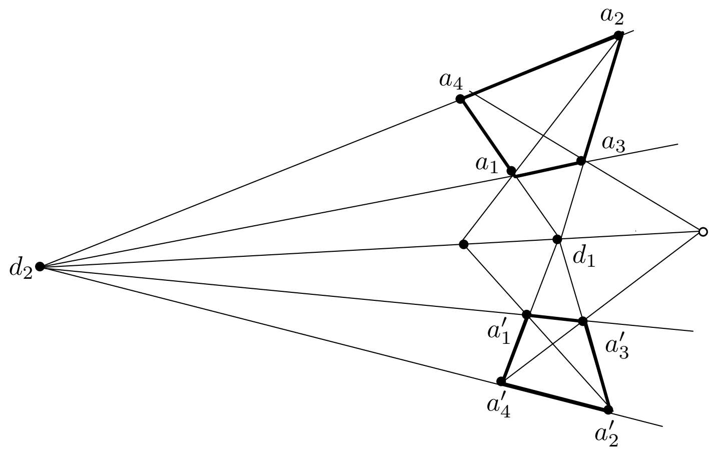
قضیه ۹ (V). فرض کنیم $(a_1, a_2, a_3, a_4),(a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$ دو چهارضلعی کامل باشند به قسمی که $\overline{a_2 a_{,3}} \cap \overline{a_1, a_4} = d_1 = d'_1 = \overline{a'_2, a'_3} \cap \overline{a'_1, a'_4}$ و $\overline{a}_1, a_3 \cap \overline{a_2, a_4} = d_1 = d'_2 = \overline{a'_1, a'_3} \cap \overline{a'_2, a'_4}$ در این صورت اگر خطوط $\overline{a_1, a_2}$، $\overline{d_1, d_2}$ و $\overline{a'_1, a'_2}$ از یک نقطه بگذرند آنگاه خطوط $\overline{a_3, a_4}$، $\overline{d_1, d_2}$ و $\overline{a'_3, a'_4}$ نیز ازیک نقطه می گذرند (شکل ۵).

از این بنداشت که نتیجه‌ای از قضیه‌ی کوچک دزارگ است نتیجه می‌شود که یک صفحه‌ی تصویری در بنداشت فانو یا بنداشت پادفانو صدق می‌کند. اگر $d_۱, d_۲, d_۳$ هم خط نباشند می‌گوییم صفحه‌ی تصویری **فانویی** است. در یک صفحه تصویری فانویی گزاره‌های زیر معادل هستند.

۱) قضیه‌ی چهار ضلعی کامل (V) برقرار است.

۲) قضیه کوچک دزارگ (Id) برقرار است.

۳) چهارتایی همساز خوش تعریف و تحت افکنش‌ها ناوردا است.



شکل ۵.

در صفحات تصویری مفانگ فانوئی چهارتایی‌های همساز دارای نسبت‌های ضربدری برابر ۱ − هستند. همچنین از قضیه‌ی کوچک دزارگ نتیجه می‌شود که گروه خودریختی‌های یک صفحه‌ی تصویری مفانگ، روی چهارضلعی‌ها انتقالی عمل می کند. درسالهای ۱۹۵۰ و ۱۹۵۱ براک، کلاین فلد واسکورنیاکف نشان دادند که هر میدان متناوب سره یک جبر کیلی − دیکسون است. به این ترتیب یک رهیافت تحلیلی برای مطالعه‌ی صفحات مفانگ به وجود آمد. حتی نشان داده شد که:

قضیه ۱۰ گروه خودریختی‌های یک صفحه مفانگ، روی چهارضلعی‌های کامل، انتقالی عمل می کند.

به کمک این قضیه نشان داده شد که همانند صفحات دزارگی، میدان متناوب نظیر یک صفحه‌ی مفانگ، مستقل از دستگاه مرجع است. از نتایجی که به دست آمده است می‌توان به شیوه‌های زیر صفحات تصویری و آفین را رده‌بندی کرد.

۱) به کمک قضیه های بستاری مانند قضیه‌ی پاپوس، دزارگ و... .

۲) براساس ویژگی های اضافی حلقه‌ی سه‌تایی نظیر این صفحه‌ها.

