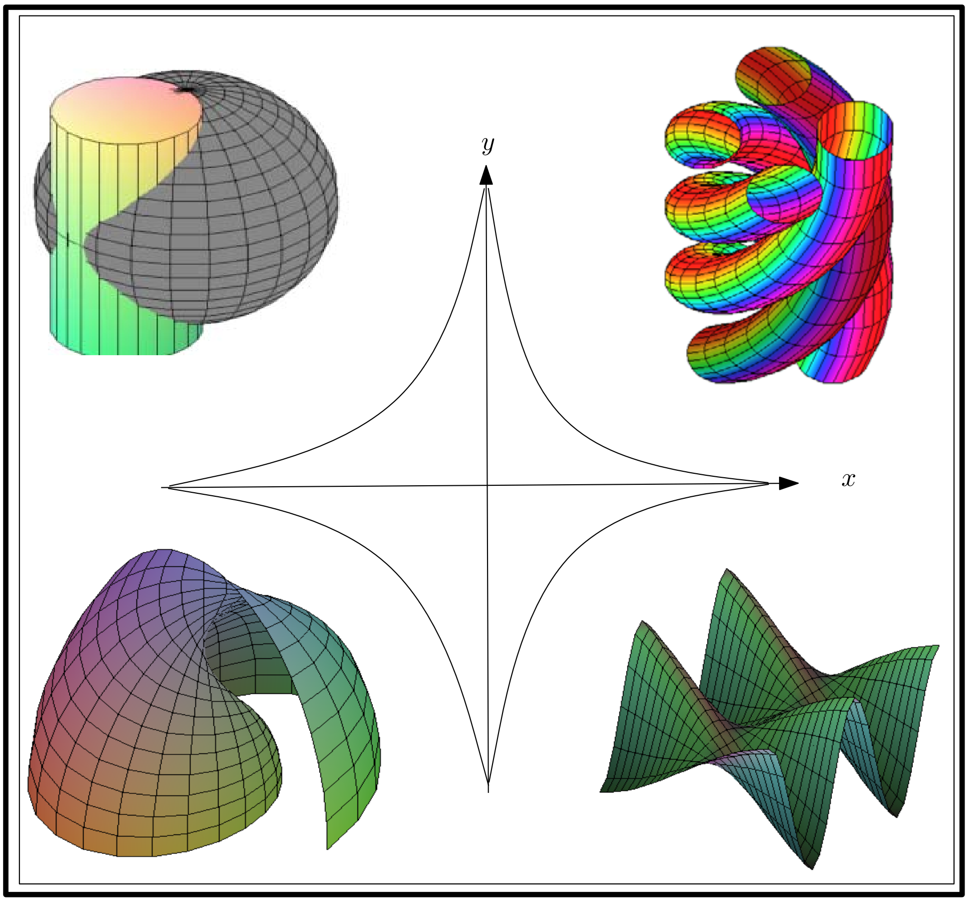
ریاضی عمومی ۲

حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع برداری و توابع حقیقی چند متغیره



گردآوری و تدوین : دکتر سید قهرمان طاهریان و دکتر فرید بهرامی

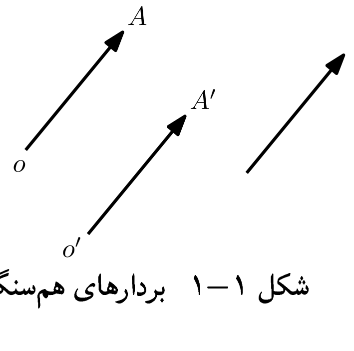
اعضای هیأت علمی دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱ − ۱ مقدمه‌ای بر بردارها

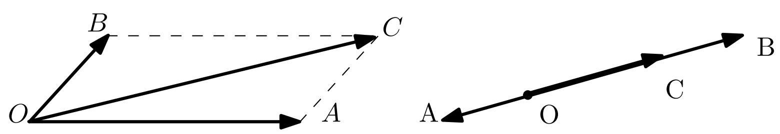
یکی از اهداف این درس آشنایی با توابع برداری و تعمیم مفاهیم حسابان از توابع حقیقی به این دسته از توابع است. برای این منظور نخست به بحث بردار و مفاهیم وابسته به آن می‌پردازیم. از جنبه‌ی تاریخی مفهوم بردار نخستین بار در علم فیزیک و برای بیان مفاهیمی مانند سرعت، نیرو، ... مطرح شد. ویژگی اصلی و مشخص‌کننده‌ی این مفاهیم داشتن **اندازه و جهت** است که از این پس آنها را بردار می‌نامیم و با حروف کوچک لاتین $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$ نمایش می‌دهیم. در ادامه‌ی بحث به‌طور دقیق‌ترمفهوم بردار را مطرح خواهیم‌کرد. از لحاظ هندسی مفهوم بردار به‌وسیله‌ی یک پاره‌خط جهت‌دار قابل نمایش است که طول آن طول بردار و جهت آن جهت بردار است. برای برداری چون $\mathbf{a}$، اندازه‌ی $\mathbf{a}$ را با نماد $\|\mathbf{a}\|$ نشان می‌دهیم. نمایش‌های هندسی مختلف را **نمایش‌های یک بردار** می‌نامیم هرگاه پاره‌خط‌های نظیر آنها موازی، هم‌طول و هم‌جهت باشند. چنین نمایش‌هایی را **بردارهای هم‌سنگ** نیز می‌نامیم (شکل ۱ − ۱).



شکل ۱ − ۱ بردارهای هم‌سنگ.

بر مبنای این تعریف دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را مساوی نامیده و با نماد $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ نمایش می‌دهیم هرگاه دارای نمایش‌های هندسی هم‌سنگ باشند. روشن است که هر نمایش هندسی بردار $\mathbf{a}$ مشخص‌کننده‌ی یک نقطه‌ی آغازی مانند A و یک نقطه‌ی پایانی مانند B است. در این صورت $\mathbf{a}$ را با نماد $\overrightarrow{AB}$ نیز نمایش می‌دهیم. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را **موازی** می‌نامیم هرگاه راستاهای متناظر آنها موازی باشند. در این صورت می‌نویسیم $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$.

برای دو بردار غیر موازی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با انتخاب نقطه‌ای مانند O، نقاط A و B وجود دارند به گونه‌ای که بردار $\overrightarrow{OA}$ نمایش هندسی $\mathbf{a}$ و بردار $\overrightarrow{OB}$ نمایش هندسی $\mathbf{b}$ باشد. در این صورت نقطه‌ای چون C در صفحه‌ی در برگیرنده‌ی O، A و B وجود دارد به قسمی که چهار ضلعی $OACB$ یک متوازی‌الاضلاع است. بردار با نمایش هندسی $\overrightarrow{OC}$ را حاصل جمع $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نامیده و با $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱—۲).
به سادگی می‌توان نشان داد که بردار حاصل جمع مستقل از انتخاب نقطه‌ی O است. به این معنی که اگر O' نقطه‌ای غیر از O و $\overrightarrow{O'A'}$ و $\overrightarrow{O'B'}$ به ترتیب نمایش‌های هندسی دیگری برای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ باشند، با تکرار روند فوق، بردار $\overrightarrow{O'C'}$ هم‌سنگ $\overrightarrow{OC}$ است. در حالتی که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ موازی باشند، بردار حاصل جمع، برابر بردار نظیر حاصل جمع جبری پاره‌خط‌های OA و OB تعریف می‌شود (شکل ۱—۲). مشاهده می‌شود که عمل جمع برداری خاصیت‌های جابجایی و شرکت‌پذیری دارد.

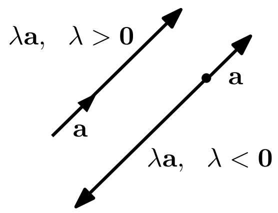


شکل ۱—۲ جمع بردارها.

در بررسی مواردی که در برگیرنده‌ی مفهوم بردار است، وجود عنصری با اندازه‌ی صفر ولی بدون جهت ضروری است. این عنصر منحصر به فرد را **بردار صفر** نامیده و آن را با نماد $\mathbf{0}$ نشان می‌دهیم. از لحاظ هندسی چنین برداری با یک نقطه قابل نمایش است. برای بردار دلخواه $\mathbf{a}$ بردارهای $\mathbf{a} + \mathbf{0}$ و $\mathbf{0} + \mathbf{a}$ را برابر $\mathbf{a}$ تعریف می‌کنیم. برای بردار غیرصفر $\mathbf{a}$ با نمایش هندسی $\overrightarrow{AB}$، برداری وجود دارد که نمایش هندسی آن $\overrightarrow{BA}$ است. این بردار را **قرینه‌ی** $\mathbf{a}$ نامیده و با نماد $-\mathbf{a}$ نشان می‌دهیم. روشن است که برای هر بردار $\mathbf{a}$ بردار $\mathbf{a} + (-\mathbf{a})$ همان بردار $\mathbf{0}$ است.

برای برداری چون $\mathbf{a}$ بانمایش هندسی $\overrightarrow{AB}$ و عدد $\lambda \in \mathbb{R}$ که از این پس **اسکالر** نیز نامیده می‌شود نقطه‌ای مانند C بر خط گذرنده بر نقاط A و B وجود دارد به قسمی که

$\|\overrightarrow{AC}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{AB}\|$ و در حالتی که $\lambda > ۰$، $\overrightarrow{AC}$ با $\overrightarrow{AB}$ هم‌جهت است. در این حالت، بردار $\overrightarrow{AC}$ را ضرب اسکالر λ و بردار $\mathbf{a}$ نامیده و آن را با نماد $\lambda\mathbf{a}$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که $۰ > \lambda$، بردار $\lambda\mathbf{a}$ را به عنوان قرینه‌ی بردار $|\lambda|\mathbf{a}$ تعریف می‌کنیم (شکل ۱ــ۳). سرانجام اگر $\mathbf{a}$ بردار صفر یا λ اسکالر صفر باشد، $\lambda\mathbf{a}$ را بردار صفر تعریف می‌کنیم.



شکل ۱ــ۳ ضرب اسکالر در یک بردار.

برای هر دو اسکالر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و هر دو بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، ویژگی‌های زیر قابل تحقیق است.

$$(\lambda+\mu)\ \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a} \quad , \quad \lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} \quad , \quad \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b} \quad , \quad ۱\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

مجموعه‌ی بردارهای هندسی با دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر حالت خاصی از یک ساختار ریاضی است که در ادامه‌ی بحث به آن می‌پردازیم. مجموعه ناتهی V همراه با نگاشت $+ : V \times V \longrightarrow V$ با ضابطه‌ی $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \longmapsto \mathbf{a}+\mathbf{b}$ و نگاشت $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ با ضابطه‌ی $(\lambda,\mathbf{a}) \longmapsto \lambda\cdot\mathbf{a} =: \lambda\mathbf{a}$ را یک **فضای برداری روی** $\mathbb{R}$ می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

الف) برای هر $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{V}$، $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$.
ب) برای هر $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathbf{V}$، $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$.
ج) عضوی چون $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ وجود دارد به قسمی که برای هر $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$، $\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}$.
د) برای هر $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ عضوی چون $-\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ وجود دارد که $\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
ه) برای هر $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$، $۱\ \mathbf{a} = \mathbf{a}$.
و) برای هر $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ و $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$، $(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ و $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$.
ز) برای هر $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$، $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$.

نگاشت «$+$» که یک عمل دوتایی است، **جمع برداری**، نگاشت «$\cdot$» **ضرب اسکالری** و اعضای V **بردار** نامیده می‌شوند. برای بردارهای $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ و اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$، بردار $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ را **جمع برداری** $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و بردار$\lambda\mathbf{a}$ را ضرب اسکالر λ در بردار $\mathbf{a}$ می‌نامیم. بردار $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ را **بردار صفر** و برای بردار $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ بردار $-\mathbf{a}$ را **قرینه‌ی $\mathbf{a}$** می‌نامیم.
می‌توان ثابت کرد که بردار صفر در هر فضای برداری منحصر به فرد است. همچنین برای هر بردار $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ بردار قرینه‌ی $\mathbf{a}$ نیز یگانه است.

مثال ۱-۱-۱ ۱) بنابر آنچه بیان شد، مجموعه تمام بردارهای هندسی همراه با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر یک فضای برداری است.

۲) برای $n \in \mathbb{N}$ فرض کنیم $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \cdots, x_n) \ : \ x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$. در این صورت $\mathbb{R}^n$ با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری زیر یک فضای برداری است.

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) := (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) := (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

۳) فرض کنیم $M_{m\times n}$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. در این صورت مجموعه‌ی $M_{m\times n}$ همراه با اعمال جمع ماتریسی و ضرب اسکالر با ماتریس تشکیل یک فضای برداری می‌دهد.

۴) فرض کنیم $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باشد. در این صورت مجموعه‌ی

$$C(I, \mathbb{R}) := \{f \mid \text{است } I \text{ تابعی پیوسته بر بازه‌ی } f : I \to \mathbb{R}\}$$

همراه با اعمال جمع توابع و ضرب اسکالر در توابع تشکیل یک فضای برداری می‌دهد.

۵) فرض کنیم $V = \mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$. روی V جمع برداری را به صورت $a \oplus b := ab$ و ضرب اسکالری را با $\lambda \cdot a := a^\lambda$ تعریف می‌کنیم. در این صورت V همراه با این اعمال تشکیل یک فضای برداری می‌دهد. (تحقیق کنید!)

فرض کنیم V یک فضای برداری باشد. زیر مجموعه‌ی ناتهی W از V را یک **زیرفضای برداری** V می‌نامیم هرگاه همراه با تحدید اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری V به W، یک فضای برداری باشد.

مشاهده می‌شود که مجموعه‌ی ناتهی $W \subseteq V$ یک زیرفضای برداری V است اگر و تنها اگر نسبت به اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر بسته باشد. به عبارت دیگر برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \in \mathbf{W}$.

برای بردارهای $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ در V و اسکالرهای $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$، بردار $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ را یک **ترکیب خطی** از بردارهای $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ می‌نامیم.

مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی بردارهای $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ در V تشکیل یک زیرفضای برداری از V می‌دهد. این زیرفضا را با نماد $< \{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n\} >$ نمایش می‌دهیم و آن را

زیرفضای تولید شده توسط بردارهای $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ می‌نامیم.

بردارهای $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ را در V **مستقل خطی** می‌نامیم هرگاه از $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ نتیجه شود $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. در غیر این صورت این بردارها را **وابسته‌ی خطی** می‌نامیم.

مجموعه‌ی بردارهای $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n\} \subseteq V$ را **یک پایه** برای V می‌نامیم هرگاه مستقل خطی باشند و $V = <\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n\}>$.

ثابت می‌شود که اگر V یک پایه‌ی n عضوی داشته باشد، هر پایه‌ی دیگر V نیز n عضو دارد. عدد منحصر به فرد n را **بعد فضای** V نامیده و آن را با نماد $\dim V$ نمایش می‌دهیم.

در حالتی که هیچ زیر مجموعه‌ی باپایانی از بردارهای مستقل خطی فضای برداری را تولید نکند، فضا را **با بعد بی‌پایان** می‌نامیم.

مثال ۱-۱-۲ ۱) بردارهای $\mathbf{a} = (1, 1, -2)$ و $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی هستند. در واقع اگر $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = 0$ آنگاه λ, μ جواب‌های دستگاه زیر هستند.

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ 3\lambda - 2\mu = 0 \end{cases}$$

که به وضوح $\lambda = \mu = 0$ تنها جواب آن است. امّا به ازای $\mathbf{c} = (2, 2, -4)$، بردارهای $\mathbf{c}, \mathbf{a}$ وابسته‌ی خطی هستند، زیرا به ازای اسکالرهای غیرصفر $\lambda = 2$ و $\mu = -1$، $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{c} = 0$. به همین ترتیب به‌ازای $\mathbf{d} = (3, 5, 4)$ بردارهای $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{d}$ وابسته خطی هستند. زیرا به ازای اسکالرهای $\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = 1,\ \ \lambda_3 = -1$، $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{d} = 0$.

۲) مجموعه‌ی $W = \{(x, y, 0)\ :\ x, y \in \mathbb{R}\}$ یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^3$ است. بردارهای $\mathbf{a} = (2, 0, 0)$ و $\mathbf{b} = (0, 3, 0)$ در W مستقل هستند و برای هر $\mathbf{c} = (x, y, 0)$ می‌توان نوشت $\mathbf{c} = \frac{x}{2}\mathbf{a} + \frac{y}{3}\mathbf{b}$. یعنی مجموعه‌ی $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ تشکیل یک پایه برای W می‌دهد. بنابراین $\dim W = 2$.

۳) فرض کنیم $V = C(I, \mathbb{R})$، $f_0(x) = 1$، $f_1(x) = x$، $f_2(x) = x^2$ و $f_3(x) = x^3$. در این صورت زیر فضای تولید شده به وسیله‌ی f_0, f_1, f_2, f_3 عبارت است از $P_3(I, \mathbb{R})$، چندجمله‌ای‌های یک متغیره با درجه کوچکتر یا مساوی ۳. چون f_0, f_1, f_2, f_3 مستقل خطی هستند، $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ تشکیل

یک پایه برای زیرفضای $P_3(I,\mathbb{R})$ می‌دهد. بنابراین $\dim P_3(I,\mathbb{R}) = 4$. به ازای $f_0(x) = 1$، $f_1(x) = x$، ...، $f_n(x) = x^n$، ... زیرفضای تولید شده به‌وسیله‌ی f_0، f_1، $\cdots$ عبارت است از $P(I,\mathbb{R})$، فضای چندجمله‌ای‌های یک متغیره. هر زیرمجموعه‌ی دلخواه از $\{f_0, f_1, \ldots\}$ یک مجموعه از بردارهای مستقل خطی است. در واقع $P(I,\mathbb{R})$ یک زیرفضای با بعد بی‌پایان است و $\{f_0, f_1, \ldots\}$ یک پایه برای آن است.

۴) در فضای برداری $\mathbb{R}^n$، برای $i = 1, \cdots, n$ قرار می‌دهیم $\mathbf{e}_i := (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ که ۱ مولفه‌ی i ام $\mathbf{e}_i$ است. در این صورت برای هر $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$، $(x_1, \cdots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. به این ترتیب $\mathbb{R}^n =< \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\} >$. مشاهده می‌شود که بردارهای $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ مستقل خطی نیز هستند. بنابراین مجموعه‌ی $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است، در نتیجه $\dim \mathbb{R}^n = n$. این پایه را **پایه‌ی استاندارد** $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم.

در قضیه‌ی بعد رابطه‌ی بین استقلال خطی، فضای توسیع یافته و پایه‌ی فضا در فضای برداری n بعدی $\mathbb{R}^n$ بیان می‌شود.

قضیه ۱-۱-۳ فرض کنیم B یک زیر مجموعه‌ی n عضوی از $\mathbb{R}^n$ باشد. دراین صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.

الف) $\mathbb{R}^n =< B >$.

ب) B مستقل خطی است.

ج) B یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

فرض کنیم V و W دو فضای برداری باشند. نگاشت $T : V \to W$ را یک **نگاشت یا تبدیل خطی** می‌نامیم هرگاه برای هر اسکالر λ و هر دو بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ داشته باشیم

$$T(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b})$$

یک تبدیل خطی $T : V \to W$ بردارهای فضای V را طوری به بردارهای فضای W تصویر می‌کند که تصویرِ جمع و ضربِ اسکالرِ دو بردار با جمع و ضربِ اسکالرِ تصویرِ این دو بردار یکی باشد. این نکته ممکن است کمی در نگاه اول پیچیده باشد ولی با کمی دقت دیده می‌شود که در واقع تبدیل‌های خطی ساختار جبری فضا را حفظ می‌کنند. طبق تعریف تبدیل خطی، $T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b})$. بنابر این اگر دو بردار را با هم جمع

کنیم و تصویر مجموع را به دست آوریم به همان نتیجه می‌رسیم که تصویر بردارها را با هم جمع کنیم. به همین ترتیب طبق تعریف تبدیل خطی $T(\lambda\mathbf{a}) = \lambda T(\mathbf{a})$. بنابر این اگر بردار $\mathbf{a}$ را در اسکالر λ ضرب اسکالری کنیم و تصویر $\lambda\mathbf{a}$ به دست آوریم به همان نتیجه می‌رسیم که ابتدا بردار $\mathbf{a}$ را تصویر و سپس آن را در λ ضرب اسکالری کنیم. به این ترتیب یک تبدیل خطی، هر ترکیب خطی از بردارها را به ترکیب خطی تصویر آنها تبدیل می‌کند. نام تبدیل خطی برای این نگاشت به خاطر همین نکته است.

در صورتی که T یک‌به‌یک و پوشا نیز باشد آنرا یک **یکریختی** و فضاهای برداری V و W را **یکریخت** می‌نامیم. می‌توان نشان داد که اگر $T : V \to W$ یک یکریختی و $\{\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ یک پایه برای V باشد آنگاه $\{T(\mathbf{a}_۱), \cdots, T(\mathbf{a}_n)\}$ یک پایه برای W است. پس در این حالت $\dim V = \dim W$.

نگاشت‌های خطی رابطه‌ی بسیار نزدیکی با ماتریس‌ها دارند. یک ماتریس $m \times n$ مانند $M = (a_{ij})$ آرایه‌ای با m سطر و n ستون از اسکالرهای a_{ij} است.

به هر نگاشت خطی $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ می‌توان یک ماتریس $m \times n$ به شکل $A = (a_{ij})_{m\times n}$ نظیر کرد. برای مشخص کردن درایه‌های این ماتریس فرض کنیم $\{e_۱, \cdots, e_n\}$ پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^n$ و $\{e'_۱, \cdots, e'_m\}$ پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^m$ باشد. در این صورت اسکالرهای a_{ij} وجود دارند به قسمی که $T(e_i) = a_{i۱}e'_۱ + \cdots + a_{im}e'_m \quad (i = ۱, \cdots, n)$. در این صورت مقدار $T(\mathbf{x})$ را به ازای $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ می‌توان به صورت $A\mathbf{x}^t$ نیز بیان کرد که $\mathbf{x}^t$ ترانهاده‌ی $\mathbf{x}$ است.

مثال ۱-۱-۴ نگاشت $T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطه‌ی $T(x, y) = (۲x + y, x - y, x + ۴y)$ یک تبدیل خطی است. این نگاشت یک به یک هست ولی پوشا نیست. ماتریس نظیر این نگاشت یک ماتریس ۳×۲ به شکل $A = (a_{ij})_{۳\times۲}$ است. برای مشخص نمودن درایه‌های این ماتریس ابتدا $e_۱ = (۱, ۰)$، $e_۲ = (۰, ۱)$ پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^۲$ و $e'_۱ = (۱, ۰, ۰)$، $e'_۲ = (۰, ۱, ۰)$، $e'_۳ = (۰, ۰, ۱)$, پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^۳$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$T(e_۱) = T(۱, ۰) = (۲, ۱, ۱) = ۲\ e'_۱ + ۱\ e'_۲ + ۱\ e'_۳$$

بنابر این به ترتیب ۲, ۱, ۱ عناصر ستون اول ماتریس هستند. به همین ترتیب،

$$T(e_۲) = T(۰, ۱) = (۱, -۱, ۴) = ۱\ e'_۱ + (-۱)\ e'_۲ + ۴\ e'_۳$$

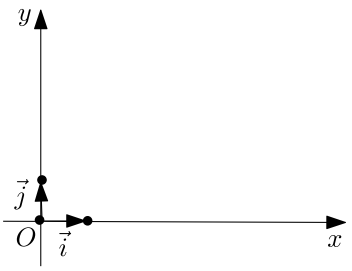
پس ۱, −۱, ۴ عناصر ستون دوم ماتریس A هستند. در نتیجه:

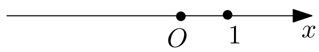
$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ \\ ۱ & ۴ \end{pmatrix}$$

مثال ۱-۱-۵ فضای برداری $W = \{(x, y, 0) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ با فضای برداری $\mathbb{R}^2$ یکریخت است. زیرا به ازای نگاشت یک به یک و پوشای $T : W \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی $T(x, y, 0) = (x, y)$ به سادگی تحقیق می‌شود که $T(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b})$.

در ادامه نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی تمام بردارهای هندسی در صفحه (فضا) و فضای برداری $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) یکریخت هستند. بدین منظور ابتدا به یادآوری مفهوم دستگاه مختصات قائم می‌پردازیم که**دستگاه مختصات دکارتی** نیز نامیده می‌شود.

با در نظر گرفتن یک خط جهت‌دار $\overrightarrow{Ox}$ با یک نقطه‌ی ثابت O روی آن به نام **مبداء** و یک واحد طول روی آن می‌توان یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌ی اعداد حقیقی و نقاط خط بر قرار ساخت (شکل ۱—۴).



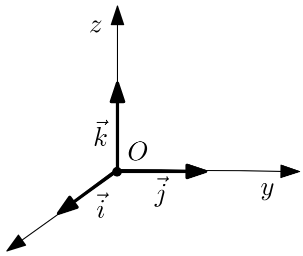


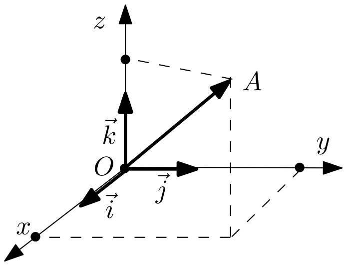
شکل ۱—۴ مختصات دکارتی روی خط.

شکل ۱—۵ مختصات دکارتی در صفحه.

به همین ترتیب به‌وسیله‌ی دو خط جهتدار متعامد $\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{Oy}$ با نقطه مشترک O به نام مبداء و یک واحد طول مشترک روی دو محور می‌توان یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌ی زوج‌های مرتب $\mathbb{R}^2$ و نقاط صفحه برقرار ساخت. این صفحه را صفحه‌ی دکارتی xy می‌نامیم. بردار به طول واحد $\overrightarrow{OI}$ و هم‌جهت با محور $\overrightarrow{Ox}$ را با $\mathbf{i}$ و بردار واحد $\overrightarrow{OJ}$ و هم‌جهت با محور $\overrightarrow{Oy}$ را با $\mathbf{j}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱—۵). به طریق مشابه، به کمک سه خط جهت‌دار و دوبه‌دو متعامد $\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{Oy}$ و $\overrightarrow{Oz}$ با نقطه‌ی مشترک O به نام مبداء و یک طول واحد مشترک روی سه محور می‌توان یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌ی سه‌تایی‌های مرتب $\mathbb{R}^3$ و نقاط فضا برقرار ساخت. این فضا را **فضای دکارتی** xyz می‌نامیم. بردارهای به واحد طول $\overrightarrow{OI}$، $\overrightarrow{OJ}$ و $\overrightarrow{OK}$ به‌ترتیب هم‌جهت بامحورهای $\overrightarrow{Ox}$، $\overrightarrow{Oy}$ و $\overrightarrow{Oz}$ را به ترتیب با $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱—٦). به کمک یک دستگاه مختصات دکارتی می‌توان برای بردارهای هندسی در صفحه و فضا نمایش تحلیلی منحصر به فردی به دست آورد. به عبارت دیگر اگر نقطه‌ی ثابت O رامبداء مختصات در نظر بگیریم آنگاه نظیر هر بردار هندسی $\mathbf{a}$ در فضای دکارتی xyz، سه تایی مرتب و منحصر به فرد $A = (x, y, z)$ وجود دارد به گونه‌ای که $\overrightarrow{OA}$ یک نمایش هندسی $\mathbf{a}$ است.

با توجه به ویژگی‌های جمع برداری می‌توان نوشت $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. عددهای x و y و z را مولفه‌های بردار $\mathbf{a}$ می‌نامیم (شکل ۱—۷).





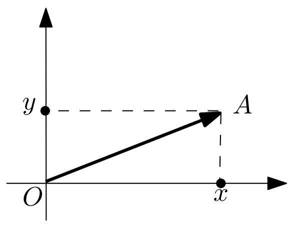
شکل ۱—۶ دستگاه مختصات دکارتی درفضا. شکل ۱—۷ مولفه‌های بردار در فضا.

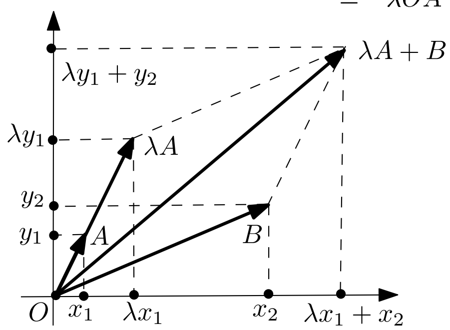
در حالتی که بردار $\mathbf{a}$ در صفحه دکارتی xy باشد، زوج مرتب منحصر به فرد $A = (x, y)$ وجود دارد به قسمی که $\overrightarrow{OA}$ یک نمایش هندسی $\mathbf{a}$ است. در این حالت نیز $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ و اسکالرهای x و y را مولفه‌های $\mathbf{a}$ می‌نامیم (شکل ۱—۸). قضیه‌ی زیر تناظر طبیعی موجود بین فضای برداری بردارهای هندسی در صفحه (یا فضا) و فضای برداری $\mathbb{R}^۲$ (یا $\mathbb{R}^۳$) را بیان می‌کند.

قضیه ۱—۱—۶ فضای برداری بردارهای هندسی در صفحه (فضا) با فضای برداری $\mathbb{R}^۲$ ($\mathbb{R}^۳$) یکریخت است.

برهان. فرض کنیم V فضای بردارهای هندسی در صفحه باشد. نگاشت $T : \mathbb{R}^۲ \to V$ با ضابطه‌ی $A \longmapsto \overrightarrow{OA}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\lambda \in \mathbb{R}$، $A = (x_۱, y_۱)$، $B = (x_۲, y_۲)$ و $C = \lambda A + B = (\lambda x_۱ + x_۲, \lambda y_۱ + y_۲)$ (شکل ۱—۹). داریم

$$\begin{aligned} T(\lambda A + B) = T(C) = \overrightarrow{OC} &= (\lambda x_۱ + x_۲)\mathbf{i} + (\lambda y_۱ + y_۲)\mathbf{j} \\ &= \lambda(x_۱\mathbf{i} + y_۱\mathbf{j}) + (x_۲\mathbf{i} + y_۲\mathbf{j}) \\ &= \lambda\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \lambda T(A) + T(B) \end{aligned}$$





شکل ۱—۸ مولفه‌ی بردار. شکل ۱—۹ یکریختی فضاهای بردارهای هندسی و $\mathbb{R}^۲$.

یک‌به‌یک و پوشابودن نگاشت T آشکار است. به همین ترتیب دیده می‌شود که $\mathbb{R}^۳$ با فضای برداری بردارهای هندسی در فضا یکریخت است. ■

از این پس تمایزی بین بردارهای هندسه‌ی مسطح و نمایش تحلیلی آنها که متناظر با نقاط $\mathbb{R}^۲$ هستند قائل نمی‌شویم. به عبارت دیگر بردار $\mathbf{a}$ با نمایش هندسی $\overrightarrow{OA}$ را به طور ساده با $\mathbf{a} = (x,y)$ نیز نمایش می‌دهیم که در آن $A = (x,y)$. به همین ترتیب بردارهای هندسه‌ی فضایی و نمایش تحلیلی آنها را که متناظر با نقاط $\mathbb{R}^۳$ هستند یکی می‌گیریم.

فرض کنیم V یک فضای برداری باشد. تابع با ضابطه $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \longmapsto <\mathbf{a},\mathbf{b}>$ از $V \times V$ به مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ ، اعداد حقیقی را یک **ضرب داخلی یا ضرب عددی** روی V می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in V$ و $\lambda \in \mathbb{R}$،

الف) برای هر بردار $\mathbf{a}$ همواره $<\mathbf{a},\mathbf{a}> \geq ۰$ و $<\mathbf{a},\mathbf{a}>= ۰$ اگر و تنها اگر $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

ب) $<\mathbf{a},\mathbf{b}>=<\mathbf{b},\mathbf{a}>$.

ج) $<\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}>= \lambda <\mathbf{a},\mathbf{c}> + <\mathbf{b},\mathbf{c}>$. از ب و ج نتیجه می‌شود:

$$<\mathbf{a},\lambda\mathbf{b}+\mathbf{c}>=<\lambda\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{a}>= \lambda <\mathbf{b},\mathbf{a}> + <\mathbf{c},\mathbf{a}>= \lambda <\mathbf{a},\mathbf{b}> + <\mathbf{a},\mathbf{c}>$$

فضای برداری V همراه با یک ضرب داخلی را یک **فضای ضرب داخلی** می‌نامیم.
در این حالت برای بردار $\mathbf{a}$ ، اسکالر نامنفی $||\mathbf{a}|| := \sqrt{<\mathbf{a},\mathbf{a}>}$ را **نُرم** $\mathbf{a}$ می‌نامیم.

مثال ۱-۱-۷ ۱) فرض کنیم $V = \mathbb{R}^n$. در این صورت برای $\mathbf{a} = (x_۱,\cdots,x_n)$ و $\mathbf{b} = (y_۱,\cdots,y_n)$ یک ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^n$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$<\mathbf{a},\mathbf{b}>= x_۱y_۱ + \cdots + x_ny_n$$

این ضرب را که با نماد $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ نیز نمایش می‌دهیم **ضرب نقطه‌ای** نیز می‌نامیم. پس:

$$||\mathbf{a}|| := \sqrt{x_۱^۲ + \cdots + x_n^۲}$$

این نُرم را **نُرم اقلیدسی** بردار $\mathbf{a}$ می‌نامیم.

۲) فرض کنیم $I = [a,b]$ بازه‌ای در $\mathbb{R}$ و $V = C(I,\mathbb{R})$. دراین صورت $<f,g>= \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ یک ضرب داخلی روی V است (تحقیق کنید!).

قضیه ۱−۱−۸ **(نا مساوی کوشی −شوارتز)** فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت برای هر دو بردار دلخواه $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ ،

$$|<\mathbf{a},\mathbf{b}>|\leq ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||$$

برهان. برای اسکالر دلخواه $t\in\mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $\mathbf{x}=\mathbf{a}-t\mathbf{b}$. دراین صورت:

$$\begin{aligned}
0 &\leq <\mathbf{x},\mathbf{x}>\\
&= <\mathbf{a}-t\mathbf{b},\mathbf{a}-t\mathbf{b}>\\
&= <\mathbf{a},\mathbf{a}> -2t<\mathbf{a},\mathbf{b}> +t^2<\mathbf{b},\mathbf{b}>\\
&= ||\mathbf{a}||^2-2t<\mathbf{a},\mathbf{b}>+t^2||\mathbf{b}||^2
\end{aligned}$$

اگر $||\mathbf{b}||=\mathbf{0}$ باشد آنگاه $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ و قضیه به وضوح بر قرار است. فرض کنیم $||\mathbf{b}||\neq 0$. نامساوی فوق به ازای جمیع مقادیر t برقرار است به ویژه برای $t=\frac{1}{||\mathbf{b}||}<\mathbf{a},\mathbf{b}>$، پس

$$\begin{aligned}
0 &\leq ||\mathbf{a}||^2-\frac{2}{||\mathbf{b}||}<\mathbf{a},\mathbf{b}>^2+\frac{1}{||\mathbf{b}||^2}<\mathbf{a},\mathbf{b}>^2||\mathbf{b}||\\
&= ||\mathbf{a}||^2-\frac{1}{||\mathbf{b}||^2}<\mathbf{a},\mathbf{b}>^2
\end{aligned}$$

که معادل است با: $<\mathbf{a},\mathbf{b}>^2\leq||\mathbf{a}||^2||\mathbf{b}||^2$. بنابر این $|<\mathbf{a},\mathbf{b}>|\leq||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||$. ■

قضیه ۱−۱−۹ فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت برای هر دو بردار $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ و هر اسکالر $\lambda\in\mathbb{R}$ ،

الف) $||\mathbf{a}||\geq 0$ و $||\mathbf{a}||=0$ اگروتنها اگر $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

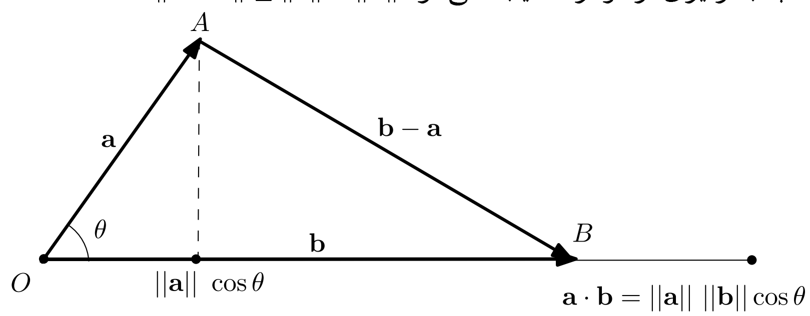
ب) $||\lambda\mathbf{a}||=|\lambda|||\mathbf{a}||$.

ج) $||\mathbf{a}+\mathbf{b}||\leq||\mathbf{a}||+||\mathbf{b}||$.

برهان. الف) و ب) بدیهی هستند. برای اثبات ج)، بنابر تعریف و نامساوی کشی ـشوارتز

$$\begin{aligned}
||\mathbf{a}+\mathbf{b}||^2 &= <\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}>\\
&= <\mathbf{a},\mathbf{a}>+2<\mathbf{a},\mathbf{b}>+<\mathbf{b},\mathbf{b}>\\
&\leq ||\mathbf{a}||^2+2||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||+||\mathbf{b}||^2\\
&= (||\mathbf{a}||+||\mathbf{b}||)^2
\end{aligned}$$

با جذرگیری از دوطرف نتیجه می‌شود $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||$. ■



شکل ۱ــ۱۰ تعبیر هندسی ضرب داخلی.

برای $\mathbb{R}^{۲}$ و $\mathbb{R}^{۳}$ می‌توان ضرب داخلی را به شکل دیگری هم بیان کرد. برای دو بردار هندسی ناصفر و غیرموازی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با نمایش‌های $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ در مثلث $\triangle OAB$ داریم:

$$||\overrightarrow{AB}||^{۲} = ||\overrightarrow{OA}||^{۲} + ||\overrightarrow{OB}||^{۲} - ۲||\overrightarrow{OA}||\,||\overrightarrow{OB}||\cos\theta$$

که در آن $۰ < \theta < \pi$ زاویه‌ی بین $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است (شکل ۱ــ۱۰). بنابراین:

$$||\mathbf{b}-\mathbf{a}||^{۲} = ||\mathbf{a}||^{۲} + ||\mathbf{b}||^{۲} - ۲||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\cos\theta$$

از این رابطه با توجه به $||\mathbf{b}-\mathbf{a}||^{۲} = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ نتیجه می‌شود:

$$||\mathbf{b}||^{۲} + ||\mathbf{a}||^{۲} - ۲\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ||\mathbf{a}||^{۲} + ||\mathbf{b}||^{۲} - ۲||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\cos\theta$$

که معادل است با:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\cos\theta$$

برقراری این رابطه در فضاهای $\mathbb{R}^{۲}$ و $\mathbb{R}^{۳}$ به ما امکان می‌دهد که مفهوم زاویه‌ی بین دو بردار را در فضای $\mathbb{R}^n$ برای بردارهای ناصفر تعریف کنیم. برای بردارهای ناصفر $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ طبق نامساوی کوشی ـ شوارتز، $-||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}|| \leq \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leq ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||$. بنابر این $-۱ \leq \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||} \leq ۱$. به این ترتیب می‌توان مفهوم زاویه‌ی بین دو بردار را به شکل تحلیلی زیر بیان کرد.

$$\theta = \cos^{-۱}\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||}\right)$$

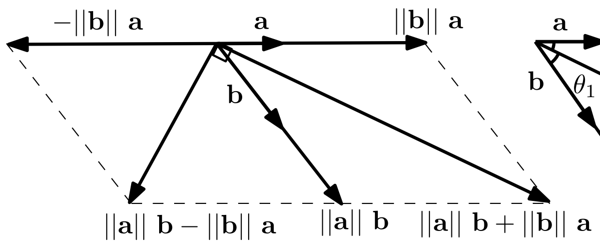
فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد. با توجه به رابطه‌ی فوق دو بردار $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ را **متعامد** می‌نامیم و می‌نویسیم $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ هرگاه $<\mathbf{a},\mathbf{b}> = ۰$.

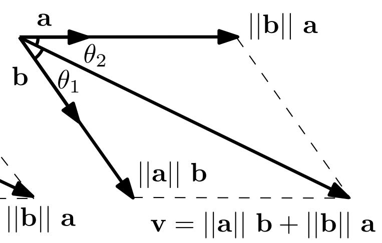
مثال ۱–۱–۱۰ الف) بردار $\mathbf{v} = ||\mathbf{a}||\mathbf{b} + ||\mathbf{b}||\mathbf{a}$ نیمساز زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است.

فرض کنیم θ_1 زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{v}$ و θ_2 زاویه‌ی بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{b}$ باشد (شکل ۱—۱۱).

$$\begin{aligned}
\cos\theta_1 &= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{a}||||\mathbf{v}||} = \frac{\mathbf{a}\cdot(||\mathbf{a}||\mathbf{b}+||\mathbf{b}||\mathbf{a})}{||\mathbf{a}||||\mathbf{v}||} = \frac{||\mathbf{a}||\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+||\mathbf{b}||||\mathbf{a}||^2}{||\mathbf{a}||||\mathbf{v}||} \\
&= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+||\mathbf{b}||||\mathbf{a}||}{||\mathbf{v}||} \\
\cos\theta_2 &= \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{b}||||\mathbf{v}||} = \frac{\mathbf{b}\cdot(||\mathbf{a}||\mathbf{b}+||\mathbf{b}||\mathbf{a})}{||\mathbf{b}||||\mathbf{v}||} = \frac{||\mathbf{b}||^2||\mathbf{a}||+||\mathbf{b}||\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{b}||||\mathbf{v}||} \\
&= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+||\mathbf{b}||||\mathbf{a}||}{||\mathbf{v}||}
\end{aligned}$$

بنابر این $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$. از سوی دیگر تابع با ضابطه‌ی $y = \cos x$ روی بازه‌ی $[0,\pi]$ یک به یک است. پس $\theta_1 = \theta_2$.





شکل ۱—۱۱ نیمساز زاویه‌ی بین a و b. **شکل ۱—۱۲ زاویه‌ی بین v و u.**

ب) بردار $\mathbf{v} = ||\mathbf{a}||\mathbf{b} + ||\mathbf{b}||\mathbf{a}$ بر $\mathbf{u} = ||\mathbf{a}||\mathbf{b} - ||\mathbf{b}||\mathbf{a}$ عمود است (شکل ۱—۱۲).

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (||\mathbf{a}||\mathbf{b} - ||\mathbf{b}||\mathbf{a})\cdot(||\mathbf{a}||\mathbf{b} + ||\mathbf{b}||\mathbf{a}) \\
&= ||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}||\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + ||\mathbf{a}||^2\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - ||\mathbf{b}||^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - ||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}||\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0
\end{aligned}$$

ج) فرض کنیم $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار غیر صفر در فضاهای $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ باشند. نشان می‌دهیم $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||$ اگر و تنها اگر $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

از $||\mathbf{a}-\mathbf{b}|| \geq 0$ و $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| \geq 0$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}-\mathbf{b}|| \quad &\Leftrightarrow \quad ||\mathbf{a}+\mathbf{b}||^2 = ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\
&\Leftrightarrow \quad ||\mathbf{a}||^2 + ||\mathbf{b}||^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ||\mathbf{a}||^2 + ||\mathbf{b}||^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}
\end{aligned}$$

د) بردار $\mathbf{a}$ بر $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||^{۲}}\,\mathbf{a}$ عمود است.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||^{۲}}\,\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||^{۲}}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||^{۲}}\,||\mathbf{a}||^{۲} \\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ۰\end{aligned}$$

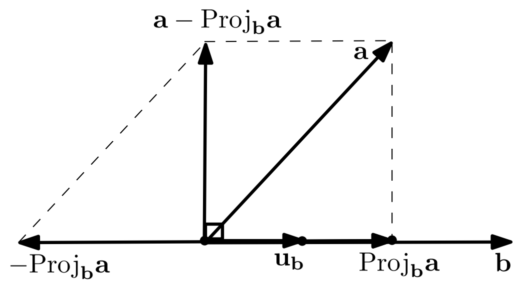
اکنون فرض کنیم $\mathbf{a}_۱, ..., \mathbf{a}_n$ بردارهای غیر صفر و متعامد در $\mathbb{R}^n$ باشند. در این صورت $\mathbf{a}_۱, ..., \mathbf{a}_n$ مستقل خطی هستند زیرا با فرض $\lambda_۱\mathbf{a}_۱ + ... + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ برای $۱ \leq i \leq n$، $\lambda_i||\mathbf{a}_i||^{۲} = \mathbf{a}_i\cdot(\lambda_۱\mathbf{a}_۱ + ... + \lambda_n\mathbf{a}_n) = \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$. در نتیجه $\lambda_i = ۰$. پس بنابر قضیه‌ی ۱-۱-۳ مجموعه‌ی $\{\mathbf{a}_۱, ..., \mathbf{a}_n\}$ یک پایه‌ی $\mathbb{R}^n$ است. بنابر این هر بردار $\mathbf{a}$ را می‌توان به صورت $\mathbf{a} = x_۱\mathbf{a}_۱ + ... + x_n\mathbf{a}_n$ نوشت به قسمی که $x_۱, ..., x_n \in \mathbb{R}$. در این صورت:

$$\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}_i\cdot(x_۱\mathbf{a}_۱ + ... + x_n\mathbf{a}_n) = x_i||\mathbf{a}_i||^{۲}$$

در نتیجه $x_i = \dfrac{\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}_i||^{۲}}$، به عبارت دیگر

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}_۱\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}_۱||^{۲}}\,\mathbf{a}_۱ + ... + \frac{\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}_n||^{۲}}\,\mathbf{a}_n \qquad (۱)$$

در حالت کلی برای بردار غیر صفر $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$، اسکالر $\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||}$ را **مؤلفه‌ی $\mathbf{a}$ در راستای $\mathbf{b}$** می‌نامیم و با نماد $\mathbf{Comp_b a}$ نمایش می‌دهیم. همچنین بردار $\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^{۲}}\,\mathbf{b}$ را **تصویر $\mathbf{a}$ در امتداد $\mathbf{b}$** می‌نامیم و با نماد $\mathbf{Proj_b a}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱–۱۳).



شکل ۱–۱۳ بردارهای $\mathbf{Proj_b a}$ و $(\mathbf{a} - \mathbf{Proj_b a})$.

در این صورت $\mathbf{Proj_b a} = (\mathbf{Copm_b a})\mathbf{u_b}$ به قسمی که $\mathbf{u_b} := \dfrac{\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||}$ بردار یکه‌ی هم‌جهت با $\mathbf{b}$ است. به سادگی تحقیق می‌شود که

$$\mathbf{Proj_b a} \parallel \mathbf{b} \quad , \quad (\mathbf{a} - \mathbf{Proj_b a})\perp\mathbf{b}$$

بنابر این $\mathbf{a}$ را می‌توان به صورت مجموع یک بردار موازی و یک بردار عمود بر $\mathbf{b}$ تجزیه کرد. رابطه‌ی (۱) را می‌توان به صورت زیر هم بیان کرد:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{Copm}_{\mathbf{a}_1}\mathbf{a})\mathbf{u}_{\mathbf{a}_1} + ... + (\mathbf{Copm}_{\mathbf{a}_n}\mathbf{a})\mathbf{u}_{\mathbf{a}_n} = \mathbf{Proj}_{\mathbf{a}_1}\mathbf{a} + ... + \mathbf{Proj}_{\mathbf{a}_n}\mathbf{a} \qquad (2)$$

این رابطه‌ی را می‌توان به شکل دیگری برای یک فضای ضرب داخلی بیان کرد.

بر اساس قضیه‌ای موسوم به قضیه‌ی گرام—اشمیت، اگر V یک فضای ضرب داخلی با بعد باپایان روی $\mathbb{R}$ باشد، همواره می‌توان یک پایه‌ی متعامد یکه‌ی $B = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ برای V به دست آورد. بنابر این هر بردار $\mathbf{a}$ را می‌توان به صورت $\mathbf{a} = x_1\mathbf{u}_1 + ... + x_n\mathbf{u}_n$ نوشت به قسمی که $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$، $<\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j> = 0$ (برای $i \neq j$) و $<\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i> = 1$. با ضرب داخلی دو طرف در $\mathbf{u}_i$ نتیجه می‌گیریم:

$$<\mathbf{u}_i, \mathbf{a}> = <\mathbf{u}_i \ , \ x_1\mathbf{u}_1 + ... + x_n\mathbf{u}_n> = x_i <\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i> = x_i$$

به عبارت دیگر:

$$\mathbf{a} = <\mathbf{u}_1, \mathbf{a}> \mathbf{u}_1 + ... + <\mathbf{u}_n, \mathbf{a}> \mathbf{u}_n \qquad (3)$$

مثال ۱–۱–۱۱ بردارهای $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0)$ ، $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 1)$ و $\mathbf{a}_3 = (-1, 1, 2)$ را در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید مجموعه‌ی $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ تشکیل یک پایه‌ی متعامد برای $\mathbb{R}^3$ می‌دهند.

ب) بردار $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ را به صورت یک ترکیب خطی از اعضای پایه‌ی $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ بیان کنید.

ج) به ازای $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$، بردار $\mathbf{a}$ را به صورت مجموع یک بردار موازی و یک بردار عمود بر $\mathbf{b}$ تجزیه کنید.