۳) با استفاده از ویژگی‌های گروه خودریختی آنها.

۴) براساس ویژگی‌های افکنش‌ها و افکنش‌های موازی.

روشن است که بین این رده‌بندی‌ها رابطه‌ی نزدیکی وجود دارد. نخستین رده‌بندی صفحات تصویری را فانو بر اساس بنداشت فانو مطرح کرد [۳]. این رده‌بندی شامل دو گروه صفحات فانوئی و پادفانوئی است. به منظور بیان رده‌بندب لنتز ابتدا به یادآوری چند تعریف می‌پردازیم.

فرض کنیم a, z دو نقطه و A, Z دو خط در یک صفحه‌ی تصویری باشند. صفحه‌ی تصویری (E, G) را (z, A) —انتقالی می‌نامیم هرگاه گروه (z, A) — افکنش‌ها به ازای یک خط G که $z \in G$ و $G \neq A$، روی مجموعه‌ی $\{x \in G | x \neq z, x \notin A\}$ انتقالی عمل کند.

این صفحه را (z, a)—انتقالی می‌نامیم هرگاه به ازای هر خط گذرنده از نقطه‌ی a مانند X یک صفحه‌ی (z, X)— انتقالی باشد.

صفحه را (Z, A) — انتقالی می‌نامیم هرگاه به ازای هر نقطه‌ی $x \in Z$ یک صفحه‌ی (x, A) — انتقالی باشد.

هسنبرگ دریافته بود که یک صفحه تصویری دزارگی است اگر و تنها اگر برای هر زوج نقطه و خط دلخواه (z, A) — انتقالی باشد. براساس این مفاهیم لنز [۵] و [۵] رده‌بندی زیر را مطرح کرد.

برای صفحه‌ی تصویری $P = (E, G)$ فرض کنیم $L = \{(z, A) | z \in E, A \in G, z \in A\}$ به قسمی که P یک صفحه‌ی (z, A) —انتقالی است. در این صورت P به یکی از رده‌های زیر تعلق دارد.

I) $L = \emptyset$.

II) $|L|=1$.

III) دقیقا یک نقطه‌ی a ویک خط Z وجود دارد که $a \notin Z$ و $L = \{(z, \overline{z, a}) | z \in Z\}$.

IV_a) دقیقا یک خط A وجود دارد که $L = \{(z, A) | z \in A\}$.

IV_b) دقیقا یک نقطه‌ی z وجود دارد که $L = \{(z, A) | z \in A, A \in G\}$.

V) دقیقا یک خط $Z \in G$ و یک نقطه $a \in Z$ وجود دارد که

$$L = \{(z, Z) | z \in Z\} \cup \{(a, A) | a \in A, A \in G\}$$

VI_a) دقیقا یک خط Z وجود دارد که

$$L = \{(A \cap Z, A) | A \in G, A \neq Z\} \cup \{(z, Z) | z \in Z\}$$

VI_b) دقیقا یک نقطه‌ی $a \in E$ وجود دارد که

$$L = \{(z, \overline{a, z} | z \in E, z \neq a\} \cup \{(a, A) | A \in G, a \in A\}$$

VII) $L = \{(z, A) \in E \times G | z \in A\}$

به این ترتیب رده بندی لنز براساس تعداد اعضای L مطرح شده است. هر چه L مجموعه‌ی بزرگتری باشد صفحه‌ی تصویری ساختار قوی‌تری دارد. شرایط I، II، III، V و VII خود همزاد هستند اما IV_a همزاد

IV_b، و VI_a همزاد VI_b است. هر صفحه‌ی تصویری از رده‌های IV_a، V، VI_a، VI_b و VII یک صفحه انتقالی است. زیرا با کنار گذاشتن یک خط A از صفحه‌ای در رده‌ی IV_a، صفحه‌ی آفینی به دست می آید که گروه انتقال‌ها روی مجموعه‌ی $E \setminus A$ به صورت انتقالی عمل می‌کند. به همین دلیل هر صفحه‌ی تصویری در رده‌های VII, VI, V, IV_a را می‌توان با یک شبه میدان مسطح مختصاتی نمود. برای رده‌های VII, VI, V حتی می‌توان ثابت کرد که این شبه‌میدان توزیع پذیر است یعنی $a.(b+c) = a.b + a.c$ و $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$. همچنین ثابت شده است که برای صفحه‌های کلاس VI_b, VI_a به ترتیب شرط وارون‌پذیری چپ و راست یعنی $a^{-1}(ab) = b, (ba)a^{-1} = b$ به ازای $a \neq 0, a, b \in Q$ برقرار است.