حل. الف) به سادگی تحقیق می‌شود که بردارهای $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1$ دو به دو متعامد هستند و در نتیجه تشکیل یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ می‌دهند.

ب) بنا بر رابطه‌ی (۱)،

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}}{||\mathbf{a}_1||^2}\ \mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}}{||\mathbf{a}_2||^2}\ \mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}}{||\mathbf{a}_3||^2}\ \mathbf{a}_3 = \frac{2}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{a}_2 + \frac{2}{6}\mathbf{a}_3$$

ج) بنا به تعریف داریم:

$$\mathbf{Proj_b\ a} = (\mathbf{Copm_b\ a})\ \mathbf{u_b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^{۲}}\ \mathbf{b} = \frac{۶}{۱۴}\mathbf{b} = (\frac{۳}{۷}, \frac{۶}{۷}, \frac{۹}{۷})$$

بنابراین $\mathbf{a} = (\frac{۳}{۷}, \frac{۶}{۷}, \frac{۹}{۷}) + (\frac{۴}{۷}, \frac{۱}{۷}, -\frac{۲}{۷})$ در ادامه‌ی بحث مفهوم ضرب خارجی بردارها و مفاهیم وابسته را در $\mathbb{R}^۳$ مطرح می‌کنیم. از جنبه‌ی تاریخی برای نخستین بار، ضرب خارجی دو بردار برای بیان مفاهیمی مانند گشتاور و میدان مغناطیسی حاصل از یک ذره‌ی متحرک باردار به صورت ضرب دو بردار دیگر مطرح شد. در فیزیک حاصل ضرب خارجی بردار $\mathbf{a}$ در بردار $\mathbf{b}$ که با $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نمایش داده می‌شود برداری است عمود بر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به قسمی که $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b})$ طبق قانون دست راست، یک دستگاه راست‌گرد تشکیل می‌دهد و اندازه‌ی $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ برابر $||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}||\sin\theta$ است که θ زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است (شکل ۱—۱۴).

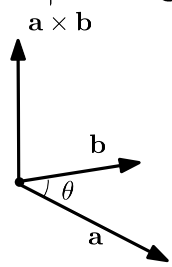
ثابت می‌شود که این تعریف با تعریف تحلیلی زیر معادل است.

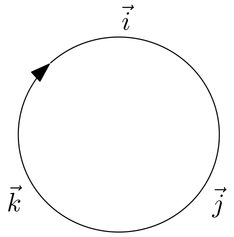
برای دو بردار $\mathbf{a} = (x_۱, x_۲, x_۳)$ و $\mathbf{b} = (y_۱, y_۲, y_۳)$ در فضای $\mathbb{R}^۳$ حاصل ضرب خارجی بردار $\mathbf{a}$ در بردار $\mathbf{b}$ که با $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نمایش داده می‌شود عبارت است از:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} := (x_۲y_۳ - x_۳y_۲)\mathbf{i} - (x_۱y_۳ - x_۳y_۱)\mathbf{j} + (x_۱y_۲ - x_۲y_۱)\mathbf{k}$$

از این پس برای سهولت در محاسبات، از تعریف تحلیلی استفاده می‌کنیم. مشاهده می‌شود که برای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ در $\mathbb{R}^۳$ داریم $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$، $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$ و $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$.

اگر بردارهای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ را به ترتیب روی یک دایره قرار دهیم حاصل ضرب خارجی دو بردار متوالی، بردار سوم است (شکل ۱—۱۵).





شکل ۱—۱۴ ضرب خارجی. **شکل ۱—۱۵** $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$، $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$ و $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$.

در واقع به همین دلیل $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ یک دستگاه **راست گرد** $\mathbb{R}^۳$ است. با توجه به تعریف دترمینان برای اسکالرهای x_i, y_i, z_i به ازای $i = ۱, ۲, ۳$،

$$\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \\ z_۱ & z_۲ & z_۳ \end{vmatrix} := x_۱\begin{vmatrix} y_۲ & y_۳ \\ z_۲ & z_۳ \end{vmatrix} - x_۲\begin{vmatrix} y_۱ & y_۳ \\ z_۱ & z_۳ \end{vmatrix} + x_۱\begin{vmatrix} y_۱ & y_۲ \\ z_۱ & z_۲ \end{vmatrix}$$

به قسمی که $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$. با این سهو که درایه‌های دترمینان می‌توانند بردار هم باشند، برای سادگی، حاصل ضرب خارجی دو بردار $\mathbf{a} = (x_۱, x_۲, x_۳)$ و $\mathbf{b} = (y_۱, y_۲, y_۳)$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \end{vmatrix}$$

در قضیه‌ی بعد رابطه‌ی بین ویژگی‌های هندسی و تحلیلی ضرب خارجی و رابطه‌ی آن با ضرب داخلی بررسی می‌شود.

قضیه ۱–۱–۱۲ برای سه بردار دلخواه $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$ و اسکالرهای دلخواه λ, μ،

الف) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.

ب) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

ج) $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

د) $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \sin\theta$، به قسمی که θ زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است.

ه) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ وابسته‌ی خطی باشند.

و) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

اثبات. ویژگی‌های الف) تا ج) به سادگی از محاسبه‌ی دو طرف تساوی به دست می‌آید. اثبات د) به صورت زیر است. برای $\mathbf{a} = (x_۱, x_۲, x_۳)$ و $\mathbf{b} = (y_۱, y_۲, y_۳)$،

$$\begin{aligned} ||a \times b||^۲ &= (x_۲ y_۳ - x_۳ y_۲)^۲ + (x_۱ y_۳ - x_۳ y_۱)^۲ + (x_۱ y_۲ - x_۲ y_۱)^۲ \\ &= (x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲)(y_۱^۲ + y_۲^۲ + y_۳^۲) - (x_۱ y_۱ + x_۲ y_۲ + x_۳ y_۳)^۲ \\ &= ||a||^۲ ||b||^۲ - (a \cdot b)^۲ = ||a||^۲ ||b||^۲ - ||a||^۲ ||b||^۲ \cos^۲\theta \\ &= ||a||^۲ ||b||^۲ (۱ - \cos^۲\theta) = ||a||^۲ ||b||^۲ \sin^۲\theta \end{aligned}$$

از $\circ \le \theta \le \pi$ نتیجه می‌شود $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \sin\theta$.

و) مشاهده می‌شود که برای $\mathbf{a} = (x_۱, x_۲, x_۳)$، $\mathbf{b} = (y_۱, y_۲, y_۳)$ و $\mathbf{c} = (z_۱, z_۲, z_۳)$،

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \\ z_۱ & z_۲ & z_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_۱ & z_۲ & z_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \\ x_۱ & x_۲ & x_۳ \end{vmatrix} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

اگر $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ یا $\mathbf{a}=\mathbf{c}$، دو سطر دترمینان برابر و در نتیجه حاصل دترمینان صفر است.

برای دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نظیر بردارهای مکان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ که زاویه‌ی بین راستای آنها θ باشد بردار $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ برداری است عمود بر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با اندازه‌ی $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\theta$. در حالت خاص اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ یکه و متعامد باشند آنگاه:

الف) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$

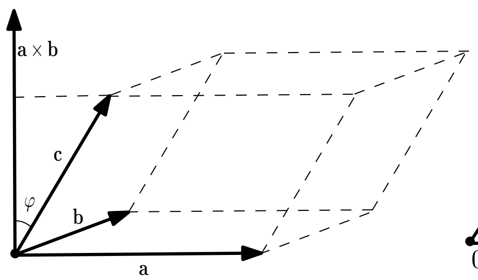
ب) $\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}$

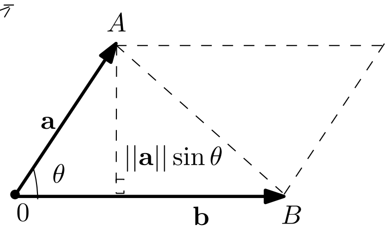
پس در این حالت $\{\mathbf{a},\ \mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$ یک پایه‌ی یکه، متعامد و راست‌گرد برای $\mathbb{R}^۳$ است.

ارتفاع مثلث $\triangle OAB$ عبارت است از $\|\mathbf{a}\|\sin\theta$ (شکل ۱ــ۱۶). بنابر این مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر اضلاع $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ عبارت است از $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\theta=\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$. به ویژه برای بردارهای $\mathbf{a}=x_۱\mathbf{i}+x_۲\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=y_۱\mathbf{i}+y_۲\mathbf{j}$،

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ x_۱&x_۲&۰\\ y_۱&y_۲&۰\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_۱&x_۲\\ y_۱&y_۲\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

به این ترتیب $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$ برابر است با قدرمطلق $\begin{vmatrix}x_۱&x_۲\\ y_۱&y_۲\end{vmatrix}$. به عبارت دیگر تعبیر هندسی $\begin{vmatrix}x_۱&x_۲\\ y_۱&y_۲\end{vmatrix}$، مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر اضلاع $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است.





شکل ۱ــ۱۶ متوازی‌الاضلاع با $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$. شکل ۱ــ۱۷ متوازی‌السطوح با $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$.

به همین ترتیب برای بردارهای $\mathbf{a}=x_۱\mathbf{i}+x_۲\mathbf{j}+x_۳\mathbf{k}$، $\mathbf{b}=y_۱\mathbf{i}+y_۲\mathbf{j}+y_۳\mathbf{k}$ و $\mathbf{c}=z_۱\mathbf{i}+z_۲\mathbf{j}+z_۳\mathbf{k}$،

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix}x_۱&x_۲&x_۳\\ y_۱&y_۲&y_۳\\ z_۱&z_۲&z_۳\end{vmatrix}$$

از سوی دیگر داریم:

۱) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\cos\varphi$ که φ زاویه‌ی بین بردارهای $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ است.

۲) حجم متوازی‌السطوح واقع بر بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ عبارت‌است از $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\cos\varphi$ (شکل ۱—۱۷).

به این ترتیب $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\cos\varphi$ برابر است با قدرمطلق $\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳\\ y_۱ & y_۲ & y_۳\\ z_۱ & z_۲ & z_۳\end{vmatrix}$.
به عبارت دیگر تعبیر هندسی قدرمطلق $\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳\\ y_۱ & y_۲ & y_۳\\ z_۱ & z_۲ & z_۳\end{vmatrix}$، حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر بردارهای $\mathbf{a}=x_۱\mathbf{i}+x_۲\mathbf{j}+x_۳\mathbf{k}$، $\mathbf{b}=y_۱\mathbf{i}+y_۲\mathbf{j}+y_۳\mathbf{k}$ و $\mathbf{c}=z_۱\mathbf{i}+z_۲\mathbf{j}+z_۳\mathbf{k}$ است.

برای سه بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در فضای $\mathbb{R}^۳$، **ضرب سه‌گانه** عبارت است از اسکالر $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]:=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. با استفاده از ویژگی‌های دترمینان می‌توان نوشت:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=-[\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}]=-[\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}]=[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]$$

$$[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$

مثال ۱—۱—۱۳ برای چهار بردار $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ در فضای $\mathbb{R}^۳$،

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

زیرا برای بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ داریم $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]=[\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}]=[\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v}]$. بنابر این

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= [\mathbf{a}\times\mathbf{b}\ ,\mathbf{c},\mathbf{d}]\\ &= [\mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\ ,\mathbf{d}]\\ &= \mathbf{c}\cdot((\mathbf{d}\cdot\mathbf{b})\ \mathbf{a}-(\mathbf{d}\cdot\mathbf{a})\ \mathbf{b})\\ &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\end{aligned}$$

فرض کنیم سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ بردارهایی با رأس مشترک O در فضا و T متوازی‌السطوح ساخته شده بر این سه بردار باشد. در این صورت بنابر آنچه بیان کردیم

$$\text{حجم}\ T=|\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|=|\ [\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]\ |=|\ [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\ |$$

پس سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در $\mathbb{R}^۳$ هم صفحه هستند اگر و تنها اگر $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=۰$.

در ادامه، به روش برداری برخی از قضایای هندسه‌ی مقدماتی را ثابت می‌کنیم.

مثال ۱-۱-۱۴ فرض کنیم $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نظیر بردارهای مکان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ باشند که $A \neq B$.

الف) نشان دهید اگر بردار $\mathbf{c}$ نظیر بردار مکان $\overrightarrow{OC}$ و L خط واقع بر دو نقطه‌ی A و B باشد آنگاه $C \in L$ اگر و تنها اگر به ازای یک $\lambda \in \mathbb{R}$، $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}$.

ب) با استفاده از قسمت الف) نشان دهید به ازای هر بردار دلخواه $\mathbf{c}$ در صفحه اسکالرهای $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ وجود دارند به قسمی که $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. به عبارت دیگر هر بردار دلخواه $\mathbf{c}$ در صفحه یک ترکیب خطی از دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است. به این ترتیب دو بردار ناصفر و غیر موازی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ هستند.

الف) از $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ و $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} C \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} || \overrightarrow{AB} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{a} - \mathbf{c} \,||\, \mathbf{b} - \mathbf{a} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{R} \quad \mathbf{a} - \mathbf{c} = \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{c} = (1+\mu)\mathbf{a} - \mu\mathbf{b} \end{aligned}$$

پس به ازای $\lambda = 1 + \mu$ داریم $C \in L \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}$.

ب) دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

۱) امتداد بردار $\mathbf{c}$ با خط L موازی است. در این صورت $\mathbf{c} \,||\, \mathbf{b} - \mathbf{a}$ و درنتیجه به ازای یک $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم $\mathbf{c} = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

۲) امتداد بردار c خط L را قطع می‌کند. فرض کنیم C' محل برخورد امتداد بردار $\mathbf{c}$ با خط L باشد. در این صورت بنا بر قسمت قبل به ازای یک $\mu \in \mathbb{R}$ داریم $\overrightarrow{OC'} = \mu\mathbf{a} + (1-\mu)\mathbf{b}$. به این ترتیب از $\mathbf{c} \,||\, \overrightarrow{OC'}$ نتیجه می‌شود $\mathbf{c} = \lambda\, \overrightarrow{OC'}$ که $\lambda \in \mathbb{R}$. پس $\mathbf{c} = \lambda(\mu\mathbf{a} + (1-\mu)\mathbf{b})$، یعنی $\mathbf{c} = (\lambda\mu)\mathbf{a} + (\lambda - \lambda\mu)\mathbf{b}$. بنابر این به ازای $\alpha = \lambda\mu$ و $\beta = \lambda - \lambda\mu$ داریم $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

مثال ۱-۱-۱۵ با استفاده از روش برداری ثابت کنید

الف) در هر مثلث، سه میانه همرسند و دو میانه یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ می‌برند.

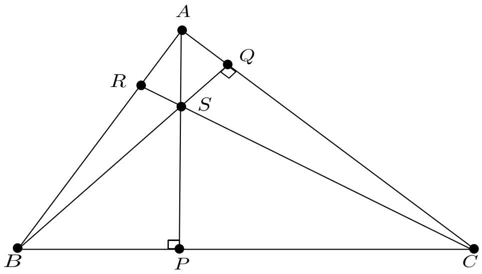
ب) در هر مثلث، سه ارتفاع همرسند.

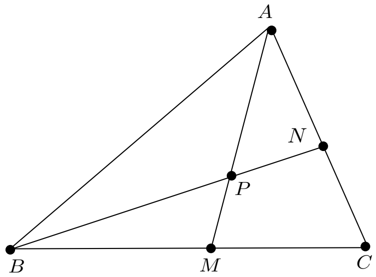
ج) در هر متوازی‌الاضلاع ، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

د) در هر لوزی ، قطرها بر یکدیگر عمودند.

ه) در هر دایره ، زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر برابر با $\frac{\pi}{2}$ است.

الف) فرض کنیم در مثلث $\triangle ABC$ نقطه‌ی P محل تلاقی میانه‌های AM و BN باشد (شکل ۱—۱۸). ابتدا نشان می‌دهیم P میانه‌ی AM را به نسبت ۲ به ۱ می‌برد. از این که M وسط BC و N وسط AC است نتیجه می‌شود $\frac{CM}{CB} = \frac{۱}{۲}$ و $\frac{CN}{CA} = \frac{۱}{۲}$. بنابر مثال قبل داریم $\overrightarrow{NM} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB}$ که معادل است با $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB})$. ازسوی دیگر $\overrightarrow{AP} || \overrightarrow{PM}$، پس به ازای $\alpha \in \mathbb{R}$، $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{PM}$. به همین ترتیب $\overrightarrow{BP} || \overrightarrow{NP}$،یعنی به ازای $\beta \in \mathbb{R}$، $\overrightarrow{PB} = \beta\overrightarrow{NP}$. پس $۲\overrightarrow{NP} + ۲\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \alpha\overrightarrow{PM} + \beta\overrightarrow{NP}$ که معادل است با $(\alpha - ۲)\overrightarrow{PM} + (\beta - ۲)\overrightarrow{NP} = ۰$. اما از $\overrightarrow{PM} \nparallel \overrightarrow{NP}$ نتیجه می‌شود $\overrightarrow{NP}$ و $\overrightarrow{PM}$ مستقل خطی هستند. بنابر این $\alpha = ۲$ و $\beta = ۲$. به این ترتیب $\overrightarrow{AP} = ۲\overrightarrow{PM}$. با استدلالی مشابه دیده می‌شود که اگر P' محل تلاقی AM با میانه‌ی سوم باشد داریم $\overrightarrow{AP'} = ۲\overrightarrow{P'M}$. در نتیجه باید $P = P'$ باشد.





شکل ۱—۱۸ تلاقی میانه‌های مثلث. شکل ۱—۱۹ تلاقی ارتفاع‌های مثلث.

ب) فرض کنیم AP و BQ دو ارتفاع مثلث $\triangle ABC$ و S محل تلاقی آنها باشد. باید ثابت کنیم CS بر AB عمود است یعنی $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{AB} = ۰$. در این صورت اگر CS قاعده‌ی AB را در R ببرد، CR ارتفاع سوم است (شکل ۱—۱۹). از این که AP و BQ ارتفاع‌های مثلث هستند نتیجه می‌شود $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = ۰$ و $\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{AC} = ۰$. بنابر این

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CS} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\
&= \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CB} \\
&= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BS}) \cdot \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AS}) \cdot \overrightarrow{CB} \\
&= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CB} \\
&= -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + ۰ + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + ۰ = ۰
\end{aligned}
$$

ج) فرض کنیم در متوازی‌الاضلاع $\square OACB$ که O مبدأ مختصات در نظر گرفته شده است ، P محل تلاقی قطرها (شکل ۱—۲۰) ، $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{AP} = \mu\overrightarrow{AB}$ باشد. در این صورت می‌توان بردار $\overrightarrow{OP}$ را به دو شکل زیر بیان کرد.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (۱ - \mu)\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$
$\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OC} = \lambda(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \lambda\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$

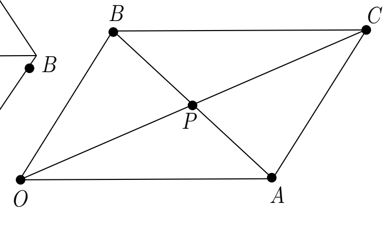
پس $\lambda\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB} = (۱-\mu)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$، یعنی $(\lambda+\mu-۱)\overrightarrow{OA}+(\lambda-\mu)\overrightarrow{OB} = ۰$. از این که بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ ناموازی هستند نتیجه می‌شود که مستقل خطی‌اند. پس $\lambda+\mu-۱ = \lambda-\mu = ۰$، یعنی $\lambda = \mu = \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $\overrightarrow{OP} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OP} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB}$.

د) لوزی $\lozenge ABCD$ را در نظر می‌گیریم. در هر لوزی طول همه‌ی اضلاع برابر و اضلاع روبه‌رو موازی هستند (شکل ۱ــ۲۱). بنابر این

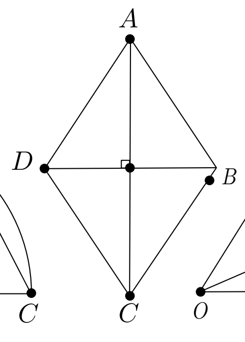
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\\
&= (-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\\
&= -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}\\
&= \|\overrightarrow{AB}\|^{۲}-\|\overrightarrow{DA}\|^{۲} = ۰
\end{aligned}$$

ه) فرض کنیم BC قطری از یک دایره به مرکز O و A نقطه ای بر کمان BC باشد (شکل ۱ــ۲۲). از $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB}$ و $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OB}\|$ نتیجه می‌شود:

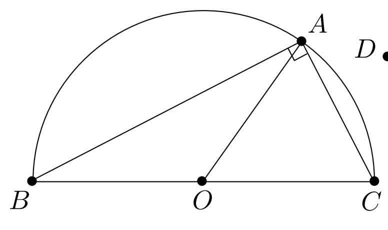
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\
&= \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}\\
&= -\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}\\
&= -\|\overrightarrow{OB}\|^{۲}+\|\overrightarrow{OA}\|^{۲} = ۰
\end{aligned}$$



شکل ۱ــ۲۰



شکل ۱ــ۲۱



شکل ۱ــ۲۲

مثال ۱-۱-۱۶ چهار نقطه‌ی متمایز $A = (۰, ۰, ۴)$، $B = (۰, ۱, ۲)$، $C = (۱, ۰, ۳)$ و $D = (۲, ۱, ۰)$ را در نظر می‌گیریم.

الف) نشان دهید چهار نقطه‌ی فوق در یک صفحه قرار دارند.

ب) مساحت چهارضلعی $\square ABCD$ را به دست آورید.

ج) مساحت مثلث $\triangle A'B'C'$، تصویر مثلث $\triangle ABC$ بر صفحه‌ی xoz را به دست آورید.

الف) حاصل‌ضرب $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$ برابر صفر است اگر و تنها اگر سه بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ در یک صفحه واقع باشند. بنابر فرض $\overrightarrow{AC} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$، $\overrightarrow{AD} = ۲\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۴\mathbf{k}$ و $\overrightarrow{AB} = \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$. پس:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & -۴ \end{pmatrix} = -۲\mathbf{i} - ۴\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$$

در نتیجه $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = -۲ + ۲ = ۰$ و این معادل است با $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = ۰$. بنابر این سه بردار فوق در یک صفحه قرار دارند. پس چهار نقطه‌ی D, C, B, A نیز در همان صفحه هستند.

ب) $\square ABCD$ مساحت $= \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \| - ۲\mathbf{i} - ۴\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}\| = ۲\sqrt{۶}$.

ج) از $C' = (۱, ۰, ۳)$، $B' = (۰, ۰, ۲)$ و $A' = (۰, ۰, ۴)$ نتیجه می‌شود $\overrightarrow{A'C'} = \mathbf{i} - \vec{k}$,$\overrightarrow{A'B'} = -۲\vec{k}$. پس $\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = -۲\vec{k} \times (\mathbf{i} - \vec{k}) = -۲\mathbf{j}$ و

$$\triangle A'B'C' \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲}\|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\| = ۱$$

مثال ۱-۱-۱۷ فرض کنید A و B و C سه نقطه‌ی ناهم‌خط واقع در یک صفحه‌ی π و $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ و $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ و $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ بردارهای مکان نظیر سه نقطه باشند. برای بردار دلخواه $\mathbf{d}$ نظیر بردار مکان $\overrightarrow{OD}$ نشان دهید $\mathbf{d} \in \pi$ اگر و تنها اگر اعداد حقیقی α، β و γ وجود داشته باشند به قسمی که $\alpha + \beta + \gamma = ۱$ و $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

فرض کنیم $\mathbf{d} \in \pi$. در این صورت:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC} \quad &\Rightarrow \quad \exists\, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AD} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{d} - \mathbf{a} = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{d} = (۱ - \beta - \gamma)\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} \end{aligned}$$

پس برای β، γ و $\gamma - \beta - ۱ = \alpha$ داریم $\alpha + \beta + \gamma = ۱$ و $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

به عکس فرض کنیم برای اسکالرهای α و β و γ داشته باشیم $\alpha + \beta + \gamma = ۱$ و $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. در این صورت:

$\mathbf{d} \in \pi \Leftrightarrow$ سه بردار $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ هم‌صفحه‌اند

$\Leftrightarrow$ چهار نقطه‌ی A، B، C و D هم‌صفحه‌اند

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}] = ۰ \Leftrightarrow [\mathbf{d}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] = ۰\\
&\Leftrightarrow [\mathbf{d}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] = ۰\\
&\Leftrightarrow [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] = ۰\\
&\Leftrightarrow [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = ۰\\
&\Leftrightarrow [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = ۰
\end{aligned}$$

اما از $\alpha + \beta + \gamma = ۱ \ , \ d = \alpha a + \beta b + \gamma c$. نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] &= \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] + \beta[\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - \beta[\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] -\\
&\quad \gamma[\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}]\\
&= \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - (-\beta)[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] -\\
&\quad (-\gamma)[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}]\\
&= (\alpha + \beta + \gamma - ۱)[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = ۰
\end{aligned}$$

۱ــ۲ خط و صفحه

در پایان این فصل به یادآوری مفهوم تحلیلی خط و صفحه می‌پردازیم. به ازای نقطه‌ی $P_۰ = (x_۰, y_۰, z_۰)$ و بردار $\mathbf{v} = a\vec{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ یک و تنها یک خط L وجود دارد به قسمی که $P_۰ \in L$ و $L || \mathbf{v}$ (شکل ۱ــ۲۳). در این صورت برای $P = (x, y, z)$،

$$\begin{aligned}
P \in L \ &\Leftrightarrow \ \overrightarrow{P_۰P} \ || \ v\\
&\Leftrightarrow \ \exists\, t \in \mathbb{R} \ : \ \overrightarrow{P_۰P} = tv\\
&\Leftrightarrow \ \exists\, t \in \mathbb{R} \ : (x - x_۰)i + (y - y_۰)j + (z - z_۰)k = ta\ i + tb\ j + tc\ k\\
&\Leftrightarrow \ \exists\, t \in \mathbb{R} \ : \ x = at + x_۰ \ , \ \ y = bt + y_۰ \ , \ \ z = ct + z_۰
\end{aligned}$$

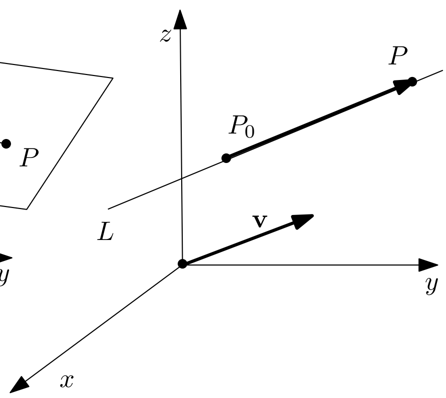
معادلات فوق ، **معادلات پارامتری** خط L نامیده می‌شوند. اسکالر $t \in \mathbb{R}$ را **پارامتر خط** و بردار $\mathbf{v}$ را یک **بردار هادی** برای خط L می‌نامیم. معادلات پارامتری یک خط

منحصربه‌فرد نیستند. معادلات پارامتری را می‌توان با هم ادغام و به شکل زیر بیان کرد.

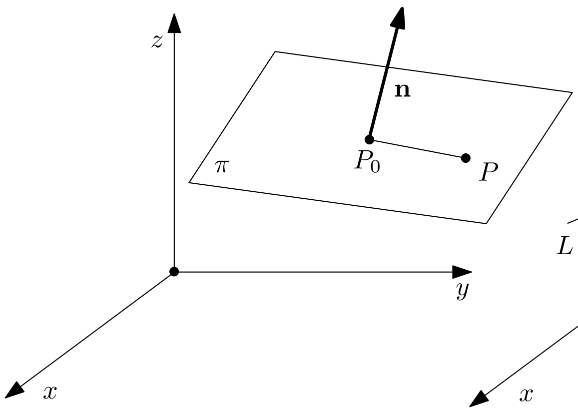
$$\frac{x - x_\circ}{a} = \frac{y - y_\circ}{b} = \frac{z - z_\circ}{c}$$

این معادلات را **معادلات تقارنی** خط می‌نامند. مقادیر c, b, a را **پارامترهای هادی خط** می‌نامند. اگر یکی از این پارامترها ۰ باشد، مثلاً اگر $c = \circ$ آنگاه معادلات تقارنی به شکل زیر بیان می‌شوند.

$$\frac{x - x_\circ}{a} = \frac{y - y_\circ}{b} \quad , \quad z = z_\circ$$



شکل ۱–۲۳. خط با بردار هادی v.



شکل ۱–۲۴. صفحه با بردار نرمال n.

همچنین یک و تنها یک صفحه وجود دارد که حاوی نقطه $P_\circ$ و بر امتداد بردار $\mathbf{n}$ عمود است (شکل ۱–۲۴). در این صورت برای $P = (x, y, z)$ داریم

$$\begin{aligned} P \in \pi \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_\circ P} \perp \mathbf{n} \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_\circ P} \cdot \mathbf{n} = \circ \\ &\Leftrightarrow \quad a(x - x_\circ) + b(y - y_\circ) + c(z - z_\circ) = \circ \end{aligned}$$

این معادله که آن را به شکل $ax + by + cz + d = \circ$ هم بیان می‌کنیم، **معادله‌ی دکارتی** صفحه‌ی π نامیده می‌شود. بردار $\mathbf{n}$، **بردار نرمال یا قائم** صفحه نامیده می‌شود.

مثال ۱–۲–۱ خطوط $L_۱ : \begin{cases} x = t - ۱ \\ y = ۲t + ۲ \\ z = -t \end{cases}$ و $L_۲ : \begin{cases} x = ۲t + ۳ \\ y = -t \\ z = t + ۲ \end{cases}$ مفروضند.

الف) نشان دهید $L_۱$ و $L_۲$ متقاطع هستند.

ب) معادله‌ی صفحه‌ی π شامل مبدأ و موازی با دو خط فوق را بیابید.

ج) تصویر قائم خط $L_۱$ را بر صفحه‌ی π تعیین کنید.

د) فاصله‌ی خط $L_۱$ را از صفحه‌ی π به دست آورید.

ه) قرینه‌ی خط $L_۲$ را نسبت به صفحه‌ی π به دست آورید.

و) معادله‌ی نیمساز دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را معین کنید.

الف) بردارهای $\mathbf{v}_۱ = \mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{v}_۲ = ۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ مستقل خطی‌اند پس بردارهای هادی دو خط موازی نیستند. به این ترتیب $L_۱ \nparallel L_۲$.

اگر $L_۱$ و $L_۲$ متنافر باشند آنگاه هم صفحه نیستند. در نتیجه به ازای نقاط $P_۱$ و $P_۲$ که به ترتیب بر $L_۱$ و $L_۲$ واقعند ، سه بردار $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ و $\overrightarrow{P_۱P_۲}$ غیر هم صفحه هستند. به سادگی تحقیق می‌شود $[\overrightarrow{P_۱P_۲}, \mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲] = ۰$. پس $L_۱$ و $L_۲$ هم صفحه هستند.

ب) فرض کنید π صفحه‌ی مورد نظر باشد. در این صورت طبق فرض $\pi \ni (۰, ۰, ۰) = \mathbf{0}$ و

$$\mathbf{v}_۱ \times \mathbf{v}_۱ = \mathbf{n} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{pmatrix} = \mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}$$

بنابر این معادله‌ی π به شکل $۱(x - ۰) - ۳(y - ۰) - ۵(z - ۰) = ۰$ است که معادل است با $x - ۳y - ۵z = ۰$.

ج) فرض کنیم $P'_۱$ تصویر قائم نقطه‌ی دلخواه $P_۱ \in L$ بر صفحه‌ی π باشد. در این صورت $L'_۱$ تصویر قائم خط $L_۱$ بر صفحه‌ی π به شکل زیر به دست می آید.

$$\overrightarrow{P'_۱P_۱} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OP_۱} \Rightarrow \overrightarrow{OP'_۱} = \overrightarrow{OP_۱} - \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OP_۱}$$

$$\overrightarrow{OP_۱} = (t - ۱)\mathbf{i} + (۲t + ۲)\mathbf{j} - t\mathbf{k} \qquad , \qquad \mathbf{n} = \mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}$$

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OP_۱} = \frac{\mathbf{n}.\overrightarrow{OP_۱}}{\|\mathbf{n}\|^۲}\,\mathbf{n} = \frac{t-۱-۶t-۶+۵t}{۳۵}(\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}) = -\frac{۱}{۵}(\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k})$$

$$\overrightarrow{OP'_۱} = (t-۱)\mathbf{i} + (۲t+۲)\mathbf{j} - t\mathbf{k} - \frac{۱}{۵}(\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}) = (t - \frac{۴}{۵})\mathbf{i} + (۲t + \frac{۷}{۵})\mathbf{j} - (t + ۱)\mathbf{k}$$

معادله‌ی پارامتری خط عبارت است از $x = t - \frac{۴}{۵} \;,\; y = ۲t + \frac{۷}{۵} \;,\; z = -t - ۱$.

د) در این قسمت نیز فرض کنیم $P'_۱$ تصویر قائم نقطه‌ی دلخواه $P_۱ \in L$ بر صفحه‌ی π باشد. در این صورت فاصله‌ی خط L با صفحه‌ی π به شکل زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} d(L,\pi) &= d(P_۱,\pi) = \|\overrightarrow{P'_۱P_۱}\| = \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OP} = \|\frac{\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{OP_۱}}{\|\mathbf{n}\|^۲}\ \mathbf{n}\| \\ &= \|-\frac{۱}{۵}(\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k})\| = \frac{\sqrt{۳۵}}{۵} \end{aligned}$$

ه) فرض کنیم $L'_۲$ قرینه‌ی خط $L_۲$ نسبت به صفحه‌ی π ، $P_۲ \in L_۲$ ، $P_۱ \in \pi$ تصویر قائم نقطه‌ی $P_۲$ بر صفحه‌ی π و $P'_۲$ قرینه‌ی نقطه‌ی $P_۲$ نسبت به صفحه‌ی π باشد. در این صورت

$$\overrightarrow{P_۲O} = -(۲t+۳)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + -(t+۲)\mathbf{k} \qquad , \qquad \mathbf{n} = \mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{P_۲P_۱} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{P_۲O} = \frac{-۲t - ۳ - ۳t + ۵t + ۱۰}{۳۵}(\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k})$$

$$\overrightarrow{P_۲P_۱} = \frac{۱}{۵}(\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}) \quad , \quad \overrightarrow{P_۲P'_۲} = ۲\overrightarrow{P_۲P_۱} = \frac{۲}{۵}(\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k})$$

$$\overrightarrow{OP'_۲} = \overrightarrow{OP_۲} + \overrightarrow{P_۲P'_۲} = (۲t + \frac{۱۷}{۵})\mathbf{i} - (t + \frac{٦}{۵})\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

بنابر این معادلات پارامتری خط $L'_۲$ به شکل زیر است.

$$x = ۲t + \frac{۱۷}{۵} \;,\; y = -t - \frac{٦}{۵} \;,\; z = t$$

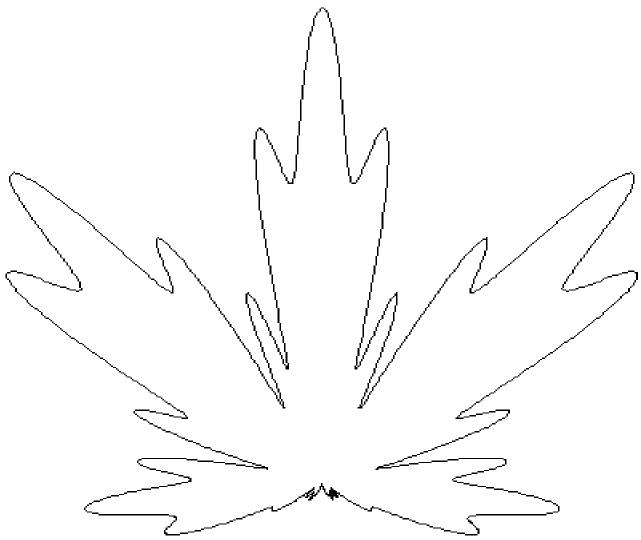
و) فرض کنیم P نقطه‌ی تلاقی دو خط $L_۱$ و $L_۲$ باشد. اگر $t_۱$ پارامتر خط $L_۱$ و $t_۲$ پارامتر خط $L_۲$ باشد آنگاه مختصات نقطه‌ی P در دستگاه زیر صدق می‌کند.

$$\begin{cases} t_۱ - ۱ = ۲t_۲ + ۳ \\ ۲t_۱ + ۲ = -t_۲ \\ -t_۱ = t_۲ + ۲ \end{cases}$$

پس $t_۱ = ۰ \;,\; t_۲ = -۲$ و در نتیجه $P = (-۱, ۲, ۰)$. از سوی دیگر بردارهای هادی دو خط عبارتند از $\mathbf{v}_۱ = \mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{v}_۲ = ۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. طبق مثال ?? بردار $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}_۱\|\mathbf{v}_۲ + \|\mathbf{v}_۲\|\mathbf{v}_۱$ در راستای نیمساز دو خط است. پس

$L'_1 \| 3\mathbf{j}+\mathbf{k} \| (3\mathbf{j}+\mathbf{k})\sqrt{6} = \mathbf{v}$. بنابراین معادلات پارامتری خط L'_1 به شکل زیر است.

$$x = 3t - 1 \ , \ \ y = t + 2 \ , \ \ z = 0$$



تمرین‌های فصل اول

۱) برای $\mathbf{a} = (۲, ۰)$ و $\mathbf{b} = (۰, -۲)$، بردارهای $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ، $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ ، $۲\mathbf{a}+۳\mathbf{b}$ و $۳\mathbf{a}-۴\mathbf{b}$ را به دست آورید.

۲) بردار $\overrightarrow{AB}$ را برای $A = (\frac{۳}{۲}, \frac{-۱}{۲})$ و $B = (\frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۲})$ پیدا کنید.

۳) فرض کنید $\mathbf{a} = (۷, -۱)$ ، $\mathbf{b} = (۱۳, ۲)$ و $\mathbf{c} = (۴, ۵)$. بردار $\mathbf{x}$ را چنان پیدا کنید که $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{x} = ۳\mathbf{c}-\mathbf{x}$.

۴) فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای مکان نظیر دو نقطه‌ی A و B باشند. نشان دهید برای $۰ \leq t \leq ۱$ نقطه‌ی P انتهای بردار $(۱-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}$، پاره خط AB را به‌نسبت $\frac{t}{۱-t}$ تقسیم می‌کند.

۵) هر یک از سه بردار $\mathbf{a} = (۷, -۴)$ ، $\mathbf{b} = (-۲, ۱)$ و $\mathbf{c} = (۳, -۲)$ را به صورت ترکیب خطی از دو بردار دیگر بنویسید.

۶) فرض کنید $\mathbf{a} = (۳, -۱)$ ، $\mathbf{b} = (۱, -۲)$ و $\mathbf{c} = (-۱, ۷)$. مطلوب است محاسبه‌ی بردار $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ بر حسب ترکیب خطی از $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$.

۷) بردار یکه‌ای را که در راستا و جهت بردار $۸\mathbf{j} - ٦\mathbf{i}$ باشد پیدا کنید. زاویه‌ای را که این بردار با جهت مثبت محور x می‌سازد محاسبه کنید.

۸) حاصل‌ضرب نقطه‌ای و زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a} = ۷\mathbf{i} - ۲۴\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = -۳\mathbf{i}+\mathbf{j}$ را محاسبه کنید.

۹) فرض کنید زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ ، $||\mathbf{a}|| = ۳$ و $||\mathbf{b}|| = ۴$. مقدار $(۳\mathbf{a}-۲\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+۲\mathbf{b})$ را محاسبه کنید.

۱۰) فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار ناصفر باشند. ثابت کنید

الف) اگر $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||$ آنگاه دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر هم عمودند.
ب) اگر $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| < ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||$ آنگاه زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بیشتراز $\frac{\pi}{۲}$ است.
ج) اگر $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| > ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||$ آنگاه زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ کمتر از $\frac{\pi}{۲}$ است.

۱۱) ثابت کنید اگر $az+by+c = ۰$ معادله خط Δ در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ باشد، بردار $\mathbf{v} = (a, b)$ بر Δ عمود است.

۱۲) بردار یکه ای را پیدا کنید که با هر سه محور مختصات زاویه‌ی مساوی می‌سازد.

۱۳) اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه بردار در فضای $\mathbb{R}^۳$ باشد، ثابت کنید $|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})| \leq ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\,||\mathbf{c}||$.
توضیح دهید که چه موقع تساوی برقرار است.

۱۴) در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ بردارهای یکه $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ را چنان پیدا کنید که $\mathbf{u} + ۲\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

۱۵) فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار یکه باشند که با یکدیگر زاویه‌ی ۳۰ درجه می‌سازند. مساحت مثلثی را محاسبه کنید که دو ضلع آن بردارهای $۲\mathbf{u}+\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}+۳\mathbf{v}$ هستند.

۱۶) مطلوب است تعیین زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ در صورتیکه $||\mathbf{a}|| = \sqrt{۳}$ ، $||\mathbf{b}|| = ۱$ و $\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\pi}{۶}$.

۱۷) رئوس مثلثی عبارتند از $A = (۴,۵,۶)$، $B = (۴,۴,۵)$ و $C = (۳,۵,۵)$. مساحت این مثلث را به دست آورید.

۱۸) فرض کنید $P = (۱,۲,-۱)$، $Q = (۳,-۱,۴)$ و $R = (۲,۴,۲)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $PQRS$ باشند.

الف) مختصات رأس S را به دست آورید.

ب) مساحت متوازی‌الاضلاع $PQRS$ را محاسبه کنید.

۱۹) نقاط A، B و C، $(B \neq C)$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید فاصله‌ی A از خط BC برابر است با

$$d = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}$$

۲۰) برای سه بردار غیر واقع بر یک صفحه‌ی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ **بردارهای متقابل** عبارتند از $\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$، $\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a}}$ و $\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}}$. ثابت کنید

الف) $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{c} = ۱$.

ب) $\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ، $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{c} = \mathbf{0}$ و $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

ج) اگر $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{V}$ آنگاه $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}' = \frac{۱}{V}$.

۲۱) بردارهای $\overrightarrow{OA} = (\alpha,۲,۱)$ ، $\overrightarrow{OB} = (۱,\beta,۲)$ و $\overrightarrow{OC} = (۱,۱,\gamma)$ مفروضند. اعداد α و β و γ را به قسمی تعیین کنید که

الف) نقاط A ، B و C بر یک استقامت باشند.

ب) زاویه‌ی بین $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ دو برابر زاویه‌ی بین $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ باشد.

۲۲) فرض کنید $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ دو بردار یکه باشند و $\angle(\mathbf{m},\mathbf{n}) = \frac{\pi}{3}$. مطلوب است تعیین طول قطرها و مساحت متوازی‌الاضلاعی که بر دو بردار $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ و $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ بنا می‌شود.

۲۳) نقاط $A = (0,0,4)$ ، $B = (0,1,2)$ ، $C = (1,0,3)$ و $D = (2,1,0)$ مفروضند.

الف) نشان دهید این چهار نقطه بر یک صفحه واقعند.

ب) مساحت چهار ضلعی $ABCD$ را تعیین کنید.

ج) اگر این چهار ضلعی را بر صفحه‌ی xoz تصویر کنیم، مساحت چهار ضلعی حاصل را به‌دست آورید.

۲۴) حجم متوازی‌السطوحی را که روی بردارهای $\mathbf{a} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$، $\mathbf{b} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}$ و $\mathbf{c} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$ ساخته می‌شود محاسبه کنید.

۲۵) حجم هرمی را که رئوس آن $A = (-1,2,1)$ ، $B = (5,5,4)$ ، $C = (2,3,-1)$ و $D = (1,4,3)$ می‌باشد محاسبه کنید.

۲۶) فرض کنید $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه بردار دلخواه در فضای برداری $\mathbb{R}^3$ باشند. ابتدا ثابت کنید $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. سپس نشان دهید $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

۲۷) معادله کره‌ای را بنویسید که بر دو صفحه‌ی $\pi_1 : x + y + z = 3$ و $\pi_2 : x + y + z = 9$ مماس باشد و دو صفحه $p_1 : 3x - z = 0$ و $p_2 : 2x - y = 0$ از مرکز آن بگذرند.

۲۸) معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که هیچ یک از دو خط متنافر $L_1 : x = 2t\ ,\ y = 0\ ,\ z = -t$ ، $L_2 : x = 0\ ,\ y = t + 1\ ,\ z = -t$ را قطع نکند و از L_1 و L_2 به یک فاصله باشد.

۲۹) صفحات $\pi_1 : 2x + y + z = 1$ و $\pi_2 : 3x + y - z = 2$ را در نظر بگیرید. معادله‌ی صفحه‌ای را بیابید که بر π_1 عمود و شامل فصل مشترک دو صفحه π_1 و π_2 باشد.

۳۰) نقطه‌ی $M = (1,2,3)$ و صفحات $\pi_1 : 2x - y + 3z = 2$ و $\pi_2 : x - 3y + 4z = 1$ مفروضند. مختصات نقطه‌ی M' قرینه‌ی نقطه‌ی M نسبت به فصل مشترک π_1 و π_2 را پیدا کنید.

۳۱) معادله‌ی صفحاتی را بیابید که موازی صفحه $2x - 2y - z = 3$ و به فاصله‌ی ۵ از آن باشند.

۳۲) الف) نشان دهید دو خط به معادله‌های $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$ و $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ متنافر هستند.

ب) معادله‌ی صفحه‌ای را بدست آورید که خط L را دربرداشته و موازی خط L' باشد.

ج) معادله‌ی عمود مشترک L و L' را بیابید.

۳۳) خطوط L_1 و L_2 با معادلات زیر مفروضند

$$L_1 : \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

ثابت کنید L_1 و L_2 متنافرند اگر و تنها اگر

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

۳۴) الف) ثابت کنید خط Δ به معادله‌ی $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$ با صفحه‌ی D به معادله‌ی $6x-2y-3z=0$ نقطه‌ی مشترکی ندارد.

ب) معادله‌ی خط Δ'، تصویر قائم خط Δ بر صفحه‌ی D را پیدا کنید.

۳۵) فرض کنید فاصله‌ی دو خط متنافر به معادله‌های $\frac{x-x_1}{\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\beta_1}=\frac{z-z_1}{\gamma_1}$ و $\frac{x-x_2}{\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\beta_2}=\frac{z-z_2}{\gamma_2}$ عدد d باشد، ثابت کنید اگر داشته باشیم $\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1$ و بردارهای هادی بر هم عمود باشند آنگاه

$$d=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

۳۶) ثابت کنید سه صفحه‌ی متمایز که بردارهای نرمال مستقل خطی داشته باشند یک و تنها یک نقطه‌ی مشترک دارند.

۳۷) الف) ثابت کنید خطوط زیر موازی‌اند

$$L : \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1} \quad ; \quad L' : \begin{cases} x+y=1 \\ y=z \end{cases}$$

ب) معادله‌ی صفحه‌ای را که بر L و L' می‌گذرد به دست آورید.

۳۸) ثابت کنید خط راستی وجود ندارد که از مبدأ مختصات بگذرد و به ازای هر نقطه $p=(x,y,z)$ روی آن داشته باشیم $x^۲+y^۲=z$.

۳۹) مثلث OAB با رأس‌های $A=(۲,۳,۱)$ و $B=(۱,۱,-۱)$ و $O=(۰,۰,۰)$ مفروض است. معادله‌ی ارتفاع نظیر رأس O رابه دست آورید.

۴۰) نقاط $A=(۰,۰,bt)$ و $B=(a,bt,۰)$ را که $a,b\neq ۰$ ثابت هستند در نظر بگیرید. معادله‌ی صفحه‌ی پدید آمده توسط خطوط AB رابه دست آورید.

۴۱) الف) معادله‌ی خطی را که از نقاط $A=(۰,۰,۴)$ و $B=(۲,۲,۰)$ می‌گذرد بیابید.

ب) نقطه‌ی تقاطع این خط رابا صفحه‌ی $x+y-z=۰$ به دست آورید.

ج) زاویه‌ی بین خط و صفحه‌ی فوق را مشخص کنید.

۴۲) خط L به معادله‌ی $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z-۱۲}{-۱}$ و نقطه‌ی $M=(۱,۱,۱)$ مفروضند. مختصات نقطه‌ی قرینه‌ی M نسبت به خط L را به دست آورید.

۴۳) معادله‌ی کره‌ای را بنویسید که بر دو صفحه‌ی $\pi_۱: x+y+z=۳$ و $\pi_۲: x+y+z=۹$ مماس باشد و دو صفحه‌ی $p_۱: ۳x-z=۰$ و $p_۲: ۲x-y=۰$ از مرکز آن بگذرند.

۴۴) الف) ثابت کنید خط L به معادله‌ی $x=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z+۳}{۳}$ صفحه‌ی S به معادله‌ی $۳x+۳y-z=۴$ را در یک نقطه قطع می‌کند و نقطه‌ی تقاطع آنها را به دست آورید.

ب) معادله‌ی صفحه‌ی شامل L و نقطه‌ی $(۱,۱,۱)$ واقع بر صفحه‌ی S را بنویسید.

ج) مطلوب است تعیین معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه.

۴۵) صفحه‌ی π از فصل مشترک صفحات $۲x+۳z=۴$ و $x+y=۳$ گذشته و موازی بردار $a=۳i-j+۲k$ است. معادله‌ی صفحه‌ی π را بیابید.