در سال ۱۹۵۱ اسکورنیاکوف برای مشخصه‌ی غیر از ۲ و در سال ۱۹۵۵ سان‌سوکی برای مشخصه‌ی ۲ مشخص کردند که در یک شبه میدان شرکت پذیر Q شرط وارون چپ و راست معادل هستند. بنابراین هر شبه میدان شرکت پذیر یک میدان متناوب است هرگاه یکی از شرایط وارون چپ یا راست برقرار باشند. در نتیجه رده های VI_a, VI_b تهی هستند. کلاس VII دقیقا از صفحات مفانگ و دزارگی تشکیل شده است. در سال ۱۹۵۷ رده بندی لنتز به‌وسیله‌ی بارلوتی ظریف‌تر شد. وی (z,A)—انتقالی‌هایی را که $z \notin A$ وارد رده‌بندی کرد. فرض کنیم $B = \{(z, A) \mid z \neq a,$ است انتقالی—(z,A) صفحه‌ی (P,G) یک صفحه‌ی تصویری $\}$.
بارلوتی رده‌های لنتز را به کمک مجموعه‌ی B به شکل زیر به زیر کلاس‌های دیگری تقسیم کرد. در این‌جا کلاس‌هایی که بنابر قضیه‌ی معروف «گینگریچ» تهی هستند مطرح نشده‌اند.

I_1. $L = \emptyset = B$.

I_2. $L = \emptyset$ و $|B| = 1$.

I_3. $L = \emptyset$ و $|B| = 2$.

I_4. $L = \emptyset$ و $|B| = 3$ به قسمی که $B = \{(a, \overline{b,c}), (b, \overline{c,a}), (c, \overline{a,b})\}$ و c, b, a سه نقطه ناهم خط هستند.

I_6. $L = \emptyset$ و دقیقا یک نقطه‌ی a ویک خط A وجود دارند که $a \in A$ و یک نگاشت دوسویی $\beta : A\setminus\{a\} \to \{X \in G \mid a \in X, X \neq A\}$ به قسمی که $B = \{(x, \beta(x) \mid x \in A\setminus\{a\}\}$.

II_1. $|L| = 1, B = \emptyset$.

II_2. $|B| = 1$, $|L| = 1$ به قسمی که $B = \{(b, X) \mid b \in A, a \in X\}$.

II_3. $|L| = 1$ و B مانند I_6 است به قسمی که $(a, A) \in L$ نقش زوج خط و نقطه را بر عهده دارد.

III_1. L مانند III و $B = \emptyset$.

III_2. L مانند III و $B = \{(a, Z)\}$.

IV_{a_1}. L مانند IV_a و $B = \emptyset$.

IV_{a_2}. L مانند IV_a و $a, a' \in A$ وجود دارند که
$a \neq a', B = \{(a, X) \mid X \in G\setminus\{A\}, a' \in X\} \cup \{(a', X') \mid X' \in G\setminus\{A\}, a \in X'\}$.

$IV_{a_۳}$. L مانند IV_a و یک نگاشت خود وارون بدون نقطه‌ی ثابت $\beta : A \to A$ وجود دارد که $B = \{(x,X) \mid \beta(x) \in X, X \neq A\}$.

IV_{b_i}. همزاد VI_{a_i}.

V. L مانند V و $B = \emptyset$.

$VII_۱$. L مانند VII و $B = \emptyset$.

$VII_۲$. L مانند VII و $B = (E \times G) \backslash L$.

در یک صفحه‌ی تصویری (E,G)، (z,A)—انتقالی بودن صفحه معادل است با یک حالت خاص و موضعی از قضیه‌ی دزارگ. به این ترتیب که در قضیه‌ی دزارگ $z = z_۰$,$s_{۱۲}, s_{۱۳} \in A$ را پیش فرض بگیریم. به این ترتیب رده‌های $VII_۲$ صفحات تصویری دزارگی هستند، کلاس $VII_۱$ صفحات مفانگ سره و کلاس‌های IV_a و V صفحات انتقالی هستند که صفحه‌ی مفانگ نیستند.