۴۶) دو خط $L_۱: \frac{x+۱}{۲}=\frac{y+۴}{-۵}=\frac{z-۲}{۳}$ و $L_۲: \frac{x-۳}{-۲}=\frac{y+۴}{۵}=\frac{z-۸}{۳}$ مفروضند.

الف) نشان دهید $L_۱$ و $L_۲$ متنافرند.

ب) فاصله‌ی L_1 و L_2 و معادله‌ی خط عمود مشترک آنها را بدست آورید.

ج) معادله‌ی صفحه‌ای را تعیین کنید که هیچیک از دو خط L_1 و L_2 را قطع نکرده، از دو خط به یک فاصله باشد.

د) معادله‌ی خطی را بدست آورید که از مبدأ مختصات گذشته و L_1 و L_2 را قطع نماید.

۴۷) مثلث OAB به رئوس $O=(0,0,0)$، $A=(2,2,2)$ و $B=(1,1,-2)$ مفروض است. معادله‌ی ارتفاع، میانه و نیمساز نظیر رأس O را بدست آورید.

۴۸) الف) اگر $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه بردار در فضا باشند تعبیر هندسی $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{0}$ چیست ؟

ب) به کمک قسمت الف) تحقیق کنید آیا می‌توان صفحه‌ای شامل سه خط زیر داشت؟ $\Delta_1 : x-1=y=z+2$ ، $\Delta_2 : x+1=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{2}$ ، $\Delta_3 : \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

در صورت مثبت بودن جواب معادله‌ی صفحه را پیدا کنید.

۴۹) معادله‌ی صفحه‌ای را تعیین کنید که بر دو صفحه‌ی $x-y+z=0$ و $2x+y-4z=5$ عمود بوده و از نقطه‌ی $A(4,0,-2)$ عبور نماید.

۵۰) معادله‌ی خط حاصل از تصویر قائم خط $L : \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{2y+1}{2}=\dfrac{2-z}{3}$ را بر صفحه‌ی $x-y+z=3$ بدست آورید.

۵۱) معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که موازی دو خط $L_1 : \begin{cases} x=t+1 \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$ و $L_2 : \begin{cases} x=-t \\ y=2t+1 \\ z=t \end{cases}$ و شامل قرینه‌ی نقطه‌ی $M=(1,2,3)$ نسبت به صفحه‌ی $x-y=2$ باشد.

فصل ۲

توابع برداری و توابع حقیقی چندمتغیره

مفهوم تابع در حسابان نقشی اساسی بر عهده دارد. در بسیاری از پدیده‌های طبیعت، وابستگی کمیت‌های مختلف به یکدیگر توسط مفهوم تابع بیان می‌شود. در مواردی که کمیتی فقط به یک متغیر وابسته باشد، توابع حقیقی یک متغیره‌ی $f : I \to \mathbb{R}$ برای $I \subseteq \mathbb{R}$ مطرح می‌شوند ولی در بسیاری از موارد تعداد متغیرها بیش از یکی است و در این موارد توابع چند متغیره‌ی (حقیقی و برداری) $f : D \to \mathbb{R}^m$ برای $D \subseteq \mathbb{R}^n$ مورد توجه قرار می‌گیرند که موضوع بحث این فصل است. اگر چه این توابع تنوع زیادی دارند، در بیشتر مدل‌های کاربردی، حالت‌های $n = ۲, ۳$ و $m = ۱, ۲, ۳$ ظاهر می‌شوند. این حالت‌ها از جنبه‌ی هندسی و شهودی بیشتر قابل تجسم هستند.

۲−۱ توابع برداری

در مدل‌سازی پدیده‌هائی مانند مسیر حرکت یک متحرک در فضا از قبیل مسیر ماهواره‌ها، سیارات و $\cdots$ نسبت به متغیر زمان، از توابعی استفاده می‌کنیم که بر بازه‌ای از اعداد حقیقی تعریف شده‌اند و برد آنها زیر مجموعه‌ای از فضای دکارتی است.

تابع $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ که اسکالر $t \in I$ را به یک بردار $(x_۱, \cdots x_m) \in \mathbb{R}^m$ تصویر می‌کند **تابع برداری** روی I نامیده می‌شود. ضابطه‌ی تابع برداری در حالت کلی به شکل $\mathbf{f}(t) = x_۱(t)\ \mathbf{e}_۱ + \ \cdots\ + x_m(t)\ \mathbf{e}_m$ است که $x_۱(t), \cdots, x_m(t)$ توابع حقیقی یک متغیره و بردارهای $\mathbf{e}_۱ = (۱, ۰, \cdots, ۰)$، $\cdots$ و $\mathbf{e}_m = (۰, \cdots, ۰, ۱)$ پایه‌ی استاندارد فضای $\mathbb{R}^m$ را تشکیل می‌دهند. به دلیل اهمیت حالت‌های خاص $m = ۲, ۳$، شکل کلی این رده از توابع برداری را جداگانه بیان می‌کنیم.

فرض کنیم $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ توابعی حقیقی روی یک بازه‌ی مشترک $I \subseteq \mathbb{R}$ باشند. در این صورت برد تابع برداری $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = x(t)\ \mathbf{i} + y(t)\ \mathbf{j}$، زیرمجموعه‌ی $\{(x(t), y(t)) : t \in I\}$ از صفحه‌ی دکارتی و برد تابع برداری $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = x(t)\ \mathbf{i} + y(t)\ \mathbf{j} + z(t)\ \mathbf{k}$، زیر مجموعه‌ی $\{(x(t), y(t), z(t)) : t \in I\}$ از فضای دکارتی است. در عمل برد توابع برداری اهمیت دارد و معمولاً یک خم را مشخص می‌کند که در بخش خم‌های پارامتری مورد بحث قرار می‌گیرد.

مثال ۲–۱–۱ توابع با ضابطه‌های زیر توابع برداری هستند.

$\mathbf{f} : [\circ, \pi] \to \mathbb{R}^۲ \qquad \mathbf{f}(t) = \cos t\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j}$

$\mathbf{g} : [-۱, ۱] \to \mathbb{R}^۲ \qquad \mathbf{g}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{۱ - t^۲}\mathbf{j}$

$\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۳ \qquad \mathbf{h}(t) = (x_\circ + at)\mathbf{i} + (y_\circ + bt)\mathbf{j} + (z_\circ + ct)\mathbf{k}$

$\mathbf{r} : [\circ, \infty) \to \mathbb{R}^۳ \qquad \mathbf{r}(t) = \sin(۱\circ t)\mathbf{i} + \cos(۱\circ t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

پیش از بیان مفاهیم وابسته به توابع برداری به بررسی یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۲–۱–۲ برای تابع برداری $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = ۲t\ \mathbf{i} + (t^۲ + ۱)\mathbf{j}$،

الف) زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{f}(۱)$ و $\mathbf{f}(-۱)$ را محاسبه کنید.

ب) مقادیری از t را تعیین کنید که بردار $\mathbf{f}(t)$ بر بردار $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ عمود باشد.

ج) برای چه مقادیری از t، بردار $\mathbf{f}(t)$ موازی بردار $\mathbf{v}$ است؟

الف) فرض کنیم θ زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{f}(۱)$ و $\mathbf{f}(-۱)$ باشد. از $\mathbf{f}(۱) = ۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j}$ و $\mathbf{f}(-۱) = -۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j}$ نتیجه می‌شود $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{f}(۱) \cdot \mathbf{f}(-۱)}{\|\mathbf{f}(۱)\|\ \|\mathbf{f}(-۱)\|} = \circ$، پس $\theta = \dfrac{\pi}{۲}$.

ب) بردارهای $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{v}$ بر هم عمود هستند اگر و تنها اگر $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{v} = \circ$. این رابطه معادل است با $۲t - (t^۲ + ۱) = \circ$ یعنی $t = ۱$.

ج) دو بردار $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{v}$ را با در نظر گرفتن مؤلفه‌ی سوم برابر با صفر، بردارهائی $\mathbb{R}^۳$ در نظر می‌گیریم. پس $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{v}$ با هم موازی هستند اگر و تنها اگر $\mathbf{f}(t) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. این رابطه معادل است با

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲t & t^۲ + ۱ & \circ \\ ۱ & -۱ & \circ \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

یعنی $-(t + ۱)^۲\mathbf{k} = \mathbf{0}$، پس $t = -۱$.

۲−۲ حد توابع برداری

شبیه به توابع حقیقی یک متغیره، مطالعه‌ی رفتار حدی یک تابع برداری در برخی از مقادیر اهمیت خاصی دارد. به دلیل تشابه حالت کلی با حالت $n = ۳$، در این بخش تنها به بیان مفهوم حد آن دسته از تابع برداری می‌پردازیم که برد آنها زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۳$ است.

فرض کنیم $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ یک تابع برداری روی I باشد، $t_\circ \in I$ و $\mathbf{v} = x_\circ\mathbf{i} + y_\circ\mathbf{j} + z_\circ\mathbf{k}$ برداری در $\mathbb{R}^۳$ باشد. می‌گوییم f در $t_\circ$ دارای حد $\mathbf{v}$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{t\to t_\circ} \mathbf{f}(t) = \mathbf{v}$، هرگاه $\lim\limits_{t\to t_\circ} \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{v}\| = \circ$. به عبارت دیگر هرگاه

$$\forall\, \varepsilon > \circ \quad \exists\, \delta > \circ\ \forall\, t \quad (\circ < |t - t_\circ| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{v}\| < \varepsilon)$$

قضیه‌ی بعد رابطه‌ی بین وجود حد تابع برداری $\mathbf{f}$ و حد مؤلفه‌های آن را بیان می‌کند.

قضیه ۲−۲−۱ تابع برداری $\mathbf{f}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ در $t_\circ$ حد برابر $\mathbf{v} = x_\circ\mathbf{i} + y_\circ\mathbf{j} + z_\circ\mathbf{k}$ دارد اگر و تنها اگر $\lim\limits_{t\to t_\circ} x(t) = x_\circ$ ، $\lim\limits_{t\to t_\circ} y(t) = y_\circ$ و $\lim\limits_{t\to t_\circ} z(t) = z_\circ$.

مثال ۲−۲−۲ تابع $\mathbf{f}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = \dfrac{\ln t}{t-۱}\mathbf{i} + \dfrac{۱}{t}\mathbf{j} + \dfrac{t^۲-۱}{t-۱}\mathbf{k}$ در $t = ۱$ حد برابر $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ دارد زیرا $\lim\limits_{t\to ۱} \dfrac{\ln t}{t-۱} = ۱$ ، $\lim\limits_{t\to ۱} \dfrac{۱}{t} = ۱$ و $\lim\limits_{t\to ۱} \dfrac{t^۲-۱}{t-۱} = ۲$.

تابع برداری $\mathbf{f}$ را در $t_\circ$ **پیوسته** می‌نامیم هرگاه در این نقطه حد داشته باشد و $\lim\limits_{t\to t_\circ} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_\circ)$. تابع $\mathbf{f}$ روی فاصله‌ی باز $J \subseteq \mathbb{R}$ پیوسته نامیده می‌شود هرگاه در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد.

مثال ۲−۲−۳ تابع $\mathbf{f}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = \ln t\mathbf{i} + \dfrac{۱}{t}\mathbf{j} + t^۲\mathbf{k}$ در $t = ۱$ دارای حد برابر $\mathbf{f}(۱) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ است. پس $\mathbf{f}$ در $t = ۱$ پیوسته است. این تابع در تمام نقاط $(\circ, \infty)$ پیوسته است پس روی این بازه پیوسته است.

از قضیه‌ی ۲−۲−۱ قضیه‌ی زیر به دست می‌آید.

قضیه ۲−۲−۴ تابع برداری $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ در $t_\circ \in I$ پیوسته است اگر و تنها اگر هریک از توابع با ضابطه‌های $x = x(t)$، $y = y(t)$ و $z = z(t)$ در $t_\circ$ پیوسته باشند.

مشتق تابع برداری $\mathbf{f}: I \to \mathbb{R}^3$ در نقطه‌ی $t_0 \in I$ که نقطه‌ی انتهایی بازه‌ی I نیست در صورت وجود با $\mathbf{f}'(t_0)$ نمایش داده می‌شود و عبارت است از:

$$\mathbf{f}'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\mathbf{f}(t_0+h) - \mathbf{f}(t_0))$$

یکی از نتیجه‌های قضیه‌ی ۲–۲–۱، قضیه‌ی زیر است.

قضیه ۲–۲–۵ تابع برداری $\mathbf{f}: I \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ در $t_0 \in I$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر هریک از مؤلفه‌های آن در این نقطه مشتق‌پذیر باشند. علاوه بر این، در صورت وجود مشتقات، $\mathbf{f}'(t_0) = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}$.

تابع برداری $\mathbf{f}: I \to \mathbb{R}^3$ را در بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر گوییم هرگاه در کلیه‌ی نقاط این بازه مشتق‌پذیر باشد. تابع برداری $\mathbf{f}': I \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $t \mapsto \mathbf{f}'(t)$ تابع برداری مشتق نامیده می‌شود. مشتقات مرتبه‌ی بالاتر توابع برداری به شکل مشابه تعریف می‌شود.

قضیه ۲–۲–۶ فرض کنیم توابع برداری $\mathbf{f}\ ,\ \mathbf{g}: I \to \mathbb{R}^3$ و تابع اسکالر $\alpha: I \to \mathbb{R}$ در $t_0 \in I$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت هر یک از توابع $\mathbf{f} \pm \mathbf{g}: I \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌های $t \mapsto \mathbf{f}(t) \pm \mathbf{g}(t)$، $\alpha\mathbf{f}: I \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $t \mapsto \alpha(t)\mathbf{f}(t)$، $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}: I \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $t \mapsto \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)$ و $\mathbf{f}\times\mathbf{g}: I \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $t \mapsto \mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t)$ در t_0 مشتق‌پذیر هستند و

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{f}\pm\mathbf{g})'(t_0) = \mathbf{f}'(t_0) \pm \mathbf{g}'(t_0)\ ,\\
&(\alpha\mathbf{f})'(t_0) = \alpha'(t_0)\mathbf{f}(t_0) + \alpha(t_0)\mathbf{f}'(t_0)\ ,\\
&(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})'(t_0) = \mathbf{f}'(t_0)\cdot\mathbf{g}(t_0) + \mathbf{f}(t_0)\cdot\mathbf{g}'(t_0)\ ,\\
&(\mathbf{f}\times\mathbf{g})'(t_0) = \mathbf{f}'(t_0)\times\mathbf{g}(t_0) + \mathbf{f}(t_0)\times\mathbf{g}'(t_0).
\end{aligned}$$

مثال ۲–۲–۷ برای تابع برداری مشتق‌پذیر $\mathbf{f}$ نشان می‌دهیم $\|\mathbf{f}(t)\|$ مقداری ثابت و مستقل از t است اگر وتنها اگر $\mathbf{f}(t)\perp\mathbf{f}'(t)$. بنابر قضیه‌ی ۲–۲–۶ برای $t \in \mathbb{R}$ داریم

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(t)\perp\mathbf{f}'(t) \quad &\iff \quad \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t) = 0\\
&\iff \quad 2\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t) = 0\\
&\iff \quad \left(\|\mathbf{f}(t)\|^2\right)' = 0\\
&\iff \quad \|\mathbf{f}(t)\|^2 = \text{عدد ثابت}\\
&\iff \quad \|\mathbf{f}(t)\| = \text{عدد ثابت}
\end{aligned}$$

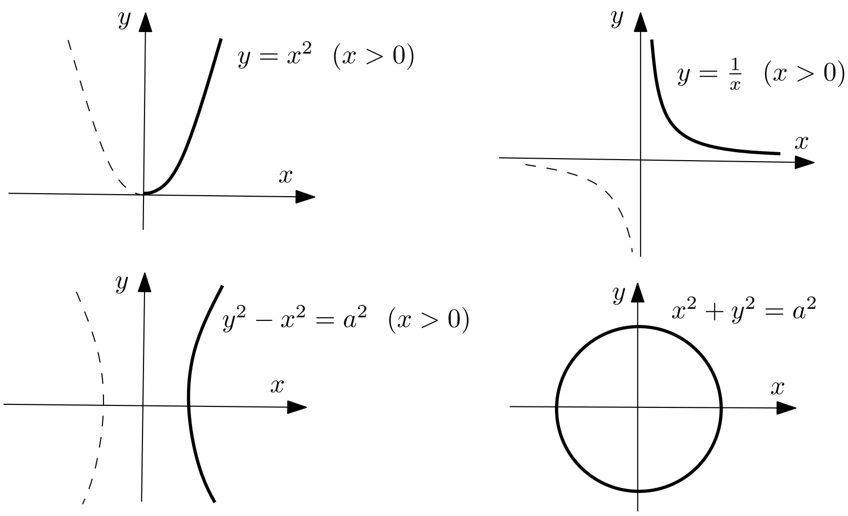
۲–۳ خم‌های پارامتری

فرض کنیم $\mathbf{r}$ یک تابع برداری با ضابطه‌ی $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ روی بازه‌ی $I \subseteq \mathbb{R}$ باشد. در این صورت متناظر با هر $t \in I$، بردار مکان $\mathbf{r}(t)$ نقطه‌ای مانند P به مختصات $(x(t), y(t), z(t))$ را مشخص می‌کند. با تغییر مقادیر $t \in I$، بردار $\mathbf{r}(t)$ تغییر می‌کند و زیرمجموعه‌ای از فضا مشخص می‌شود. در بسیاری از حالت‌ها این زیرمجموعه از فضا یک **خم (منحنی)** مانند C است. در این حالت C را خم یا **منحنی پارامتری** با معادله‌ی برداری $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^۳$، یا خم با معادلات پارامتری $x = x(t)$، $y = y(t)$ و $z = z(t)$ به ازای $t \in I$ می‌نامیم. بردار $\mathbf{r}(t)$، **بردار شعاعی** حامل نقطه‌ی P نامیده می‌شود.

مثال ۲–۳–۱ خم پارامتری نظیر هر یک از توابع برداری زیر را توصیف کنید.

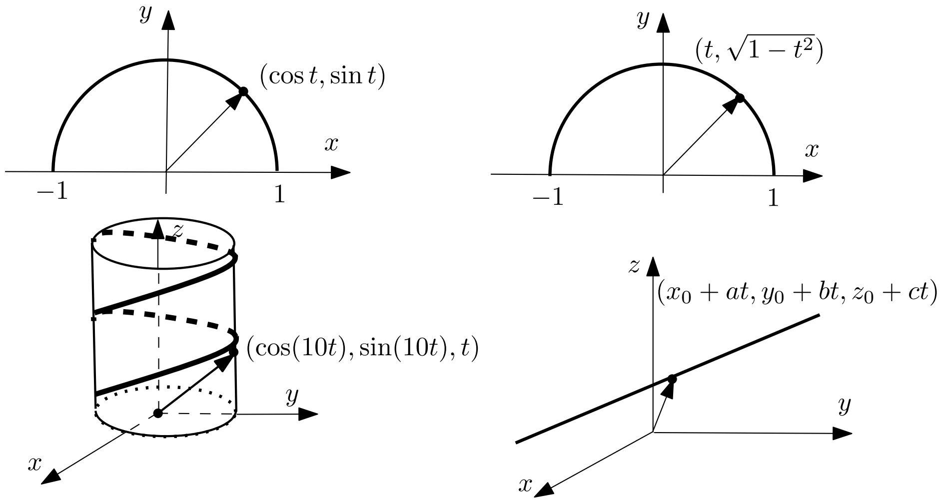
$$\mathbf{f}(t) = t^۲\ \mathbf{i} + t^۴\ \mathbf{j}\ , \qquad \mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۲\ ,$$
$$\mathbf{g}(t) = e^t\ \mathbf{i} + e^{-t}\ \mathbf{j}\ , \qquad \mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۲$$
$$\mathbf{h}(t) = a\cos t\ \mathbf{i} + a\sin t\ \mathbf{j}\ , \qquad \mathbf{h} : [۰, ۲\pi) \to \mathbb{R}^۲$$
$$\mathbf{r}(t) = a\cosh t\ \mathbf{i} + a\sinh t\ \mathbf{j}\ , \qquad \mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۲$$

خم‌های نظیر $\mathbf{f}$، $\mathbf{g}$، $\mathbf{h}$ و $\mathbf{r}$ به ترتیب بخشی از سهمی $y = x^۲$ $(x \geq ۰)$، یک شاخه از هذلولی $y = \frac{۱}{x}$ $(x > ۰)$، دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = a^۲$ و یک شاخه از هذلولی $x^۲ - y^۲ = a^۲$ $(x \geq ۰)$ هستند (شکل ۲–۱).



شکل ۲–۱ خم نمایش توابع برداری مثال ۲–۳–۱

در ادامه‌ی این مثال به بررسی خم‌هایی می‌پردازیم که در مثال ۲–۱–۱ مطرح شده‌اند. توابع $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ در مثال ۲–۱–۱، دو تابع متفاوت هستند، اما برد هر دو یک نیم دایره به شعاع ۱ در صفحه‌ی دکارتی است. برد $\mathbf{h}$ در مثال ۲–۱–۱ یک خط راست در فضای دکارتی با بردار هادی $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ و گذرنده از $(x_۰, y_۰, z_۰)$ است. برد $\mathbf{r}$ در مثال ۲–۱–۱ یک مارپیچ استوانه‌ای یعنی خمی روی استوانه‌ی واحد در $\mathbb{R}^۳$ است (شکل ۲—۲).



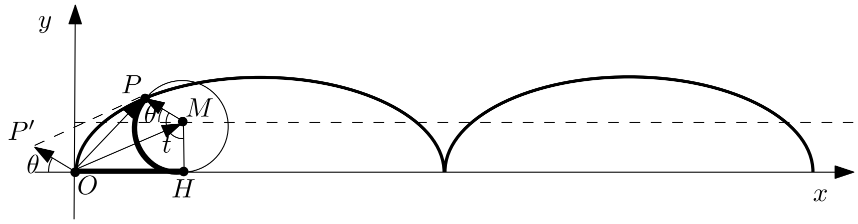
شکل ۲—۲ خم نمایش توابع برداری مثال ۲–۱–۱.

مثال ۲–۳–۲ خم C مکان هندسی نقطه‌ی ثابت P بر یک دایره به شعاع a است که روی محور x می‌غلطد. معادله‌ی پارامتری C را به دست آورید (شکل ۲—۳).

فرض کنیم M مرکز دایره، H نقطه‌ی تماس دایره با محور x و نقطه‌ی P در شروع حرکت بر مبدأ مختصات منطبق باشد. زاویه‌ی بین $\overrightarrow{MP}$ و $\overrightarrow{MH}$ را با t نمایش می‌دهیم (در صورتی که دایره با سرعت ثابت بچرخد می‌توان t را پارامتر زمان فرض کرد). در این صورت OH مسافت پیموده شده به وسیله‌ی P برابر طول کمان $\widehat{PH}$ از دایره، یعنی کمانی به طول at است. بنابر این $M = (at, a)$. اگر θ زاویه‌ی بردار $\overrightarrow{MP}$ با جهت منفی محور xها و $\overrightarrow{OP'}$ بردار مکان هم‌سنگ با $\overrightarrow{MP}$ باشد آنگاه:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP'} &= (at\ \mathbf{i} + a\ \mathbf{j}\ ) + (-a\cos\theta\ \mathbf{i} + a\sin\theta\ \mathbf{j}\ ) \\
&= (at\ \mathbf{i} + a\ \mathbf{j}\ ) + (-a\cos(t - \tfrac{\pi}{۲})\ \mathbf{i} + a\sin(t - \tfrac{\pi}{۲})\ \mathbf{j}\ ) \\
&= (at\ \mathbf{i} + a\ \mathbf{j}\ ) + (-a\sin t\ \mathbf{i} - a\cos t\ \mathbf{j}\ ) \\
&= a(t - \sin t)\ \mathbf{i} + a(۱ - \cos t)\ \mathbf{j}
\end{aligned}
$$

این خم **چرخزاد** نامیده می‌شود و بنابر آنچه گفته شد برد تابع برداری $\mathbf{r}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{r}(t) = a(t - \sin t)\ \mathbf{i} + a(۱ - \cos t)\ \mathbf{j}$ است.



شکل ۲–۳ چرخزاد.

مثال ۲–۳–۳ خم C را با معادلات پارامتری $x = \cos t$، $y = \sin t$ و $z = t$ برای $t \in [۰, \infty)$ در نظر می‌گیریم.

الف) معادلات پارامتری تصویر خم C بر صفحه‌ی xoy را تعیین کنید.

ب) تصویر C را بر صفحه‌ی π با معادله‌ی $x + z = ۱$ در جهت $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ به دست آورید.

ج) تصویر قائم C را بر صفحه‌ی π به دست آورید.

الف) مختص سوم تصویر نقاط C بر صفحه‌ی xoy برابر صفر است. پس معادلات پارامتری تصویر خم C بر صفحه‌ی xoy عبارت است از $x = \cos t$ و $y = \sin t$ به قسمی که $t \in [۰, \infty)$. بنابر این تصویر خم C بر صفحه‌ی xoy دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ مختصات است.

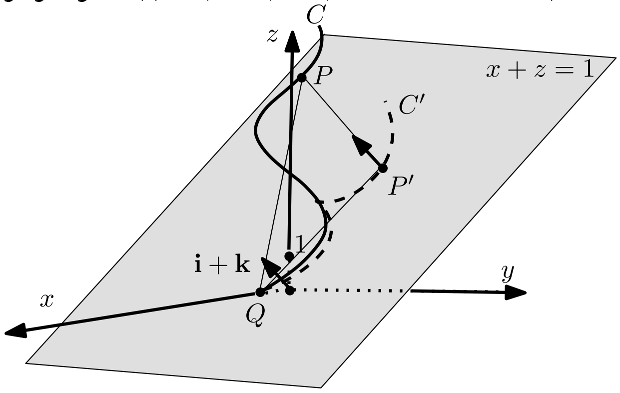
ب) به تعبیر فیزیکی می‌خواهیم یک شعاع نور موازی با بردار $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ بر خم C بتابانیم و معادله‌ی C'، سایه‌ی C را بر صفحه‌ی π به دست آوریم. فرض کنیم L_P خط گذرنده از نقطه‌ی $P = (\cos t, \sin t, t) \in C$ با بردار هادی $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ باشد. معادله‌ی خط L_P به شکل زیر است.

$$L_P : \begin{cases} x = \lambda + \cos t \\ y = \lambda + \sin t \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

بنابر این C'، تصویر خم C بر صفحه‌ی $x + z = ۱$ محل تلاقی خط فوق با صفحه، یعنی جواب دستگاه زیر است.

$$\begin{cases} x = \lambda + \cos t \\ y = \lambda + \sin t \\ z = t \\ x + z = ۱ \end{cases}$$

از $x+z=۱$ نتیجه می‌شود $\lambda+\cos t+t=۱$. پس $\lambda=۱-t-\cos t$. با جایگذاری λ مختصات نقطه‌ی دلخواه $P'=L_p\cap\pi$ عبارت است از $P'=(۱-t, ۱-t-\cos t+\sin t, t)$ بنابر این خم C' را می‌توان برد تابع برداری $\mathbf{R}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{R}(t)=(۱-t)\mathbf{i}+(۱-t-\cos t+\sin t)\mathbf{j}+t\ \mathbf{k}$ در نظر گرفت.



شکل ۲–۴ خم C' در قسمت (ج) مثال ۲–۳–۳.

ج) یک روش حل این قسمت شبیه به قسمت (ب) است. با این روش کافی است تصویر C بر صفحه‌ی π را در جهت بردار نرمال صفحه یعنی $\mathbf{n}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$ به دست می آوریم. ادامه‌ی حل این قسمت با روش قسمت (ب) را به دانشجویان واگذار می‌کنیم.

در روش دوم، نقطه‌ی دلخواهی مانند $Q=(۱,۰,۰)$ را در صفحه‌ی π در نظر می‌گیریم. فرض کنیم نقطه‌ی P' تصویر قائم نقطه‌ی $P=(\cos t,\sin t,t)\in C$ بر صفحه‌ی π باشد (شکل ۲–۴). در این صورت داریم

$$\overrightarrow{PQ}=(۱-\cos t)\ \mathbf{i}-\sin t\ \mathbf{j}-t\ \mathbf{k}$$

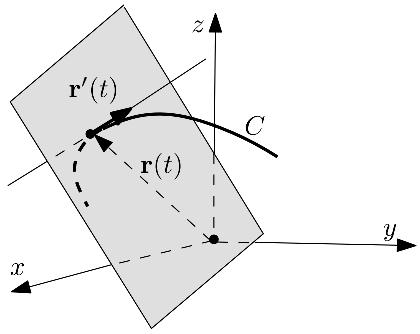
$$\overrightarrow{PP'}=\mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^{۲}}=\frac{۱-\cos t-t}{۲}(\mathbf{i}+\mathbf{k})$$

بنابر این $P'=(\cos t+\dfrac{۱-\cos t-t}{۲}\ ,\ \sin t\ ,\ t+\dfrac{۱-\cos t-t}{۲})$.

۲–۴ خط مماس و صفحه‌ی قائم اصلی

فرض کنیم C خم نظیر معادله‌ی برداری $\mathbf{r}:I\to\mathbb{R}^{۳}$، $P\in C$ نقطه‌ی نظیر $t\in I$ و Q نقطه‌ی نظیر $t+h\in I$ باشد. در این صورت بردار $\frac{۱}{h}[\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)]$ بردار هادی خط L_{PQ} شامل دو نقطه‌ی P و Q است. در صورتی که تابع برداری $\mathbf{r}$ در t مشتق‌پذیر باشد و $\mathbf{r}'(t)\neq\mathbf{0}$، وقتی $h\to ۰$، خط L_{PQ} به سمت خط مماس بر C در نقطه‌ی P (با بردار

هادی $\mathbf{r}'(t)$) میل می‌کند (شکل ۲—۵). خط گذرنده بر نقطه‌ی $P \in C$ با بردار هادی $\mathbf{r}'(t)$ **خط مماس** بر خم C در نقطه‌ی P نام دارد. صفحه‌ی واقع بر این نقطه با بردار نرمال $\mathbf{r}'(t)$ **صفحه‌ی قائم اصلی** بر خم C در P نامیده می‌شود.



شکل ۲—۵ خط مماس و صفحه‌ی قائم اصلی.

مثال ۲-۴-۱ برای خم C با معادلات پارامتری $x = \cosh t$ ، $y = \sinh t$ ، $z = t$،

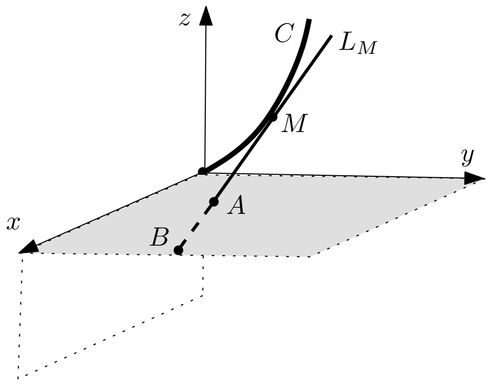
الف) معادله‌ی خط مماس بر این خم در نقطه‌ی نظیر $t = ۰$ و محل برخورد این خط را با صفحه‌ی xoz تعیین کنید.

ب) خطوط مماس بر خم C، صفحه‌ی xoz را در امتداد یک خم مانند C' قطع می‌کنند. معادلات پارامتری خم C' را به دست آورید.

الف) به ازای $t = ۰$، نقطه‌ی $P_۰ = (۱, ۰, ۰)$ بر C مشخص می‌شود. این خم نظیر تابع $\mathbf{r}(t) = \cosh t\ \mathbf{i} + \sinh t\ \mathbf{j} + t\ \mathbf{k}$ است، پس $\mathbf{r}'(t) = \sinh t\ \mathbf{i} + \cosh t\ \mathbf{j} +\ \mathbf{k}$. در نتیجه $\mathbf{r}'(۰) = \ \mathbf{j} +\ \mathbf{k}$ بردار هادی خط مماس بر C در نقطه‌ی $P_۰$ است. بنابر این معادلات پارامتری خط مماس بر این خم در نقطه‌ی $P_۰$ عبارت است از $x = ۱$، $y = t$ و $z = t$. نقطه‌ی $P'_۰$ نقطه‌ی تلاقی $L_۰$ با صفحه‌ی xoz، به ازای $y = ۰$ به دست می آید. پس $t = ۰$ و در نتیجه $P'_۰ = (۱, ۰, ۰) = P_۰$.

ب) فرض کنیم نقطه‌ی $P \in C$ نقطه‌ای متناظر با $t \in \mathbb{R}$ و L_P خط مماس بر خم C در نقطه‌ی P باشد. در این صورت $P = (\cosh t, \sinh t, t) \in L_P$ و $\mathbf{r}'(t) = \sinh t\ \mathbf{i} + \cosh t\ \mathbf{j} +\ \mathbf{k}$ بردار هادی خط مماس بر C در این نقطه است. بنابر این L_P دارای معادلات پارامتری $x(\lambda) = (\sinh t)\lambda + \cosh t$ ، $y(\lambda) = (\cosh t)\lambda + \sinh t$ و $z(\lambda) = \lambda + t$ است. خم C'، مکان هندسی نقاط تلاقی خط L_P با صفحه‌ی xoz، به ازای $y = ۰$ به دست می آید. پس $\lambda = -\dfrac{\sinh t}{\cosh t}$. در نتیجه خم C' به کمک معادلات پارامتری $x(t) = \dfrac{۱}{\cosh t}$ ، $y(t) = ۰$ ، $z(t) = t - \dfrac{\sinh t}{\cosh t}$ مشخص می‌شود.

مثال ۲-۴-۲ خم C به معادلات پارامتری $x = 3t$، $y = 3t^2$ و $z = 2t^3$ برای $t \neq 0$ مفروض است. خط مماس بر این خم در نقطه‌ی $M \in C$ صفحات xoy و xoz را به ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کند. نشان دهید $\frac{\|\overrightarrow{MA}\|}{\|\overrightarrow{MB}\|}$ مقداری ثابت و مستقل از t است.



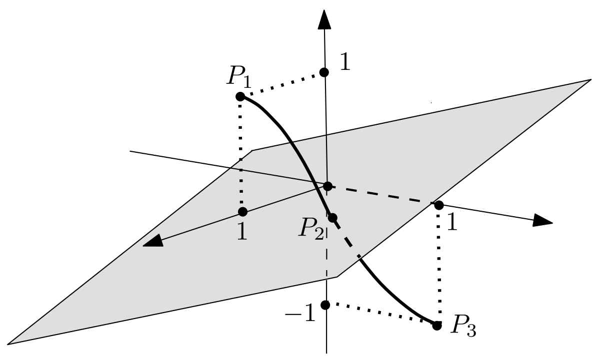
شکل ۲-۵ شکل مربوط به مثال ۲-۴-۲.

خم C نظیر تابع برداری $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k}$ است. فرض کنیم L_M خط مماس بر خم C در نقطه‌ی $M = (3t, 3t^2, 2t^3)$ باشد (شکل ۲-۵). در این صورت $\mathbf{r}'(t) = 3\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + 6t^2\,\mathbf{k} \parallel L_M$ و معادلات پارامتری L_M عبارت است از $x = 3\lambda + 3t$، $y = 6t\lambda + 3t^2$ و $z = 6t^2\lambda + 2t^3$. محل برخورد L_M با صفحه‌ی xoy به ازای $z = 0$ به دست می‌آید. پس $6t^2\lambda + 2t^3 = 0$ و در نتیجه $\lambda = -\frac{t}{3}$. به این ترتیب $A = (2t, t^2, 0)$. به همین ترتیب محل برخورد L_M با صفحه‌ی xoz به ازای $y = 0$ به دست می‌آید. پس $6t\lambda + 3t^2 = 0$ و در نتیجه $\lambda = -\frac{1}{2}t$. بنابر این $B = (\frac{3}{2}t, 0, -t^3)$. پس $\overrightarrow{MA} = -t\,\mathbf{i} - 2t^2\,\mathbf{j} - 2t^3\,\mathbf{k}$ و $\overrightarrow{MB} = -\frac{3}{2}t\,\mathbf{i} - 3t^2\,\mathbf{j} - 3t^3\,\mathbf{k}$ یعنی $\overrightarrow{MB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MA}$ و در نتیجه $\frac{\|\overrightarrow{MA}\|}{\|\overrightarrow{MB}\|} = \frac{2}{3}$.

مثال ۲-۴-۳ خم C به معادلات پارامتری $x = \cos t$، $y = \sin t$ و $z = \cos 2t$ برای $t \in \mathbb{R}$ مفروض است. نقاطی از خم را تعیین کنید که صفحه‌ی قائم بر خم در این نقاط شامل مبداء مختصات باشد.

تابع برداری نظیر C عبارت است از $\mathbf{r}(t) = \cos t\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j} + \cos 2t\ \mathbf{k}$. فرض کنیم π_P صفحه‌ی قائم بر C در نقطه‌ی $P \in C$ شامل مبدأ مختصات O باشد. در این صورت از

$P, O \in \pi_P$ نتیجه می‌شود $\overrightarrow{OP} \subseteq \pi_P$. پس $\mathbf{r}'(t) \perp \overrightarrow{OP}$ که معادل است با $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = ۰$.
با توجه به این که $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\ \mathbf{i} + \cos t\ \mathbf{j} - ۲\sin ۲t\ \mathbf{k}$، تساوی $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = ۰$ معادل است با $-۲\sin ۲t \cos ۲t = ۰$، یعنی $\sin ۴t = ۰$ یا $t = \frac{k\pi}{۴}$ $(k \in \mathbb{Z})$. در شکل ۲—۶ نقاط $P_۱, P_۲, P_۳$ نظیر $t = ۰, \frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲}$ مشاهده می‌شوند.



شکل ۲—۶ شکل مربوط به مثال ۲-۴-۳.

۲-۵ توابع حقیقی چند متغیره

دسته‌ی دیگری از توابع که در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های طبیعی و علوم فنی و مهندسی مطرح می‌شوند توابع حقیقی چند متغیره هستند. تابع $f : D \to \mathbb{R}$ برای $D \subseteq \mathbb{R}^n$ که بردار $\mathbf{x} = (x_۱, \cdots x_n) \in D$ را به اسکالر $f(x_۱, \cdots x_m) \in \mathbb{R}$ تصویر می‌کند **تابع حقیقی n متغیره** روی D نامیده می‌شود. برای مثال دمای نقطه‌ای مانند $P = (x, y, z)$ از یک جسم فیزیکی را می‌توان یک تابع حقیقی سه متغیره با ضابطه‌ی $T(x, y, z)$ از مختصات نقاط آن در نظر گرفت.

به دلیل اهمیت حالت‌های خاص $m = ۲, ۳$، ابتدا این حالت‌ها را بیان می‌کنیم.

تابع $f : D \to \mathbb{R}$، برای $D \subseteq \mathbb{R}^۲$، که به هر (x, y) در D عدد حقیقی $z = f(x, y)$ را نظیر می‌کند **تابع حقیقی ۲ متغیره** نامیده می‌شود.

تابع $f : D \to \mathbb{R}$، برای $D \subseteq \mathbb{R}^۳$، که به هر (x, y, z) در D عدد حقیقی $w = f(x, y, z)$ را نظیر می‌کند **تابع حقیقی ۳ متغیره** نامیده می‌شود.

به طور کلی، تابع $f : D \to \mathbb{R}$، برای $D \subseteq \mathbb{R}^n$، که $(x_۱, ..., x_n) \in D$ را به عدد حقیقی $w = f(x_۱, ..., x_n)$ تصویر می‌کند **تابع حقیقی n متغیره** نامیده می‌شود.

مثال ۲-۵-۱ توابع زیر نمونه‌هایی از توابع ۲، ۳ و n متغیره‌ی حقیقی هستند.

۱) $f : D \to \mathbb{R}, f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

۲) $f : D \to \mathbb{R}, \ f(x,y,z) = \dfrac{z}{1 - x^2 - y^2}, \quad D = \{(x,y,z) : \ x^2 + y^2 \neq 1\}$

۳) $f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, ..., x_n) = x_1, \quad D = \mathbb{R}^n$

۴) $f : D \to \mathbb{R}, \ f(x_1, ..., x_n) = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}, \quad D = \mathbb{R}^n$

نظیر توابع حقیقی یک متغیره، برای توابع حقیقی چند متغیره مفاهیم دامنه، برد، جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ترکیب با توابع حقیقی یک متغیره و توابع برداری مطرح می‌شوند. در مثال زیر به اختصار حالت‌های مختلف نشان داده شده است.

مثال ۲-۵-۲ تابع حقیقی دو متغیره‌ی f با ضابطه‌ی $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$، تابع حقیقی دو متغیره‌ی g با ضابطه‌ی $g(x,y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - 2y^2}$، تابع حقیقی یک متغیره‌ی h با ضابطه‌ی $h(x) = x^2 - 1$ و تابع برداری $\mathbf{r}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{r}(t) = e^t \sin t \ \mathbf{i} + e^t \cos t \ \mathbf{j}$ را در نظر می‌گیریم. دامنه‌ی این توابع و ضابطه‌ی توابع $f+g$، f/g، fg، $h \circ f$ و $f \circ \mathbf{r}$ را به دست می آوریم.

یادآوری می‌کنیم که دامنه‌ی توابع، اگر به طور صریح مشخص نشده باشند، بزرگترین مجموعه‌ای در نظر گرفته می‌شود که ضابطه‌ی تابع برای آن معنی‌دار است و با D_f نمایش داده می‌شود. دامنه‌ی f و g عبارت است از:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\} \ , \ D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 2y^2 \neq 1\}$$

ضابطه‌ی توابع $f+g$، f/g و fg با دامنه‌ی $D_f \cap D_g$ عبارت است از:

$$(f+g)(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \frac{1}{1 - x^2 - 2y^2}$$

$$(f/g)(x,y) = (1 - x^2 - 2y^2)\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$(fg)(x,y) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{1 - x^2 - 2y^2}$$

به همین ترتیب ضابطه‌ی توابع $h \circ f$ و $f \circ \mathbf{r}$ به شکل زیر خواهد بود.

$$(h \circ f)(x,y) = h(f(x,y)) = (\sqrt{1 - x^2 - y^2})^2 - 1 = -x^2 - y^2$$

$$(f \circ \mathbf{r})(t) = f(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{1 - (e^t \sin t)^2 - (e^t \cos t)^2} = \sqrt{1 - e^{2t}}$$

۲–۶ نمودار توابع حقیقی

یکی از مفاهیم مفید در بررسی رفتار توابع حقیقی، مفهوم نمودار است. برای توابع یک متغیره‌ی حقیقی $f: I \to \mathbb{R}$ که I بازه‌ای از مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، **نمودار** تابع f مجموعه‌ی $\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{۲} \;:\; x \in I \;\;,\;\; y = f(x)\ \}$ است. به این ترتیب نمودار یک تابع حقیقی یک متغیره زیر مجموعه‌ای از صفحه‌ی $\mathbb{R}^{۲}$ است.

به همین ترتیب اگر $D \subseteq \mathbb{R}^{۲}$ و $f: D \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی دو متغیره روی D باشد، نمودار تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \;:\; (x,y) \in D\ ,\ z = f(x,y)\ \}$$

پس نمودار یک تابع دومتغیره زیر مجموعه‌ای از فضای $\mathbb{R}^{۳}$ است. در حالتی که نمودار یک تابع دومتغیره تشکیل یک رویه در فضای $\mathbb{R}^{۳}$ دهد آن را **رویه‌ی نظیر** f یا رویه‌ی S_f با معادله‌ی $z = f(x,y)$ می‌نامیم.

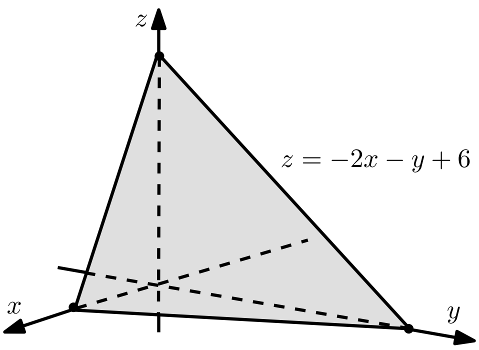
نمودار توابع حقیقی n متغیره برای $n \geq ۳$ به شکل مشابه تعریف می‌شود.

مثال ۲–۶–۱ چند تابع دو متغیره و رویه‌ی نظیر آنها در زیر داده شده است.

۱) $f: \mathbb{R}^{۲} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x,y) = -۲x - y + ۶$

$$S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \;:\; z = -۲x - y + ۶\}$$

نمودار این تابع یک صفحه است (شکل ۳–۱)

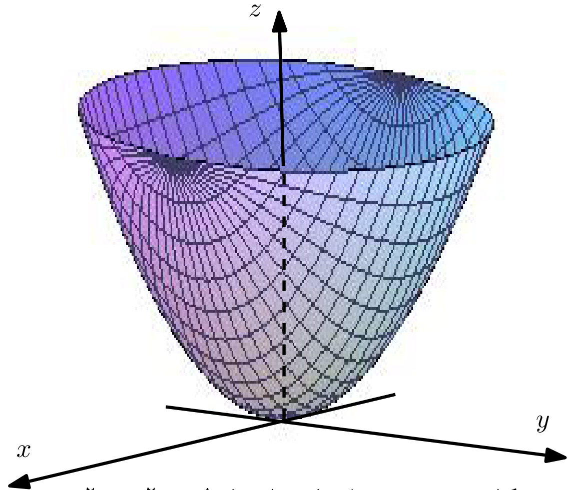


شکل ۳–۱ نمودار تابع با ضابطه‌ی $z = -۲x - y + ۶$.

۲) $f: \mathbb{R}^{۲} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x,y) = x^{۲} + y^{۲}$

$$S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \;:\; z = x^{۲} + y^{۲}\}$$

نمودار این تابع **سهمی‌گون دوار** نامیده می‌شود. به این رویه در بخش‌های بعد نیز خواهیم پرداخت. در شکل ۳–۲ نمودار f روی ناحیه‌ی $D = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$ رسم شده است.

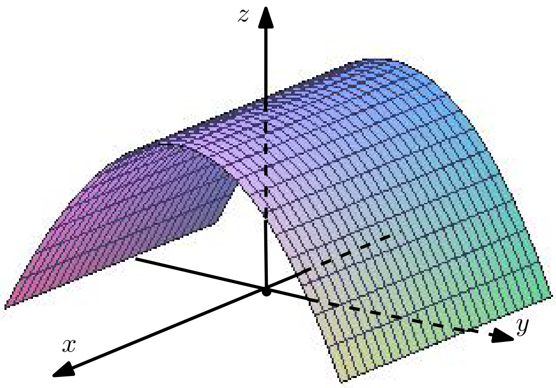


شکل ۳–۲ نمودار تابع با ضابطه‌ی $z = x^2 + y^2$.

۳) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , \ f(x,y) = 1 - y^2$

$$S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - y^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

در شکل ۳–۳ این رویه را روی ناحیه‌ی $D = \{(x,y) \ : \ -1 \leq x \leq 1 \ , \ -1 \leq y \leq 1\}$ مشاهده می‌کنید.

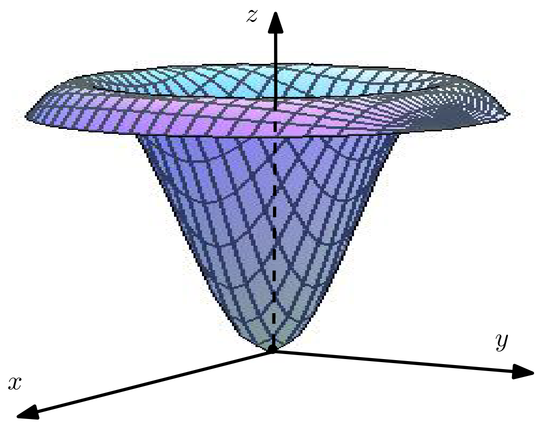


شکل ۳–۳ نمودار تابع با ضابطه‌ی $z = 1 - y^2$.

۴) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , \ f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$

$$S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}\}$$

در شکل ۳—۴ نمودار f روی ناحیه‌ی $D = \{(x,y) \ : \ x^۲ + y^۲ \leq ۲\}$ رسم شده است.

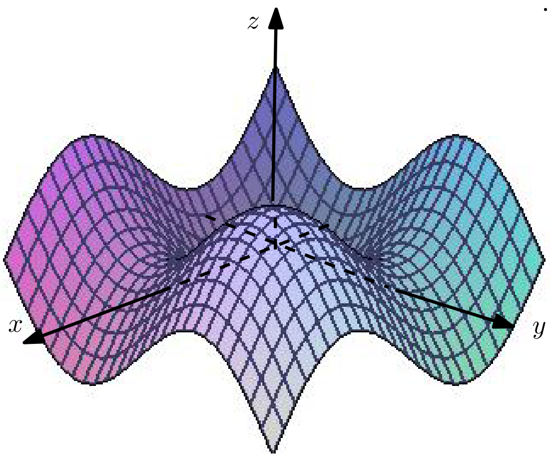


شکل ۳—۴ نمودار تابع با ضابطه‌ی $z = (x^۲ + y^۲)e^{-x^۲ - y^۲}$.

۵) $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R} \ , \ f(x,y) = \sin x + \sin y$

$$S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ \ : \ z = \sin x + \sin y\}$$

در شکل ۳—۵ این رویه را روی ناحیه‌ی $D = \{(x,y) \ : \ -\pi \leq x \leq \pi \ , \ -\pi \leq y \leq \pi\}$ مشاهده می‌کنید.



شکل ۳—۵ نمودار تابع با ضابطه‌ی $z = \sin x + \sin y$.

مثال ۲—۶—۲ تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = y^۲ - x^۲$ را در نظر می‌گیریم.

الف) مقطع نمودار تابع f را با صفحه‌های مختصات و صفحه‌ی $z = k$ تعیین کنید.

ب) نشان دهید خم C با معادلات پارامتری $x = \sin t$، $y = \cos t$ و $z = \cos ۲t$ برای $t \in [۰, ۲\pi]$ بر S_f قرار گرفته است.

ج) نقاطی از خم C را تعیین کنید که خط مماس بر خم در این نقاط روی سطح S_f قرار گرفته‌اند.

د) برای نقطه‌ی $A = (۱, ۲, ۳) \in S_f$ نشان دهید دقیقاً دو خط راست وجود دارد که از این نقطه می‌گذرند و بر روی سطح S_f قرار دارند.

الف) فرض کنیم π_x، π_y ، π_z و $\pi_{z=k}$ به ترتیب صفحه‌های yoz، zox، xoy و صفحه‌ی $z = k$ باشند. از $S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^۳ \ : \ z = y^۲ - x^۲\}$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} S_f \cap \pi_z &= \{(x, y, ۰) \ : \ y^۲ - x^۲ = ۰\} = \{(x, y, ۰) \ : \ y = \pm x\} \\ S_f \cap \pi_x &= \{(۰, y, z) \ : \ z = y^۲\}, \quad S_f \cap \pi_y = \{(x, ۰, z) \ : \ z = -x^۲\} \\ S_f \cap \pi_{z=k} &= \{(x, y, k) \ : \ y^۲ - x^۲ = k\} \end{aligned}$$

ب) برای نقطه‌ی $Q = (x, y, z) \in C$ یک $t \in [۰, ۲\pi]$ وجود دارد به قسمی که $x = \sin t$، $y = \cos t$ و $z = \cos ۲t$. از رابطه‌ی $y^۲ - x^۲ = \cos^۲ t - \sin^۲ t = \cos ۲t = z$ نتیجه می‌شود که مختصات Q در معادله‌ی رویه صدق می‌کنند و در نتیجه $C \subseteq S_f$.

ج) فرض کنیم $P = (\sin t, \cos t, \cos ۲t) \in C$ نقطه‌ای دلخواه از خم C و L_p خط مماس بر C در P باشد. برای تابع برداری $\mathbf{r}(t) = \sin t \ \mathbf{i} + \cos t \ \mathbf{j} + ۲ \cos ۲t \ \mathbf{k}$ که C را مشخص می‌کند، $\mathbf{r}'(t) = \cos t \ \mathbf{i} - \sin t \ \mathbf{j} - ۲ \sin ۲t \ \mathbf{k}$. پس معادله‌ی خط مماس بر C در P عبارت است از:

$$L_P : \begin{cases} x = (\cos t)\lambda + \sin t \\ y = (-\sin t)\lambda + \cos t \\ z = (-۲ \sin ۲t)\lambda + \cos ۲t \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

به این ترتیب اگر $P \in C$ نقطه‌ای باشد که $L_P \subseteq S_f$ آنگاه باید داشته باشیم:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \ (-۲ \sin ۲t)\lambda + \cos ۲t = [(-\sin t)\lambda + \cos t]^۲ - [(\cos t)\lambda + \sin t]^۲$$

تساوی فوق معادل است با این که برای هر λ، $(\sin^۲ t - \cos^۲ t)\lambda^۲ = \cos ۲t \ \lambda^۲ = ۰$، بنابر این باید داشته باشیم $\cos ۲t = ۰$. جواب‌های این معادله برای $t \in [۰, ۲\pi]$ عبارتند از $t = \frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴}$. مثلاً برای $t_۰ = \frac{\pi}{۴}$ معادله‌ی خط $L_{P_۰}$ به شکل زیراست (شکل ۳—۲):

$$L_{P_۰} : \begin{cases} x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\lambda + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ y = (-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\lambda + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ z = -۲\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

د) برای $P=(۱,۲,۳)$ فرض کنیم L_P خط گذرنده از P با بردار هادی $\mathbf{v}=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}+c\,\mathbf{k}$ باشد. معادله‌ی L_P به شکل زیر است:

$$L_P:\begin{cases} x=at+۱ \\ y=bt+۲ \\ z=ct+۳ \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

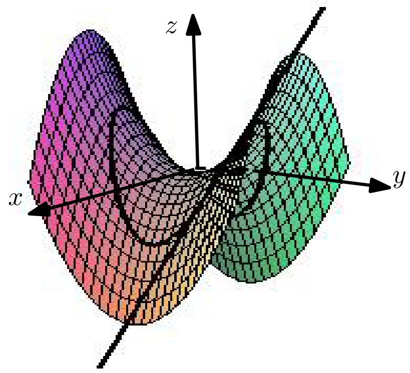
به این ترتیب $L_P\subseteq S_f$ معادل است با این که برای هر عددی حقیقی t داشته باشیم $ct+۳=(bt+۲)^۲-(at+۱)^۲$، یعنی برای هر t، $(b^۲-a^۲)t^۲+(۴b-۲a-c)t=۰$. در نتیجه باید داشته باشیم $b^۲-a^۲=۰$ و $۴b-۲a-c=۰$. پس یا $c=۲a$ و $b=a$ یا $c=-۶a$ و $b=-a$. به این ترتیب بردارهای هادی $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ عبارتند از:

$$\mathbf{v}_۱=a\,\mathbf{i}+a\,\mathbf{j}+۲a\,\mathbf{k}=a(\mathbf{i}+\mathbf{j}+۲\mathbf{k})\parallel\mathbf{i}+\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_۲=a\,\mathbf{i}-a\,\mathbf{j}-۶a\,\mathbf{k}=a(\mathbf{i}-\mathbf{j}-۶\mathbf{k})\parallel\mathbf{i}-\mathbf{j}-۶\mathbf{k}$$

و در نتیجه معادلات پارامتری خطوط $L_۱$ و $L_۲$ عبارتند از:

$$L_۱:\begin{cases} x=t+۱ \\ y=t+۲ \\ z=۲t+۳ \end{cases} \quad , \quad L_۲:\begin{cases} x=t+۱ \\ y=-t+۲ \\ z=-۶t+۳ \end{cases}$$



شکل ۳–۶ نمودار تابع با ضابطه‌ی $z=y^۲-x^۲$، **خم** C **و خط** $L_{P_۰}$ **در مثال ۲–۶–۲.**

۲–۷ مجموعه‌های تراز توابع چند متغیره

یکی دیگر از مفاهیم هندسی مربوط به توابع حقیقی چند متغیره، مفهوم مجموعه‌ی تراز است. به کمک مجموعه‌های تراز اطلاعات زیادی از رفتار هندسی تابع به دست می‌آید. نمونه‌های کاربردی این مفاهیم در نقشه‌ی جریانهای هوا، نقشه‌ی مناطق جغرافیایی و توموگرافی قابل ذکر است.

برای تابع دو متغیره‌ی $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ که $D\subseteq\mathbb{R}^۲$ و عدد ثابت $c\in\mathbb{R}$، **مجموعه‌ی تراز**

تابع f برای c عبارت است از:

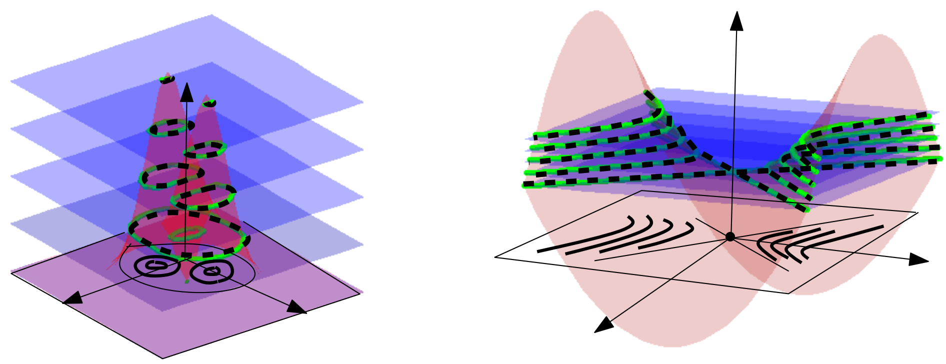
$$L_c := \{(x,y) \in D \ : \ f(x,y) = c\} \subseteq \mathbb{R}^۲$$

در صورتی که مجموعه‌ی تراز در صفحه‌ی xoy یک خم باشد، این خم را **خم (منحنی) تراز** تابع f به ازای ثابت c می‌نامیم (شکل ۳-۷).

به همین ترتیب برای تابع سه متغیره‌ی $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ که $D \subseteq \mathbb{R}^۳$ و عدد ثابت $c \in \mathbb{R}$، **مجموعه‌ی تراز** تابع f به ازای c عبارت است از:

$$L_c := \{(x,y,z) \in D \ : \ f(x,y,z) = c\} \subseteq \mathbb{R}^۳$$

در صورتی که مجموعه‌ی تراز تابع سه متغیره‌ی f رویه باشد، آن را **رویه‌ی تراز** تابع f به ازای ثابت c و یا رویه‌ی S_f به معادله‌ی $f(x,y,z) = c$ می‌نامیم. دو رویه یا دو خم تراز



شکل ۳-۷ خم‌های تراز در صفحه‌ی xoy.

مثال ۲-۷-۱ مجموعه‌های تراز توابع زیر را برای $c = -۱, ۰, ۱$ تعیین کنید.

الف) تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = x^۲ + y^۲$.

برای این تابع $L_{-۱} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ ; \ f(x,y) = x^۲ + y^۲ = -۱\}$ مجموعه‌ی تهی است. به همین ترتیب $L_۰ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ f(x,y) = x^۲ + y^۲ = ۰\} = \{(۰,۰)\}$ مجموعه‌ای تک نقطه‌ای و $L_۱ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ f(x,y) = x^۲ + y^۲ = ۱\}$ یک دایره به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۱ است.

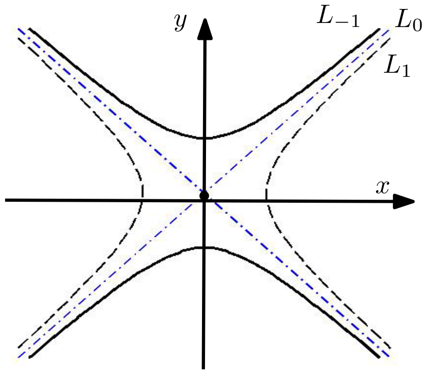
ب) تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = y^۲ - x^۲$.

$$L_{-۱} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ f(x,y) = -۱\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x^۲ - y^۲ = ۱\}$$

$$L_۰ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ f(x,y) = y^۲ - x^۲ = ۰\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ y = \pm x\}$$

$$L_۱ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ f(x,y) = y^۲ - x^۲ = ۱\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ y^۲ - x^۲ = ۱\}$$

مشاهده می‌شود که $L_{۱}$ و $L_{-۱}$ هذلولی هستند ولی $L_{\circ}$ اجتماع دو خط متقاطع است (شکل ۳—۸).

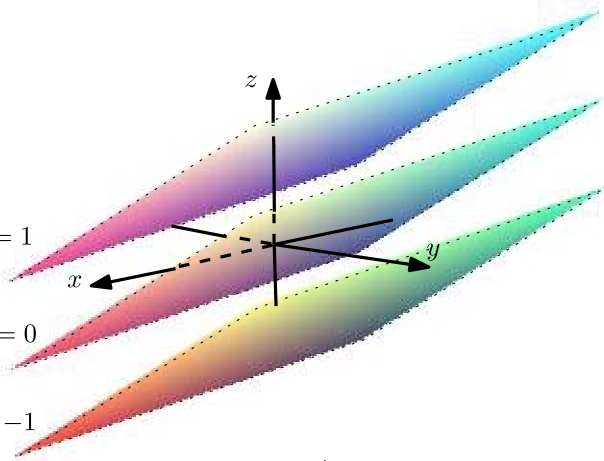


شکل ۳—۸ خم‌های تراز تابع با ضابطه‌ی $z = y^{۲} - x^{۲}$ برای $c = -۱, \circ, ۱$.

ج) تابع $f : \mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x - ۲y + z$.

$$L_{-۱} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \ : \ f(x,y,z) = x - ۲y + z = -۱\} \subseteq \mathbb{R}^{۳}$$
$$L_{\circ} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \ : \ f(x,y,z) = x - ۲y + z = \circ\} \subseteq \mathbb{R}^{۳}$$
$$L_{۱} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \ : \ f(x,y,z) = x - ۲y + z = ۱\} \subseteq \mathbb{R}^{۳}$$

برای این



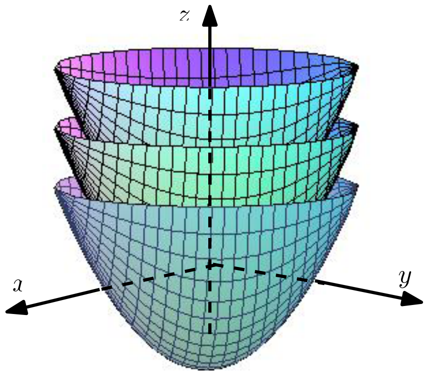
شکل ۳—۸ رویه‌های تراز تابع با ضابطه‌ی $w = x - ۲y + z$ برای $c = -۱, \circ, ۱$.

د) تابع $f : \mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = -x^{۲} - y^{۲} + z$.

$$L_{-۱} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \ : z = x^{۲} + y^{۲} - ۱\}$$
$$L_{\circ} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \ : z = x^{۲} + y^{۲}\}$$

$L_{\circ} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \; : z = x^{۲} + y^{۲} + ۱\}$

برای این تابع همه‌ی رویه‌های تراز سهمی‌گون دوار هستند (شکل ۳ــ۹).



شکل ۳ــ۹ رویه‌های تراز تابع با ضابطه‌ی $w = -x^{۲} - y^{۲} + z$ **برای** $c = -۱, \circ, ۱$.

ه) $c = -۱, \circ, ۱ \;\; , \;\; f : \mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R} \;\; , \;\; f(x,y,z) = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}$

$L_{-۱} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \; : \; f(x,y,z) = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = -۱\} = \emptyset$

$L_{\circ} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \; : \; f(x,y,z) = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = \circ\} = \{(\circ, \circ, \circ)\}$

$L_{۱} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \; : \; f(x,y,z) = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۱\} \subseteq \mathbb{R}^{۳}$ کره

و) $c = \circ, ۱, ۲ \;\; , \;\; f : \mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R} \;\; , \;\; f(x,y,z) = x^{۲} + y^{۲}$

$L_{\circ} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \; : \; x^{۲} + y^{۲} = \circ\} = \{(\circ, \circ, z) \; : \; z \in \mathbb{R}\}$ محور z

$L_{۱} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \; : \; f(x,y,z) = x^{۲} + y^{۲} = ۱\}$ استوانه

$L_{۲} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \; : \; f(x,y,z) = x^{۲} + y^{۲} = ۲\}$ استوانه

۲ــ۸ رویه‌های درجه دو

رده‌ای از رویه‌ها در $\mathbb{R}^{۳}$ رویه‌های اصطلاحاً درجه‌ی دو هستند. این رویه‌ها را می‌توان تعمیم ساده‌ای از مخروط به حساب آورد. به کمک این رویه‌ها که در مسائل کاربردی زیادی ظاهر می‌شوند مثال‌های خوبی برای بسیاری از قضیه‌های حساب دیفرانسیل مطرح می‌شوند. از اینرو آنها را با جزییات بیشتری بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ و J اعداد حقیقی ثابتی باشند که A, B, C, D, E و F همگی صفر نیستند. در این صورت تابع $f : \mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x,y,z) = Ax^{۲} + By^{۲} + Cz^{۲} + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J$$

یک **تابع درجه‌ی** دو نامیده می‌شود.

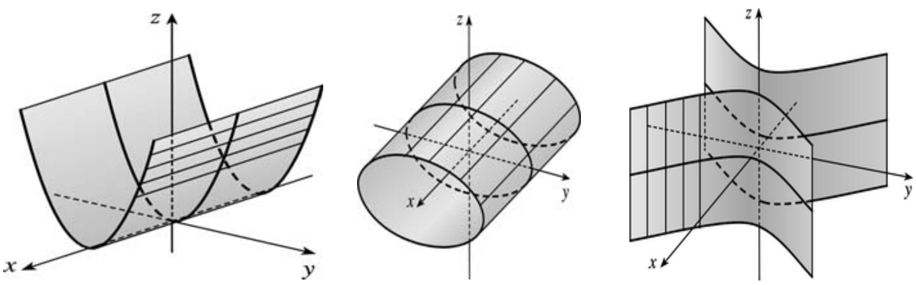
رویه‌های تراز تابع درجه‌ی دو را **رویه‌های درجه دو** می‌نامیم. به عبارت دیگر، یک رویه‌ی درجه‌ی دو، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۳$ به شکل زیر است:

$$Q = \{(x,y,z) \ : \ Ax^۲+By^۲+Cz^۲+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J = ۰ \ \}$$

مخروط، کره و استوانه نمونه‌هایی از رویه‌های درجه دو هستند. با تغییر مختصات مناسب معادله‌ی یک سطح درجه‌ی دو همواره به شکل اصطلاحاً استاندارد قابل بیان است:

$$Ax^۲ + By^۲ + Cz^۲ + Dx + Ey + Fz + G = ۰$$

در حالتی که ضرایب یکی از متغیرها، مثلاً اگر ضریب متغیر z برابر صفر باشد (ولی A و B هر دو صفر نباشند)، رویه‌ی درجه‌ی دو $Ax^۲ + By^۲ + Dx + Ey + G = ۰$ یک **رویه‌ی استوانه‌ای درجه دو** نامیده می‌شود. مقطع این رویه با صفحه‌ی xoy یکی از مقاطع مخروطی است (شکل ۳ــ۱۰).



شکل ۳ــ۱۰ چند سطح درجه‌ی دو استوانه‌ای.

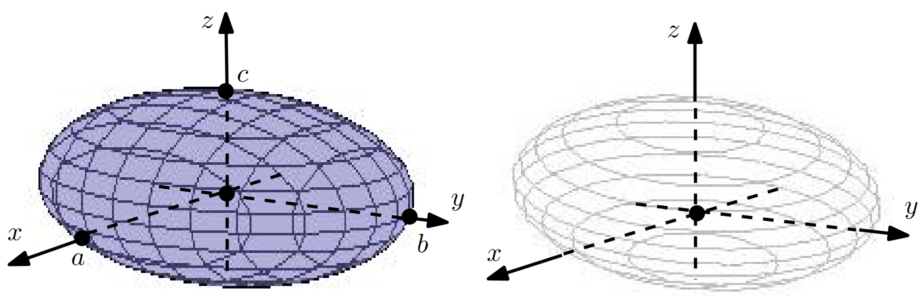
حالت‌های خاصی از رویه‌های درجه‌ی دو **تباهیده** نامیده می‌شوند و مورد توجه ما نیستند.

مجموعه‌ی تهی	$x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۱ = ۰$
مبدأ مختصات	$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۰$
محور z	$x^۲ + y^۲ = ۰$
یک صفحه ($x = ۱$)	$(x - ۱)^۲ = ۰$
دو صفحه‌ی موازی ($x = \pm ۱$)	$x^۲ - ۱ = ۰$
دو صفحه‌ی متقاطع ($x = \pm y$)	$x^۲ - y^۲ = ۰$

چند رویه‌ی درجه‌ی دو در عمل اهمیت بیشتری دارند. این حالت‌های خاص را به صورت اصطلاحاً استاندارد مطرح می‌کنیم. (شکل‌های ۳ــ۱۱ تا ۳ــ۱٦).

۱) بیضی‌گون

معادله‌ی بیضی گون به صورت استاندارد، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ است. مقادیر a، b و c نیم‌قطرهای بیضی‌گون نامیده می‌شوند. مبدأ مختصات مرکز تقارن و محورهای مختصات محور تقارن بیضی‌گون هستند. این رویه توسط مجموعه‌ی $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}$ مشخص می‌شود (شکل ۳—۱۱). برای $-a<k<a$ مقطع بیضی‌گون با صفحه‌ی به معادله‌ی $x=k$ یک بیضی به معادله‌ی $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}$ است. به همین ترتیب مقطع بیضی‌گون با صفحه‌ی به معادله‌ی $y=k$ برای $-b<k<b$ بیضی به معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}$ و مقطع آن با صفحه‌ی به معادله‌ی $z=k$ برای $-c<k<c$ بیضی با معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$ است. درحالت خاص $a=b=c$، بیضی‌گون یک کره است. لازم به ذکر است که کره یک رویه‌ی دوار نیز محسوب می‌شود که در بخش بعد از چشم‌انداز دیگری بررسی می‌شود.

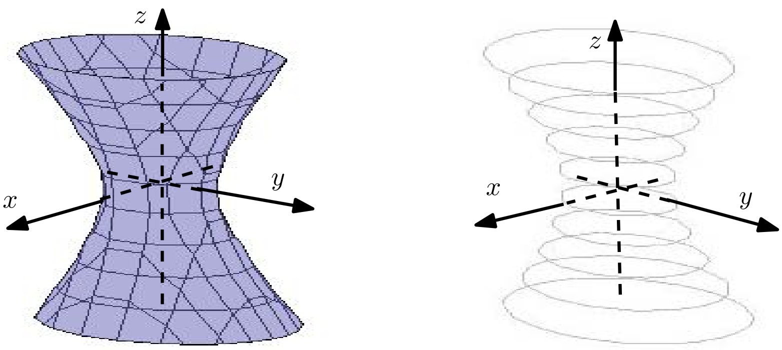


شکل ۳—۱۱ بیضی‌گون.

۲) هذلولی‌گون یک‌پارچه

معادله‌ی هذلولی‌گون یک‌پارچه به صورت استاندارد، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ است. مقادیر a، b و c نیم‌قطرهای هذلولی‌گون یک‌پارچه نامیده می‌شوند. مبدأ مختصات مرکز تقارن و محورهای مختصات محور تقارن هذلولی‌گون یک‌پارچه هستند. این رویه توسط مجموعه‌ی $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\}$ مشخص می‌شود (شکل ۳—۱۲). مقطع هذلولی‌گون یک‌پارچه با صفحه‌ی به معادله‌ی $x=k$ یک هذلولی به معادله‌ی $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}$ است. به همین ترتیب مقطع این رویه با صفحه‌ی به

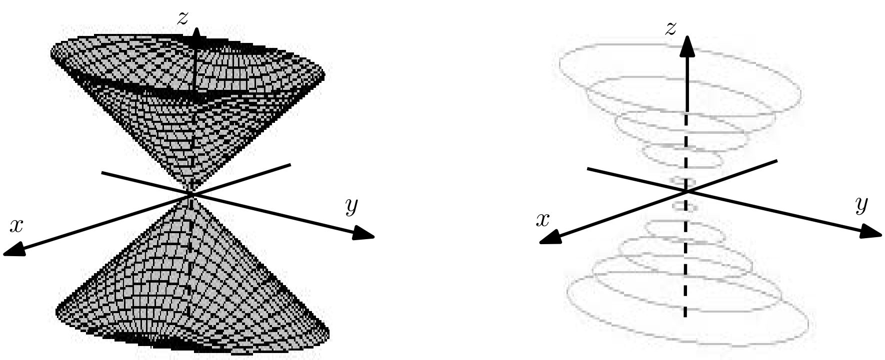
معادله‌ی $y=k$، هذلولی به معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}$ و مقطع آن با صفحه‌ی به معادله‌ی $z=k$ یک بیضی با معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$ است.



شکل ۳–۱۲ هذلولی‌گون یک‌پارچه.

۳) مخروط بیضوی

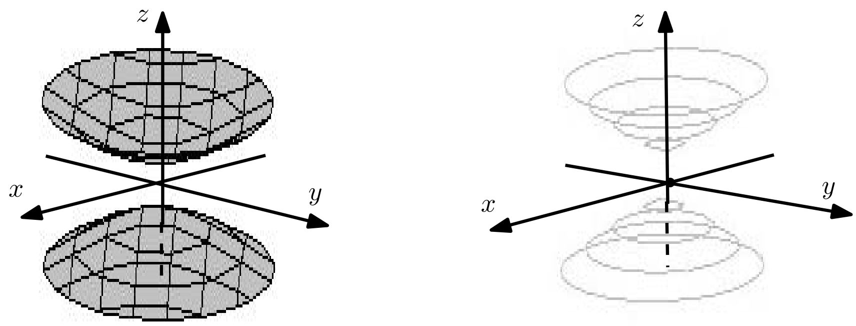
معادله‌ی مخروط بیضوی به صورت استاندارد، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ است. مقادیر a، b و c نیم‌قطرهای مخروط بیضوی نامیده می‌شوند. مبدأ مختصات مرکز تقارن و محورهای مختصات محور تقارن مخروط بیضوی هستند. مقطع مخروط بیضوی با صفحه‌ی به معادله‌ی $x=k$ یک هذلولی به معادله‌ی $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{a^2}\}=\frac{k^2}{a^2}$ است. به همین ترتیب مقطع این رویه با صفحه‌ی به معادله‌ی $y=k$ هذلولی به معادله‌ی $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{k^2}{b^2}$ و مقطع آن با صفحه‌ی به معادله‌ی $z=k$ یک بیضی با معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}$ است.



شکل ۳–۱۳ مخروط بیضوی.

۴) هذلولی‌گون دوپارچه

معادله‌ی هذلولی‌گون دوپارچه به صورت استاندارد، $-\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ است. مقادیر a، b و c نیم‌قطرهای هذلولی‌گون دوپارچه نامیده می‌شوند. مبدأ مختصات مرکز تقارن و محورهای مختصات محور تقارن هذلولی‌گون یک‌پارچه هستند (شکل ۳—۱۴). مقطع هذلولی‌گون یک‌پارچه با صفحه‌ی به معادله‌ی $x=k$ یک هذلولی به معادله‌ی $\frac{z^۲}{c^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱+\frac{k^۲}{a^۲}$ است. به همین ترتیب مقطع این رویه با صفحه‌ی به معادله‌ی $y=k$ هذلولی به معادله‌ی $\frac{z^۲}{c^۲}-\frac{x^۲}{a^۲}=۱+\frac{k^۲}{b^۲}$ و مقطع آن با صفحه‌ی به معادله‌ی $z=k$ برای $c<|k|$ بیضی با معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=\frac{k^۲}{c^۲}-۱$ است.



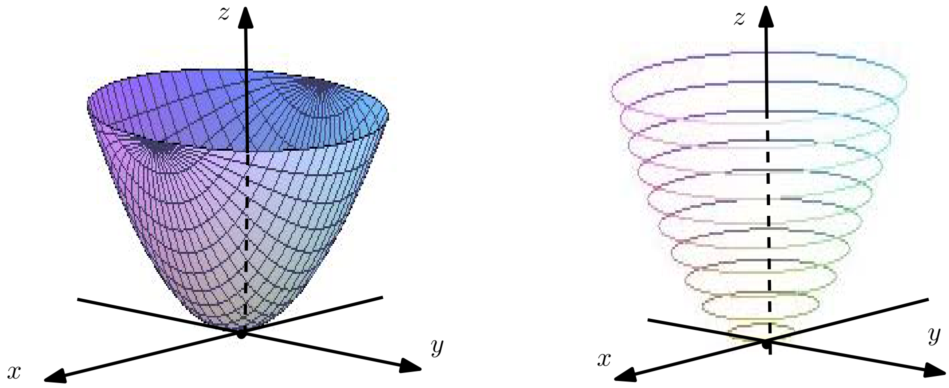
شکل ۳—۱۴ هذلولی‌گون دوپارچه.

همان‌گونه که پیش از این گفته شد، که بیضی‌گون، هذلولی‌گون یک‌پارچه، هذلولی‌گون دوپارچه و مخروط مرکز تقارن دارند. در ادامه به معرفی چند رویه‌ی درجه دوم بدون مرکز تقارن می‌پردازیم.

۵) سهمی‌گون بیضوی

معادله‌ی سهمی‌گون بیضوی به صورت استاندارد، $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=cz$ است. محورهای مختصات، محور تقارن سهمی‌گون بیضوی هستند (شکل ۳—۱۵). مقطع این رویه با صفحه‌ی به معادله‌ی $x=k$ یک سهمی به معادله‌ی $\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{k^۲}{a^۲}=cz$ است. به همین ترتیب مقطع رویه با صفحه‌ی به معادله‌ی $y=k$ سهمی به معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{k^۲}{b^۲}=cz$ و مقطع آن با صفحه‌ی به معادله‌ی $z=k$ برای $k>۰$ بیضی با معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=kc$ است. در حالت $k=۰$ صفحه‌ی به معادله‌ی $z=k$ بیضی‌گون استاندارد در راستای محور

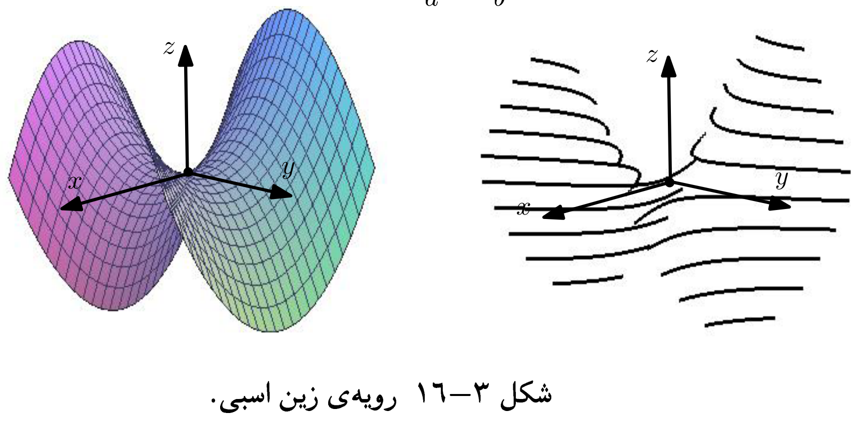
z را فقط در مبدأ مختصات قطع می‌کند و برای $k < \circ$ صفحه‌ی به معادله‌ی $z = k$ با این رویه نقطه‌ی مشترک ندارد.



شکل ۳–۱۵ سهمی‌گون بیضوی.

۶) سهمی‌گون هذلولوی (رویه‌ی زین اسبی)

معادله‌ی سهمی‌گون هذلولوی که رویه‌ی زین اسبی هم نامیده می‌شود به صورت استاندارد، $\frac{x^{\text{۲}}}{a^{\text{۲}}} - \frac{y^{\text{۲}}}{b^{\text{۲}}} = cz$ است. محورهای مختصات، محور تقارن زین اسبی هستند (شکل ۳–۱۶). مقطع زین اسبی با صفحه‌ی به معادله‌ی $x = k$ یک سهمی به معادله‌ی $\frac{k^{\text{۲}}}{a^{\text{۲}}} - \frac{y^{\text{۲}}}{b^{\text{۲}}} = cz$ است. به همین ترتیب مقطع سهمی‌گون بیضوی با صفحه‌ی به معادله‌ی $y = k$ سهمی به معادله‌ی $\frac{x^{\text{۲}}}{a^{\text{۲}}} - \frac{k^{\text{۲}}}{b^{\text{۲}}} = cz$ و مقطع آن با صفحه‌ی به معادله‌ی $z = k$ یک هذلولی با معادله‌ی $\frac{x^{\text{۲}}}{a^{\text{۲}}} - \frac{y^{\text{۲}}}{b^{\text{۲}}} = kc$ است.



شکل ۳–۱۶ رویه‌ی زین اسبی.

مثال ۲-۸-۱ برای رویه‌ی S به معادله‌ی $x^2 - y^2 + z^2 = -1$ مقطع S با صفحه‌های xoy، xoz و yoz و خم‌های تراز را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} S\cap\pi_{x=0} &= \{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ y^2 - z^2 = 1\} \quad \text{هذلولی} \\ S\cap\pi_{y=0} &= \{(x,0,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + z^2 = -1\} \quad \text{مجموعه‌ی تهی} \\ S\cap\pi_{z=0} &= \{(z,y,0)\in\mathbb{R}^3 \ : \ y^2 - x^2 = 1\} \quad \text{هذلولی} \\ S\cap\pi_{y=k} &= \{(x,k,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + z^2 = k^2 - 1\} \end{aligned}$$

مقطع S با صفحات $y = k$، در حالتی که $|k| > 1$ یک دایره، در حالت $|k| = 1$ یک نقطه و برای $|k| < 1$ تهی است. رویه‌ی S هذلولی‌گون دوپارچه‌ی دوار است.

مثال ۲-۸-۲ رویه‌ی S به معادله‌ی $x^2 + y^2 - z^2 = 2z + 2$ را در نظر می‌گیریم.

الف) رویه‌ی S را توصیف کنید.

ب) نشان دهید از نقطه‌ی $P_0 = (1,1,0) \in S$ دقیقاً دو خط راست می‌گذرند که تماماً بر روی S قرار دارند.

الف) با تغییر متغیر $X = x \ , \ Y = y \ , \ Z = z + 1$ معادله‌ی S به شکل $X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$ در می‌آید. بنابر این S هذلولی‌گون یک پارچه‌ی دوار با محور z به عنوان محور دوران و مرکز تقارن $(0,0,-1)$ است

ب) فرض کنیم $L_0 \subseteq S$ خطی دلخواه با بردار هادی $\mathbf{v} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ باشد که از $P_0 = (1,1,0)$ می‌گذرد. معادله‌ی L_0 به شکل زیر است:

$$L_0 : \begin{cases} x = at + 1 \\ y = bt + 1 & t\in\mathbb{R} \\ z = ct + 0 \end{cases}$$

پس $L_0 \subseteq S$ معادل است با این که برای هر t، $(at+1)^2 + (bt+1)^2 - (ct+1)^2 = 1$، یعنی برای هر t، $(a^2+b^2-c^2)t^2 + 2(a+b-c)t = 0$. بنابر این $a^2+b^2-c^2 = 0$ و $2(a+b-c) = 0$. از این دو معادله نتیجه می‌شود $a^2+b^2+2ab = c^2$. با استفاده از معادله‌ی اول باید داشته باشیم $ab = 0$. پس $a = 0$ یا $b = 0$. به این ترتیب برای این معادله دقیقاً دو جواب $a = 0, b = c$ و $b = 0, a = c$ به دست می‌آید. بنابر این $\mathbf{v}_1 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ بردارهای هادی دو خط مورد نظر هستند.

مثال ۲-۸-۳ رویه‌های $S_1 : x^2 - y^2 + z^2 = 1$ و $S_2 : y^2 - 2x + z = 0$ را برای $y \geq 0$ در نظر می‌گیریم. معادلات پارامتری C، خم حاصل از تلاقی دو رویه‌ی S_1 و S_2 را به دست می‌آوریم.

مختصات نقطه‌ی $P=(x,y,z)\in S_1\cap S_2$ در دستگاه زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} x^2-y^2+z^2=1 \\ y^2-2x+z=0 \end{cases}$$

از این دستگاه نتیجه می‌شود $x^2-2x+z^2+z=1$ که معادل است با $(x-1)^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}$. این معادله به شکل پارامتری عبارت است از

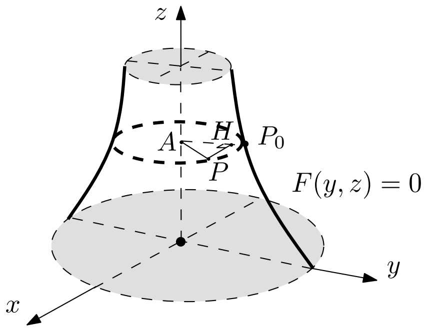
$$\begin{cases} x=1+\frac{3}{2}\cos t \\ z=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sin t \end{cases}$$

از سوی دیگر چون $y\geq 0$، از $y^2=2x-z$ نتیجه می‌شود $y^2=\frac{5}{2}+3\cos t-\frac{3}{2}\sin t$، یعنی $y=\sqrt{\frac{5}{2}+3\cos t-\frac{3}{2}\sin t}$. پس P روی خم C به معادلات پارامتری $x=1+\frac{3}{2}\cos t$، $y=\sqrt{\frac{5}{2}+3\cos t-\frac{3}{2}\sin t}$ و $z=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sin t$ واقع است.

۲−۹ رویه‌های دوار

آن دسته از رویه‌های درجه‌ی دو که خم تراز آنها دایره است، حالت‌های خاصی از رویه‌های اصطلاحاً دوار هستند. این رویه‌ها از دوران یک خم حول یک خط به دست می‌آیند. برای مثال کره از دوران یک دایره حول یک خط شامل قطر آن به دست می‌آید. فرض کنیم C یک خم مسطح واقع در صفحه‌ی π باشد. از دوران C حول خط $L\subseteq\pi$ یک رویه مانند S به دست می‌آید که آن را یک **رویه‌ی دوار** می‌نامیم. خم C یک **مولد** و خط L **محور دوران** رویه‌ی S نامیده می‌شوند. در این قسمت برای سادگی تنها حالتی را بررسی می‌کنیم که خم C در یکی از صفحات xoy، xoz یا yoz و محور دوران یکی از محورهای مختصات در این صفحه‌ها باشند. به دلیل شباهت این حالت‌ها تنها به ذکر حالتی می‌پردازیم که خم C در صفحه‌ی yoz به وسیله‌ی رابطه‌ی ضمنی $F(y,z)=0$ مشخص شده و محور دوران، محور z است. فرض کنیم نقطه‌ی $P=(x,y,z)$ بر رویه واقع است. در این صورت مقطع رویه و صفحه‌ی با بردار نرمال $\mathbf{k}$ و شامل P یک دایره است. این دایره صفحه‌ی yoz رادر نقطه‌ای مانند $P_0=(0,y_0,z_0)$ قطع می‌کند (شکل ۳−۱۷). از $P_0\in C$ نتیجه می‌شود $F(y_0,z_0)=0$. فرض کنیم $A=(0,0,z_0)$ و H پای ارتفاع وارد بر AP_0 از نقطه‌ی P باشد. در مثلث $\triangle APH$ داریم $AP^2=HP^2+AH^2$. از $AP=AP_0$ (شعاع‌های یک دایره هستند) نتیجه می‌شود $AP_0^2=HP^2+AH^2$. از سوی دیگر داریم

$AP_\circ = y_\circ$، $AH = y$ و $HP = x$. بنابر این $y_\circ^{۲} = x^{۲} + y^{۲}$ یعنی $y_\circ = \pm\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$. در نتیجه $\circ = F(y_\circ, z_\circ) = F(y_\circ, z) = F(\pm\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}, z)$. به این ترتیب مختصات نقطه‌ی $P = (x,y,z)$ در معادله‌ی $F(\pm\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\ ,\ z) = \circ$ صدق می‌کند.



شکل ۳–۱۷ **رویه‌ی دوار در صفحه‌ی yoz با محور دوران z.**

برخی از حالت‌های دیگر در جدول زیر مطرح شده‌اند.

صفحه‌ی حاوی C	معادله‌ی ضمنی C	محور دوران	معادله‌ی رویه
صفحه‌ی yoz $(x=\circ)$	$F(y,z)=\circ$	محور z	$F(\pm\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\ ,\ z)=\circ$
صفحه‌ی yoz $(x=\circ)$	$F(y,z)=\circ$	محور y	$F(y\ ,\ \pm\sqrt{x^{۲}+z^{۲}})=\circ$
صفحه‌ی xoy $(z=\circ)$	$F(x,y)=\circ$	محور y	$F(\pm\sqrt{x^{۲}+z^{۲}}\ ,\ y)=\circ$
صفحه‌ی xoy $(z=\circ)$	$F(x,y)=\circ$	محور x	$F(x\ ,\ \pm\sqrt{y^{۲}+z^{۲}})=\circ$
صفحه‌ی xoz $(y=\circ)$	$F(x,z)=\circ$	محور z	$F(\pm\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\ ,\ z)=\circ$
صفحه‌ی xoz $(y=\circ)$	$F(x,z)=\circ$	محور x	$F(x\ ,\ \pm\sqrt{y^{۲}+z^{۲}})=\circ$

مثال ۲–۹–۱ خم C را به معادله‌ی $y^{۲} - x^{۲} = ۱$ در صفحه‌ی xoy در نظر می‌گیریم. معادله‌ی رویه‌های حاصل از دوران خم C را حول محورهای y و x به دست می‌آوریم.

معادله‌ی خم C به صورت $F(x,y) = y^{۲} - x^{۲} - ۱ = \circ$ است. بنابر آنچه گفته شد، معادله‌ی رویه‌های حاصل از دوران خم C حول محورهای y و x به ترتیب $F(\pm\sqrt{x^{۲}+z^{۲}}\ ,\ y) = \circ$ و $F(x\ ,\ \pm\sqrt{y^{۲}+z^{۲}}) = \circ$ خواهد بود. با جایگزینی در ضابطه‌ی F، معادلات $y^{۲} - (\pm\sqrt{x^{۲}+z^{۲}})^{۲} - ۱ = \circ$ و $(\pm\sqrt{y^{۲}+z^{۲}})^{۲} - x^{۲} - ۱ = \circ$ که معادل هستند با $y^{۲} - x^{۲} - z^{۲} = ۱$ (هذلولی‌گون دو پارچه‌ی دوار با محور y) و $y^{۲} + z^{۲} - x^{۲} = ۱$ (هذلولی‌گون یک‌پارچه‌ی دوار با محور x) به دست می‌آیند.

مثال ۲-۹-۲ نقطه‌ی $P_\circ = (\circ, \circ, ۲)$ و دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱۶$ را در صفحه‌ی xoy در نظر می‌گیریم. خطوط گذرنده بر نقاط دایره‌ی فوق و نقطه‌ی $P_\circ$ تشکیل یک مخروط می‌دهند. معادله‌ی این مخروط را به دست آورید.

چون مقطع مخروط مورد نظر با صفحه‌ی xoy یک دایره است، این مخروط دوار است. کافی است یک مولد آن را به دست آوریم. نقطه‌ی تلاقی دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱۶$ و محور y در صفحه‌ی zoy نقطه‌ی $Q_\circ = (\circ, ۴, \circ)$ است. به این ترتیب معادله‌ی خط گذرنده از $P_\circ$ و $Q_\circ$ به شکل $x = \circ \ , \ ۲z + y - ۴ = \circ$ است. مخروط مورد نظر از دوران این خط حول محور z به دست می‌آید. اگر قرار دهیم $F(y, z) = ۲z + y - ۴$ آنگاه معادله‌ی مخروط به شکل $F(\pm\sqrt{x^۲ + y^۲} \ , \ z) = \circ$ می‌شود که معادل است با $\pm\sqrt{x^۲ + y^۲} + ۲z - ۴ = \circ$ یا $\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۴} - (z - ۴)^۲ = \circ$.

مثال ۲-۹-۳ رویه‌ی S را به معادله‌ی $x + xy^۲ + xz^۲ - y^۲ - z^۲ = \circ$ در نظر می‌گیریم. ثابت کنید S یک رویه‌ی دوار است. محور دوران و یک خم مولد S را مشخص کنید.

برای این رویه داریم:

$$\begin{aligned} S \cap \pi_{x=k} &= \{(k, y, z) \in \mathbb{R}^۳ \ : \ k + k(y^۲ + z^۲) = (y^۲ + z^۲)\} \\ &= \{(k, y, z) \in \mathbb{R}^۳ \ : \ y^۲ + z^۲ = \frac{k}{۱ - k}\} \end{aligned}$$

مقطع S با صفحه‌ی با معادله‌ی $x = k$ برای کلیه‌ی مقادیر ممکن k، یعنی $\circ < k < ۱$، یک دایره و به ازای $k = \circ$ یک نقطه است. بنابر این S یک رویه‌ی دوار حول محور x است. برای به دست آوردن یک خم مولد S کافی است مقطع S را با صفحه‌ی $z = \circ$ یا $y = \circ$ به دست آوریم.

$$S \cap \pi_{z=\circ} = \{(x, y, \circ) \in \mathbb{R}^۳ \ : \ x = \frac{y^۲}{۱ + y^۲}\}$$

بنابر این محور دوران رویه‌ی S محور x و یک مولد آن، خم با معادله‌ی $x = \frac{y^۲}{۱ + y^۲}$ در صفحه‌ی xoy است.

مثال ۲-۹-۴ رویه‌ی S را به معادله‌ی $x^۲ - y^۲ - z^۲ = \circ$ در نظر می‌گیریم.

الف) رویه‌ی S را توصیف کنید.

ب) برای نقطه‌ی $P_\circ \in S$ ($P_\circ \neq (\circ, \circ, \circ)$) نشان دهید دقیقاً یک خط راست وجود دارد که از این نقطه می‌گذرد و تماماً روی S قرار دارد.

ج) نشان دهید خم C به معادلات پارامتری $x = e^t$، $y = e^t \cos t$ و $z = e^t \sin t$ روی S قرار گرفته است.

د) برای نقطه‌ی $P_0 \in S$ فرض کنیم L_0 خط گذرنده از این نقطه واقع بر رویه‌ی S و L'_0 خط مماس بر منحنی C در این نقطه باشد. نشان دهید زاویه‌ی بین دو خط L_0 و L'_0 مقداری ثابت و مستقل از نقطه‌ی P_0 است.

الف) معادله‌ی $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ هم ارز معادله‌ی $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$ است. پس رویه‌ی S یک مخروط دوار حول محور x است.

ب) فرض کنیم نقطه‌ی $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای از سطح S غیر از مبدأ مختصات و L_0 خط گذرنده از نقطه‌ی P_0 و مبدأ مختصات باشد. بردار هادی این خط $\mathbf{v}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$ و در نتیجه معادله‌ی آن عبارت است از:

$$L_0 : \begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 t \end{cases}$$

چون $P_0 \in S$، برای $(x, y, z) \in L_0$ داریم $x^2 - y^2 - z^2 = (x_0^2 - y_0^2 - z_0^2)t^2 = 0$. بنابراین $L_0 \subseteq S$. حال فرض کنیم $L : \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$ خط دیگری گذرنده از نقطه‌ی $P_0 \in S$ باشد. از $L \subseteq S$ نتیجه می‌شود که برای هر t، $(at + x_0)^2 - (bt + y_0)^2 - (ct + z_0)^2 = 0$، یا $(a^2 - b^2 - c^2)t^2 + 2(ax_0 - by_0 - cz_0)t + x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = 0$. این معادله وقتی برای تمام مقادیر t امکان پذیر است که ضرایب آن برابر صفر باشند یعنی $a^2 = b^2 + c^2$ و $ax_0 = by_0 + cz_0$. از معادله‌ی دوم نتیجه می‌شود $a^2 x_0^2 = b^2 y_0^2 + c^2 z_0^2 + 2bcy_0 z_0$ و از معادله‌ی اول داریم $b^2(y_0^2 - x_0^2) - c^2(z_0^2 - x_0^2) + 2bcy_0 z_0 = 0$. چون $x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = 0$، نتیجه می‌گیریم $b^2 z_0^2 + c^2 y_0^2 - 2bcy_0 z_0 = 0$. بنابراین $(bz_0 - cy_0)^2 = 0$، یعنی $bz_0 = cy_0$. از دو ثابت z_0 و y_0 حداقل یکی غیر صفر است. فرض کنیم $y_0 \neq 0$. در این صورت $c = \frac{z_0}{y_0} b$ و در نتیجه $b\ \frac{x_0}{y_0} = b\frac{y_0^2 + z_0^2}{x_0 y_0} = \frac{y_0}{x_0}b + \frac{z_0}{y_0}c = a$.

به این ترتیب بردار هادی خط L به شکل $\mathbf{v} = \frac{b}{y_0}(x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k})$ و موازی $\mathbf{v}_0$ است. به عبارت دیگر خط L همان خط L_0 است.

ج) از این که برای هر t داریم $-(e^t)^2 + (e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2 = -e^{2t} + e^{2t} = 0$ نتیجه می‌شود $C \subseteq S$.

د) برای خم C با معادله‌ی $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j} + e^t \sin t\,\mathbf{k}$، بردار مماس در P_0، بردار $\mathbf{r}'(t_0) = e^{t_0}\,\mathbf{i} + e^{t_0}(\cos t_0 - \sin t_0)\,\mathbf{j} + e^{t_0}(\sin t_0 + \cos t_0)\,\mathbf{k}$ است.

بردار هادی خط شامل P_0، $\mathbf{v}_0 = x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k} = e^{t_0}\ \mathbf{i}+e^{t_0}\cos t_0\ \mathbf{j}+e^{t_0}\sin t_0\ \mathbf{k}$ است. پس زاویه‌ی بین خط مماس بر P_0 و خط فوق عبارت است از:

$$\cos\theta = \frac{r'(t_0)\cdot v_0}{\|r'(t_0)\|\ \|v_0\|} = \frac{e^{2t_0}}{\sqrt{6}\ e^{2t_0}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

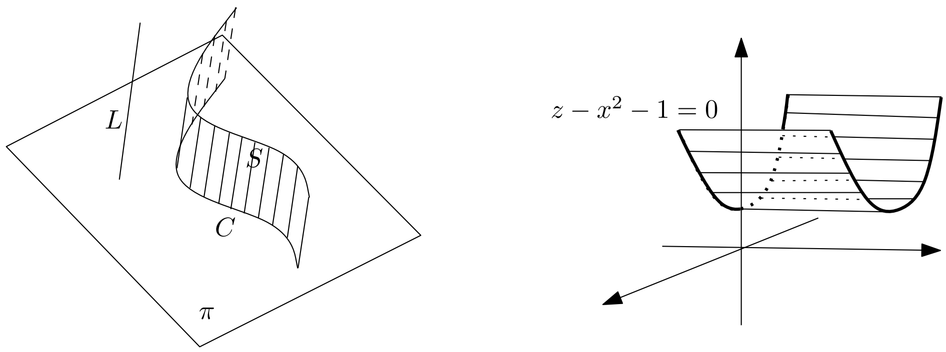
مشاهده می‌شود که این زاویه مقداری ثابت و مستقل از t_0 است.