این رده‌بندی منجر به جهت گیری تحقیقات در مورد وجود رده های خاص از صفحه‌های تصویری به‌ویژه وجود صفحات متناهی شد. در سال ۱۹۶۰ اسپنسر نشان داد که رده‌ی $II_۳$ تهی است. مثال هیلبرت در سال ۱۸۹۹ به رده‌ی $I_۱$ تعلق دارد و مثال مولتون به رده‌ی $III_۳$. به جز کلاس $I_۶$، که هنوز نمی دانیم آیا مدلی— که حتما باید نامتناهی باشد — برای آنها هست و کلاس $II_۳$، هیچ یک از کلاس های رده‌بندی لنتز — بارلوتی تهی نیستند. در کلاس‌های $VII_۱, III_۲, III_۱, I_۶$ مدل متناهی وجود ندارد. در مورد $VII_۱$ مشخص است که هر میدان متناوب سره باید نامتناهی باشد. یک مساله‌ی باز این است که آیا مدل‌های متناهی برای رده‌های $II_۲, I_۴, I_۳, I_۲$ وجود دارند؟

هر دو حلقه‌ی سه تایی نظیر یک صفحه ی تصویری در صورتی که گروه خودریختی‌های صفحه روی چهارگوش‌ها انتقالی عمل می‌کند، یکریخت هستند. این حالت در مورد صفحات مفانگ برقرار است. برای صفحات غیر مفانگ ویژگی‌های حلقه‌ی سه‌تایی اساسا به انتخاب دستگاه مختصات وابسته هستند. به این ترتیب رده‌بندی صفحات تصویری بر اساس ویژگی‌های حلقه‌ی سه‌تایی نظیر آن‌ها به دستگاه مختصات وابسته می‌شود. رابطه‌ی بین ویژگی‌های حلقه‌ی سه‌تایی و (z,A)—انتقالی بودن صفحه در کارهای بئر و هال مورد بررسی قرار گرفته است.

کتاب‌نامه

[1] Barlotti, A. "*Le possibili configurazioni del sistema delle coppie punto-retta (A,a) per cui un piano grafico risulta (A,a)-transitivo* " Boll. Un. Mat. Ital. **12** (1957), 212-226.

[2] Ciftci, S. Ferrar, J. C. and Kaya, R. "*On 4-transitivity in the Moufang plane*" J. of Geometry **31** (1988), 65-68.

[3] Fano, G. "*Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva*" Giornale di Matematiche **30** (1891) 106-132.

[4] Dembowski, P. "*Zur Geometrie der Suzukigruppen*" Math. Z. **94** (1966), 106-109.

[5] Lenz, H. "*Kleiner Desarguesscher Satz unnd Dualitat in projektiven Ebenen*" Jber. DMV **57** (1954), 20-31.

[6] Skornjakov, L.A "*Alternativkorper*" [Russ.] Trudy Moskov Mat. Obs'c'. **3** (1954), 347-373.

[7] Baer, R."*homogeneity of projective planes*" Amer. J. Math. **64** (1942), 137-152.

[8] Bol, G. "*topologische fragen der differentialgeometrie 65*" Gewebe und Gruppen. Math. Ann. **114** (1937), 414-431.

[9] Lenz, H. "*zur begündung der analytischen geometric* ". Bayer. Akad.Wiss.-nat.**K1**. (1954), 17-72.

[10] San Soucie, R.L "*right alternative division rings of chracteristic two*" Proc. Amer. math. Soc. **6** (1955), 291-296.

[11] Ferrar, J. C. "*cross-ratio in projective and affine planes* " Geometry- von Staudt's point of view. Dordrecht-London (1981), 101-125.

[12] Mofang, R. "*Die Schlnitpunktsätze des Projektiven spezialen Fünfecknetzes in ihrer Abhängigkeit voneinander*" Math. Ann. **106** (1932), 755-795.

[13] Singer, J. "*A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory*" Trans. Amer. Math. Soc. **43**, (1938), 377-385.