۲−۱۰ رویه‌های استوانه‌ای

رویه‌های درجه‌ی دو مانند استوانه حالت‌های خاصی از رویه‌های اصطلاحاً استوانه‌ای هستند. فرض کنیم $C \subseteq \pi$ یک خم مسطح و L خطی غیر موازی با صفحه‌ی π باشد. از اجتماع خط‌های موازی با L که خم C را قطع می‌کنند یک رویه مانند S به دست می‌آید که آن را یک **رویه‌ی استوانه‌ای** می‌نامیم. خم C یک **خم مولد** و خط L یک **مولد** رویه‌ی S نامیده می‌شوند (شکل ۳−۱۸).

مثال ۲−۱۰−۱ الف) دایره‌ی C با معادله‌ی ضمنی $x^2 + y^2 = 1$ و محور z به عنوان مولد، یک رویه‌ی استوانه‌ای پدید می‌آورد که معادله‌ی آن $x^2 + y^2 = 1$ است.

ب) سهمی C با معادله‌ی ضمنی $z - x^2 - 1 = 0$ و محور y به عنوان مولد، یک رویه‌ی استوانه‌ای پدید می‌آورد که معادله‌ی آن $z - x^2 - 1 = 0$ است.



شکل ۳−۱۸ رویه‌های استوانه‌ای.

ج) هذلولی C به معادله‌ی $z^2 - y^2 = 1$ و محور x به عنوان مولد، یک رویه‌ی استوانه‌ای با معادله‌ی $z^2 - y^2 = 1$ پدید می‌آورد.

۲ــ۱۱ حد و پیوستگی توابع حقیقی چند متغیره

مفاهیم حد و پیوستگی برای توابع حقیقی چند متغیره تعمیم طبیعی و ساده‌ی این مفاهیم برای توابع حقیقی یک متغیره هستند. برای تعریف این مفاهیم ابتدا به یادآوری مفاهیم همسایگی محذوف و نقطه‌ی انباشتگی می‌پردازیم. برای $x_\circ \in \mathbb{R}$، همسایگی محذوف به شعاع δ، بازه‌ی بدون مرکز $(x_\circ - \delta \ , x_\circ + \delta) - \{x_\circ\}$ یعنی مجموعه‌ی زیر است.

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - x_\circ| < \delta \ , x \neq x_\circ\}$$

به همین ترتیب برای $(x_\circ , y_\circ) \in \mathbb{R}^۲$ یک همسایگی محذوف به شعاع δ (شکل ۳ــ۱۹) قرص بدون مرکز زیر است.

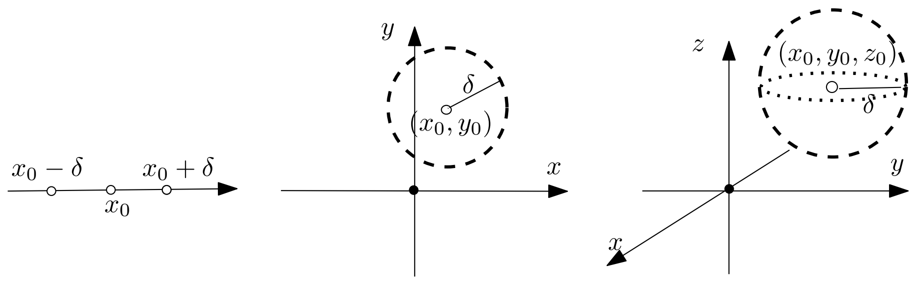
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ \|(x,y) - (x_\circ , y_\circ)\| < \delta \ , (x,y) \neq (x_\circ , y_\circ)\}$$

شرط $\|(x,y) - (x_\circ , y_\circ)\| < \delta$ را گاهی به شکل معادل، $\sqrt{(x - x_\circ)^۲ + (y - y_\circ)^۲} < \delta$ بیان می‌کنیم.

یک همسایگی محذوف به شعاع δ برای $(x_\circ , y_\circ , z_\circ) \in \mathbb{R}^۳$، گوی بدون مرکز زیر است (شکل ۳ــ۱۹).

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ \ \ \|(x,y,z) - (x_\circ , y_\circ , z_\circ)\| < \delta \ , (x,y,z) \neq (x_\circ , y_\circ , z_\circ)\}$$

برای این حالت نیز شرط $\|(x,y,z) - (x_\circ , y_\circ , z_\circ)\| < \delta$ را گاهی به شکل معادل، $\sqrt{(x - x_\circ)^۲ + (y - y_\circ)^۲ + (z - z_\circ)^۲} < \delta$ بیان می‌کنیم.



شکل ۳ــ۱۹ همسایگی محذوف در $\mathbb{R}^۳$، $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}$.

یک نقطه را **نقطه‌ی انباشتگی** برای دامنه‌ی تابع حقیقی f می‌نامیم هرگاه هر همسایگی از این نقطه با دامنه‌ی f اشتراک ناتهی داشته باشد. باید توجه داشت که لزومی ندارد که نقطه‌ی انباشتگی در دامنه‌ی f باشد. برای مثال نقطه‌ی $(\circ , \circ)$ یک نقطه‌ی انباشتگی

تابع حقیقی دو متغیره‌ی f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sin(x+y)}$ است اگر چه برای این تابع در هر همسایگی $(\circ,\circ)$ نقاطی خارج از دامنه‌ی تابع وجود دارد. در صورتی که نقطه‌ی $x_\circ$ یک نقطه‌ی انباشتگی برای دامنه‌ی تابع یک متغیره ی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ باشد، گوییم حد تابع در $x_\circ$ برابر ℓ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=\ell$ هرگاه

$$\forall\,\varepsilon>\circ\quad \exists\,\delta>\circ\quad \forall\,x\in D_f\ (\circ<|x-x_\circ|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon)$$

تعریف فوق را به شکل زیر برای توابع حقیقی دو و سه متغیره تعمیم می‌دهیم. فرض کنیم $\mathbf{x}_\circ=(x_\circ,y_\circ)$ یک نقطه‌ی انباشتگی دامنه‌ی تابع دو متغیره‌ی $f:\mathbb{R}^\text{۲}\to\mathbb{R}$ باشد. گوییم تابع f در $(x_\circ,y_\circ)$ حد برابر l دارد و می‌نویسیم $\lim\limits_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} f(x,y)=\ell$ هرگاه

$$\forall\,\varepsilon>\circ\quad \exists\,\delta>\circ\ \forall\,(x,y)\in D_f\ (\circ<\|(x,y)-(x_\circ,y_\circ)\|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-\ell|<\varepsilon)$$

به همین ترتیب گوییم تابع سه متغیره‌ی f در $\mathbf{x}_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ حد برابر l دارد و می‌نویسیم $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_\circ} f(x,y,z)=l$ هرگاه:

$$\forall\,\varepsilon>\circ\quad \exists\,\delta>\circ\quad \forall\,\mathbf{x}\in D_f\ (\circ<\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_\circ\|<\delta\Rightarrow|f(\mathbf{x})-\ell|<\varepsilon)$$

مثال ۲–۱۱–۱ نشان می‌دهیم تابع $f:\mathbb{R}^\text{۲}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\text{۲}x^\text{۲}-xy$ در نقطه‌ی $P=(\text{۱},-\text{۱})$ حد برابر با ۳ دارد.

باید نشان دهیم برای هر $\varepsilon>\circ$ عدد $\delta>\circ$ وجود دارد که برای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^\text{۲}$،

$$\circ<\sqrt{(x-\text{۱})^\text{۲}+(y+\text{۱})^\text{۲}}<\delta\Rightarrow|f(x,y)-\text{۳}|<\varepsilon$$

از روابط $|x-\text{۱}|\le\sqrt{(x-\text{۱})^\text{۲}+(y+\text{۱})^\text{۲}}$ و $|y+\text{۱}|\le\sqrt{(x-\text{۱})^\text{۲}+(y+\text{۱})^\text{۲}}$ رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
|f(x,y)-\text{۳}|=|\text{۲}x^\text{۲}-xy-\text{۳}| &= |\text{۲}x^\text{۲}-\text{۲}-xy-x+x-\text{۱}|\\
&= |\text{۲}(x-\text{۱})(x+\text{۱})-x(y+\text{۱})+x-\text{۱}|\\
&\le \text{۲}|x+\text{۱}||x-\text{۱}|+|x||y+\text{۱}|+|x-\text{۱}|\\
&\le (\text{۲}|x+\text{۱}|+|x|+\text{۱})\sqrt{(x-\text{۱})^\text{۲}+(y+\text{۱})^\text{۲}}
\end{aligned}$$

از سوی دیگر از $|x-\text{۱}|\le\sqrt{(x-\text{۱})^\text{۲}+(y+\text{۱})^\text{۲}}<\text{۱}$ نتیجه می‌شود $\circ\le x\le\text{۲}$، پس $\text{۲}|x+\text{۱}|+|x|+\text{۱}<\text{۹}$. در نتیجه برای نقاطی که $\sqrt{(x-\text{۱})^\text{۲}+(y+\text{۱})^\text{۲}}<\text{۱}$، داریم:

$$|f(x,y)-\text{۳}|<\text{۹}\sqrt{(x-\text{۱})^\text{۲}+(y+\text{۱})^\text{۲}}$$

پس برای $\varepsilon > ۰$ کافی است $\delta \le \mathrm{Min}\{۱, \frac{\varepsilon}{۹}\}$ اختیار شود.

مثال ۲-۱۱-۲ با استفاده از تعریف نشان دهید.

$$۱)\ \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲} = ۰$$

$$۲)\ \lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} x\sin(\frac{۱}{|x|+|y|+|z|}) + z^۲ = ۰$$

الف) باید نشان دهیم:

$$\forall\, \varepsilon > ۰\ \exists\, \delta > ۰\ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^۲\, (۰ < \sqrt{x^۲+y^۲} < \delta \Rightarrow |\frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲} - ۰| < \varepsilon)$$

با توجه به رابطه‌ی،

$$|\frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲} - ۰| = \frac{|x||\sin(xy)|}{x^۲+y^۲} \le \frac{|x||xy|}{x^۲+y^۲} = \frac{x^۲}{x^۲+y^۲}|y| \le |y| \le \sqrt{x^۲+y^۲}$$

برای $\varepsilon > ۰$ کافی است قرار دهیم $\delta \le \varepsilon$.

ب) باید نشان دهیم برای هر $\varepsilon > ۰$ یک $\delta > ۰$ وجود دارد به قسمی که:

$$\forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^۳\, (\ ۰ < \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < \delta \Rightarrow |x\sin(\frac{۱}{|x|+|y|+|z|}) + z^۲| < \varepsilon)$$

برای $\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < ۱$ داریم $|z| < \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < ۱$ پس $|z|^۲ < |z|$ و

$$\begin{aligned} |x\sin(\frac{۱}{|x|+|y|+|z|}) + z^۲| &\le |x|\,|\sin(\frac{۱}{|x|+|y|+|z|})| + |z|^۲ \\ &\le |x| + |z| \le ۲\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} \end{aligned}$$

به این ترتیب برای $\varepsilon > ۰$ کافی است قرار دهیم $\delta = \mathrm{Min}\{\frac{\varepsilon}{۲}, ۱\}$.

در مورد توابع حقیقی چند متغیره چند قضیه برای محاسبه‌ی حد وجود دارد که به دلیل شباهت زیاد با حالت یک متغیره تنها به ذکر یک قضیه در این باره می‌پردازیم.

قضیه ۲-۱۱-۳ اگر توابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ و $g : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ در $(x_۰, y_۰)$ به ترتیب حدهای برابر ℓ و m داشته باشند آنگاه توابع $f+g$، $f-g$، $f\cdot g$ و f/g (به شرط $m \ne ۰$) در $(x_۰, y_۰)$ به ترتیب حدهای برابر $\ell+m$، $\ell-m$، ℓm و ℓ/m دارند.

مفهوم مهم دیگر برای توابع چند متغیره، پیوستگی است که آن را برای توابع حقیقی دو متغیره بیان می‌کنیم. تعمیم آن به توابع حقیقی چند متغیره به دانشجویان واگذار می‌شود.

تابع حقیقی دو متغیره‌ی f را در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ) \in D_f$ پیوسته گوییم هرگاه در $(x_\circ, y_\circ)$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} f(x,y) = f(x_\circ, y_\circ)$.

تابع f را روی D پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه از D پیوسته باشد.

با استفاده از قضیه‌ی ۲–۱۱–۳، قضیه‌ی زیر به دست می‌آید.

قضیه ۲–۱۱–۴ اگر توابع حقیقی دو متغیره‌ی f و g در $(x_\circ, y_\circ)$ پیوسته باشند آنگاه توابع $f+g$، $f-g$، $f\cdot g$ و f/g (به شرط $g(x_\circ, y_\circ) \neq \circ$) در $(x_\circ, y_\circ)$ پیوسته هستند.

از پیوستگی توابع $f(x,y) = x$ و $g(x,y) = y$ که به سادگی قابل تحقیق است و قضیه‌ی ۲–۱۱–۴ دیده می‌شود که اگر $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ عبارت‌های جبری متشکل از جمع و ضرب توان‌های x و y باشند، آنگاه تابع با ضابطه‌ی $f(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ در هر نقطه که $Q(x,y)$ صفر نباشد پیوسته است.

مثال ۲–۱۱–۵ نشان دهید تابع $f : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر بر $\mathbb{R}^۳$ پیوسته است.

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^۲+y^۲z^۲}{x^۲+y^۲+z^۲} & (x,y,z) \neq (\circ,\circ,\circ) \\ \circ & (x,y,z) = (\circ,\circ,\circ) \end{cases}$$

توابع P و Q با ضابطه‌های $P(x,y,z) = xy^۲ + y^۲z^۲$ و $Q(x,y,z) = x^۲+y^۲+z^۲$ بر $\mathbb{R}^۳$ پیوسته هستند. بنابر این اگر $Q(x,y,z) \neq \circ$، یعنی $(x,y,z) \neq (\circ,\circ,\circ)$، آنگاه $f = \frac{P}{Q}$ در (x,y,z) پیوسته است. نشان می‌دهیم f در $(\circ,\circ,\circ)$ پیوسته است، یعنی $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\circ,\circ,\circ)} f(x,y,z) = \circ$. برای این منظور طبق تعریف باید نشان دهیم برای هر $\varepsilon > \circ$ یک $\delta > \circ$ وجود دارد که

$$\forall (x,y,z) \neq (\circ,\circ,\circ) \quad (\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < \delta \Rightarrow |f(x,y,z) - f(\circ,\circ,\circ)| < \varepsilon)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$\begin{aligned} |f(x,y,z) - f(\circ,\circ,\circ)| = |\frac{xy^۲+y^۲z^۲}{x^۲+y^۲+z^۲}| &\leq |x|\frac{y^۲}{x^۲+y^۲+z^۲} + y^۲\frac{z^۲}{x^۲+y^۲+z^۲} \\ &\leq |x| + y^۲ \end{aligned}$$

اگر $\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < ۱$ آنگاه:

$$|y| \leq \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < ۱$$

با ضرب دو طرف نامساوی فوق در $|y|$ داریم $y^۲ \leq |y|$. پس برای $\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < ۱$،

$$|f(x,y,z) - f(\circ,\circ,\circ)| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} + \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} = ۲\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$$

به این ترتیب برای $\varepsilon > \circ$ کافی است $\delta \leq \mathrm{Min}\{۱, \frac{\varepsilon}{۲}\}$ اختیار شود.

۲-۱۲ حد روی یک مسیر

فرض کنیم $\lim\limits_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} f(x,y)=\ell$، در این صورت برای هر خم C که $(x_\circ,y_\circ)\in C$،

$$\forall\,\varepsilon>\circ\ \ \exists\,\delta>\circ\ \ \forall\,(x,y)\in C\ (\circ<\|(x,y)-(x_\circ,y_\circ)\|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-\ell|<\varepsilon)$$

به عبارت دیگر مستقل از مسیری که (x,y) به سمت $(x_\circ,y_\circ)$ میل می‌کند، حد تابع f برابر ℓ است. از این نکته و این‌که حد یک تابع یکتا است می‌توان برای اثبات عدم وجود حد استفاده کرد.

مثال ۲-۱۲-۱ نشان دهید هیچ یک از حدهای زیر وجود ندارند.

الف) $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)}\dfrac{x}{|x|+|y|}$.

ب) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\circ,\circ,\circ)}\dfrac{x^۲+yz}{x^۲+y^۲+z^۲}$.

ج) $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)}\dfrac{x^۳y}{x^٦+y^۲}$.

د) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-۱,۱,\circ)}\dfrac{(x+۱)^۳(y-۱)^۲}{(x+۱)^٦+(y-۱)^۴+z^۲}$.

ه) $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)}\dfrac{x}{\sqrt[۳]{x^۳+y^۳}}$.

الف) خم C به معادلات پارامتری $x=t\ ,\ y=\circ$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y)\in C$ داریم

$$\frac{x}{|x|+|y|}=\frac{t}{|t|}$$

روی خم C داریم $(x,y)\to(\circ,\circ)$ اگر وتنها اگر $t\to\circ$. اما $\lim\limits_{t\to\circ}\dfrac{t}{|t|}$ وجود ندارد. بنابر این تابع $\dfrac{x}{|x|+|y|}$ در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ حد ندارد.

ب) فرض کنیم $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\circ,\circ,\circ)}\dfrac{x^۲+yz}{x^۲+y^۲+z^۲}$ وجود داشته و برابر ℓ باشد. در این صورت روی هر خم C که حاوی مبدأ مختصات باشد داریم $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\circ,\circ,\circ)}\dfrac{x^۲+yz}{x^۲+y^۲+z^۲}=\ell$.

خم C_1 به معادلات پارامتری $x = t \ , \ y = t \ , \ z = 0$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y,z) \in C_1$ داریم

$$\frac{x^2 + yz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}$$

حال خم C_2 به معادلات پارامتری $x = 0 \ , \ y = t \ , \ z = 0$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y,z) \in C_2$ داریم

$$\frac{x^2 + yz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

روی هر دو خم $C_1 \ , \ C_2$ داریم $(x,y,z) \to (0,0,0)$ اگر وتنها اگر $t \to 0$.

اما $0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2+t^2}$. بنابر این تابع $\frac{x^2 + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ در نقطه‌ی $(0,0,0)$ حد ندارد.

ج) فرض کنیم $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ وجود داشته و برابر ℓ باشد. خم C_1 به معادلات پارامتری $x = t \ , \ y = t$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y) \in C_1$ داریم

$$\frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \frac{t^4}{t^6 + t^2} = \frac{t^2}{t^4 + 1}$$

حال خم C_2 به معادلات پارامتری $x = t \ , \ y = t^3$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y) \in C_2$ داریم

$$\frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \frac{t^6}{t^6 + t^6} = \frac{1}{2}$$

روی هر دو خم $C_1 \ , \ C_2$ داریم $(x,y) \to (0,0)$ اگر وتنها اگر $t \to 0$. اما $\frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^4+1}$. بنابر این تابع $\frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ در نقطه‌ی $(0,0)$ حد ندارد.

د) خم C_1 به معادلات پارامتری $x = t - 1 \ , \ y = t + 1 \ , \ z = t$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y,z) \in C_1$ داریم

$$\frac{(x+1)^3 (y-1)^2}{(x+1)^6 + (y-1)^4 + z^2} = \frac{t^3 t^2}{t^6 + t^4 + t^2} = \frac{t^3}{t^4 + t^2 + 1}$$

در حالی که برای خم C_2 به معادلات پارامتری $x = \sqrt[3]{t^2} - 1 \ , \ y = t + 1 \ , \ z = 0$ داریم

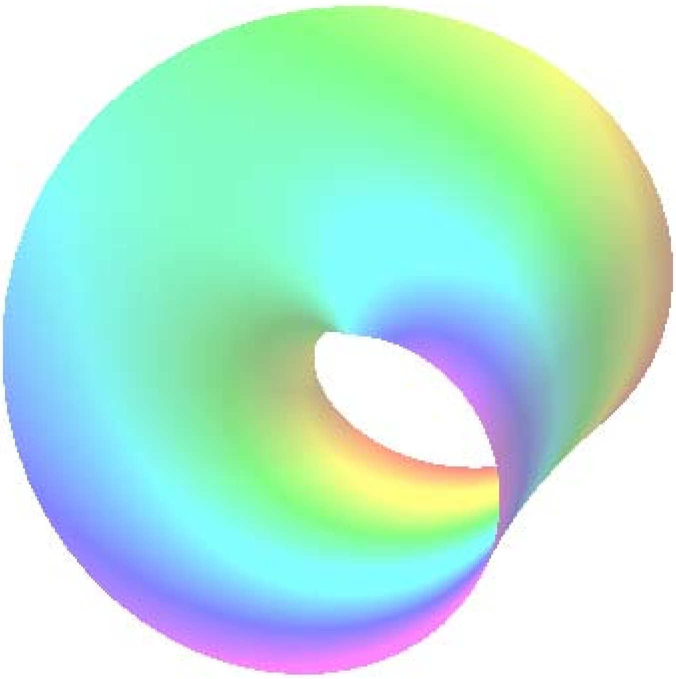
$$\frac{(x+1)^3 (y-1)^2}{(x+1)^6 + (y-1)^4 + z^2} = \frac{t^2 t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}$$

روی هر دو خم $C_۱$, $C_۲$ واضح است که $(x,y,z) \to (-۱,۱,۰)$ اگر وتنها اگر $t \to ۰$.
با توجه به این که $\frac{۱}{۲} \neq ۰ = \lim_{t\to ۰} \frac{t^۳}{t^۴+t^۲+۱}$، تابع $\frac{(x+۱)^۳(y-۱)^۲}{(x+۱)^٦+(y-۱)^۴+z^۲}$ در نقطه‌ی $(-۱,۱,۰)$ حد ندارد.

ه) خم C_m (m یک عدد ثابت و دلخواه است) به معادلات پارامتری $x=t$, $y=mt$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y) \in C_m$ داریم

$$\frac{x}{\sqrt[۳]{x^۳+y^۳}} = \frac{t}{\sqrt[۳]{t^۳+t^۳m^۳}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۱+m^۳}}$$

روی خم C_m، $(x,y) \to (۰,۰)$ اگر وتنها اگر $t \to ۰$. با توجه به این که $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۱+m^۳}} = \lim_{t\to ۰} \frac{۱}{\sqrt[۳]{۱+m^۳}}$ وابسته به m است، $\frac{x}{\sqrt[۳]{x^۳+y^۳}}$ در $(۰,۰)$ حد ندارد.



تمرین‌های فصل دوم

۱) $\lim\limits_{t\to -1}(\frac{t^2-1}{t-1}\,\mathbf{i}+\frac{t^3+1}{t+1}\,\mathbf{j})$ را محاسبه کنید.

۲) خم C نظیر تابع برداری $\mathbf{r}(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+t\,\mathbf{k}$ رادر جهت بردار $\mathbf{i}-\mathbf{k}$ بر صفحه‌ی xoy تصویر می‌کنیم. معادلات پارامتری خم تصویر را بیابید.

۳) تصویر قائم خم $\mathbf{r}(t)=3t\mathbf{i}+9t^2\mathbf{j}+27t^3\mathbf{k}$ بر صفحه‌ی $x+y+z=0$ را مشخص کنید.

۴) برای $t\geq 0$ مسیر حرکت یک متحرک در صفحه توسط تابع برداری $\mathbf{r}(t)=4\cos^3 t\mathbf{i}+4\sin^3 t\mathbf{j}$ تعیین می‌شود. کجا و چه موقع سرعت متحرک ماکزیمم و مینیمم می‌شود؟ آیا این متحرک هرگز از حرکت باز می‌ایستد؟

۵) آیا از رابطه‌ی $\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=0$ می‌توان نتیجه گرفت که $\|\mathbf{r}(t)\|$ برای تمام مقادیر t مقدار ثابتی است؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۶) در چه نقاطی خطوط مماس بر خم C با معادلات پارامتری $x=t$ ، $y=t^2$ و $z=t^3$ با صفحه‌ی $x+2y+z-1=0$ موازی هستند؟

۷) ثابت کنید خطوط مماس بر خم C با معادلات پارامتری $x=2t\ ,\ y=t^2\ ,\ z=t^3$ صفحه‌ی $x+y+z=3$ را قطع می کنند. مکان هندسی نقاط تقاطع را بیابید.

۸) فرض کنید C خمی نظیر یک تابع برداری مشتق‌پذیر $\mathbf{r}$ با مشتق غیر صفر، واقع بر کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات باشد. ثابت کنید بردار مماس و بردار موضع در هر نقطه از خم C بر یکدیگر عمود هستند.

۹) خم‌های C_1 با معادلات پارامتری $x=t\ ,\ y=t^2$ و C_2 با معادلات پارامتری $x=\sinh t\ ,\ y=2\cosh t$ مفروضند.

الف) نقاط برخورد دو خم را به دست آورید.

ب) زاویه‌ی بین بردارهای مماس بر دو خم در نقطه‌ی برخورد را تعیین کنید.

۱۰) خم C با معادلات پارامتری $x=\sin t\ ,\ y=\cos t\ ,\ z=\cos^2 t$ مفروض است. نقاطی از C را به دست آورید که خط واصل از مبدأ به این نقاط بر C عمود باشد (یعنی بر خط مماس بر C در آن نقطه عمود باشد).

۱۱) الف) نشان دهید کلیه‌ی صفحات قائم بر خم C نظیر تابع برداری $\mathbf{r}$ با ضابطه‌ی

$$\mathbf{r}(t) = a\sin^{۲} t\mathbf{i} + a\sin t\cos t\mathbf{j} + a\cos t\mathbf{k}$$

از مبدأ مختصات می گذرند.

ب) ثابت کنید خم C در قسمت الف بر یک کره واقع است.

۱۲) فرض کنید C خم همواری به معادله‌ی برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد. ثابت کنید صفحه‌ی قائم اصلی بر خم در تمام نقاط از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرند اگر وتنها اگر C بر یک کره قرار داشته باشد.

۱۳) خط مماس و صفحه‌ی عمود بر خم فصل مشترک دو رویه‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۱۰$ و $x^{۲} + z^{۲} = ۱۰$ را در نقطه‌ی $P = (۳, ۱, ۱)$ پیدا کنید.

۱۴) تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y, z) = \ln xyz$ مفروض است. مقدار این تابع را در نقاط داده شده به دست آورید.

الف) $P = (\sqrt{e}, \sqrt{e}, \sqrt{e})$ ب) $Q = (\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n}, \frac{۱}{n})$

۱۵) در صورتی که برای تابع دو متغیره‌ی f رابطه‌ی $f(x + y, x - y) = ۲xy + y^{۲}$ برقرار باشد، ضابطه‌ی تابع f را پیدا کنید.

۱۶) دامنه‌ی توابع چند متغیره با ضابطه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x, y) = \sqrt{۹ - x^{۲} - y^{۲}}$ ب) $f(x, y) = \frac{۱}{\sqrt{۴ - x^{۲} - y^{۲}}}$

ج) $f(x, y) = \ln xy$ د) $f(x, y, z) = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z}$

۱۷) برای تابع f باضابطه‌ی $f(x, y) = x^{۲} + ۴y^{۲}$ خم‌های تراز را برای مقادیر $c = ۰, ۱, ۲, ۳$ رسم کنید.

۱۸) رویه‌های تراز تابع $f(x, y, z) = x^{۲} + ۲y^{۲} + ۳z^{۲}$ را برای $۰ \leq c < \infty$ توصیف کنید.

۱۹) رویه‌های نظیر هر یک از روابطزیر را در فضای سه بعدی توصیف و رسم کنید.

الف) $x^{۲} - y^{۲} = ۰$ ه) $x^{۲} + z^{۲} = ۲z$

ب) $xy = -۱$ و) $y^{۲} - ۸x = ۰$

ج) $x^{۲} - y^{۲} + z^{۲} = ۰$ ز) $y^{۲} + z^{۲} - x = ۰$

د) $y^{۲} + ۴x^{۲} + z - ۳ = ۰$ ه) $\sqrt{(x - ۱)^{۲} + (y - ۲)^{۲} + ۱} - z = ۰$

۲۰) معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران خم‌های زیر حول محور داده شده را مشخص کنید.

الف) سهمی $x = ۴z^۲$، محور z. ب) سهمی $y = \sqrt{z}$، محور y.

ج) بیضی $۹x^۲ + ۴z^۲ = ۳۶$، محور x. د) هذلولی $x^۲ - z^۲ = ۴$، محور z.

۲۱) خم C با معادلات پارامتری $x = ae^t \cos t \ , \ y = ae^t \sin t \ , \ z = ae^t$ را به ازای $t \geq ۰ \ , \ a > ۰$ در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید این خم روی یک مخروط قرار دارد. معادله‌ی مخروط را بدست آورید و نمودار مخروط و خم را رسم کنید.

ب) ثابت کنید خم C تمام مولدهای مخروط را با زاویه‌ی ثابتی قطع می‌کند.

۲۲) نشان دهید خم نظیر $\mathbf{r}(t) = (t\cosh t)\mathbf{i} + (t\sinh t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ بر یک رویه‌ی درجه دوم قرار دارد. معادله‌ی رویه را بنویسید و نام آن‌را ذکر کنید.

ب) معادلات پارامتری خم حاصل از برخورد رویه با صفحه‌ی $y - \frac{۱}{۲}x = ۰$ را به دست آورید.

۲۳) نشان دهید خم نظیر تابع برداری

$$\mathbf{r}(t) = (۲\sqrt{t}\cos t)\mathbf{i} + (۳\sqrt{t}\sin t)\mathbf{j} + \sqrt{۱ - t}\ \mathbf{k} \quad , \quad ۰ \leq t \leq ۱$$

روی یک رویه‌ی درجه‌ی دو قرار دارد. معادله‌ی این رویه را مشخص کنید.

۲۴) الف) نشان دهید صفحات قائم بر خم با معادلات $x = a\sin^۲ t$ $y = a\sin t\cos t$ و $z = a\cos t$ از مبدأ می‌گذرند.

ب) نشان دهید این خم بر یک رویه‌ی درجه‌ی دو قرار دارد.

۲۵) نشان دهید مقطع صفحه‌ی $x = ۱$ با هذلولی‌گون دو پارچه‌ی دوار $x^۲ + y^۲ - z^۲ = -۱$ یک هذلولی است. معادلات پارامتری خط مماس بر این هذلولی را در نقطه‌ی $P = (۱, ۱, \sqrt{۳})$ بنویسید.

۲۶) با استفاده از تعریف نشان دهید $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \dfrac{x^۲\cos(xy)\sin(y)}{x^۲ + y^۲} = ۰$.

۲۷) (الف) نشان دهید $(۰, ۰)$ یک نقطه‌ی انباشتگی برای خم $y = e^{-\frac{۱}{x^۲}}$ است یعنی هر قرص دلخواه به مرکز $(۰, ۰)$ با این خم نقطه‌ی مشترک دیگری غیر از $(۰, ۰)$ دارد.

(ب) نشان دهید تابع $f(x,y)=\begin{cases} \frac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2+e^{-\frac{2}{x^2}}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ در $(0,0)$ پیوسته نیست.

۲۸) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ در مبدأ حد ندارد ولی حد این تابع در امتداد هر خطی که از مبدأ می‌گذرد وجود دارد.

۲۹) تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

آیا این تابع در تمام نقاط پیوسته است؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۳۰) نشان دهید تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ در $(0,0)$ حد ندارد.

۳۱) نشان دهید تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر در مبدأ پیوسته نیست.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3} & x+y\neq 0 \\ 0 & x+y=0 \end{cases}$$

۳۲) پیوستگی تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر را در نقطه‌ی $(0,0)$ بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|y|x^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

۳۳) مشخص کنید آیا تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy+y}{x^2+y^2+2x+1} & (x,y)\neq(-1,0) \\ 0 & (x,y)=(-1,0) \end{cases}$$

در نقطه‌ی $(-1,0)$ پیوسته است؟

۳۴) برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ نشان دهید

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)]=\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)]=0$$

با این وجود $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

فصل ۳

مشتق‌پذیری، اکسترمم و اکسترمم‌های مقید توابع حقیقی چند متغیره

در این فصل مفهوم مشتق‌پذیری توابع حقیقی چند متغیره مطرح می‌شود. رهیافت‌های متفاوتی برای ارائه‌ی مشتق‌پذیری توابع حقیقی چند متغیره وجود دارد. در این کتاب ابتدا رهیافت هندسی و سپس یک رهیافت تحلیلی مطرح خواهد شد. بر اساس رهیافت هندسی، مشتق‌پذیری توابع حقیقی دو متغیره در یک نقطه معادل هموار بودن نمودار تابع در آن نقطه است. به عبارت دیگر در این نقاط صفحه‌ی مماس بر نمودار تابع وجود دارد. در بخش دوم، مفاهیم اکسترمم و اکسترمم مقید توابع حقیقی چند متغیره بررسی می‌شوند. این مفاهیم در برخی از مدل‌های ریاضی کاربردی نقش مهمی بر عهده دارند.

۳−۱ مشتقات جزئی

پیش از تعمیم مناسب مفهوم مشتق‌پذیری برای توابع حقیقی چند متغیره، ابتدا به یک تعمیم طبیعی و ساده برای مشتق می‌پردازیم. برای یک تابع حقیقی دو متغیره‌ی $z = f(x, y)$ و هر مقدار y، تابع F با ضابطه‌ی $F(x) := f(x, y)$ را می‌توان تابعی یک متغیره با متغیر x در نظر گرفت. به همین ترتیب برای هر مقدار x، تابع G با ضابطه‌ی $G(y) := f(x, y)$ را می‌توان تابعی یک متغیره با متغیر y در نظر گرفت. مشتق F نسبت به x و مشتق G نسبت به y، در صورت وجود، تعریفی برای مشتق f خواهند بود. خواهیم دید که این تعریف نمی‌تواند همه‌ی انتظارات ما را از مفهوم مشتق برآورده کند. با این وجود، این نوع مشتق که مشتق جزئی یا نسبی نامیده می‌شود، اهمیت ویژه‌ای دارد.

فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^{۲}$ و $f : D \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی دو متغیره‌ی تعریف شده در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x, y) \in D$ باشد.

مشتق جزئی تابع f نسبت به متغیر x در (x, y) که با نمادهای $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ یا $f_x(x, y)$ نمایش داده می‌شود در صورت وجود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

به همین ترتیب، مشتق جزئی f نسبت به متغیر y در (x, y) با نمادهای $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ یا $f_y(x, y)$ نمایش داده می‌شود و در صورت وجود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

همان‌طور که گفتیم به ازای هر مقدار ثابت y می‌توان $F(x) := f(x, y)$ را تابعی یک متغیره از متغیر x در نظر گرفت. در این صورت مشتق F نسبت به x همان $f_x(x, y)$ است. به همین ترتیب به ازای هر مقدار ثابت x می‌توان $G(y) := f(x, y)$ را تابعی یک متغیره از متغیر y در نظر گرفت. در این صورت مشتق G نسبت به y همان $f_y(x, y)$ است.

در حالتی که $D \subseteq \mathbb{R}^{۳}$ و $f : D \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x, y, z) \in D$ تعریف شده باشد، مشتقات جزئی تابع f نسبت به متغیرهای x، y و z در (x, y, z) در صورت وجود، به ترتیب، به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x, y + h, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x, y, z + h) - f(x, y, z)}{h}$$

مثال ۳–۱–۱ برای تابع $f : \mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x, y, z) = xy^{۲} - z^{۳}$،

الف) مشتقات جزئی f را در نقطه‌ی $(۱, ۱, ۰)$ محاسبه کنید.

ب) مشتقات جزئی f را در نقطه‌ی دلخواه به دست آورید.

الف) بنا به تعریف مشتقات جزئی داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۱, ۱, ۰) \quad = \lim_{h \to ۰} \frac{f(۱ + h, ۱, ۰) - f(۱, ۱, ۰)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{(۱ + h) - ۱}{h} = ۱$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1,1+h,0)-f(1,1,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h} = 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1,1,h)-f(1,1,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-h^3-1}{h} = 0$$

ب) برای محاسبه‌ی مشتقات جزئی تابع f نسبت به هر متغیر کافی است متغیرهای دیگر در ضابطه‌ی f را ثابت فرض کنیم و نسبت به این متغیر مشتق بگیریم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2xy \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -3z^2$$

اگر $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ روی $D \subseteq R^2$ وجود داشته باشند برای توابع $f_x : D \to \mathbb{R}^2$ و $f_y : D \to \mathbb{R}^2$ می‌توان مشتقات جزئی را در صورت وجود محاسبه کرد. مشتقات جزئی توابع f_x و f_y، مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم f نامیده می‌شوند و قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$$

مشتقات مرتبه‌ی بالاتر f به همین ترتیب قابل تعریف هستند.

مثال ۳-۱-۲ مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و دوم هریک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x,y) = xy^2 + ye^x$

ب) $f(x,y,z) = x\sin(y\cos z)$

الف)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + ye^x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + e^x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^x \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y + e^x \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y + e^x$$

ب)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(y\cos z)\ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos z\cos(y\cos z)\ , \ \frac{\partial f}{\partial z} = -xy\sin z\cos(y\cos z)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0\ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\cos^2 z\sin(y\cos z)\ ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = xy^2\sin^2 z\sin(y\cos z) - xy\cos z\cos(y\cos z)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos z\cos(y\cos z) \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos z\cos(y\cos z)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -y\sin z\cos(y\cos z) \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -y\sin z\cos(y\cos z)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = xy\sin z\cos z\sin(y\cos z) - x\sin z\cos(y\cos z)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = xy\sin z\cos z\sin(y\cos z) - x\sin z\cos(y\cos z)$$

در ادامه با چند مثال، روش محاسبه‌ی مشتقات جزئی برای توابع با ضابطه‌های مختلف به تفضیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال ۳–۱–۳ تابع دو متغیره‌ی حقیقی f را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الف) نشان دهید تابع f روی $\mathbb{R}^2$ پیوسته است.
ب) مشتقات جزئی تابع f را در نقطه‌ی دلخواه $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ محاسبه کنید.

الف) برای نقطه‌ی $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ توابع $P(x,y)=x^3$ و $Q(x,y)=x^2+y^2$ پیوسته هستند پس $f=P/Q$ پیوسته است. برای نقطه‌ی $(0,0)$ باید نشان دهیم $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$ یعنی

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\ \ \forall(x,y)\ (\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta\Rightarrow|f(x,y)-0|<\varepsilon)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|f(x,y)-0|=|\frac{x^3}{x^2+y^2}|=|x|\frac{x^2}{x^2+y^2}\leq|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$$

برای $\varepsilon>0$ کافی است قرار دهیم $\delta=\varepsilon$. پس تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ نیز پیوسته است.

ب)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\frac{h^3}{h^3}=1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim\frac{0}{h^3}=0$$

و برای نقطه‌ی $(0,0)\neq(x,y)\in\mathbb{R}^2$ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$

مثال ۳–۱–۴ تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin(xy) & x\neq0\\ y & x=0\end{cases}$$

الف) ضابطه‌ی توابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را تعیین کنید.
ب) مقادیر $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0)$ و $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0)$ را محاسبه کنید.

الف)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x^2}\sin(xy) + \frac{y}{x}\cos(xy)\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy)\quad x \neq 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h}\sin(hy)-y}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{y-y+h}{h} = 1$$

بنابر این

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}\sin(xy) + \frac{y}{x}\cos(xy) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}\quad ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy)$$

ب)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}(\frac{0-0}{h}) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y})(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}(\frac{1-1}{h}) = 0$$

مثال ۳–۱–۵ مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع $f(x,y) = \ln(x+\ln y)$ را به دست آورید.

مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول f عبارتند از:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+\ln y}\quad ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{1}{y}}{x+\ln y} = \frac{1}{y(x+\ln y)}$$

بنابر این:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-1}{(x+\ln y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{1}{y}}{(x+\ln y)^2} = \frac{-1}{y(x+\ln y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{-y}{y^2(x+\ln y)^2} = \frac{-1}{y(x+\ln y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-(x+\ln y+1)}{y^2(x+\ln y)^2}$$

مثال ۳–۱–۶ تابع دو متغیره‌ی حقیقی f را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

الف) ضابطه‌ی توابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را مشخص کنید.

ب) نشان دهید تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ پیوسته نیست.

الف)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{(y^2-x^2)\sin y}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x(x^2+y^2)\cos y-2x^2y\sin y}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ب) اگر f در $(0,0)$ پیوسته باشد آنگاه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$. مسیر C به معادله‌ی $y=x$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x,y)\in C$،

$$f(x,y)=\frac{x\sin x}{x^2+x^2}=\frac{x\sin x}{2x^2}$$

از سوی دیگر برای $(x,y)\in C$، $(x,y)\to(0,0)$ اگر و تنها اگر $x\to 0$. اما

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x^2}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)=0$$

بنابراین تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ پیوسته نیست. این مثال نشان می‌دهد که مفهوم مشتق ضمنی تعمیم ضعیفی برای مشتق توابع چند متغیره است زیرا به طور طبیعی انتظار داریم مانند توابع یک متغیره از مشتق‌پذیری تابع، پیوستگی آن نتیجه شود.

اکنون به بررسی رابطه‌ی بین مشتقات جزئی می‌پردازیم. در حالت کلی ارتباطی بین مشتقات جزئی وجود ندارد ولی تحت شرایطی $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ مانند چند مثال قبل برابر هستند. مثال زیر نشان می‌دهد که این مطلب در حالت کلی درست نیست.

مثال ۳–۱–۷ تابع دومتغیره‌ی حقیقی f را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مقادیر $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ را به دست آورید.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}\qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}\qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

بنابر این

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^۳-۳xy^۲)(x^۲+y^۲)-۲y(x^۳y-xy^۳)}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{(۳x^۲y-y^۳)(x^۲+y^۲)-۲x(x^۳y-xy^۳)}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(۰,۰)=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(۰,۰) &= \lim_{h\to ۰}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(۰,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)}{h}\\ &= \lim_{h\to ۰}(\frac{-\frac{h^۵}{h^۴}-۰}{h})=-۱\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y})(۰,۰) &= \lim_{h\to ۰}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,۰)-\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)}{h}\\ &= \lim_{h\to ۰}(\frac{\frac{h^۵}{h^۴}-۰}{h})=۱\end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که برای این تابع $f_{xy}(۰,۰)\neq f_{yx}(۰,۰)$. در ادامه‌ی این بخش یک شرط کافی برای برابر شدن f_{xy} و f_{yx} مطرح می‌کنیم.

فرض کنیم تابع حقیقی دومتغیره‌ی $f:D\to\mathbb{R}$ در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)\in D$ تعریف شده باشد و f_{xy} و f_{yx} در این همسایگی وجود داشته و در $(x_۰,y_۰)$ پیوسته باشند. توابع یک متغیره‌ی Δ، G و F را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\Delta(h):=f(x_۰+h,y_۰+h)-f(x_۰,y_۰+h)-f(x_۰+h,y_۰)-f(x_۰,y_۰)$$
$$G(x)=f(x,y_۰+h)-f(x,y_۰)$$
$$F(y)=f(x_۰+h,y)-f(x_۰,y)$$

بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین اعداد $۱>\theta_۱>۰$ و $۱>\theta_۲>۰$ وجود دارند که:

$$\begin{aligned}\Delta(h)=G(x_۰+h)-G(x_۰) &= hG'(x_۰+\theta_۱h)\\ &= h\big[f_x(x_۰+\theta_۱h,y_۰+h)-f_x(x_۰+\theta_۱h,y_۰)\big]\\ &= h^۲f_{xy}(x_۰+\theta_۱h,y_۰+\theta_۲h)\end{aligned}$$

به همین ترتیب اعداد $۱>\theta_۳>۰$ و $۱>\theta_۴>۰$ وجود دارند که:

$$\begin{aligned}\Delta(h)=F(y_۰+h)-F(y_۰) &= hF'(y_۰+\theta_۳h)\\ &= h\big[f_y(x_۰+h,y_۰+\theta_۳h)-f_y(x_۰,y_۰+\theta_۳h)\big]\\ &= h^۲f_{yx}(x_۰+\theta_۴h,y_۰+\theta_۳h)\end{aligned}$$

اکنون از پیوستگی f_{xy} و f_{yx} در $(x_\circ, y_\circ)$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} f_{xy}(x_\circ, y_\circ) &= \lim_{h\to\circ} f_{xy}(x_\circ + \theta_۱ h, y_\circ + \theta_۲ h) \\ &= \lim_{h\to\circ} \frac{\Delta(h)}{h^۲} \\ &= \lim_{h\to\circ} f_{xy}(x_\circ + \theta_۳ h, y_\circ + \theta_۴ h) \\ &= f_{yx}(x_\circ, y_\circ) \end{aligned}$$

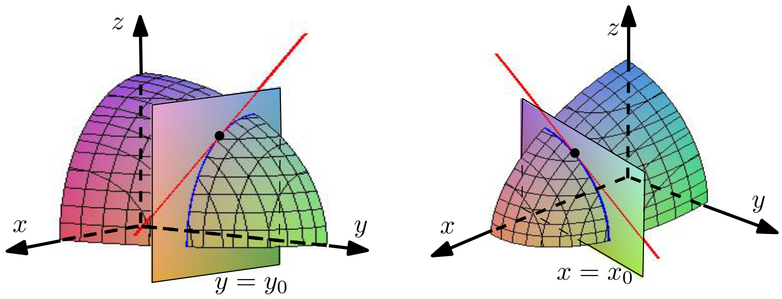
آنچه گفته شد به شکل قضیه‌ی زیر قابل بیان است. تعمیم این قضیه برای توابع n متغیره به شکل مشابه است.

قضیه ۳–۱–۸ اگر تابع حقیقی دومتغیره‌ی $f : D \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ) \in D$ تعریف شده باشد و f_{xy} و f_{yx} در این همسایگی وجود داشته و در $(x_\circ, y_\circ)$ پیوسته باشند آنگاه $f_{yx}(x_\circ, y_\circ) = f_{xy}(x_\circ, y_\circ)$.

۳–۱–۱ تعبیر هندسی مشتقات جزئی

مقطع نمودار تابع حقیقی دومتغیره‌ی f با صفحه‌ی $y = y_\circ$ خمی با معادله‌ی برداری $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + y_\circ\mathbf{j} + f(x, y_\circ)\mathbf{k}$ است. پس $\mathbf{r}'(x_\circ) = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\mathbf{k}$. به این ترتیب $\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)$ شیب خط مماس بر رویه‌ی S_f در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, f(x_\circ, y_\circ))$ در صفحه‌ی $y = y_\circ$ است (شکل ۴–۱).

به همین ترتیب مقطع رویه‌ی S با معادله‌ی $z = f(x,y)$ و صفحه‌ی $x = x_\circ$ خمی با معادله‌ی برداری $\mathbf{r}(y) = x_\circ\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x_\circ, y)\mathbf{k}$ است. در نتیجه $\mathbf{r}'(y_\circ) = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\mathbf{k}$. به این ترتیب $\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)$ شیب خط مماس بر رویه‌ی S_f در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, f(x_\circ, y_\circ))$ واقع در صفحه‌ی $x = x_\circ$ است (شکل ۴–۱).



شکل ۴–۱ تعبیر هندسی مشتقات جزئی توابع دو متغیره.

۲–۳ مشتق سوئی

در این بخش مفهوم مشتق سوئی و انگیزه‌ی تعریف آن برای توابع حقیقی دو متغیره بیان می‌شود. مشتقات جزئی حالت‌های خاصی از مشتق سوئی هستند. مشتقات جزئی تابعی مانند f در نقطه‌ی (x,y) را می‌توان به شکل زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ,y_\circ) &= \lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h,y_\circ)-f(x_\circ,y_\circ)}{h}\\ &= \lim_{h\to\circ}\frac{f((x_\circ,y_\circ)+h(۱,\circ))-f(x_\circ,y_\circ)}{h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ,y_\circ) &= \lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ,y_\circ+h)-f(x_\circ,y_\circ)}{h}\\ &= \lim_{h\to\circ}\frac{f((x_\circ,y_\circ)+h(\circ,۱))-f(x_\circ,y_\circ)}{h}\end{aligned}$$

یک تعمیم ساده از این مشتقات در نقطه‌ای مانند $(x_\circ,y_\circ)$، **مشتق سوئی در سوی بردار یکه‌ی** $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ است که به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}D_u f(x_\circ,y_\circ) &:= \lim_{h\to\circ}\frac{f((x_\circ,y_\circ)+h(a,b))-f(x_\circ,y_\circ)}{h}\\ &= \lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+ha\ ,\ y_\circ+hb)-f(x_\circ,y_\circ)}{h}\end{aligned}$$

بر اساس این تعریف، مشتقات جزئی یک تابع حقیقی دو متغیره حالت‌های خاصی از مشتق سوئی آن در سوهای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ هستند. به همین ترتیب، مشتق سوئی تابع حقیقی سه متغیره‌ی f در نقطه‌ی $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{\mathbf{u}}f(x_\circ,y_\circ,z_\circ):=\lim_{h\to\circ}\frac{f((x_\circ,y_\circ,z_\circ)+h(a,b,c))-f(x_\circ,y_\circ,z_\circ)}{h}$$

مثال زیر نشان می‌دهد که اگر چه مشتق سوئی تعمیم خوبی از مشتق جزئی محسوب می‌شود اما آنقدر تعمیم قدرتمندی نیست که پیوستگی را نتیجه دهد.

مثال ۳–۲–۱ تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^۲}{x^۲+y^۴} & (x,y)\neq(\circ,\circ)\\ \circ & (x,y)=(\circ,\circ)\end{cases}$$

الف) مشتق سوئی f را در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{w}=\frac{۱}{۲}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathbf{j}$ و در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ به دست آورید.

ب) مشتق سوئی f را در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{w} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ و در نقطه‌ی $(2,2)$ به دست آورید.

ج) مشتق سوئی f را در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ در $(0,0)$ به دست آورید.

د) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته نیست.

الف)

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{w}} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\big((0,0) + h(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})\big) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\frac{h}{3}, \frac{h\sqrt{3}}{2})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{36}{16 + 81h^2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{w}} f(2,2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\big((2,2) + h(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})\big) - f(2,2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2 + \frac{h}{3}, 2 + \frac{h\sqrt{3}}{2}) - f(2,2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\frac{(2 + \frac{h}{3})(2 + \frac{h\sqrt{3}}{2})}{(2 + \frac{h}{3})^2 + (2 + \frac{h\sqrt{3}}{2})^4} - \frac{2}{5}\Big) \\ &= -\frac{1}{25}(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0) + h(a,b)) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(ha, hb)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ab^2}{a^2 + h^2 b^4} \\ &= \begin{cases} \frac{b^2}{a} & a \neq 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

د) روی دسته مسیرهای C_m به معادله‌ی $x = my^2$ برای $(x,y) \in C_m$ داریم $(x,y) \to (0,0)$ اگر و تنها اگر $y \to 0$. اما روی مسیر C_m، مقدار

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(my^2, y) = \lim_{y\to 0} \frac{my^4}{m^2y^4 + y^4} = \frac{m}{m^2 + 1}$$

وابسته به m است و یکتا نیست، پس تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ پیوسته نیست.

مثال ۳–۲–۲ تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^۳+y^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(\circ,\circ)\\ \circ & (x,y)=(\circ,\circ)\end{cases}$$

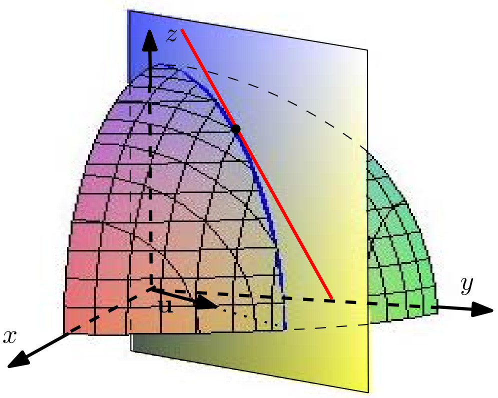
مشتق سوئی f را در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ در $(\circ,\circ)$ به دست آورید.

از این‌که $\mathbf{u}$ یکه است نتیجه می‌شود $a^۲+b^۲=۱$. پس

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}f(\circ,\circ) &= \lim_{h\to\circ}\frac{f((\circ,\circ)+h(a,b))-f(\circ,\circ)}{h}\\ &= \lim_{h\to\circ}\frac{f(ha,hb)}{h}\\ &= \lim_{h\to\circ}\frac{h^۳(a^۳+b^۳)}{h^۳(a^۲+b^۲)}\\ &= \frac{a^۳+b^۳}{a^۲+b^۲}=a^۳+b^۳\end{aligned}$$

۳–۲–۱ تعبیر هندسی مشتق سوئی

مقطع نمودار تابع $z=f(x,y)$ با صفحه‌ی حاوی بردارهای $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$، خمی با معادله‌ی $\mathbf{r}(h)=(x_\circ+ha)\,\mathbf{i}+(y_\circ+hb)\,\mathbf{j}+f(x_\circ+ha,y_\circ+hb)\,\mathbf{k}$ است. با توجه به این که $\mathbf{r}'(\circ)=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+D_{\mathbf{u}}f(x_\circ,y_\circ)\mathbf{k}$، عدد $D_{\mathbf{u}}f(x_\circ,y_\circ)$ شیب خط مماس بر این خم در نقطه‌ی $(x_\circ,y_\circ,f(x_\circ,y_\circ))$ واقع در صفحه‌ی حاوی بردارهای یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ است (شکل ۴–۲). رابطه‌ی بین مشتق سوئی و جزئی را برای دسته‌ای از توابع حقیقی چند متغیره به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای مشاهده خواهیم کرد.



شکل ۴–۲ تعبیر هندسی مشتق سوئی توابع دو متغیره.

۳–۳ مشتق کل توابع چند متغیره

مفاهیم مشتق جزئی و مشتق سوئی تعمیم رضایت‌بخشی از مشتق توابع یک متغیره برای توابع چند متغیره نیستند. چون همان‌گونه که در مثال ۳–۲–۱ مشاهده کردیم، از وجود مشتقات سوئی تابع چند متغیره، پیوستگی آن تابع نتیجه نمی‌شود. برای ارائه‌ی یک تعمیم مناسب برای مشتق توابع چند متغیره، بهتر است مشتق یک تابع حقیقی یک متغیره را از چشم‌انداز دیگری بررسی کنیم. مشتق تابع حقیقی یک متغیره‌ی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x_\circ$ در صورت وجود عبارت است از:

$$f'(x_\circ) := \lim_{h\to\circ} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h}$$

به این ترتیب، اگر f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$\lim_{h\to\circ} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)h}{h} = \circ$$

حال اگر قرار دهیم $A := f'(x_\circ)$ و

$$\alpha(h) := \begin{cases} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)-Ah}{h} & h \neq \circ \\ \circ & h = \circ \end{cases}$$

آنگاه:

$$f(x_\circ + h) - f(x_\circ) = Ah + \alpha(h)\ h \quad , \quad \lim_{h\to\circ} \alpha(h) = \circ \qquad (۱)$$

بنابر این اگر f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابعی مانند α وجود دارد که در $x_\circ$ پیوسته است و در رابطه‌ی (۱) صدق می‌کند. به کمک رابطه‌ی (۱) می‌توانیم مقدار $f(x_\circ + h)$ را به وسیله‌ی $f(x_\circ) + Ah$ به کمک رابطه‌ی زیر تقریب بزنیم.

$$f(x_\circ + h) = f(x_\circ) + Ah + \alpha(h)\ h \qquad (۲)$$

مقدار $E(h) = \alpha(h)h$ **خطای مطلق** و $\frac{E(h)}{h} = \alpha(h)$ **خطای نسبی** تقریب نام دارند و

$$\lim_{h\to\circ} \frac{E(h)}{h} = \lim_{h\to\circ} \alpha(h) = \circ\ ,\ \lim_{h\to\circ} E(h) = \lim_{h\to\circ} \alpha(h)h = \circ$$

عکس این مطلب نیز درست است. یعنی اگر یک عدد حقیقی مانند $A \in \mathbb{R}$ و تابعی چون α، پیوسته در $x_\circ$ یافت شود به گونه‌ای که

$$f(x_\circ + h) - f(x_\circ) = Ah + \alpha(h)h \ \ ,\ \ \lim_{h\to\circ} \alpha(h) = \circ$$

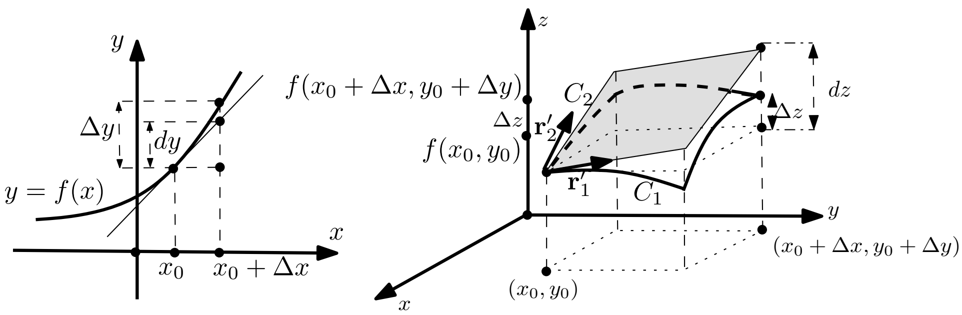
آنگاه تابع f در نقطه‌ی $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $f'(x_\circ) = A$.

از جنبه‌ی هندسی می‌توان گفت که اگر تابع حقیقی و یک متغیره‌ی f در نقطه‌ی x_0 مشتق‌پذیر باشد آنگاه خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $(x_0, f(x_0))$ وجود دارد. خط مماس در این نقطه، نمودار تابع $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = f(x_0) + A(x-x_0)$ است. بنابر این $L(x_0+h) = f(x_0) + Ah$ اصطلاحاً یک تقریب خطی برای مقدار $f(x_0+h)$ است زیرا بنابر رابطه‌ی (۲) داریم:

$$f(x_0+h) = L(x_0+h) + \alpha(h)h$$

با توجه به این‌که $f(x_0) = L(x_0)$، رابطه‌ی فوق را می‌توان به صورت $f(x_0+h) - f(x_0) = L(x_0+h) - L(x_0) + \alpha(h)h$ نیز بیان کرد. به این ترتیب اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد نگاشت خطی $Df : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $Df(h) := L(x_0+h) - L(x_0) = Ah$ نسبت به متغیر h، نمو تابع f یعنی $\Delta f(h) := f(x_0+h) - f(x_0)$ را با خطای $\alpha(h)h$ تقریب می‌زند:

$$\Delta f(h) = Df(h) + \alpha(h)h$$



شکل ۴–۳ تقریب خطی به کمک خط و صفحه‌ی مماس برای توابع یک و دو متغیره.

برای توابع دو متغیره به جای خط مماس باید از صفحه‌ی مماس استفاده کنیم. از تعبیر هندسی مشتقات جزئی f در (x_0, y_0) به یاد داریم که مقطع نمودار تابع دو متغیره‌ی $z = f(x,y)$ و صفحه‌ی $y = y_0$ خمی مانند C_1 با معادله‌ی برداری $\mathbf{r}_1(x) = x\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + f(x,y_0)\mathbf{k}$ است و $\mathbf{r}'_1(x_0) = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\mathbf{k}$. به همین ترتیب مقطع نمودار این تابع و صفحه‌ی $x = x_0$ خمی مانند C_2 با معادله‌ی برداری $\mathbf{r}_2(y) = x_0\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x_0,y)\mathbf{k}$ است و $\mathbf{r}'_2(y_0) = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\mathbf{k}$. بردارهای $\mathbf{r}'_1(x_0)$ و $\mathbf{r}'_2(y_0)$ به ترتیب بردار هادی خط‌های مماس بر C_1 و C_2 هستند. در نتیجه هر دو در صفحه‌ی مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ (در صورت

وجود) قرار دارند (شکل ۴—۳). بنابر این بردار نرمال این صفحه عبارت است از $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_1(y_\circ) \times \mathbf{r}'_2(x_\circ) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. پس معادله‌ی صفحه‌ی مماس در این نقطه عبارت است از:

$$\pi: \quad -\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)(x - x_\circ) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)(y - y_\circ) + (z - z_\circ) = \circ$$

که به صورت زیر هم قابل بیان است:

$$\pi(x,y) = z_\circ + \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)(x - x_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)(y - y_\circ)$$

به این ترتیب برای $A := \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)$ و $B := \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)$، صفحه‌ی مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, f(x_\circ, y_\circ))$ همان نمودار تابع π با ضابطه‌ی زیر است:

$$\pi(x,y) = z_\circ + A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ)$$

برای توابع دو متغیره، دو متغیر x و y و در نتیجه دو نمو $\Delta x := x - x_\circ = h$ و $\Delta y := y - y_\circ = k$ مطرح هستند. بنابر این بر اساس رابطه‌ی (۱)، مشتق یک تابع دو متغیره‌ی f در $(x_\circ, y_\circ)$ باید به کمک صفحه‌ی مماس تعریف شود. در این حالت نگاشت خطی $Df : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی $Df(h,k) := \pi(x,y) - \pi(x_\circ, y_\circ) = Ah + Bk$ با دو متغیر h و k، نمو تابع f یعنی $\Delta f(h,k) := f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ, y_\circ)$ را با خطای $E(h,k) = \alpha(h,k)\ h + \beta(h,k)k$ تقریب می‌زند:

$$\Delta f(h,k) = Df(h,k) + E(h,k)$$

بر اساس ایده‌ی فوق، مشتق تابع دو متغیره‌ی f در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد.

تابع دو متغیره‌ی f را در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ مشتق‌پذیر گوییم هرگاه اعداد حقیقی A و B و توابع $\alpha(h,k)$ و $\beta(h,k)$ وجود داشته باشند که

$$f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ, y_\circ) = Ah + Bk + \alpha(h,k)\ h + \beta(h,k)k \qquad (۳)$$

و

$$\lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \alpha(h,k) = \circ \quad , \quad \lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \beta(h,k) = \circ$$

اکنون نشان می‌دهیم که از مشتق‌پذیری f در یک نقطه، وجود مشتقات جزئی و پیوستگی f در آن نقطه نتیجه می‌شوند. خواهیم دید که مشتقات سوئی هم در این حالت در سوی دلخواه وجود خواهند داشت.

فرض کنیم تابع دو متغیره‌ی f در $(x_\circ, y_\circ)$ مشتق‌پذیر باشد، یعنی اعداد حقیقی A و B و توابع $\alpha(h,k)$ و $\beta(h,k)$ وجود دارند که:

$$f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ, y_\circ) = Ah + Bk + \alpha(h,k)\ h + \beta(h,k)k\ ,$$
$$\lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \alpha(h,k) = \circ \quad , \quad \lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \beta(h,k) = \circ$$

برای $\Delta f = f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ, y_\circ)$ داریم

$$\lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \Delta f \quad = \quad \lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \Big[Ah + Bk + \alpha(h,k)\ h + \beta(h,k)k\Big] = \circ$$

پس $\lim\limits_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} (f(x,y) - f(x_\circ,y_\circ)) = \circ$، یعنی $\lim\limits_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} f(x,y) = f(x_\circ,y_\circ)$.
بنابر این f در $(x_\circ, y_\circ)$ پیوسته است.

از رابطه‌ی (۳) به ازای $k = \circ$ نتیجه می‌شود

$$f(x_\circ + h, y_\circ) - f(x_\circ, y_\circ) = Ah + \alpha(h,\circ)\ h$$

که معادل است با

$$\frac{f(x_\circ + h, y_\circ) - f(x_\circ, y_\circ)}{h} = A + \alpha(h,\circ)$$

بنابر این

$$\lim_{h\to\circ} \frac{f(x_\circ + h, y_\circ) - f(x_\circ, y_\circ)}{h} = \lim_{h\to\circ}(A + \alpha(h,\circ)) = A$$

به عبارت دیگر $\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) = A$. به نحو مشابه داریم $\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ) = B$.

آنچه گفتیم در قضیه‌ی زیر خلاصه شده است:

قضیه ۳-۳-۱ اگر تابع حقیقی دو متغیره‌ی f در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته است و مشتقات جزئی آن در این نقطه، یعنی $\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)$ وجود دارند.

به این ترتیب تابع دو متغیره‌ی f در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ مشتق‌پذیر است هرگاه توابع $\alpha(h,k)$ و $\beta(h,k)$ وجود داشته باشند که

$$f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ, y_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)k + \alpha(h,k)\ h + \beta(h,k)k \quad (۴)$$

و

$$\lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \alpha(h,k) = \circ \quad , \quad \lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \beta(h,k) = \circ$$

برای سادگی قرار می‌دهیم $E(h,k) = \alpha(h,k)\ h + \beta(h,k)k$ و رابطه‌ی (۴) را به صورت زیر هم بیان می‌کنیم:

$$f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ, y_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)k + E(h,k) \quad (۵)$$

با توجه به این رابطه، **مشتق (دیفرانسیل) کل** تابع مشتق‌پذیر دو متغیره‌ی f در $\mathbf{x}_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Df|_{\mathbf{x}_\circ}(h,k) := \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_\circ)h + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_\circ)k$$

برخی از مولفین مشتق تابع f را به شکل دیگری بیان می‌کنند. دانشجویان علاقمند می‌توانند معادل بودن این دو رهیافت را در پیوست ۱ مشاهده کنند. بنابر رهیافت دوم، مشتق تابع دو متغیره‌ی f در $\mathbf{x}_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ برای $\mathbf{x} = (h,k)$ عبارت است از:

$$Df_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_\circ} \frac{f(\mathbf{x}_\circ + \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_\circ)}{||\mathbf{x}||}$$

در ادامه‌ی بحث رابطه‌ی بین مشتق سوئی و مشتقات جزئی را برای توابع مشتق‌پذیر بیان می‌کنیم. برای بردار یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$، از رابطه‌ی (۴) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} f(x_\circ + ha, y_\circ + hb) - f(x_\circ, y_\circ) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)ha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)hb + \alpha(h,k)\ ah + \beta(h,k)bh \\ &= h\Big[a\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ) + \alpha(h,k)a + \beta(h,k)b\Big] \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\frac{f(x_\circ + ha, y_\circ + hb) - f(x_\circ, y_\circ)}{h} = a\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)b + \big(\alpha(h,h)a + \beta(h,h)b\big)$$

اکنون با توجه به این که $\lim_{h\to\circ} \alpha(h,h) = \lim_{h\to\circ} \beta(h,h) = \circ$، اگر $h \to \circ$ آنگاه

$$D_{\mathbf{u}}f(x_\circ, y_\circ) = \lim_{h\to\circ} \frac{f(x_\circ + ha, y_\circ + hb) - f(x_\circ, y_\circ)}{h} = a\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)$$

آنچه گفته شد برای توابع حقیقی دو متغیره در قضیه‌ی زیر خلاصه می‌شود. این قضیه به نحو مشابه قابل تعمیم به توابع حقیقی چند متغیره‌ی دلخواه است.

قضیه ۳-۳-۲ اگر تابع حقیقی دو متغیره‌ی f در یک همسایگی از نقطه‌ی $\mathbf{x}_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ تعریف شده و در این نقطه مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای هر بردار یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$، مشتق سوئی در سوی $\mathbf{u}$ و مشتقات جزئی f در $\mathbf{x}_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ وجود دارند و

$$D_{\mathbf{u}}f(x_\circ, y_\circ) = af_x(x_\circ, y_\circ) + bf_y(x_\circ, y_\circ)$$

با چند مثال، مفهوم مشتق کل توابع دو و سه متغیره را با تفصیل بیشتر بیان می‌کنیم.

مثال ۳-۳-۳ برای توابع و $f:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=x+e^{y}$ و $g:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x,y,z)=e^{xy}\sin(xz^{2})$ مشتق کل را به ترتیب در نقاط $\mathbf{x}_{0}=(1,\ln 2)$ و $\mathbf{x}_{0}=(1,\ln 3,\sqrt{\frac{\pi}{2}})$ به دست می‌آوریم.

برای تابع $f:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=x+e^{y}$ مشتق کل در $\mathbf{x}_{0}=(1,\ln 2)$ عبارت است از:

$$Df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_{0})x+\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_{0})y=x+2y$$

معادله‌ی فوق را می‌توان به شکل حاصل ضرب ماتریسی هم بیان کرد:

$$Df(x,y)=(1\quad 2)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=x+2y$$

برای تابع $g:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x,y,z)=e^{xy}\sin(xz^{2})$ داریم

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=ye^{xy}\sin(xz^{2})+z^{2}e^{xy}\cos(xz^{2})$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=xe^{xy}\sin(xz^{2})$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=2xze^{xy}\sin(xz^{2})$$

پس مشتق کل در $\mathbf{x}_{0}=(1,\ln 3,\sqrt{\frac{\pi}{2}})$ به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}Dg(x,y,z)&=\frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{x}_{0})\ x\ +\frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{x}_{0})\ y\ +\frac{\partial g}{\partial z}(\mathbf{x}_{0})\ z\\ &=3\ln 3x+3y+6z\end{aligned}$$

معادله‌ی فوق را می‌توان به شکل حاصل ضرب ماتریسی هم بیان کرد:

$$Dg(x,y,z)=(3\ln 3\quad 3\quad 6)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

مثال ۳-۳-۴ تابع دو متغیره‌ی f را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{3}(x+y)}{x^{2}+y^{2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

نشان می‌دهیم که تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

$$\begin{aligned}f(0+h,0+k)-f(0,0)&=\frac{h^{3}(h+k)}{h^{2}+k^{2}}\\ &=(\frac{h^{3}}{h^{2}+k^{2}})h+(\frac{h^{3}}{h^{2}+k^{2}})k\end{aligned}$$

بنابراین به ازای $A = B = ۰$ و $\beta(h,k) = \alpha(h,k) = \dfrac{h^۳}{h^۲+k^۲}$ داریم

$$\begin{aligned}|\beta(h,k) - ۰| = |\alpha(h,k) - ۰| &= \frac{h^۲}{h^۲+k^۲}|h| \\ &\leq |h| \\ &\leq \sqrt{h^۲+k^۲}\end{aligned}$$

یعنی $\lim\limits_{(h,k)\to(۰,۰)} \alpha(h,k) = \lim\limits_{(h,k)\to(۰,۰)} \beta(h,k) = ۰$. بنابراین تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر است.

مثال ۳-۳-۵ نشان می‌دهیم که تابع سه متغیره‌ی f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = xyz - z^۲$ در نقطه‌ی $(۰,۱,۲) \in \mathbb{R}^۳$ مشتق‌پذیر است و مشتق کل آن را در این نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}f(x,۱+y,۲+z) - f(۰,۱,۲) &= x(۱+y)(۲+z) - (۲+z)^۲ + ۴ \\ &= ۲x + ۰y - ۴z + (۲y+z+yz)x + ۰y + (-z)(z)\end{aligned}$$

بنابراین برای $C = -۴$، $B = ۰$، $A = ۲$، $\alpha(x,y,z) = ۲y+z+yz$، $\beta(x,y,z) = ۰$ و $\gamma(x,y,z) = -z$ داریم:

$$\lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} \alpha(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} \beta(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} \alpha(x,y,z) = ۰$$

پس طبق تعریف، تابع f در نقطه‌ی $(۰,۱,۲)$ مشتق‌پذیر است. علاوه بر این

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۱,۲) = ۲\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(۰,۱,۲) = ۰\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z}(۰,۱,۲) = -۴$$

پس در نقطه‌ی $(۰,۱,۲)$، مشتق کل Df به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$Df(x,y,z) = ۲x - ۴z$$

در ادامه نشان می‌دهیم که اگر مشتقات جزئی یک تابع حقیقی f در یک همسایگی نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ وجود داشته و در این نقطه پیوسته باشند آنگاه این تابع در $(x_۰,y_۰)$ مشتق‌پذیر است. مانند قبل بحث را برای توابع حقیقی دو متغیره مطرح می‌کنیم. پس فرض کنیم f یک تابع حقیقی دو متغیره باشد که f_x و f_y در $(x_۰,y_۰)$ پیوسته هستند. بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین اعداد $۱ > \theta_۱ > ۰$ و $۱ > \theta_۲ > ۰$ وجود دارند به قسمی که:

$$f_x(x_۰+h,y_۰+k) - f(x_۰,y_۰+k) = hf_x(x_۰+\theta_۱h,y_۰+k)\ ,$$
$$f_y(x_۰,y_۰+k) - f(x_۰,y_۰+k) = kf_y(x_۰,y_۰+\theta_۲k)$$

قرار می‌دهیم:

$\alpha(h,k) = f_x(x_\circ + \theta_1 h, y_\circ + k) - f_x(x_\circ, y_\circ)$,
$\beta(h,k) = f_y(x_\circ, y_\circ + \theta_2 k) - f_y(x_\circ, y_\circ)$,
$\Delta f = f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ, y_\circ)$

بنابر پیوستگی f_x و f_y در $(x_\circ, y_\circ)$ داریم $\lim\limits_{(h,k)\to\circ} \alpha(h,k) = \lim\limits_{(h,k)\to\circ} \beta(h,k) = \circ$ و

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \Big[f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ, y_\circ + k)\Big] + \Big[f(x_\circ, y_\circ + k) - f(x_\circ, y_\circ)\Big] \\
&= hf_x(x_\circ + \theta_1 h, y_\circ + k) + kf_y(x_\circ, y_\circ + \theta_2 k) \\
&= hf_x(x_\circ, y_\circ) + kf_y(x_\circ, y_\circ) + h\alpha(h,k) + k\beta(h,k)
\end{aligned}$$

به عبارت دیگر نشان دادیم که:

قضیه ۳–۳–۶ اگر مشتقات جزئی تابع حقیقی دو متغیره‌ی f در یک همسایگی نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ وجود داشته و پیوسته باشند آنگاه f در $(x_\circ, y_\circ)$ مشتق‌پذیر است.

یکی از نتایج این قضیه اثبات مشتق‌پذیری چندجمله‌ای‌های دومتغیره‌ی $P(x,y) = \sum\limits_{i=\circ}^{n} \sum\limits_{j=\circ}^{m} a_{ij} x^i y^j$ برای $a_{ij} \in \mathbb{R}$ بر تمام $\mathbb{R}^2$ است.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه‌ی فوق در حالت کلی برقرار نیست. به عبارت دیگر، برای مشتق‌پذیری در یک نقطه لزومی ندارد f_x و f_y در آن نقطه پیوسته باشند.

مثال ۳–۳–۷ تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x,y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

الف) نشان می‌دهیم تابع f در نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ مشتق‌پذیر است.
ب) نشان می‌دهیم توابع $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ در این نقطه پیوسته نیستند.

الف) برای (x,y) در یک همسایگی نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ داریم

$$\begin{aligned}
f(x,y) - f(\circ, \circ) &= (x^2 + y^2) \ \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \circ x + \circ y + (x \ \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}})x + (y \ \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}})y
\end{aligned}$$

به ازای $A = B = 0$، $\alpha(x,y) = x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ و $\beta(x,y) = y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ داریم

$$|\alpha(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad |\beta(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

بنابر این

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \alpha(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \beta(x,y) = 0$$

پس تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

ب) مشاهده می‌شود که

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

روی مسیر به معادلات $x = t \ , \ y = 0$ داریم

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = \lim_{t\to 0}(2t\sin\frac{1}{|t|} - \frac{t}{|t|}\cos\frac{1}{|t|})$$

چون حد فوق وجود ندارد، تابع $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ در نقطه‌ی $(0,0)$ حد ندارد و در نتیجه پیوسته نیست.
به شکل مشابه، می‌توان نشان داد، تابع $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه‌ی $(0,0)$ پیوسته نیست.

در چند مثال بعد توابع مختلفی مطرح می‌شوند که مشتق‌پذیر نیستند.

مثال ۳-۳-۸ نشان می‌دهیم که هیچ یک از توابع زیر در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیستند.

الف) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

ب) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$.

ج) $f(x,y) = \begin{cases} y + x\sin\frac{1}{x} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

الف) چون تابع f درنقطه‌ی $(0,0)$ پیوسته نیست (چرا؟)، مشتق‌پذیر هم نیست.

ب)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h} = -1 \end{aligned}$$

فرض کنیم f در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد، یعنی α و β وجود داشته باشند که

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \alpha(x,y)x + \beta(x,y)y$$

پس α و β وجود دارند که

$$\sqrt[3]{x^3-y^3}=x-y+\alpha(x,y)x+\beta(x,y)y$$

و $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\alpha(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\beta(x,y)=0$.

به ویژه روی مسیر به معادله‌ی $x=t\ ,\ y=2t$ داریم

$$\sqrt[3]{t^3-(2t)^3}=t-2t+\alpha(t,2t)t+\beta(t,2t)2t$$

یعنی

$$\sqrt[3]{7}\ t=t-\alpha(t,2t)\ t-\beta(t,2t)\ 2t$$

که با تقسیم دو طرف بر t معادل است با

$$1-\sqrt[3]{7}=\alpha(t,2t)+2\beta(t,2t)$$

اما این غیر ممکن است زیرا از $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\alpha(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\beta(x,y)=0$ نتیجه می‌شود $\lim\limits_{t\to0}\Big(\alpha(t,2t)+2\beta(t,2t)\Big)=0$.

ج) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to0}\sin\frac{1}{h}$$

اما $\lim\limits_{h\to0}\sin\dfrac{1}{h}$ وجود ندارد و در نتیجه f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

یکی روش دیگر برای اثبات عدم مشتق‌پذیری استفاده از قضیه‌ی ۳-۳-۲ است. به عبارت دیگر اگر برای نقطه‌ی $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0)$، بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ را به قسمی بیابیم که در تساوی $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)=f_x(x,y)a+f_y(x,y)\ b$ صدق نکند آنگاه تابع f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۳-۳-۹ نشان می‌دهیم که تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3-y^3}$ در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

پیش از این مشاهده کردیم که $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$. فرض کنیم تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد. برای بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ می‌توان نوشت:

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt[3]{(ta)^3-(tb)^3}}{t}=\sqrt[3]{a^3-b^3}$$

بنابر این طبق قضیه‌ی ۳-۳-۲ برای بردار یکه‌ی دلخواه $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ باید داشته باشیم:

$$\sqrt[3]{a^3-b^3}=D_{\mathbf{u}}f(0,0)=f_x(0,0)a+f_y(0,0)\ b=a-b$$

اما این تساوی در حالت کلی برقرار نیست (برای مثال به ازای $a=-b=\frac{\sqrt{2}}{2}$).

مثال ۳-۳-۱۰ تابع دومتغیره‌ی f را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

نشان می‌دهیم f در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

بنابر مثال ۳-۲-۲ به ازای $a=-b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ داریم:

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0)=a^3+b^3\neq a+b=f_x(0,0)a+f_y(0,0)\ b$$

پس تابع f در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

در مثال بعد یکی دیگر از کاربردهای مشتق کل برای تقریب زدن یک عبارت عددی مطرح شده است. ایده‌ی اصلی در این مثال، استفاده از مشتق کل توابع حقیقی دو متغیره است. تعمیم این روش به کمک بسط تیلور مراتب بالاتر در پیوست ۱ مطرح شده است. خواهیم دید که با این روش می‌توان رده‌ی گسترده‌ای از عبارت‌های جبری را با دقت دلخواه محاسبه کرد. همچنین نشان می‌دهیم که به کمک بسط تیلور و با به دست آوردن کران مناسبی برای خطا، می‌توان با کنترل خطای اندازه‌گیری داده‌ها، به محاسبه‌ی مقدار تقریبی یک عبارت جبری با خطای مورد نظر دست یافت. این مطلب در محاسبات کاربردی در رشته‌های فنی و مهندسی از اهمیت زیادی دارد.

مثال ۳-۳-۱۱ با استفاده از مشتق یک تابع حقیقی دو متغیره‌ی مناسب مقدار تقریبی $\sqrt{(1/06)^2+(1/97)^3}$ را به دست آورید.

قرار می‌دهیم $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^3}$. در این صورت $f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}}$ و $f_y(x,y)=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}}$. چون مشتقات جزئی f در $(1,2)$ پیوسته هستند (چرا؟)، بنابر قضیه‌ی ۳-۳-۶ تابع f در $(1,2)$ مشتق‌پذیر است. به این ترتیب به ازای $\Delta x=0/06$ و $\Delta y=-0/03$،

$$\begin{aligned}\sqrt{(1/06)^2+(1/97)^3} &= f(1+\Delta x,2+\Delta y)\\ &\approx f(1,2)+f_x(1,2)\Delta x+f_y(1,2)\Delta y\\ &= 3+\frac{1}{3}(0/06)+2(-0/03)=2/96\end{aligned}$$

۳‌ـ۴ قاعده‌ی زنجیره‌ای

قاعده‌ی زنجیره‌ای برای محاسبه‌ی مشتق ترکیب توابع به کار می‌رود. شکل کلی این قضیه کمی پیچیده است و برای درک عمیق‌تر آن دانشجو باید به مفاهیم پایه‌ی جبر خطی نظیر نگاشت‌های خطی تسلط نسبی داشته باشد. یادآوری می‌کنیم که اگر تابع یک متغیره‌ی $x = x(t)$ در $t_\circ$ و تابع یک متغیره‌ی $y = f(x)$ در $x(t_\circ)$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه تابع $y = g(t) = f(x(t))$ در $t_\circ$ مشتق پذیر است و داریم

$$g'(t_\circ) = x'(t_\circ)\ f'(x(t_\circ))$$

در این بخش تعمیم قاعده‌ی زنجیره‌ای را در چند حالت خاص بررسی می‌کنیم.

ابتدا فرض کنیم توابع یک متغیره‌ی حقیقی $x = x(t)$ و $y = y(t)$ در $t_\circ$ و تابع دو متغیره‌ی حقیقی f با ضابطه‌ی $z = f(x,y)$ در $\mathbf{x}_\circ = (x(t_\circ), y(t_\circ))$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت تابع یک متغیره‌ی حقیقی h با ضابطه‌ی $z = h(t) = f(x(t), y(t))$ ترکیب توابع f با ضابطه‌ی $z = f(x,y)$ و تابع برداری g با ضابطه‌ی $g(t) = (x(t), y(t))$ است، یعنی $h = f \circ g$. در این صورت برای $x_\circ = x(t_\circ)$، $y_\circ = y(t_\circ)$، $\Delta x = x(t_\circ + \Delta t) - x(t_\circ)$ و $\Delta y = y(t_\circ + \Delta t) - y(t_\circ)$ داریم

$$\begin{aligned}
h(t_\circ + \Delta t) - h(t_\circ) &= f(x(t_\circ + \Delta t), y(t_\circ + \Delta t)) - f(x(t_\circ), y(t_\circ)) \\
&= f(x_\circ + \Delta x, y_\circ + \Delta y) - f(x_\circ, y_\circ) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y
\end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\frac{h(t_\circ + \Delta t) - h(t_\circ)}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

اکنون با توجه به روابط

$$\lim_{\Delta t \to \circ} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \circ} \frac{x(t_\circ + t) - x(t_\circ)}{\Delta t} = x'(t_\circ),$$

$$\lim_{\Delta t \to \circ} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \circ} \frac{y(t_\circ + t) - y(t_\circ)}{\Delta t} = y'(t_\circ),$$

$$\lim_{t \to \circ} \Delta x = \lim_{t \to \circ} \big(x(t_\circ + t) - x(t_\circ)\big) = \circ,\ \lim_{\Delta t \to \circ} \Delta y = \lim_{\Delta t \to \circ} \big(y(t_\circ + t) - y(t_\circ)\big) = \circ$$

و $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (\circ,\circ)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (\circ,\circ)} \beta(\Delta x, \Delta y) = \circ$، اگر $t \to \circ$ آنگاه

$$h'(t_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ x'(t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ y'(t_\circ)$$

یا به شکل خلاصه:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{dy}{dt}$$

این رابطه را به شکل حاصل ضرب ماتریسی هم می‌توان بیان کرد. با این شکل تعمیم قاعده‌ی زنجیره‌ای ساده‌تر خواهد شد.

$$h'(t_\circ) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\right)\begin{pmatrix} x'(t_\circ) \\ y'(t_\circ) \end{pmatrix}$$

اکنون می‌توانیم مشتق ترکیب توابع پیچیده‌تر را به دست آوریم. فرض کنیم توابع یک متغیره‌ی حقیقی $x = x(t)$، $y = y(t)$ و $z = z(t)$ در $t_\circ$ و تابع حقیقی سه متغیره‌ی f با ضابطه‌ی $w = f(x, y, z)$ در $\mathbf{x}_\circ = (x(t_\circ), y(t_\circ), z(t_\circ))$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت تابع یک متغیره‌ی حقیقی $w = h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ ترکیب تابع f و g با ضابطه‌ی $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ است. شبیه به آنچه پیش از این گفته شد داریم

$$h'(t_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_\circ)\ x'(t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_\circ)\ y'(t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_\circ)\ z'(t_\circ)$$

یا به شکل خلاصه:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\ \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\ \frac{dz}{dt}$$

این رابطه به شکل حاصل ضرب ماتریسی زیر هم بیان می‌شود.

$$h'(t_\circ) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ, z_\circ)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ, z_\circ)\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_\circ, y_\circ, z_\circ)\right)\begin{pmatrix} x'(t_\circ) \\ y'(t_\circ) \\ z'(t_\circ) \end{pmatrix}$$

حال فرض کنیم توابع دو متغیره‌ی حقیقی $x = x(s, t)$ و $y = y(s, t)$ در $(s_\circ, t_\circ)$ و $z = f(x, y)$ در $(x(s_\circ, t_\circ), y(s_\circ, t_\circ))$ مشتق‌پذیر باشند. تابع h با ضابطه‌ی $z = h(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$ ترکیب تابع f و تابع $\mathbf{g}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{g}(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$ است. فرض کنیم $x_\circ = x(s_\circ, t_\circ)$، $y_\circ = y(s_\circ, t_\circ)$ و $\mathbf{x}_\circ = (x_\circ, y_\circ)$. بنابر آنچه گفته شد برای توابع حقیقی $x = x(s, t)$ و $y = y(s, t)$ داریم

$$Dh(s_\circ, t_\circ) \quad = \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(s_\circ, t_\circ) & \frac{\partial x}{\partial t}(s_\circ, t_\circ) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s_\circ, t_\circ) & \frac{\partial y}{\partial t}(s_\circ, t_\circ) \end{pmatrix}$$

به این ترتیب:

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s_\circ, t_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ \frac{\partial x}{\partial s}(s_\circ, t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ \frac{\partial y}{\partial s}(s_\circ, t_\circ)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(s_\circ, t_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ \frac{\partial x}{\partial t}(s_\circ, t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ \frac{\partial y}{\partial t}(s_\circ, t_\circ)$$

یا به شکل خلاصه:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial t}$$

د) فرض کنیم توابع دومتغیره‌ی حقیقی x با ضابطه‌ی $x = x(s,t)$ ، y با ضابطه‌ی $y = y(s,t)$ و z با ضابطه‌ی $z = z(s,t)$ در $(s_\circ, t_\circ)$ و تابع سه متغیره‌ی حقیقی f با ضابطه‌ی $w = f(x,y,z)$ در $\mathbf{x}_\circ = \big(x(s_\circ,t_\circ), y(s_\circ,t_\circ), z(s_\circ,t_\circ)\big)$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت تابع $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $w = g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ در $(s_\circ, t_\circ)$ مشتق‌پذیر است و شبیه به قسمت قبل:

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s_\circ, t_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_\circ)\ \frac{\partial x}{\partial s}(s_\circ, t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_\circ)\ \frac{\partial y}{\partial s}(s_\circ, t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_\circ)\ \frac{\partial z}{\partial s}(s_\circ, t_\circ)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(s_\circ, t_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_\circ)\ \frac{\partial x}{\partial t}(s_\circ, t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_\circ)\ \frac{\partial y}{\partial t}(s_\circ, t_\circ) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_\circ)\ \frac{\partial z}{\partial t}(s_\circ, t_\circ)$$

یا به شکل خلاصه:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial t}$$

بیان ماتریسی این حالت را به دانشجویان واگذار می‌کنیم.

مثال ۳-۴-۱ الف) فرض کنیم $z = \ln(\frac{x}{y} + y)$، $x = \ln t$ و $y = e^t$. مشتق تابع با ضابطه‌ی $z(t) = f(x(t), y(t))$ را به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای محاسبه می‌کنیم.

ب) فرض کنیم $w = \frac{1}{xyz}$، $x = s + \tan^{-1} t$، $y = \frac{4}{3s + t}$ و $z = \cos(\pi s t)$. مقادیر $\frac{\partial w}{\partial s}(1,1)$ و $\frac{\partial w}{\partial t}(1,1)$ را به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای محاسبه می‌کنیم.

الف) با توجه با این که

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\frac{۱}{x+y^{۲}},\quad \frac{dx}{dt}(t)=\frac{۱}{t},\quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\frac{-x+y^{۲}}{xy+y^{۳}},\quad \frac{dy}{dt}(t)=e^{t}$$

با جایگذاری $x=\ln t$ و $y=e^{t}$ داریم:

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{\partial z}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)\ \frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial z}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)\ \frac{dy}{dt}(t)\\ &= \frac{۱}{\ln t+e^{۲t}}\ \frac{۱}{t}+\frac{-\ln t+e^{۲t}}{e^{t}\ln t+e^{۳t}}\ e^{t}\end{aligned}$$

ب) با توجه به این که:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,y,z)=-\frac{۱}{x^{۲}yz},\ \ \frac{\partial w}{\partial y}(x,y,z)=-\frac{۱}{xy^{۲}z},\ \ \frac{\partial w}{\partial z}(x,y,z)=-\frac{۱}{xyz^{۲}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t)=۱,\ \ \frac{\partial y}{\partial s}(s,t)=-\frac{۱۲}{(۳s+t)^{۲}},\ \ \frac{\partial z}{\partial s}(s,t)=-\pi t\sin(\pi st)$$

و

$$\frac{\partial x}{\partial t}(s,t)=\frac{۱}{۱+t^{۲}},\ \ \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)=-\frac{۴}{(۳s+t)^{۲}},\ \ \frac{\partial z}{\partial t}(s,t)=-\pi s\sin(\pi st)$$

داریم

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x(۱,۱),y(۱,۱),z(۱,۱))=\frac{\partial w}{\partial y}(۱+\frac{\pi}{۴},۱,-۱)=\frac{۱۶}{(\pi+۱۶)^{۲}},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x(۱,۱),y(۱,۱),z(۱,۱))=\frac{\partial w}{\partial x}(۱+\frac{\pi}{۴},۱,-۱)=\frac{۴}{\pi+۴},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}(x(۱,۱),y(۱,۱),z(۱,۱))=\frac{\partial w}{\partial x}(۱+\frac{\pi}{۴},۱,-۱)=-\frac{۴}{\pi+۴},$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}(۱,۱)=۱,\ \ \frac{\partial y}{\partial s}(۱,۱)=-\frac{۳}{۴},\ \ \frac{\partial z}{\partial s}(۱,۱)=۰,$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}(۱,۱)=\frac{۱}{۲},\ \ \frac{\partial y}{\partial t}(۱,۱)=-\frac{۱}{۴},\ \ \frac{\partial z}{\partial t}(۱,۱)=۰$$

پس

$$\frac{\partial w}{\partial s}(۱,۱)=\frac{۱۶}{(\pi+۱۶)^{۲}}-\frac{۳}{\pi+۴},\quad \frac{\partial w}{\partial t}(۱,۱)=\frac{۱۶}{(\pi+۱۶)^{۲}}-\frac{۱}{۴(\pi+۴)}$$

مثال ۳-۴-۲ الف) تابع دو متغیره‌ی حقیقی f را همگن از درجه‌ی k می‌نامیم هرگاه

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ \ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^{۲},\quad f(tx,ty)=t^{k}f(x,y)$$

به عنوان مثال تابع $f(x,y)=x^{۴}+x^{۳}y+y^{۴}$ همگن از درجه‌ی ۴ و تابع $f(x,y)=\sin(\frac{xy}{x^{۲}+y^{۲}})$ همگن از درجه‌ی صفر است.

برای چنین توابعی نشان دهید به شرط مشتق پذیری f، رابطه‌ی زیر برقرار خواهد بود.

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=kf(x,y)$$

ب) برای تابع با ضابطه‌ی $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{y^4x - x^2y^3}{x^5+y^5}\right)$ مقدار $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

الف) فرض کنیم (x,y) نقطه‌ای ثابت و دلخواه در $\mathbb{R}^2$ باشد. قرار می‌دهیم

$$x(t) = tx \ , \ y(t) = ty \ , \ g(t) = f(x(t), y(t)) = f(tx, ty)$$

بنا بر قاعده‌ی زنجیره‌ای

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\ x + \frac{\partial f}{\partial t}(tx,ty)\ y$$

از سوی دیگر چون f همگن است، $g(t) = t^k f(x,y)$. پس $g'(t) = kt^{k-1}f(x,y)$. به این ترتیب

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\ x + \frac{\partial f}{\partial t}(tx,ty)\ y = g'(t) = kt^{k-1}f(x,y)$$

به ویژه برای $t = 1$ داریم

$$x\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = kf(x,y)$$

ب) مشاهده می‌شود که f تابعی همگن از درجه صفر است. پس بنابر قسمت قبل، $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{y^4x - x^2y^3}{x^5+y^5}\right)$.

مثال ۳-۴-۳ برای $f(x,y,z) = x^3 + yz^2$، $x = ue^v$، $y = u^2 + v$ و $z = uv$ و $w = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. مطلوب است $\frac{\partial w}{\partial u}$ و $\frac{\partial w}{\partial v}$.

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

از سوی دیگر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\ ,\ \frac{\partial x}{\partial u} = e^v\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y} = z^2\ ,\ \frac{\partial y}{\partial u} = 2u\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2yz\ ,\ \frac{\partial z}{\partial u} = v$$

بنابر این

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u}(u,v) &= 3(ue^v)^2\ (e^v) + (uv)^2\ (2u) + 2(u^2+v)\ (uv)\ (v) \\ &= 3u^2e^{3v} + 4u^3v^2 + 2uv^3\end{aligned}$$

به نحو مشابه $\frac{\partial w}{\partial v}(u,v) = 3u^3e^{3v} + 3u^2v^2 + 2u^4v$.

مثال ۳-۴-۴ فرض کنیم f یک تابع حقیقی یک متغیره‌ی مشتق‌پذیر باشد. نشان می‌دهیم تابع $z = z(x,y) = f(bx - ay)$ در معادله‌ی $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند.

با فرض $u = u(x,y) = bx - ay$ داریم $z = z(x,y) = f(u(x,y))$. پس

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,y)) = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)b$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(u(x,y)) = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)(-a)$$

بنابر این

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = abf'(u) - abf'(u) = 0$$

مثال ۳-۴-۵ فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر با مشتق غیر صفر است و z تابعی مشتق‌پذیر از x و y که در معادله‌ی $f(cx - az\ ,\ cy - bz) = 0$ صدق می‌کند(a, b, c اعداد حقیقی ثابت هستند) نشان دهید $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$.

با فرض $u = u(x,y) = cx - a\ z(x,y)$ و $v = v(x,y) = cy - b\ z(x,y)$ داریم

$$w = w(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) = 0$$

پس

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x} = f_u\frac{\partial u}{\partial x} + f_v\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad 0 = \frac{\partial w}{\partial y} = f_u\frac{\partial u}{\partial y} + f_v\frac{\partial v}{\partial y}$$

بنابر این

$$f_u(c - a\frac{\partial z}{\partial x}) + f_v(-b\frac{\partial z}{\partial x}) = 0\ \ ,\ \ f_u(-a\frac{\partial z}{\partial y}) + f_v(c - b\frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

از این که f تابعی مشتق‌پذیر با مشتق غیر صفر است نتیجه می‌شود f_u و f_v هر دو صفر نیستند. پس $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{cf_u}{af_u + bf_v}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{cf_v}{af_u + bf_v}$ و در نتیجه:

$$\begin{aligned} a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} &= a\frac{cf_u}{af_u + bf_v} + b\frac{cf_v}{af_u + bf_v} \\ &= c(\frac{af_u}{af_u + bf_v} + \frac{bf_v}{af_u + bf_v}) \\ &= c\frac{af_u + bf_v}{af_u + bf_v} = c \end{aligned}$$

مثال ۳-۴-۶ فرض کنیم $z = z(x,y)$ تابعی از دو متغیر x, y باشد که در معادله‌ی $f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ صدق می‌کند و f یک تابع حقیقی دو متغیره مشتق‌پذیر است. نشان دهید $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

با فرض $u = u(x,y) = x + \frac{z(x,y)}{y}$ و $v = v(x,y) = y + \frac{z(x,y)}{x}$ داریم

$$w = w(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) = 0$$

پس

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x} = f_u \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$0 = \frac{\partial w}{\partial y} = f_u \frac{\partial u}{\partial y} + f_v \frac{\partial v}{\partial y}$$

بنابر این

$$(1 + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x})f_u + (\frac{1}{x^2}(x\frac{\partial z}{\partial x} - z))f_v = 0$$
$$(\frac{1}{y^2}(y\frac{\partial z}{\partial y} - z))f_u + (1 + \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y})f_v = 0$$

با ضرب معادله‌ی اول در x^2y و معادله‌ی دوم در xy^2 نتیجه می‌شود

$$(x^2y + x^2\frac{\partial z}{\partial x})f_u + (xy\frac{\partial z}{\partial x} - zy)f_v = 0$$
$$(xy\frac{\partial z}{\partial y} - zx))f_u + (xy^2 + y^2\frac{\partial z}{\partial y})f_v = 0$$

از این که f تابعی مشتق‌پذیر است، با فاکتورگیری و حل این دو معادله بر حسب $x\frac{\partial z}{\partial x}$ و $y\frac{\partial z}{\partial y}$ داریم

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2yf_u + yzf_v}{xf_u - yf_v} \quad , \quad y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xzf_u + xy^2f_v}{xf_u - yf_v}$$

پس

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = (z - xy)\frac{xf_u - yf_v}{xf_u - yf_v} = z - xy$$

۳–۵ مشتق تابع ضمنی

یکی از کاربردهای قاعده‌ی زنجیره‌ای محاسبه‌ی مشتق تابع ضمنی است. فرض کنیم f یک تابع حقیقی دو متغیره باشد. در برخی از موارد معادله‌ی $f(x,y) = 0$ به گونه‌ای است که می‌توان یکی از متغیرها را به عنوان تابعی از متغیر دیگر در نظر گرفت. برای مثال معادله‌ی $xy^3 + 2x - 1 = 0$ را هم می‌توان به صورت $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 2}$ و هم به صورت $x = \frac{1}{2 + y^3}$ بیان کرد. به این ترتیب می‌توان هم y را تابعی از متغیر x و هم x را تابعی از متغیر y در نظر گرفت. در بیشتر موارد ضابطه‌ی معادله به گونه‌ای است که نمی‌توان مانند این مثال ضابطه‌ی صریحی برای y بر حسب x یا به عکس مشخص کرد. برای مثال معادله‌ی $x^7 + x^3y^7 - 3x^5y^5 + xy + 1 = 0$ بر حسب x یا y به عنوان

یک عبارت جبری با ضرایب حقیقی قابل بیان نیست. با این وجود در پیوست ۱ ثابت می‌شود که اگر مشتقات جزئی f پیوسته و دست کم یکی از آنها مثلاً $f_y(x_\circ, y_\circ)$ غیر صفر باشد آنگاه در یک فاصله‌ی باز I شامل $x_\circ$، تابع مشتق‌پذیر $y = y(x)$ وجود دارد به قسمی که برای هر x در I داریم $f(x, y(x)) = \circ$. تابع $y(x)$ را **تابع ضمنی** مشخص شده توسط معادله‌ی $f(x, y) = \circ$ می‌نامیم. با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای برای تابع ثابت $g(x) = f(x, y(x)) = \circ$ و برای x در I داریم

$$\circ = \frac{dg}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = f_x + f_y\,\frac{dy}{dx}$$

بنابر این

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

یا به شکل دقیق‌تر برای x در I:

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}$$

مثال ۳–۵–۱ فرض کنیم در معادله‌ی $y^\Delta + x^\text{۳} y + x = \circ$، مقدار y را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از متغیر x در نظر بگیریم. می‌خواهیم $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه کنیم.

برای $f(x, y) = y^\Delta + x^\text{۳} y + x = \circ$ می‌توان نوشت:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{\text{۳}x^\text{۲} y + \text{۱}}{\Delta y^\text{۴} + x^\text{۳}}$$

در حالت کلی‌تر اگر z به صورت ضمنی توسط معادله‌ی $f(x, y, z) = \circ$ به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از دو متغیر x و y باشد، یعنی ضابطه‌ی $z = z(x, y)$ به صورت صریح مشخص نباشد، برای تابع $w = w(x, y) = f(x, y, z(x, y)) = \circ$ داریم

$$\circ = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} = f_x + f_z\,\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\circ = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} = f_y + f_z\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

پس

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}\ ,\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} \qquad (\text{٦})$$

به شکل مشابه اگر y یا x به صورت ضمنی توسط معادله‌ی $f(x, y, z) = \circ$ به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از دو متغیر دیگر داده شوند، معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_x}\ ,\ \ \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_x} \qquad , \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y}\ ,\ \ \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_y} \qquad (\text{۷})$$

مثال ۳–۵–۲ فرض کنیم $z = \ln(x^۲ + y^۲ + z^۲)$. مطلوب است $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

برای $f(x,y,z) = \ln(x^۲ + y^۲ + z^۲) - z = ۰$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} \quad , \quad f_x = \frac{۲x}{x^۲ + y^۲ + z^۲} \quad , \quad f_z = \frac{۲z}{x^۲ + y^۲ + z^۲} - ۱$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۲x}{x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{۲y}{x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲z}$$

مثال ۳–۵–۳ فرض کنیم در معادله‌ی $f(x,y,z) = ۰$، هر یک از مقادیر z، y و x را بتوان به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از دو متغیر دیگر در نظر گرفت. نشان دهید:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = -۱$$

بنابر معادلات (٦) و (۷) داریم $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = (-\frac{f_x}{f_z})(-\frac{f_y}{f_x})(-\frac{f_z}{f_x}) = -۱$.

۳–٦ صفحه‌ی مماس و خط قائم بر رویه

در ابتدای این فصل با رهیافت هندسی و به کمک مشتقات جزئی، صفحه‌ی مماس بر نمودار تابع دو متغیر $z = f(x,y)$ را به دست آوردیم. در ادامه‌ی این فصل به حالتی می‌پردازیم که رویه‌ی S به عنوان رویه‌ی تراز یک تابع حقیقی سه متغیره ومشتق‌پذیر F، مثلاً توسط معادله‌ی $F(x,y,z) = ۰$ داده شده باشد. در این صورت، از جنبه‌ی هندسی S را یک رویه‌ی **هموار** می‌نامیم. اکنون نقطه‌ی ثابت $\mathbf{x}_۰ = (x_۰, y_۰, z_۰) \in S$ و خم هموار $C \subseteq S$ به معادله‌ی $x = x(t)$، $y = y(t)$ و $z = z(t)$ را به قسمی روی رویه‌ی S در نظر می‌گیریم که $\mathbf{x}_۰ = (x(t_۰), y(t_۰), z(t_۰))$ (شکل ۴–۳). بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای برای تابع ثابت $g(t) = F(x(t), y(t), z(t)) = ۰$ در $\mathbf{x}_۰ = (x_۰, y_۰, z_۰)$ داریم:

$$۰ = \frac{dg}{dt}(t_۰) = \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}_۰)\ \frac{dx}{dt}(t_۰) + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_۰)\ \frac{dy}{dt}(t_۰) + \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_۰)\ \frac{dz}{dt}(t_۰)$$

به عبارت دیگر

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}_۰)\ \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_۰)\ \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_۰)\ \mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}(t_۰)\ \mathbf{i} + \frac{dy}{dt}(t_۰)\ \mathbf{j} + \frac{dz}{dt}(t_۰)\ \mathbf{k}\right) = ۰$$

پس بردار $\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}_۰)\ \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_۰)\ \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_۰)\mathbf{k}$ که با $\nabla F(\mathbf{x}_۰)$ نمایش داده می‌شود و **بردار گرادیان** F در $\mathbf{x}_۰$ نامیده می‌شود بر بردار مماس بر خم C در $\mathbf{x}_۰$ عمود است. با

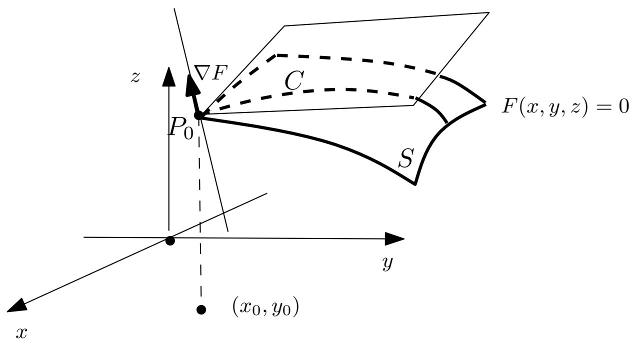
توجه به این که C را خم دلخواهی بر S در نظر گرفتیم که $\mathbf{x}_\circ \in C$، صفحه‌ی شامل $\mathbf{x}_\circ$ با بردار نرمال $\nabla F(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ بر رویه‌ی S مماس خواهد بود (شکل ۴ــ۴). معادله‌ی این صفحه به شکل زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_\circ, y_\circ, z_\circ)\ (x - x_\circ) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_\circ, y_\circ, z_\circ)\ (y - y_\circ) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_\circ, y_\circ, z_\circ)\ (z - z_\circ) = \circ$$

خط با بردار هادی $\nabla F(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ واقع بر $P_\circ$ **خط قائم** بر S در $P_\circ$ نامیده می‌شود (شکل ۴ــ۴). معادله‌ی این خط به صورت زیر است.

$$\frac{x - x_\circ}{F_x(x_\circ, y_\circ, z_\circ)} = \frac{y - y_\circ}{F_y(x_\circ, y_\circ, z_\circ)} = \frac{z - z_\circ}{F_z(x_\circ, y_\circ, z_\circ)}$$

معادلات پارامتری این خط $x = x_\circ + tF_x(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$، $y = y_\circ + tF_y(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ و $z = z_\circ + tF_z(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ است.



شکل ۴ــ۴ صفحه‌ی مماس و خط قائم بر رویه.

در حالت خاص که رویه‌ی S نمودار تابع حقیقی دو متغیره $z = f(x,y)$ باشد، S را می‌توانیم رویه‌ی تراز تابع سه متغیره‌ی F با ضابطه‌ی $F(x,y,z) = f(x,y) - z = \circ$ در نظر بگیریم. به این ترتیب بردار گرادیان در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, f(x_\circ, y_\circ))$ به شکل زیر خواهد بود.

$$\nabla F(x_\circ, y_\circ, z_\circ) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ \mathbf{j} -\ \mathbf{k}$$

در این حالت معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ (x - x_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ (y - y_\circ) -\ (z - z_\circ) = \circ$$

و معادله‌ی خط قائم به صورت زیر است.

$$\frac{x - x_\circ}{f_x(x_\circ, y_\circ)} = \frac{y - y_\circ}{f_y(x_\circ, y_\circ)} = z_\circ - z$$

معادلات پارامتری این خط عبارتند از $x = x_\circ + tf_x(x_\circ, y_\circ)$، $y = y_\circ + tf_y(x_\circ, y_\circ)$ و $z = z_\circ$. اگر معادله‌ی صفحه‌ی مماس را به صورت

$$z = z_\circ + \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ (x - x_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ (y - y_\circ)$$

یا به شکل زیر بیان کنیم

$$z = f(x_\circ, y_\circ) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\ \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\ \Delta y$$

از مقایسه با فرمول

$$f(x,y) = f(x_\circ, y_\circ) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

دیده می‌شود که $f(x_\circ, y_\circ) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\Delta y$ مقدار $f(x,y)$ را با خطای $\alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$ تقریب می‌زند.

مثال ۳-۶-۱ صفحه‌ی مماس و خط قائم بر هر یک از رویه‌های زیر را در نقاط داده شده محاسبه کنید.

الف) $P_\circ = (1, 1, 1) \quad , \quad x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.

ب) $P_\circ = (1, 1, 4) \quad , \quad z = x^4 + 2x^3y^2 + y$

الف) برای $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ داریم

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\ \mathbf{k} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$$

بنابر این معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط قائم در $(1, 1, 1)$ به صورت زیر است.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)\ (x-1) + \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)\ (y-1) + \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)\ (z-1) = 0$$

$$\frac{x-1}{F_x(1,1,1)} = \frac{y-1}{F_y(1,1,1)} = \frac{z-1}{F_z(1,1,1)}$$

که معادل است با

$$2x + 2y - 2z - 2 = 0 \quad , \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}$$

ب) برای $z = f(x, y) = x^4 + 2x^3y^2 + y$ داریم

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = (4x^3 + 6y^2x^2)\mathbf{i} + (4x^3y + 1)\mathbf{j}$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط قائم در $(۱,۱,۴)$ به صورت زیر است.

$$z = f(۱,۱) + \frac{\partial f}{\partial x}(۱,۱)(x-۱) + \frac{\partial f}{\partial y}(۱,۱)\ (y-۱)$$

$$۴ - z = \frac{x-۱}{f_x(۱,۱)} = \frac{y-۱}{f_y(۱,۱)}$$

که معادل است با $\frac{z-۴}{-۱} = \frac{y-۱}{۵} = \frac{x-۱}{۱۰} \quad , \quad ۱۰x + ۵y - z - ۱۱ = ۰$.

۳-۷ ویژگی‌های بردار گرادیان و مشتق سوئی

با توجه به نقش بنیانی بردار گرادیان در رفتار هندسی توابع حقیقی چند متغیره، در این بخش ویژگی‌های این بردار بیشتر و عمیق‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای سادگی در این بخش توابع دو و سه متغیره را مورد توجه قرار می‌دهیم. گرادیان را در فصل توابع برداری به عنوان یک عملگر (نگاشت) خطی هم مورد بررسی قرار خواهیم داد. یادآوری می‌کنیم که بردار گرادیان برای تابع حقیقی دو متغیره‌ی f و تابع حقیقی سه متغیره‌ی g به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\ \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \mathbf{j} \quad , \quad \nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\ \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\ \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\ \mathbf{k}$$

فرض کنیم S رویه‌ای به معادله‌ی $z = f(x,y)$ در $\mathbb{R}^۳$ باشد. نقطه‌ی ثابت $P_۰ = (x_۰, y_۰)$ و بردار ثابت و یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت اگر f در $P_۰$ مشتق‌پذیر باشد برای تابع $z(t) = f(x_۰ + at, y_۰ + bt)$،

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(۰) &= \lim_{t\to ۰} \frac{z(۰+t) - z(۰)}{t} = \lim_{t\to ۰} \frac{f(x_۰ + ta, y_۰ + tb) - f(x_۰, y_۰)}{t} \\ &= D_{\mathbf{u}} f(x_۰, y_۰) \end{aligned}$$

به عبارت دیگر مشتق سوئی f در سوی $\mathbf{u}$ در $(x_۰, y_۰)$ میزان تغییرات z را در سوی بردار $\mathbf{u}$ نشان می‌دهد. از سوی دیگر بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(۰) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_۰, y_۰)\frac{dx}{dt}(۰) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_۰, y_۰)\frac{dy}{dt}(۰) \\ &= \nabla f((x_۰, y_۰) \cdot \big(x'(۰)\mathbf{i} + y'(۰)\mathbf{j}\big) \\ &= \nabla f((x_۰, y_۰) \cdot (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \\ &= \nabla f((x_۰, y_۰) \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

بنابر این

$$D_{\mathbf{u}}f(x_\circ, y_\circ) = \nabla f(x_\circ, y_\circ) \cdot \mathbf{u}$$

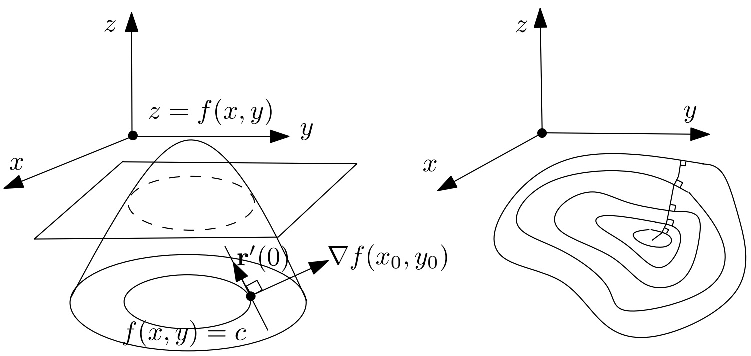
اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{u}$ و $\nabla f(x_\circ, y_\circ)$ باشد آنگاه

$$D_{\mathbf{u}}f(x_\circ, y_\circ) = \|\nabla f((x_\circ, y_\circ)\| \; \|\mathbf{u}\| \cos\theta$$

بنابر این، مشتق سوئی وقتی بیشترین مقدار را دارد که $\theta = \circ$. به عبارت دیگر بیشترین میزان تغییرات z در یک همسایگی $(x_\circ, y_\circ)$، در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$، موازی با $\nabla f(x_\circ, y_\circ)$ خواهد بود (شکل ۴—۵). این نکته تعبیر هندسی ساده‌ای دارد که در عمل واقعیت شناخته شده‌ای است. رویه‌ی S به معادله‌ی $z = f(x, y)$ را در $\mathbb{R}^۳$ در نظر می‌گیریم. اگر خم تراز گذرنده از $(x_\circ, y_\circ)$، یعنی $L_c = \{(x, y) \;:\; f(x, y) = c\}$ به وسیله‌ی تابع برداری $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ مشخص شده باشد آنگاه برای تابع ثابت $g(t) := f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t)) = c$ می‌توان نوشت:

$$\circ = \frac{dg}{dt}(\circ) = \nabla f(x_\circ, y_\circ) \cdot \mathbf{r}'(\circ)$$

بنابر این بردار $\nabla f(x_\circ, y_\circ)$ بر بردار $\mathbf{r}'(\circ)$ عمود است. به عبارت دیگر، مسیری که بیشترین شیب را در بالا رفتن از کوه دارد (کوتاه‌ترین مسیر برای رسیدن به قله)، در همه‌ی نقاط با خم‌های تراز زاویه‌ی قائمه می‌سازد (شکل ۴—۵).



شکل ۴—۵ بیشترین شیب و بردار گرادیان.

در انتهای این بخش، قضیه‌ی ۳—۳—۲ را به کمک بردار گرادیان هم بیان می‌کنیم. این قضیه را این بار برای توابع حقیقی سه متغیره بازنویسی می‌کنیم:

قضیه ۳–۷–۱ فرض کنیم تابع حقیقی سه متغیره‌ی f در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x,y,z)\in\mathbb{R}^{۳}$ تعریف شده و در این نقطه مشتق‌پذیر باشد. در این صورت برای هر بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$، مشتق سوئی $D_{\mathbf{u}}f(x,y,z)$ وجود دارد و

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)\cdot\mathbf{u}$$

۳–۸ بسط تیلور توابع حقیقی چند متغیره

برای توابع حقیقی چند متغیره، شبیه به توابع حقیقی یک متغیره می‌توان با استفاده از چندجمله‌ایهای چند متغیره تقریب‌های مناسبی به دست آورد. این تقریب که در بسیاری از مسائل کاربردی و عددی نقش مؤثری بر عهده دارد، به کمک بسط تیلور انجام می‌شود. به کمک بسط تیلور می‌توان رفتار هندسی تابع را در یک همسایگی بررسی کرد، به ویژه در بخش بعد خواهیم دید که می‌توان نوع اکسترمم‌های موضعی تابع را نیز مشخص کرد.

در این بخش برای سادگی بسط تیلور مرتبه اول و دوم را فقط توابع حقیقی دو متغیره بررسی می‌کنیم. بسط تیلور از مرتبه‌ی دلخواه در پیوست ۳ مطرح شده است. فرض کنیم تابع حقیقی دو متغیره‌ی f در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x_{\circ},y_{\circ})$ مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشد.

تابع حقیقی یک متغیره‌ی F را با ضابطه‌ی $F(t)=f(x_{\circ}+ht,y_{\circ}+kt)$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه‌ی تیلور برای توابع حقیقی یک متغیره در یک همسایگی $t=\circ$، عدد حقیقی $\circ<\theta<۱$ وجود دارد که:

$$F(t)=F(\circ)+F'(\circ)t+\frac{F''(\theta)}{۲!}t^{۲} \qquad (۸)$$

به ویژه برای $t=۱$ داریم:

$$F(۱)=F(\circ)+F'(\circ)+\frac{F''(\theta)}{۲!}$$

بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای برای $x(t)=x_{\circ}+ht$ و $y(t)=y_{\circ}+kt$ داریم:

$$\begin{aligned}F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_{\circ}+ht,y_{\circ}+kt)\ \frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_{\circ}+ht,y_{\circ}+kt)\ \frac{dy}{dt}(t)\\ &= h\frac{\partial f}{\partial x}(x_{\circ}+ht,y_{\circ}+kt)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_{\circ}+ht,y_{\circ}+kt)\end{aligned}$$

به ویژه برای $t=\circ$ داریم:

$$F'(\circ)=h\frac{\partial f}{\partial x}(x_{\circ},y_{\circ})+k\frac{\partial}{\partial y}(x_{\circ},y_{\circ})$$

با استفاده‌ی مجدد از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$F''(\theta) = h^{2}\frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}}(x_{0}+\theta h, y_{0}+\theta k) + 2hk\frac{\partial^{2} f}{\partial x\partial y}(x_{0}+\theta h, y_{0}+\theta k) + k^{2}\frac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}}(x_{0}+\theta h, y_{0}+\theta k)$$

از بازنویسی رابطه‌ی (۱۵) به قضیه‌ی زیر دست می‌یابیم:

قضیه ۳–۸–۱ **(تیلور مرتبه اول)** فرض کنیم مشتقات جزئی مخلوط مرتبه‌ی ۲ تابع دومتغیره‌ی f در یک همسایگی شامل (x_{0}, y_{0}) وجود داشته و پیوسته باشند. در این صورت برای $h, k \in \mathbb{R}$ که $(x_{0}+h, y_{0}+k)$ در این همسایگی قرار بگیرد عدد حقیقی $0 < \theta < 1$ وجود دارد به قسمی که

$$f(x_{0}+ht, y_{0}+kt) = f(x_{0}, y_{0}) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_{0}, y_{0}) + k\frac{\partial}{\partial y}(x_{0}, y_{0}) +$$
$$\frac{1}{2!}\Big[h^{2}\frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}}(x_{0}+\theta h, y_{0}+\theta k) + 2hk\frac{\partial^{2} f}{\partial x\partial y}(x_{0}+\theta h, y_{0}+\theta k) + k^{2}\frac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}}(x_{0}+\theta h, y_{0}+\theta k)\Big]$$

۳–۹ اکسترمم توابع حقیقی چند متغیره

اکسترمم‌های توابع حقیقی در عمل کاربرد زیادی دارند و موضوع مهمی در مطالعه‌ی رفتار توابع به حساب می‌آیند. به ویژه از جنبه‌ی هندسی اکسترمم‌ها از شاخص‌ترین نقاط نمودار تابع هستند. بیشتر مفاهیم و تعریف‌های این قسمت به طور طبیعی تعمیم مفاهیم مشابه برای توابع حقیقی یک متغیره هستند و می‌توان آنها را به شکل کلی‌تر هم بیان کرد.

در این قسمت فرض می‌کنیم تابع دو متغیره‌ی حقیقی f در یک همسایگی نقطه‌ی (x_{0}, y_{0}) تعریف شده باشد.

مقدار $f(x_{0}, y_{0})$ را یک **ماکزیمم موضعی (نسبی)** f می‌نامیم هرگاه در یک همسایگی از نقطه‌ی (x_{0}, y_{0})، برای هر (x, y) در این همسایگی داشته باشیم $f(x_{0}, y_{0}) \geq f(x, y)$ (شکل ۴–۶).

در صورتی که برای هر (x, y) در زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی f مانند S داشته باشیم $f(x_{0}, y_{0}) \geq f(x, y)$، مقدار $f(x_{0}, y_{0})$ را **ماکزیمم مطلق** تابع f بر S می‌نامیم.

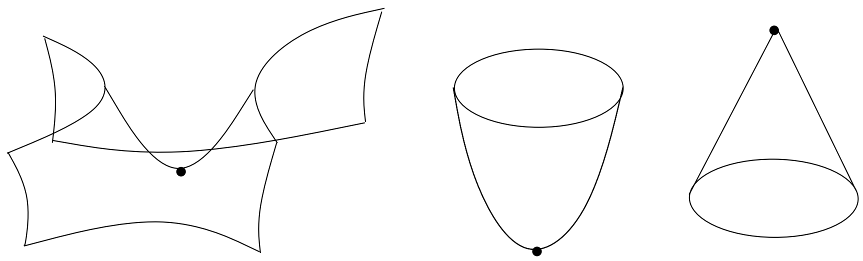
به همین ترتیب مقدار $f(x_{0}, y_{0})$ را یک **مینیمم موضعی (نسبی)** تابع f می‌نامیم هرگاه در یک همسایگی (x_{0}, y_{0}) برای هر (x, y) در این همسایگی داشته باشیم $f(x_{0}, y_{0}) \leq f(x, y)$ (شکل ۴–۶).

در صورتی که برای هر (x, y) در زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی f مانند S داشته باشیم $f(x_{0}, y_{0}) \leq f(x, y)$، مقدار $f(x_{0}, y_{0})$ را **مینیمم مطلق** تابع f بر S می‌نامیم.

منظور از یک **اکسترمم** f یک ماکزیمم یا مینیمم f است. یک پرسش طبیعی رابطه‌ی بین مشتق و اکسترمم‌های f است. در مورد توابع چند متغیره نیز می‌توان قضیه‌ای شبیه به توابع یک متغیره به شکل زیر بیان کرد.

قضیه ۳−۹−۱ فرض کنیم $f(x_\circ, y_\circ)$ یک اکسترمم نسبی f باشد. اگر f در $(x_\circ, y_\circ)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه $\nabla f(x_\circ, y_\circ) = \mathbf{0}$.

عکس این قضیه در حالت کلی درست نیست. ممکن است در نقطه‌ی مانند $(x_\circ, y_\circ)$ داشته باشیم $\nabla f(x_\circ, y_\circ) = \mathbf{0}$، ولی $f(x_\circ, y_\circ)$ اکسترمم نسبی نباشد. همچنین ممکن است $f(x_\circ, y_\circ)$ اکسترمم موضعی یا مطلق f باشد ولی f در این نقطه مشتق‌پذیر نباشد (شکل ۴−۶). نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ را یک **نقطه‌ی بحرانی** تابع دو متغیره‌ی حقیقی f گوییم هرگاه تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نباشد یا $\nabla f(x_\circ, y_\circ) = \mathbf{0}$.
نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, f(x_\circ, y_\circ))$ را **نقطه‌ی زینی** نمودار f گوییم هرگاه $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه‌ی بحرانی f باشد ولی $f(x_\circ, y_\circ)$ اکسترمم f نباشد. در این صورت در هر همسایگی $(x_\circ, y_\circ)$ به ازای برخی از نقاط (x, y) داریم $f(x_\circ, y_\circ) > f(x, y)$ و به ازای برخی از نقاط (x, y) داریم $f(x_\circ, y_\circ) < f(x, y)$ (شکل ۴−۶).



شکل ۴−۵ ماکزیمم، مینیمم و نقطه‌ی زینی.

به این ترتیب در هر همسایگی از دامنه‌ی تابع f که این تابع مشتق‌پذیر است اکسترمم‌ها به ازای ریشه‌های ∇f به دست می‌آیند. می‌توان به جای همسایگی، زیر مجموعه‌ی کلی‌تری موسوم به زیر مجموعه‌ی باز قرار داد. زیرمجموعه‌ی $S \subseteq \mathbb{R}^2$ را **باز** گوییم هرگاه بتوان آن‌را به صورت اجتماعی ازهمسایگی‌ها در نظر گرفت. برای مثال درون یک دایره به شعاع و مرکز دلخواه یک مجموعه‌ی باز است. تحقیق می‌شود که نقاط خارج از یک دایره هم یک مجموعه‌ی باز است. موارد زیر مثال‌های دیگری از مجموعه‌های باز هستند.

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < x < b, \ c < y < d\}$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < x\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < a\}$

مکمل هر مجموعه‌ی باز در $\mathbb{R}^2$ را بسته می‌نامند. برای مثال

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}\ :\ x^{۲}+y^{۲}\leq ۱\}$ یک مجموعه‌ی بسته است زیرا مکمل آن نقاط خارج از دایره‌ی یکه تشکیل یک مجموعه‌ی باز می‌دهند. مثال دیگری برای مجموعه‌ی بسته مجموعه‌ی $\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}\ :\ x\leq a\}$ است. مثال اول یک مجموعه‌ی بسته‌ی کران‌دار و مثال دوم یک مجموعه‌ی بسته ولی بی‌کران است. در مورد اکسترمم توابع حقیقی پیوسته بر مجموعه‌های بسته و کراندار، قضیه‌ای وجود دارد که فقط به بیان آن اکتفا می‌کنیم.

قضیه ۳-۹-۲ هر تابع حقیقی چندمتغیره و پیوسته بر یک زیرمجموعه‌ی بسته و کراندار، اکسترمم‌های مطلق خود را بر این مجموعه اختیار می‌کند.

اکنون نشان می‌دهیم که به کمک قضیه‌ی تیلور می‌توان نوع اکسترمم در نقاط بحرانی توابع حقیقی دو متغیره را مشخص کرد. فرض کنیم $(x_{۰},y_{۰})$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع حقیقی دو متغیره و مشتق‌پذیر f باشد، یعنی $f_x(x_{۰},y_{۰})=f_y(x_{۰},y_{۰})=۰$. بنا بر قضیه‌ی تیلور مرتبه‌ی اول، عدد $۰<\theta<۱$ وجود دارد که در یک همسایگی $\mathbf{x}_{۰}=(x_{۰},y_{۰})$ و برای $\mathbf{y}_{۰}=(x_{۰}+\theta h,y_{۰}+\theta k)$ داریم:

$$\begin{aligned}f(x_{۰}+h,y_{۰}+k)-f(x_{۰},y_{۰})&=\frac{۱}{۲}\Big[h^{۲}f_{xx}+۲hkf_{xy}+k^{۲}f_{yy}\Big](\mathbf{y}_{۰})\\&=\frac{۱}{۲}f_{xx}\Big[\Big(h+\frac{f_{xy}}{f_{xx}}\ k\Big)^{۲}+\Big(\frac{f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^{۲}}{(f_{xx})^{۲}}\Big)k^{۲}\Big](\mathbf{y}_{۰})\end{aligned}$$

بنابر این اگر در یک همسایگی $(x_{۰},y_{۰})$ داشته باشیم $\Delta:=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^{۲}>۰$ و $f_{xx}>۰$ آنگاه در این همسایگی $f(x_{۰}+ht,y_{۰}+kt)-f(x_{۰},y_{۰})>۰$، یعنی $f(x_{۰},y_{۰})$ مینیمم نسبی است. به همینن ترتیب اگر $\Delta>۰$ و $f_{xx}<۰$ آنگاه $f(x_{۰},y_{۰})$ ماکزیمم نسبی f و در حالتی که $\Delta<۰$، $(x_{۰},y_{۰},f(x_{۰},y_{۰}))$ یک نقطه‌ی زینی خواهد بود. نتیجه‌ی بحث فوق در قضیه‌ی بعد بیان شده است.

قضیه ۳-۹-۳ فرض کنیم تابع دو متغیره‌ی f در یک همسایگی نقطه‌ی $(x_{۰},y_{۰})$ مشتقات جزیی مرتبه‌ی دوم پیوسته داشته و این نقطه یک نقطه‌ی بحرانی f باشد و

$$A=\frac{\partial^{۲}f}{\partial x^{۲}}(x_{۰},y_{۰})\ ,\ \ B=\frac{\partial^{۲}f}{\partial x\partial y}(x_{۰},y_{۰})\ ,\ \ C=\frac{\partial^{۲}f}{\partial y^{۲}}(x_{۰},y_{۰})\ ,\ \ \Delta=AC-B^{۲}$$

در این صورت:

الف) اگر $\Delta>۰$ و $A>۰$ آنگاه $f(P_{۰})$ یک مینیمم موضعی f است.

ب) اگر $\Delta>۰$ و $A<۰$ آنگاه $f(P_{۰})$ یک ماکزیمم موضعی f است.

ج) اگر $\Delta<۰$ آنگاه $(x_{۰},y_{۰},f(x_{۰},y_{۰}))$ یک نقطه‌ی زینی نمودار f است.

باید به این نکته توجه داشت که در حالت $\Delta=۰$ این قضیه چیزی نمی‌گوید.

مثال ۳-۹-۴ اکسترمم‌ها و نقاط زینی تابع دو متغیره‌ی f با ضابطه‌ی $f(x,y)=۲x^۴+y^۴-۲x^۲-۲y^۲$ را تعیین و بر حسب نوع اکسترمم دسته‌بندی کنید.

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}=(۸x^۳-۴x)\mathbf{i}+(۴y^۳-۴y)\mathbf{j}$$

از حل دستگاه
$$\begin{cases} f_x(x,y)=۸x^۳-۴x=۰\\ f_y(x,y)=۴y^۳-۴y=۰\end{cases}$$

به ۹ جواب دست می‌یابیم. نقاط بحرانی و نوع اکسترمم‌ها در جدول مشخص شده است.

i	نقطه‌ی بحرانی P_i	$f_{xx}(P_i)$	$f_{yy}(P_i)$	$f_{xy}(P_i)$	$\Delta(P_i)$	نوع نقطه‌ی بحرانی
۱	$(۰,۰)$	-۴	-۴	۰	۱۶	ماکزیمم موضعی
۲	$(۰,۱)$	-۴	۸	۰	-۳۲	نقطه‌ی زینی
۳	$(۰,-۱)$	-۴	۸	۰	-۳۲	نقطه‌ی زینی
۴	$(\frac{۱}{\sqrt{۲}},۰)$	۸	-۴	۰	-۳۲	نقطه‌ی زینی
۵	$(\frac{۱}{\sqrt{۲}},۱)$	۸	۸	۰	۶۴	مینیمم موضعی
۶	$(\frac{۱}{\sqrt{۲}},-۱)$	۸	۸	۰	۱۶	مینیمم موضعی
۷	$(-\frac{۱}{\sqrt{۲}},۰)$	۸	-۴	۰	-۳۲	نقطه‌ی زینی
۸	$(-\frac{۱}{\sqrt{۲}},۱)$	۸	۸	۰	۶۴	مینیمم موضعی
۹	$(-\frac{۱}{\sqrt{۲}},-۱)$	۸	۸	۰	۱۶	مینیمم موضعی

۳-۱۰ اکسترمم‌های مقید توابع حقیقی چند متغیره

گاهی اوقات می‌خواهیم مقادیری از تابع حقیقی چند متغیره‌ی f را بیابیم که تحت یک یا چند شرط جانبی برای f اکسترمم محسوب می‌شوند. این مقادیر را در صورت وجود، **اکسترمم‌های مقید** f می‌نامیم و در حالت کلی باید توجه داشت که لزوماً اکسترمم موضعی f نیستند. این مساله کاربردهای زیادی در مدل‌های فنی و مهندسی دارد. برای مثال سطح خارجی یک مخزن دو تکه را می‌توان یک رویه در نظر گرفت. فرض کنیم دمای این سطح در نقاط مختلف به وسیله تابع $T=T(x,y,z)$ مشخص می‌شود. به منظور اطمینان از مقاومت این مخزن لازم است ماکزیمم دما روی خمی مشخص شود که در طول آن، دو تکه‌ی مخزن به هم جوش داده شده است. تعیین این نقطه معادل است با تعیین اکسترمم مقید یک تابع حقیقی سه متغیره.

قضیه‌ی بعد که قابل تعمیم به توابع حقیقی چند متغیره‌ی حقیقی است **قانون تکثیرکنندگان لاگرانژ** نامیده می‌شود. در این قضیه روش محاسبه‌ی اکسترمم‌های مقید تابع دو متغیره‌ی f با یک شرط جانبی $g(x,y)=0$ داده شده است.

قضیه ۳–۱۰–۱ فرض کنیم توابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ در یک همسایگی حاوی خم C به معادله‌ی $g(x,y)=0$ دارای مشتقات جزیی پیوسته باشند و روی C داشته باشیم $\nabla g\neq\mathbf{0}$. اگر f در $(a,b)\in C$ اکسترمم مقید داشته باشد آنگاه عدد غیر صفر $k\in\mathbb{R}$ وجود دارد به قسمی که $\nabla f(a,b)=k\nabla g(a,b)$.

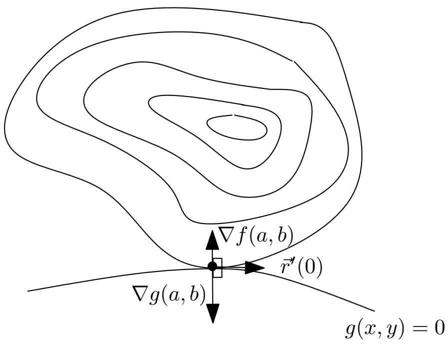
اثبات هندسی این قضیه هم بسیار زیبا است و هم نکات مفیدی را در مورد قضیه روشن می‌کند. فرض کنیم $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$ تابع برداری باشد که خم C را مشخص می‌کند و $\mathbf{r}(0)=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ بردار موضع نقطه‌ی (a,b) باشد که f در آن اکسترمم مقید خود را به دست می‌آورد. در این صورت، برای $G(t):=g(\mathbf{r}(t))=g(x(t),y(t))=0$ طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم

$$0=\frac{dG}{dt}(0)=\nabla g(a,b)\cdot r'(0) \tag{۹}$$

همچنین برای تابع $F(t)=f(\mathbf{r}(t))=f(x(t),y(t))$ داریم $F(0)=f(a,b)$. با توجه با این که $f(a,b)$ یک اکسترمم مقید fاست، $F(0)$ اکسترمم نسبی F است. پس $\frac{dF}{dt}(0)=0$. در نتیجه

$$0=\frac{dF}{dt}(0)=\nabla f(a,b)\cdot r'(0) \tag{۱۰}$$

اکنون بنا بر روابط (۹) و (۱۰)، هر دو بردار $\nabla g(a,b)$ و $\nabla f(a,b)$ در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ بر بردار $\mathbf{r}'(0)$ عمود هستند (شکل ۴–۷). پس عدد غیر صفر $k\in\mathbb{R}$ وجود دارد به قسمی که $\nabla f(a,b)=k\nabla g(a,b)$. عدد k را یک **تکثیر کننده‌ی لاگرانژ** می‌نامیم.



شکل ۴–۷ تکثیر کننده‌ی لاگرانژ.

رابطه‌ی $\nabla f(a,b) = k\nabla g(a,b)$ برای $\lambda = -k$ به شکل $\nabla f(a,b) + \lambda\nabla g(a,b) = \mathbf{0}$ نیز قابل بیان است. به این ترتیب برای محاسبه‌ی اکسترمم‌های مقید تابع دو متغیره‌ی f با شرط جانبی $g(x,y) = 0$، کافی است برای تابع کمکی $H(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ دستگاه $\nabla H(x,y,\lambda) = \mathbf{0}$ را حل کنیم. در این حالت دستگاه فوق به شکل زیر خواهد بود.

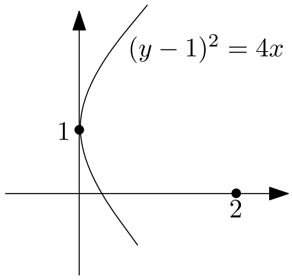
$$\begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = 0 \\ H_\lambda = g(x,y) = 0 \end{cases}$$

اگر محاسبه‌ی اکسترمم‌های مقید تابع دو متغیره‌ی f با دو شرط جانبی $g(x,y) = 0$ و $h(x,y) = 0$ مورد نظر باشد، باید برای تابع کمکی $H(x,y,\lambda,\mu) = f(x,y) + \lambda g(x,y) + \mu h(x,y)$، دستگاه $\nabla H(x,y,\lambda,\mu) = \mathbf{0}$ را حل کنیم. در این حالت دستگاه فوق به شکل زیر است.

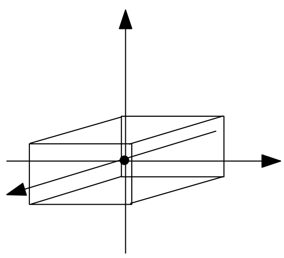
$$\begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = 0 \\ H_\lambda = g(x,y) = 0 \\ H_\mu = h(x,y) = 0 \end{cases}$$

تعمیم قضیه‌ی لاگرانژ برای توابع چند متغیره‌ی دلخواه به دانشجویان واگذار می‌شود. در مثال‌های زیر حالت‌های مختلف قضیه‌ی لاگرانژ به کار رفته است.

مثال ۳−۱۰−۲ نقاطی را روی سهمی به معادله‌ی $4x = (y-1)^2$ مشخص کنید که فاصله‌ی آنها از نقطه‌ی $(2,0)$ مینیمم باشد (شکل ۴—۷).



شکل ۴—۷ مربوط به مثال ۳−۱۰−۲.



شکل ۴—۸ مربوط به مثال ۳−۱۰−۳.

این مسأله معادل یافتن مینیمم تابع دو متغیره‌ی $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$ (مربع فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواه تا $(2,0)$) مقید به شرط جانبی $g(x,y) = (y-1)^2 - 4x = 0$ است (نقطه‌ای از سهمی $4x = (y-1)^2$). قرار می‌دهیم

$H(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = (x-2)^2 + y^2 + \lambda(\,(y-1)^2 - 4x\,)$.

بنابر آنچه گفته شد، باید دستگاه $\nabla H(x,y,\lambda)=\mathbf{0}$ را حل کنیم. این دستگاه به شکل زیر است.

$$\begin{cases} H_x = ۲(x-۲)-۴\lambda = ۰ \\ H_y = ۲y + ۲\lambda(y-۱) = ۰ \\ H_\lambda = g(x,y) = (y-۱)^۲ - ۴x = ۰ \end{cases}$$

که معادل است با

$$\begin{cases} x = ۲\lambda + ۲ \\ y = \frac{\lambda}{۱+\lambda} \\ (y-۱)^۲ = ۴x \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $x=۱$ و $y=-۱$ و $\lambda=-\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید. پس نقطه‌ی $(۱,-۱)$ نقطه‌ای روی سهمی $(y-۱)^۲=۴x$ است که از $(۲,۰)$ کمترین فاصله را دارد. مقدار این فاصله برابر $\sqrt{f(۱,-۱)}=\sqrt{۲}$ است.

مثال ۳-۱۰-۳ حجم یک مکعب مستطیل که وجوه آن موازی صفحات xoy، xoz و yoz هستند و درون بیضی‌گون $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ محصور است چه وقت ماکزیمم می‌شود؟

حجم این مکعب مستطیل برابر $V(x,y,z)=(۲x)(۲y)(۲z)=۸xyz$ است که (x,y,z) مختصات گوشه‌ای از مکعب مستطیل واقع در یک هشتم اول فضا است (شکل ۴-۸). بنابر این باید ماکزیمم V را با شرط جانبی $g(x,y,z)=\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}-۱=۰$ محاسبه کنیم. قرار می‌دهیم $H(x,y,z,\lambda)=V(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)=۸xyz+\lambda(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}-۱)$ و دستگاه $\nabla H(x,y,z,\lambda)=\mathbf{0}$ را حل می‌کنیم. این دستگاه به شکل زیر است.

$$\begin{cases} H_x = ۸yz + ۲\lambda\frac{x}{a^۲} = ۰ \\ H_y = ۸xz + ۲\lambda\frac{y}{b^۲} = ۰ \\ H_z = ۸xy + ۲\lambda\frac{z}{c^۲} = ۰ \\ H_\lambda = \frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}-۱ = ۰ \end{cases}$$

اگر معادله‌ی اول را در x، معادله‌ی دوم را در y و معادله‌ی سوم را در z ضرب کنیم می‌توان نوشت:

$$-۸xyz = ۲\lambda\frac{x^۲}{a^۲} = ۲\lambda\frac{y^۲}{b^۲} = ۲\lambda\frac{z^۲}{c^۲}$$

بنابر این $\frac{x^۲}{a^۲}=\frac{y^۲}{b^۲}=\frac{z^۲}{c^۲}$. با جایگزینی در معادله‌ی چهارم، یعنی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ نتیجه می‌شود $۳\frac{x^۲}{a^۲}=۳\frac{y^۲}{b^۲}=۳\frac{z^۲}{c^۲}=۱$. جواب قابل قبول $x=\frac{a\sqrt{۳}}{۳}$، $y=\frac{b\sqrt{۳}}{۳}$ و

$z = \frac{c\sqrt{3}}{3}$ است. بنابراین ماکزیمم حجم برابر است با $V_{max} = \frac{8}{9}\sqrt{3}abc$.

مثال ۳–۱۰–۴ اکسترمم‌های تابع دو متغیره‌ی $f(x,y) = xye^{xy}$ را روی ناحیه‌ی بسته و کران‌دار $\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 2\}$ به دست آورید.

تابع f پیوسته است و در نتیجه روی هر ناحیه‌ی بسته و کران‌دار اکسترمم‌های خود را اختیار می‌کند. در ناحیه‌ی باز $\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 < 2\}$ اکسترمم‌ها به ازای نقاط بحرانی تابع f به دست می‌آیند. نقاط بحرانی جواب‌های مشترک دو معادله‌ی $f_x = 0$ و $f_y = 0$ یعنی جواب‌های مشترک معادله‌های $(y + xy^2)e^{xy} = 0$ و $(x + yx^2)e^{xy} = 0$ هستند. به این ترتیب تنها نقطه‌ی بحرانی f در ناحیه‌ی باز $\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 < 2\}$، نقطه‌ی $(0,0)$ است. در این نقطه داریم $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0$، $f_{xy}(0,0) = 1$ و $\Delta(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = -1 < 0$. بنابر این f به ازای P_0 یک نقطه‌ی زینی دارد. درنتیجه اکسترممی به ازای نقاط درون ناحیه نداریم.

هر اکسترمم f روی مرز ناحیه، یعنی $\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 = 2\}$، اکسترمم مقید f با شرط جانبی $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ محسوب می‌شود. قرار می‌دهیم $H(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = xye^{xy} + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$ و دستگاه $\nabla H(x,y,\lambda) = \mathbf{0}$ را حل می‌کنیم. این دستگاه به شکل زیر است.

$$\begin{cases} H_x = ye^{xy} + xy^2e^{xy} + 2x\lambda = 0 \\ H_y = xe^{xy} + x^2ye^{xy} + 2y\lambda = 0 \\ H_\lambda = g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

اگر $x = 0$ آنگاه $y = 0$ که به جواب غیر قابل قبول $x = y = \lambda = 0$ منجر می‌شود. اگر معادله‌ی اول را در $x \neq 0$ و معادله‌ی دوم را در $y \neq 0$ ضرب و دو معادله را از هم کم کنیم نتیجه می‌شود $2(x^2 - y^2)\lambda = 0$. پس به ازای $\lambda \neq 0$، $y = \pm x$. با جایگزینی در معادله‌ی سوم، یعنی $x^2 + y^2 - 2 = 0$، نتیجه می‌گیریم $x = \pm 1$ و $y = \pm 1$. به این ترتیب چهار نقطه‌ی $(1,1)$، $(-1,1)$، $(1,-1)$ و $(-1,-1)$ به دست می‌آید. از سوی دیگر $f(1,1) = f(-1,-1) = e$ و $f(-1,1) = f(1,-1) = -\frac{1}{e}$. پس f در نقاط $(1,1)$ و $(-1,-1)$ ماکزیمم مطلق برابر e و در نقاط $(1,-1)$ و $(-1,1)$ مینیمم مطلق برابر $-\frac{1}{e}$ دارد.

مثال ۳–۱۰–۵ مطلوب است محاسبه‌ی فاصله‌ی بین مبدأ و خط حاصل از تلاقی صفحه‌های $x - y + z = 3$ و $x + 2y - z = 5$ به کمک روش تکثیرکنندگان لاگرانژ.

این مسأله معادل یافتن مینیمم تابع $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$ (مربع فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواه تا مبدأ) مقید به شرط‌های جانبی $g(x,y,z) = x - y + z - 3 = 0$

و $h(x,y,z) = x + ۲y - z - ۵ = ۰$ است (نقطه‌ی روی خط تلاقی صفحه‌های $x - y + z = ۳$ و $x + ۲y - z = ۵$). قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} H(x,y,z,\lambda,\mu) &= f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z) \\ &= x^۲ + y^۲ + z^۲ + \lambda(x - y + z - ۳) + \mu(x + ۲y - z - ۵) \end{aligned}$$

و دستگاه $\nabla H(x,y,z,\lambda,\mu) = \mathbf{0}$ را حل می‌کنیم. این دستگاه به شکل زیر است.

$$\begin{cases} H_x = ۲x + \lambda + \mu = ۰ \\ H_y = ۲y - \lambda + ۲\mu = ۰ \\ H_z = ۲z + \lambda - \mu = ۰ \\ H_\lambda = g(x,y,z) = x - y + z - ۳ = ۰ \\ H_\mu = h(x,y,z) = x + ۲y - z - ۵ = ۰ \end{cases}$$

با جمع کردن معادلات اول و دوم نتیجه می‌شود $۲x + ۲y + ۳\mu = ۰$ و با جمع کردن معادلات چهارم و پنجم نتیجه می‌شود $۲x + y - ۸ = ۰$. با کم کردن این دو معادله از هم داریم $y = -۳\mu - ۸$ و در نتیجه $x = \frac{۳}{۲}\mu + ۸$ و $z = -\frac{۹}{۲}\mu - ۱۳$. با جایگزینی در معادلات اول و سوم، دستگاه زیر به دست می آید.

$$\begin{cases} ۴\mu + \lambda = -۱۶ \\ -۱۰\mu + \lambda = ۲۶ \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $\mu = -۳$، $\lambda = -۴$ و در نتیجه $x = \frac{۷}{۲}$، $y = ۱$ و $z = \frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید. پس نقطه‌ی $(\frac{۷}{۲}, ۱, \frac{۱}{۲})$، نقطه‌ای روی خط حاصل از تلاقی صفحه‌های $x - y + z = ۳$ و $x + ۲y - z = ۵$ است که از $(۰,۰,۰)$ کمترین فاصله را دارد. این فاصله که فاصله‌ی بین مبدأ و خط مورد نظر می‌باشد عبارت است از

$$d = \sqrt{\frac{۴۹}{۴} + ۱ + \frac{۱}{۴}} = \frac{۳\sqrt{۶}}{۲}$$

مثال ۳–۱۰–۶ ماکزیمم تابع $f(x,y,z) = xyz$ را با شرط $x + y + z = c$ (c مقداری ثابت و $c > ۰$) بیابید و سپس نتیجه بگیرید که اگر x و y و z سه عدد مثبت باشند آنگاه

$$\frac{x+y+z}{۳} \geq \sqrt[۳]{xyz}$$

قرار می‌دهیم $g(x,y,z) = x + y + z - c$ ،

$$H(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = xyz + \lambda(x + y + z - c)$$

و دستگاه $\nabla H(x,y,z,\lambda)=\mathbf{0}$ را حل می‌کنیم. این دستگاه به شکل زیر است.

$$\begin{cases} H_x = yz+\lambda = ۰ \\ H_y = xz+\lambda = ۰ \\ H_z = xy+\lambda = ۰ \\ H_\lambda = g(x,y,z) = x+y+z-c = ۰ \end{cases}$$

از معادلات اول و دوم وسوم داریم $xy=yz=xz=-\lambda$. پس $x=y=z=\sqrt{-\lambda}$. بنابر این از معادله‌ی چهارم داریم $c=۳x=۳\sqrt{-\lambda}$ که معادل است با $\lambda=-\frac{c^۲}{۹}$. پس به ازای $x=y=z=\frac{c}{۳}$ ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=xyz$ با شرط $x+y+z=c$ به دست می‌آید. این مقدار برابر است با $\frac{c^۳}{۲۷}$. به این ترتیب $xyz\leq\frac{c^۳}{۲۷}$. به عبارت دیگر

$$\sqrt[۳]{xyz}\leq\frac{c}{۳}=\frac{x+y+z}{۳}$$

از سوی دیگر برای هر سه عدد حقیقی دلخواه و به ازای $c:=x+y+z$ می‌توان نامساوی فوق را به کار برد. پس برای هر سه عدد حقیقی دلخواه همواره می‌توان نوشت:

$$\sqrt[۳]{xyz}\leq\frac{x+y+z}{۳}$$

۳-۱۰-۱ پیوست ۱

در این بخش به تعمیم مفهوم مشتق کل به توابع سه متغیره و به طور کلی n متغیره می‌پردازیم. سپس تعمیم قاعده‌ی زنجیره‌ای را برای این توابع مطرح می‌کنیم. برای این منظور ابتدا از چشم‌انداز جبری به مفهوم مشتق تابع یک متغیره توجه می‌کنیم.

برای تابع یک متغیره‌ی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ که در $x_۰$ مشتق‌پذیر است نگاشت خطی $Df_{x_۰}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر قابل تعریف است.

$$Df_{x_۰}(x)=f'(x_۰)x$$

به همین ترتیب برای تابع دو متغیره‌ی حقیقی $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ که در $\mathbf{x}_۰=(x_۰,y_۰)$ مشتق‌پذیر است نگاشت خطی $Df_{\mathbf{x}_۰}:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر قابل تعریف است.

$$Df_{\mathbf{x}_۰}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_۰,y_۰)x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_۰,y_۰)y$$

به شکل مشابه برای تابع حقیقی n متغیره‌ی حقیقی $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ که در $\mathbf{x}_۰\in\mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر است نگاشت خطی $Df_{\mathbf{x}_۰}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$Df_{\mathbf{x}_۰}(\mathbf{x})=\frac{\partial f}{\partial x_۱}(\mathbf{x}_۰)x_۱+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_۰)x_n \qquad \mathbf{x}=(x_۱,\cdots,x_n)$$

در فصل اول دیدیم که نگاشت‌های خطی را می‌توان به کمک ماتریس‌ها هم بیان کرد. بنابر این برای تابع حقیقی n متغیره‌ی حقیقی $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ که در $\mathbf{x}_\circ$ مشتق‌پذیر است یک ماتریس $1 \times n$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$Df_{\mathbf{x}_\circ} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\circ) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\circ)\right)_{1\times n}$$

بر اساس این نمادگذاری $Df_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x})$ حاصل ضرب ماتریس سطری $Df_{\mathbf{x}_\circ}$ در بردار ستونی حاصل از مختصات نقطه‌ی $\mathbf{x}$ است.

$$Df_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\circ) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\circ)\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\circ)x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\circ)x_n$$

به همین ترتیب می‌توان برای تابع برداری n متغیره‌ی $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ با ضابطه‌ی $\mathbf{f}(x_1,\cdots,x_n) = (y_1,\cdots,y_m) = (f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$، که در $\mathbf{x}_\circ \in \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر است نگاشت خطی $Df_{\mathbf{x}_\circ}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را نظیر یک ماتریس $m \times n$ به شکل زیر در نظر گرفت.

$$D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\circ) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\circ) \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\circ) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\circ) \end{pmatrix}_{m\times n}$$

برخی از مؤلفین ماتریس $D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}$ را با $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_\circ)$ نمایش می‌دهند و آن را **ماتریس ژاکوبی** $\mathbf{f}$ در $\mathbf{x}_\circ$ می‌نامند. مشتق کل $\mathbf{f}$ در $\mathbf{x}_\circ$، به ازای $\mathbf{x}$ با $D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x})$ نمایش داده می‌شود. به منظور سادگی گاهی اندیس $\mathbf{x}_\circ$ نوشته نمی‌شود.

یادآوری می‌شود که از جنبه‌ی هندسی اگر f در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه صفحه‌ی مماس بر نمودار f نیز در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, f(x_\circ, y_\circ))$ وجود دارد. صفحه‌ی مماس در این نقطه نمودار تابع به معادله‌ی $L(x,y) = f(x_\circ,y_\circ)+A(x-x_\circ)+B(y-y_\circ)$ خواهد بود و برای $h = x - x_\circ$ و $k = y - y_\circ$، مقدار $L(x_\circ + h, y_\circ + k)$ یک تقریب خطی برای $f(x_\circ + h, y_\circ + k)$ است (شکل ۴ــ۲).

اکنون می‌توانیم به شکل تحلیلی و دقیق، مفهوم مشتق‌پذیری و مشتق کل تابع $\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^m$ را که $D \subseteq \mathbb{R}^n$ در حالت کلی بیان کنیم.

تابع $\mathbf{f}$ را در $\mathbf{x}_\circ$ مشتق‌پذیر گوییم هرگاه نگاشت خطی $D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ و نگاشت

$\mathbf{E}_{\mathbf{x}_\circ}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ وجود داشته باشند به قسمی که در یک همسایگی $\mathbf{x}_\circ$ داشته باشیم

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ+\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ)=D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x})+||\mathbf{x}||\ \mathbf{E}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x})\ ,\ \ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_\circ}\mathbf{E}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x})=\mathbf{0} \qquad (۱۱)$$

نگاشت خطی $D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}$ مشتق کل $\mathbf{f}$ در $\mathbf{x}_\circ$ نام دارد. با توجه به رابطه‌ی (۱۱)، مشتق تابع $\mathbf{f}$ به شکل زیر هم قابل بیان است.

$$D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x})=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_\circ}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ+\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ)}{||\mathbf{x}||}$$

به ویژه برای بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ و $\mathbf{x}=h\mathbf{u}$ از رابطه‌ی (۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ+h\mathbf{u})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ)=D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(h\mathbf{u})+||h\mathbf{u}||\ \mathbf{E}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x})=h\Big[D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{u})+||\mathbf{u}||\ \mathbf{E}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x})\Big]$$

بنابر این از خطی بودن $D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{h\to\circ}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ+h\mathbf{u})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_\circ)}{h}=D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{u})+||\mathbf{u}||\ \lim_{h\to\circ}\mathbf{E}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{x})=D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{u}) \qquad (۱۲)$$

از رابطه‌ی (۱۲) نتیجه می‌شود که در حالت خاص اگر f در $\mathbf{x}_\circ=(x_\circ,y_\circ)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه مشتق سوئی f در هر سوی دلخواه $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ وجود دارد. علاوه بر این از خطی بودن $D\mathbf{f}_{\mathbf{x}_\circ}$ نتیجه می‌شود که مقدار مشتق سوئی با مشتق کل یکی خواهد بود. به عبارت دیگر داریم:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_\circ)=Df|_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{u}) &= Df|_{\mathbf{x}_\circ}(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}) \\ &= aDf_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{i})+bD\mathbf{f}|_{\mathbf{x}_\circ}(\mathbf{j}) \\ &= aD_{\mathbf{i}}f(\mathbf{x}_\circ)+bD_{\mathbf{j}}f(\mathbf{x}_\circ) \\ &= af_x(\mathbf{x}_\circ)+bf_y(\mathbf{x}_\circ) \end{aligned}$$

مثال ۳–۱۰–۷ برای توابع $\mathbf{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^۲$ و $\mathbf{h}:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۳$ با ضابطه‌های زیر مشتق کل را در $t_\circ=\circ$ و $\mathbf{x}_\circ=(۱,\ln ۲)$ به دست می‌آوریم.

$\mathbf{g}(t)=e^t\mathbf{i}+(t\sinh t+۲t)\mathbf{j}$

$\mathbf{h}(x,y)=(xy,x+e^y,۲y)=xy\mathbf{i}+(x+e^y)\mathbf{j}+۲y\mathbf{k}$

برای $\mathbf{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{۲}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{g}(t)=g_{۱}(t)\mathbf{i}+g_{۲}(t)\mathbf{j}=e^{t}\mathbf{i}+(t\sinh t+۲t)\mathbf{j}$، مشتق کل $D\mathbf{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{۲}$ در $t_{۰}=۰$ یک ماتریس ۲×۱ است.

$$D\mathbf{g}_{t_{۰}}=\begin{pmatrix}\frac{dg_{۱}}{dt}(۰)\\ \frac{dg_{۲}}{dt}(۰)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱\\ ۲\end{pmatrix}$$

به این ترتیب برای $t_{۰}=۰$ داریم:

$$D\mathbf{g}_{t_{۰}}(t)=\begin{pmatrix}۱\\ ۲\end{pmatrix}(t)=\begin{pmatrix}t\\ ۲t\end{pmatrix}$$

برای تابع $\mathbf{h}:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}^{۳}$ با ضابطه‌ی

$$\mathbf{h}(x,y)=(f_{۱}(x,y),f_{۲}(x,y),f_{۳}(x,y))=(xy,x+e^{y},۲y)$$

مشتق کل $D\mathbf{h}_{\mathbf{x}_{۰}}:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}^{۳}$ در $\mathbf{x}_{۰}=(۱,\ln ۲)$ یک ماتریس ۳×۲ است.

$$D\mathbf{h}_{\mathbf{x}_{۰}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_{۱}}{\partial x}(\mathbf{x}_{۰}) & \frac{\partial f_{۱}}{\partial y}(\mathbf{x}_{۰})\\ \frac{\partial f_{۲}}{\partial x}(\mathbf{x}_{۰}) & \frac{\partial f_{۲}}{\partial y}(\mathbf{x}_{۰})\\ \frac{\partial f_{۳}}{\partial x}(\mathbf{x}_{۰}) & \frac{\partial f_{۳}}{\partial y}(\mathbf{x}_{۰})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln ۲ & ۱\\ ۱ & ۲\\ ۰ & ۲\end{pmatrix}$$

به این ترتیب برای $\mathbf{x}_{۰}=(۱,\ln ۲)$ داریم:

$$D\mathbf{h}_{\mathbf{x}_{۰}}(x,y)=\begin{pmatrix}\ln ۲ & ۱\\ ۱ & ۲\\ ۰ & ۲\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(x\ln ۲+y \quad x+۲y \quad ۲y)$$

در ادامه‌ی این بخش قاعده‌ی زنجیره‌ای را برای توابع چند متغیره‌ی دلخواه تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۳–۱۰–۸ اگر $\mathbf{g}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{p}$ در $\mathbf{x}_{۰}\in\mathbb{R}^{n}$ و $\mathbf{f}:\mathbb{R}^{p}\to\mathbb{R}^{m}$ در $g(\mathbf{x}_{۰})\in\mathbb{R}^{p}$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{m}$ در $\mathbf{x}_{۰}$ مشتق‌پذیر است. اگر مشتق کل $\mathbf{g}$ در $\mathbf{x}_{۰}$ را با $D\mathbf{g}_{\mathbf{x}_{۰}}$ و مشتق کل $\mathbf{f}$ در $\mathbf{g}(\mathbf{x}_{۰})$ را با $D\mathbf{f}_{\mathbf{g}(\mathbf{x}_{۰})}$ نمایش دهیم آنگاه مشتق کل $f\circ g$ در $\mathbf{x}_{۰}$ عبارت است از:

$$D(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})_{\mathbf{x}_{۰}}=D\mathbf{f}_{\mathbf{g}(\mathbf{x}_{۰})}\,D\mathbf{g}_{\mathbf{x}_{۰}}$$

به عبارت دیگر فرض کنیم $\mathbf{g}(x_{۱},\cdots,x_{n})=(g_{۱}(x_{۱},\cdots,x_{n}),\cdots,g_{p}(x_{۱},\cdots,x_{n}))$،

$$\mathbf{f}(x_{۱},\cdots,x_{p})=(f_{۱}(x_{۱},\cdots,x_{p}),\cdots,f_{m}(x_{۱},\cdots,x_{p}))$$

در این صورت اگر مشتق کل $\mathbf{g}$ در $\mathbf{x}_{۰}$ به شکل

$$Dg_{\mathbf{x}_\circ} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_\circ)\right)_{p\times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\circ) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\circ) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\circ) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\circ) \end{pmatrix}_{p\times n}$$

و مشتق کل $\mathbf{f}$ در $\mathbf{g}(\mathbf{x}_\circ)$ به شکل زیر باشند.

$$D\mathbf{f}_{\mathbf{g}(\mathbf{x}_\circ)} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(g(\mathbf{x}_\circ))\right)_{m\times p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(g(\mathbf{x}_\circ)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(g(\mathbf{x}_\circ)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(g(\mathbf{x}_\circ)) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(g(\mathbf{x}_\circ)) \end{pmatrix}_{m\times p}$$

آنگاه مشتق کل $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ در $\mathbf{x}_\circ$ به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} D(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})_{\mathbf{x}_\circ} &= D\mathbf{f}_{\mathbf{g}(\mathbf{x}_\circ)}\ D\mathbf{g}_{\mathbf{x}_\circ} = \left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(g(\mathbf{x}_\circ))\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_\circ)\right)_{m\times n} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(g(\mathbf{x}_\circ))\frac{\partial g_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\circ) & \cdots & \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(g(\mathbf{x}_\circ))\frac{\partial g_k}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\circ) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f_m}{\partial x_k}(g(\mathbf{x}_\circ))\frac{\partial g_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\circ) & \cdots & \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f_m}{\partial x_k}(g(\mathbf{x}_\circ))\frac{\partial g_k}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\circ) \end{pmatrix}_{m\times n} \end{aligned}$$

در حالت خاص اگر $y = f(x)$ یک تابع حقیقی یک متغیره باشد، مشتق کل آن همان مشتق معمولی است که آن را یک ماتریس 1×1 یعنی یک اسکالر در نظر می‌گیریم.

۳ـ۱۰ـ۲ پیوست ۲

در این بخش برای توابع حقیقی دو متغیره قضیه تابع ضمنی را ثابت می‌کنیم. اثبات این قضیه در حالت کلی به شکل مشابه است.

قضیه ۳ـ۱۰ـ۹ فرض کنیم f یک تابع دو متغیره‌ی حقیقی باشد به قسمی که در یک همسایگی $(x_\circ, y_\circ)$ داشته باشیم $f(x,y) = \circ$. اگر مشتقات جزئی f پیوسته و دست کم یکی از آنها مثلاً $f_y(x_\circ, y_\circ)$ غیر صفر باشد آنگاه در یک فاصله‌ی باز I شامل $x_\circ$، تابع مشتق‌پذیر $y = y(x)$ وجود دارد به قسمی که برای هر x در I داریم $f(x, y(x)) = \circ$ و $\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))}$.

اثبات. طبق فرض $f_y(x_\circ, y_\circ) \neq \circ$، مثلاً فرض کنیم $f_y(x_\circ, y_\circ) > \circ$. عدد مثبت b را به قسمی در نظر می‌گیریم که $f_y(x_\circ, y_\circ) > b > \circ$. از پیوستگی f_y نتیجه می‌شود که در

یک همسایگی مناسب به شعاع $\delta_۱$ از نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ داریم $f_y(x,y) > \circ$. همچنین از پیوستگی f_x و f_y نتیجه می‌شود عدد $M > \circ$ وجود دارد که برای در این همسایگی، $|f_y(x,y)| < M$ و $|f_x(x,y)| < M$. بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین اعداد $\circ < \theta_۱ < ۱$ و $\circ < \theta_۲ < ۱$ وجود دارند به قسمی که

$$f(x,y) - f(x_\circ, y) = f_x(\theta_۱ x + (۱ - \theta_۱)x_\circ, y)(x - x_\circ)$$

$$f(x_\circ, y) - f(x_\circ, y_\circ) = f_y(x_\circ, \theta_۲ y + (۱ - \theta_۲)y_\circ)(y - y_\circ)$$

با توجه به این که $f(x_\circ, y_\circ) = \circ$، به ازای $\Delta x := x - x_\circ$ و $\Delta y := y - y_\circ$ داریم

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \Big[f(x,y) - f(x_\circ, y)\Big] + \Big[f(x_\circ, y) - f(x_\circ, y_\circ)\Big] \\ &= f_x(\theta_۱ x + (۱ - \theta_۱)x_\circ, y)\Delta x + f_y(x_\circ, \theta_۲ y + (۱ - \theta_۲)y_\circ)\Delta y \quad (۱۳) \end{aligned}$$

برای $\delta_۲ < \mathrm{Min}\{\delta_۱, \frac{b\delta_۱}{M}\}$ و بنابر پیوستگی f_x، از $||(x,y) - (x_\circ, y_\circ)|| < \delta_۲$ نتیجه می‌شود

$$\Big||f_x(\theta_۱ x + (۱ - \theta_۱)x_\circ, y)\Big||x - x_\circ| < b\delta_۱ \qquad (۱۴)$$

پس برای $|x - x_\circ| < \delta_۲$ از روابط (۱۳) و (۱۴) نتیجه می‌شود

$$f(x, y_\circ + \delta_۲) > \circ \quad , \quad f(x, y_\circ - \delta_۲) < \circ$$

پس بنابر قضیه‌ی بولتسانو و با توجه به رابطه‌ی $f_y(x,y) > \circ$، عدد یکتای $y_\circ - \delta_۲ < y < y_\circ + \delta_۲$ وجود دارد که $f(x,y) = \circ$. اکنون تابع مورد نظر با ضابطه‌ی $y(x) = y$ مشخص می‌شود.

۳ـ۱۰ـ۳ پیوست ۳

در این بخش قضیه‌ی تیلور مرتبه n را برای توابع حقیقی چند متغیره‌ی حقیقی مطرح می‌کنیم. برای این منظور ابتدا به معرفی دسته‌ای از نگاشت‌های خطی روی فضای برداری توابع می‌پردازیم. در اینجا نیز برای سادگی فقط توابع حقیقی دو متغیره را مورد توجه قرار می‌دهیم. فرض کنیم V مجموعه‌ی توابع حقیقی دو متغیره باشد که در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ دست کم $n + ۱$ بار مشتقات جزئی مخلوط پیوسته داشته باشند. با عمل جمع برداری $(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$ و ضرب اسکالری

$(\lambda f)(x,y) = \lambda f(x,y)$، مشاهده می‌شود که V یک فضای برداری است. روی این فضای برداری نگاشت $\frac{\partial}{\partial x} : V \to V$ با ضابطه‌ی $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$ یک نگاشت خطی است زیرا

$$\frac{\partial}{\partial x}(f+\lambda g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f) + \lambda \frac{\partial}{\partial x}(g)$$

به همین ترتیب نگاشت $\frac{\partial}{\partial y} : V \to V$ با ضابطه‌ی $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}$، نگاشت $\frac{\partial^۲}{\partial x^۲} : V \to V$ با ضابطه‌ی $f \mapsto \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}$ و به طور کلی به کمک مشتقات جزئی مخلوط، نگاشت‌های خطی مشابهی روی V قابل تعریف هستند. در ادامه‌ی بحث از این نگاشت‌ها با قاعده‌ی معمول جمع، ضرب اسکالری و با توان رسانیدن نگاشت‌های خطی جدیدی می‌سازیم. برای مثال اگر $h, k \in \mathbb{R}$ دو اسکالر باشند آنگاه ضابطه‌ی نگاشت $h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$ عبارت است از $f \mapsto h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$ و منظور از $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^۲$ نگاشت $h^۲\frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + ۲hk\frac{\partial^۲}{\partial x \partial y} + k^۲\frac{\partial^۲}{\partial y^۲}$ است و الی آخر.

تابع حقیقی یک متغیره‌ی F را با ضابطه‌ی $F(t) = f(x_۰ + ht, y_۰ + kt)$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه‌ی تیلور برای توابع حقیقی یک متغیره در یک همسایگی $t = ۰$، عدد حقیقی $۰ < \theta < ۱$ وجود دارد که:

$$F(t) = F(۰) + F'(۰)t + \frac{F''(۰)}{۲!}t^۲ + \cdots + \frac{F^{(n)}(۰)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+۱)}(\theta)}{(n+۱)!}t^{n+۱} \quad (۱۵)$$

به ویژه برای $t = ۱$ داریم:

$$F(۱) = F(۰) + F'(۰) + \frac{F''(۰)}{۲!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(۰)}{n!} + \frac{F^{(n+۱)}(\theta)}{(n+۱)!}$$

بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای برای $x(t) = x_۰ + ht$ و $y(t) = y_۰ + kt$ داریم:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_۰ + ht, y_۰ + kt)\ \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_۰ + ht, y_۰ + kt)\ \frac{dy}{dt}(t) \\ &= h\frac{\partial f}{\partial x}(x_۰ + ht, y_۰ + kt) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_۰ + ht, y_۰ + kt) \\ &= \Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)(f)\Big](x_۰ + ht, y_۰ + kt) \end{aligned}$$

به ویژه برای $t = ۰$ داریم:

$$F'(۰) = \Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)(f)\Big](x_۰, y_۰)$$

به شکل مشابه با استفاده‌ی مکرر از قاعده‌ی زنجیره‌ای و به استقرا مشاهده می‌شود که:

$$F^{(n)}(0) = \Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)^{n}(f)\Big](x_0, y_0)$$

$$F^{(n+1)}(\theta) = \Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)^{n+1}(f)\Big](x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

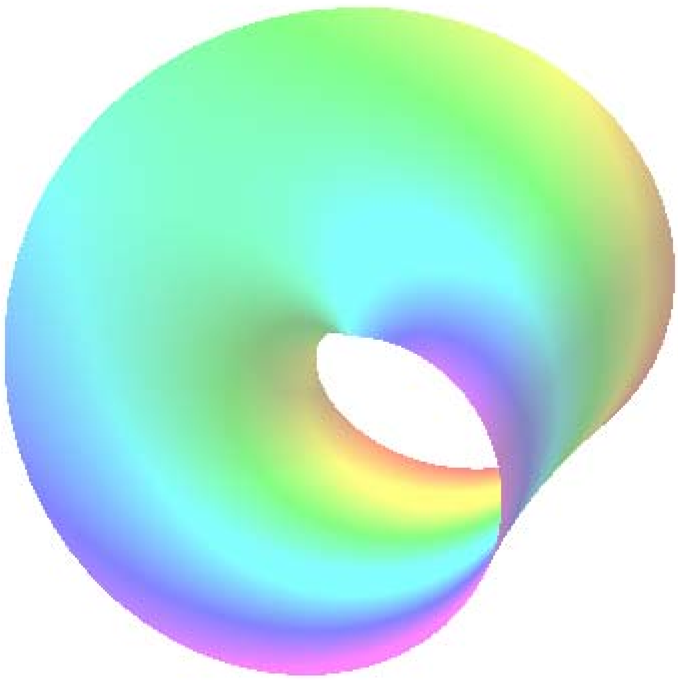
از بازنویسی رابطه‌ی (۱۵) به قضیه‌ی زیر دست می‌یابیم:

قضیه ۳–۱۰–۱۰ **(تیلور)** فرض کنیم مشتقات جزئی مخلوط مرتبه‌ی $n+1$ تابع دومتغیره‌ی f در یک همسایگی شامل (x_0, y_0) وجود داشته و پیوسته باشند. در این صورت برای $h, k \in \mathbb{R}$ که $(x_0 + h, y_0 + k)$ در این همسایگی قرار بگیرد داریم:

$$f(x_0 + ht, y_0 + kt) = f(x_0, y_0) + \Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)(f)\Big](x_0, y_0) +$$
$$\frac{1}{2!}\Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)^{2}(f)\Big](x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!}\Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)^{n}(f)\Big](x_0, y_0) + R_n$$

به قسمی که برای عدد حقیقی $0 < \theta < 1$،

$$R_n = \Big[\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)^{n+1}(f)\Big](x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$



تمرین های فصل سوم

۱) مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x,y) = \ln x + \sqrt{x^۲ + y^۲}$

ب) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$

ج) $f(x,y,z) = x^{yz}$

۲) فرض کنید f تابعی سه متغیره باشد که $f(x-y+z, x+y+z, x-y-z) = ۳x-y+z$

الف) مطلوب است تعیین $f(x,y,z)$.

ب) اگر $g(x,y,z) = f(x^۲, y^۲, z^۲)$، مطلوب است تعیین سطوح تراز g.

ج) با مفروضات قسمت (ب) ثابت کنید

$$(\frac{\partial g}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial g}{\partial y})^۲ + (\frac{\partial g}{\partial z})^۲ = ۴g(x,y,z)$$

۳) اگر $z = f(x,y)$ و $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ نشان دهید

$$(\frac{\partial z}{\partial r})^۲ + \frac{۱}{r^۲}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^۲ = (\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲$$

۴) با محاسبه‌ی مستقیم مشتق‌های جزئی برای تابع $f(x,y,z) = e^{xyz}$ تحقیق کنید $f_{xy} = f_{yx}$ و $f_{xyz} = f_{zyx} = f_{xzy} = f_{yxz} = f_{yzx}$.

۵) برای $w = \frac{z}{y+x}$ مشتق جزئی مرتبه‌ی چهارم $\frac{\partial^۴ w}{\partial^۲ z \partial x \partial y}$ را محاسبه کنید.

٦) نشان دهید توابع $u(x,y) = e^x \cos y$ و $v(x,y) = e^x \sin y$ در روابط زیر صدق می‌کنند.

الف) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ب) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

ج) $u_{xx} + u_{yy} = ۰$ د) $v_{xx} + v_{yy} = ۰$

معادلات (الف) و (ب) که معادلات کوشی — ریمان نامیده می‌شوند در نظریه‌ی توابع مختلط از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. هر یک از معادلات (ج) و (د) یک معادله‌ی لاپلاس در فضای دو بعدی نامیده می‌شود.

۷) معادله‌ی $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = ۰$، که در آن u یک تابع سه متغیره‌ی است یک معادله‌ی لاپلاس در فضای سه بعدی نامیده می‌شود. نشان دهید تابع u با ضابطه‌ی زیر در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند.

$$u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},(x,y,z)\neq(0,0,0)$$

۸) تابع $f(x,y)=\begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ مفروض است.

(الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است و مشتقات جزیی $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در این نقطه به دست آورید.

(ب) نشان دهید f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

۹) نشان دهید اگر یک تابع دو متغیره‌ی f، همگن از درجه‌ی n باشد آنگاه مشتقات جزیی f_x و f_y، همگن از درجه‌ی $n-1$ هستند.

۱۰) (الف) فرض کنید توابع f و g توابعی یک متغیره هستند که روی $\mathbb{R}$ حداقل دو بار مشتق‌پذیرند. اگر c یک عدد حقیقی غیر صفر باشد، نشان دهید تابع u با ضابطه‌ی $u(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)$ یک جواب برای معادله‌ی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (موسوم به معادله موج) است.

(ب) تحقیق کنید که هر یک از توابع زیر جوابی برای معادله‌ی موج هستند.

(۱) $u(x,t)=x^2+c^2t^2$

(۲) $u(x,t)=\sin x\sin ct$

(۳) $u(x,t)=e^x\cosh ct$

۱۱) برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=2xy-3xz+yz$، نمو تابع یعنی $\Delta f=f(a+\Delta x,b+\Delta y,c+\Delta z)$ را در حالتی که $(a,b,c)=(2,1,4)$، $\Delta x=3$، $\Delta y=-1$ و $\Delta z=2$ محاسبه کنید.

۱۲) مشتق کل هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

(الف) $f(x,y,z)=x^2y-xy^3+x^3y^2$

(ب) $f(x,y,z)=\dfrac{x+y}{y+z}$

(ج) $f(x_1,x_2,...,x_n)=x_1x_2...x_n$

۱۳) با استفاده از مشتق کل، مقدار تقریبی $\sqrt{(1/036)^2+(1/99)^3}$ را به دست آورید.

۱۴) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

۱۵) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases} x & |x|\leq|y| \\ -x & |x|>|y| \end{cases}$$

در $(0,0)$ پیوسته است و مشتقات جزیی آن وجود دارند اما در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱٦) تابع $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ مفروض است.

الف) با استفاده از تعریف نشان دهید f در مبدأ پیوسته است.

ب) نشان دهید f در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

۱۷) نشان دهید برای تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

مشتقات جزیی وجود دارند اما f در مبدأ ناپیوسته است.

۱۸) تابع f را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} & (x,y)\neq(0,1) \\ 0 & (x,y)=(0,1) \end{cases}$$

الف) نشان دهید f در $(0,1)$ پیوسته است.

ب) مقادیر f_x و f_y را در $(0,1)$ به دست آورید.

ج) آیا f در $(0,1)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟

۱۹) فرض کنید $f(x,y)=3xy^2-5x-2xy$ و $\Delta x=2$ و $\Delta y=-1$. نمو تابع f در $(-1,3)$ و مشتق کل تابع را در این نقطه محاسبه کنید.

۲۰) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی زیر همه جا مشتق‌پذیر است.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

۲۱) اگر تابع دو متغیره‌ی f همگن از درجه‌ی n با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد، نشان دهید

$$x^۲ f_{xx}(x,y) + ۲xyf_{xy}(x,y) + y^۲ f_{yy}(x,y) = n(n-۱)f(x,y)$$

۲۲) اگر توابع f و g حداقل دو بار مشتق‌پذیر باشند و تابع u به صورت

$$u(x,y) = \frac{۱}{x}[f(x+y) + g(x-y)]$$

تعریف شده باشد، نشان دهید

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^۲ \frac{\partial u}{\partial x}) = x^۲ \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}$$

۲۳) اگر تابع z، به عنوان تابعی از x و y، به طور ضمنی توسط رابطه‌ی $\sin(x+y) + \sin(y+z) = ۱$ تعریف شده باشد، عبارت $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$ را محاسبه کنید.

۲۴) فرض کنید $u = xyz$. نشان دهید اگر u و z توابعی از متغیرهای مستقل x و y در نظر گرفته شوند، آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy(\frac{\partial z}{\partial x}) + yz$$

و اگر x، y و z متغیرهای مستقل در نظر گرفته شوند آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz$$

۲۵) فرض کنید تابع f تابعی مشتق‌پذیر باشد و $z = f(\frac{x+y}{y})$. ثابت کنید

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$$

۲۶) فرض کنید g تابعی یک متغیره و مشتق‌پذیر باشد. تابع برداری $\mathbf{F}$ را به صورت

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{g'(\sqrt{x^۲+y^۲})}{\sqrt{x^۲+y^۲}}x\mathbf{i} + \frac{g'(\sqrt{x^۲+y^۲})}{\sqrt{x^۲+y^۲}}y\mathbf{j}$$

تعریف می‌کنیم. در ناحیه‌ای که شامل $(۰,۰)$ نباشد، تابع f را به قسمی بیابید که $\mathbf{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$.

۲۷) اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد و $z = \frac{y}{f(x^۲+y^۲)}$، ثابت کنید

$$\frac{-۱}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{۱}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^۲}$$

۲۸) فرض کنید $u(x,y) = e^y \cos x$، $x = ۲t$، $y = t^۲$ و $g(t) = u(x(t), y(t))$. تابع $g''(t)$ را با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای به دست آورید.

۲۹) فرض کنید $z = f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y باشد، $x = x(r,\theta) = r\cos\theta$ و $y = y(r,\theta) = r\sin\theta$. ثابت کنید $(\frac{\partial z}{\partial r})^۲ + \frac{۱}{r^۲}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^۲ = (\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲$. مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ بر حسب $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

۳۰) فرض کنید f تابعی با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد. با فرض این که $z = f(x,y)$ در معادله‌ی $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = \frac{۱}{۲}$ صدق می‌کند نشان دهید $w = f(x+y, x-y)$ در معادله‌ی $\frac{\partial^۲ w}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ w}{\partial y^۲} = ۱$ صدق می‌کند.

۳۱) با فرض این که f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید $z = xy + f(x^۲+y^۲)$ در معادله‌ی $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^۲ - x^۲$ صدق می‌کند.

۳۲) فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر است و $z = f(x,y)$. اگر $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$ و $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ (α ثابت)، نشان دهید $(\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲ = (\frac{\partial z}{\partial u})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial v})^۲$.

۳۳) ثابت کنید تابع $f(x,t) = \int_۰^{\frac{x}{۲\sqrt{kt}}} e^{-\sigma^۲} d\sigma$ در معادله‌ی دیفرانسیل $k\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} - \frac{\partial f}{\partial t} = ۰$ صدق می‌کند (k ثابت).

۳۴) با فرض این که f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید

الف) $z = f(bx - ay)$ در معادله‌ی $a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ صدق می‌کند.

ب) $w = f(\frac{xy}{x^۲+y^۲})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ۰$ صدق می‌کند.

ج) $z = f(\frac{x}{y})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ صدق می‌کند.

د) $z = xf(\frac{x}{y})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ صدق می‌کند.

۳۵) فرض کنید f و g دوبار مشتق‌پذیرند و $u = u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$. نشان دهید $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} - ۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$.

۳۶) فرض کنید معادله‌ی $xz^{۲} = \ln(y^{۲} + z^{۲})$، تابع z را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y بیان می‌کند. مطلوب است تعیین $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه‌ی $(۱, ۰, ۰)$.

۳۷) تابع $z = z(x,y)$ به صورت ضمنی توسط معادله‌ی $f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = ۰$ داده شده است. با فرض این که f مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

۳۸) فرض کنید f یک تابع دو متغیره با مشتقات جزیی پیوسته باشد و

$$f(x_۰, y_۰) = f_x(x_۰, y_۰) = f_y(x_۰, y_۰) = ۰$$

$$f_{xx}(x_۰, y_۰)f_{yy}(x_۰, y_۰) - f_{xy}^{۲}(x_۰, y_۰) > ۰$$

الف)نشان دهید نقطه‌ی $P = (x_۰, y_۰)$ یک نقطه‌ی تنها برای نمودار $f(x,y) = ۰$ است، یعنی یک همسایگی از P وجود دارد که در آن f تنها در P صفر می‌شود.

ب) نشان دهید که مبدا یک نقطه‌ی تنها برای خم به معادله‌ی $x^{۳} - y^{۳} + xy^{۲} - yx^{۲} + x^{۲} + y^{۲} = ۰$ است.

۳۹) مکان هندسی نقاطی از رویه‌ی $x^{۲} + ۲y^{۲} + ۳z^{۲} + xy + ۲xz + ۴yz = ۸$ را بیابید که صفحه‌ی مماس در آن نقاط موازی صفحه xy باشد.

۴۰) خط مماس بر خم γ حاصل از برخورد دو رویه‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۹$ و $xy + z = ۰$ را در نقطه‌ی $(۲, ۱, -۲)$ بیابید.

۴۱) صفحات مماس در $M = (x, y, z)$ برای $x > ۰$، $y > ۰$ و $z > ۰$ بر رویه‌ی

$$x^{۲/۳} + y^{۲/۳} + z^{۲/۳} = a^{۲/۳} \quad (a \text{ عددی ثابت و مثبت})$$

محور ox و oy و oz را به ترتیب در نقاط A، B و C قطع می‌کنند. نشان دهید $OA^{۲} + OB^{۲} + OC^{۲}$ یک عدد ثابت است.

۴۲) نشان دهید اگر f همه جا مشتق‌پذیر باشد آنگاه صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = xf(\frac{y}{x})$ در هر نقطه، از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۴۳) بیضی‌گون به معادله‌ی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} + \frac{z^{۲}}{c^{۲}} = ۱$ مفروض است.

(الف) نقاطی از رویه را مشخص کنید که قائم بر رویه در این نقاط با محورهای مختصات زوایای مساوی بسازد.

(ب) در چه نقاطی از رویه‌ی فوق صفحات مماس بر رویه موازی صفحات مختصات است؟ چرا؟

۴۴) خم C فصل مشترک رویه‌های $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲$ و $x^۲ + y^۲ + z = ۰$ است. معادلات پارامتری خط مماس بر C را در نقطه‌ی $(۱, ۰, -۱)$ بیابید.

۴۵) الف) صفحات مماس بر رویه‌ی $z = \frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲}$ و عمود بر خط $x - ۱ = y = z - ۳$ را مشخص کنید.

ب) نقاطی از رویه‌ی قسمت قبل را مشخص کنید که صفحات مماس بر رویه در آن نقاط عمود بر محور zها باشند.

۴۶) نقاطی را در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ تعیین کنید که در آن نقاط بردار گرادیان تابع $f(x, y) = \ln(\frac{۱}{x} + y)$ بردار $-\frac{۱۶}{۹}\mathbf{i} + \mathbf{j}$ باشد.

۴۷) رویه‌ی $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۱$ مفروض است.

(الف) معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر رویه را در نقطه‌ی $(۱, ۱, ۱)$ به دست آورید.

(ب) نقطه‌ی برخورد دیگر خط عمود با رویه را به دست آورید.

(ج) ثابت کنید صفحه‌ی مماس در هر نقطه از رویه‌ی فوق دقیقا در دو خط راست با رویه اشتراک دارد.

۴۸) رویه‌ی $z = x^۲ + y^۲$ و نقاط $A = (۱, ۱, ۰)$ و $B = (۲, ۲, ۲)$ مفروضند.

(الف) معادله‌ی خطی را به دست آورید که از A بگذرد و بر این رویه عمود باشد.

(ب) معادله‌ی صفحه‌ای شامل A و B را به دست آورید که بر رویه مماس باشد.

۴۹) نشان دهید بر مخروط $z^۲ = ۲x^۲ + ۴y^۲$ خطی وجود دارد که صفحه‌ی مماس بر مخروط در امتداد آن با صفحه‌ی $۱۲x + ۱۴y + ۱۱z = ۲۵$ موازی است. خط و صفحه‌ی مماس را به دست آورید.

۵۰) مطلوب است معادلات پارامتری منحنی حاصل از برخورد سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$ و صفحه‌ی $z = ۲$. اگر در هر نقطه از این منحنی، خطی عمود بر سهمی‌گون رسم کنیم، مجموعه‌ی این خطوط تشکیل مخروطی در فضا می‌دهند. معادله‌ی مخروط را به دست آورید.

۵۱) نقاطی را بر روی رویه‌ی $۲x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۱$ پیدا کنید که صفحه‌ی مماس بر رویه در این نقاط عمود بر فصل مشترک دو صفحه‌ی $y = x$ و $y = z$ باشد.

۵۲) معادله‌ی خطوطی را بیابید که از مبدأ مختصات گذشته بر رویه‌ی $x^۲ + y^۲ + ۹z^۲ = ۱$ عمود باشند.

۵۳) ثابت کنید صفحات مماس بر رویه‌ی $xyz = a^۳$ ($a > ۰$ ثابت) با صفحات مختصات، چهاروجهی‌هایی با حجم ثابت می‌سازند.

۵۴) معادله‌ی کلیه‌ی صفحات مماس بر کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۳$ را تعیین کنید که شامل خط با معادلات پارامتری $x = t + ۲$، $y = -۲t$ و $z = t + ۱$ باشند.

۵۵) معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط قائم بر هر یک از رویه‌های زیر را در نقطه‌ی مورد نظر پیدا کنید.

(الف) $xyz = a^۳$، P نقطه‌ی دلخواه بر رویه.

(ب) $z = ۲\sin x \cos y$، $P = (\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}, ۱)$.

۵۶) در کدام‌یک از نقاط مخروط $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$، صفحه‌ی مماس و خط قائم تعریف نشده‌اند؟ توضیح دهید.

۵۷) معادلات صفحه‌ی مماس و خط قائم بر رویه‌ی درجه‌ی دوم $Ax^۲+By^۲+Cz^۲ = ۱$ در نقطه‌ی دلخواه از این رویه را پیدا کنید.

۵۸) بیضی‌گون $x^۲ + y^۲ + ۳z^۲ = ٦٦$ دو صفحه‌ی مماس موازی با صفحه‌ی $x + y + z = ۱$ دارد. معادله‌ی این صفحات را همراه با نقاط تماسشان پیدا کنید.

۵۹) نشان دهید رویه‌های $z = xy - y^۲ + ۸y - ۵$ و $z = e^{۲x+y+۴}$، در نقطه‌ی $P = (-۳, ۲, ۱)$ بر هم مماسند و صفحه‌ی مماس مشترکشان را پیدا کنید.

٦۰) فرض کنید C خمی با معادله‌ی $F(x, y) = ۰$ باشد که در آن F دارای مشتقات جزئی پیوسته‌ای است که همزمان صفر نمی‌شوند.

الف) نشان دهید معادله‌ی خط مماس بر C در $(x_۰, y_۰)$ به شکل زیر است:

$$F_x(x_۰, y_۰)(x - x_۰) + F_y(x_۰, y_۰)(y - y_۰) = ۰$$

ب) خطوط مماس و قائم بر خم‌های $x^۳y - x^۲y^۲ + xy^۳ = ۱$ و $x^y = y^x$ را در $(۱, ۱)$ پیدا کنید.

٦۱) فرض کنید درجه‌ی حرارت در نقطه‌ی (x, y) از صفحه‌ی xy با رابطه‌ی $T(x, y) = \frac{۴x}{x^۲ + y^۲}$ بیان می‌شود. ثابت کنید در هر نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ روی دایره‌ی $(x - ۲)^۲ + y^۲ = ۴$، بین همه سوها، در سوی شعاع این دایره بیشترین مقدار تغییر درجه حرارت را داریم. این مقدار تغییر چقدر است؟

۶۲) کلیه‌ی سوهای $\mathbf{u} = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j}$ را پیدا کنید که برای تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y - ۲ & x = ۱ \quad \text{یا} \quad y = ۱ \\ t & x \neq ۱ \ , \ y \neq ۱ \end{cases}$$

مشتق سویی f در سوی $\mathbf{u}$ و در نقطه‌ی $(۱, ۱)$ وجود داشته باشد.

۶۳) سوهایی را بدست آورید که تابع $f(x,y) = (x + ۱)^۲ + (y + ۱)^۲$ در $(\circ, \circ)$ دارای مشتق سویی برابر با ۲ باشد.

۶۴) برای هر یک از توابع زیر مشتق سویی را در نقطه‌ی P و در جهت بردار $\mathbf{a}$ پیدا کنید.

الف) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + ۲\mathbf{j} \ , \ P = (-۱, ۴) \ , \ f(x,y) = x^۳ - ۲xy + y^۲ + ۸$

ب) $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \ , \ P = (۱, ۳) \ , \ f(x,y) = \ln(x^۲ + y^۲)$

ج) $\mathbf{a} = -۱\circ\mathbf{i} + ۱\circ\mathbf{j} - ۵\mathbf{k} \ , \ P = (-۱, ۱, ۲) \ , \ f(x,y,z) = \dfrac{z}{xy}$

۶۵) برای $f(x,y,z) = \ln(x + y + z)$، مشتق سویی f را در $(۲, ۳, -۴)$ و در سویی که با جهت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازد پیدا کنید.

۶۶) اگر $f(x,y) = xy$، بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$ را طوری بیابید که $D_{\mathbf{u}} f(۳, ۴) = \circ$.

۶۷) تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin(\dfrac{y}{x^۲ + y^۲}) & (x,y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x,y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

مفروض است. کلیه‌ی سوهایی را به دست آورید که f در آن‌ها در مبدأ مختصات دارای مشتق سویی باشد.

۶۸) تابع $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin(xy)}{x^۲ + y^۲}) & (x,y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x,y) = (\circ, \circ) \end{cases}$ مفروض است.

الف) مشتق سویی این تابع را در نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ و در سوی بردار $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ تعیین کنید.

ب) مطلوب است تعیین $\nabla f(\circ, \circ) \cdot \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶۹) مشتق سویی توابع زیر را در نقاط وجهت‌های داده شده تعیین کنید.

الف) $f(x,y,z) = \cos(xy) + \sin(yz) \ , \ P_\circ = (\circ, \pi, ۱) \ , \ \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

ب) $g(x,y,z) = ze^{xy} \ , \ P_\circ = (۱, \circ, ۱) \ , \ \mathbf{v} = \mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$

۷۰) تابع $f(x,y) = x^{۲} - ۲xy^{۲}$ و نقطه‌ی $P_{۰} = (۱, -۲)$ مفروضند.

الف) از نقطه‌ی $P_{۰}$ در چه جهتی حرکت کنیم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت افزایش یابد؟

ب) در چه جهتی حرکت کنیم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت کاهش یابد؟

۷۱) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = ۴ - x^{۲} - y^{۲}$ و نقطه‌ی $(۱, ۱, ۲)$ بر آن مفروضند. مشخص کنید که از این نقطه در چه جهتی بر روی رویه حرکت کنیم تا ارتفاع با بیشترین سرعت کاهش یابد و در چه جهتی بر روی رویه حرکت کنیم تا ارتفاع تغییر نکند؟

۷۲) اکسترمم‌های موضعی (نسبی) توابع زیر و نوع آن‌ها را در صفحه‌ی $\mathbb{R}^{۲}$ تعیین کنید.

الف) $f(x,y) = xy(۱ - x^{۲} - y^{۲})$

ب) $f(x,y) = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + xy \qquad (x > ۰, y > ۰)$

۷۳) به کمک یک تابع دو متغیره‌ی مناسب و محاسبه‌ی مینیمم مطلق این تابع، فاصله‌ی بین دو خط متنافر $L_{۱} : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t - ۱ \end{cases}$ و $L_{۲} : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ را تعیین کنید.

۷۴) روی کره‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۱$، نقطه‌ای را تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آن از دو نقطه‌ی $(۲, ۰, ۰)$ و $(۰, ۲, ۰)$ مینیمم باشد.

۷۵) ابعاد مکعب مستطیلی را در یک هشتم اول فضا $(z \geq ۰, y \geq ۰, x \geq ۰)$ بیابید که یک رأس آن در مبدأ مختصات، رأس مقابل این رأس روی صفحه‌ی $x + ۲y + ۳z = ۱$ و حجم آن ماکزیمم باشد.

۷۶) فرض کنید x، y و z اضلاع یک مثلث، p نصف محیط این مثلث و S مساحت این مثلث باشد. به کمک فرمول $S^{۲} = p(p-x)(p-y)(p-z)$ ثابت کنید بین همه مثلث‌های با محیط ثابت $۲k$، مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت را دارد.

۷۷) نقطه‌ای بر خط $L : \begin{cases} x + y = ۱ \\ y + z = ۱ \end{cases}$ بیابید که مجموع مربعات فواصل آن از صفحات مختصات کمترین مقدار ممکن باشد.

۷۸) مثلث ABC با اضلاعی به طول‌های a، b و c و مساحت ۴ مفروض است. M نقطه‌ای در درون مثلث است که فاصله‌اش تا اضلاع مثلث به ترتیب x، y و z می‌باشد.

الف) تحقیق کنید $ax+by+cz=8$.

ب) x و y و z را طوری تعین کنید که $x^2+y^2+z^2$ کمترین مقدار ممکن باشد.

۷۹) صفحه $\frac{x}{6a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ مفروض است. a و b و c $(a,b,c>0)$ را چنان بیابید که در شرط $a^2+b^2+c^2=1$ صدق کنند و حجم هرم حاصل از برخورد صفحه‌ی فوق با صفحات مختصات ماکزیمم باشد (حجم هرم $\frac{1}{6}$ حجم متوازی‌السطوحی است که روی یال‌های آن ساخته می‌شود).

۸۰) معادله‌ی کره‌ای به مرکز مبدا را بنویسید که رویه‌ی استوانه‌ای $xy=1$ را در دو و تنها دو نقطه قطع کند.

۸۱) بیشترین میزان افزایش تابع $f(x,y,z)=xy^2z^3$ در نقطه‌ی $P=(2,1,-1)$ چقدر است و در چه سویی اتفاق می‌افتد؟

۸۲) فرض کنید تابع دو متغیره‌ی f در داخل یک دایره یا مستطیل D مشتق‌پذیر بوده و در هر نقطه‌ی داخل آن بردار گرادیان برابر با صفر باشد. نشان دهید f روی D یک تابع ثابت است.

۸۳) برای توابع زیر نقاط بحرانی را مشخص کرده و تعیین کنید ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی یا نقطه‌ی زینی هستند.

الف) $f(x,y)=2x^2+(y-1)^2$

ب) $f(x,y)=8x^3+y^3-12xy+6$

ج) $f(x,y)=(x-1)\ln xy \quad (xy>0)$

۸۴) فرض کنید تابع f روی $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=x^2-y^2$ تعریف شده باشد. مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق f را روی D به دست آورید.

۸۵) به کمک بسط تیلور ثابت کنید تابع حقیقی و سه متغیره‌ی f با مشتقات جزیی مرتبه‌ی دوم پیوسته، دارای یک مینیمم موضعی در نقطه‌ی بحرانی $P=(a,b,c)$ است هرگاه سه مقدار A، D و E که توسط روابط

$$A=f_{xx}\ ,\ D=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, E=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

تعریف می‌شوند، در نقطه‌ی P مثبت باشند. همچنین f در P دارای یک ماکزیمم موضعی است هرگاه در نقطه‌ی P داشته باشیم $A < ۰\ ,\ D > ۰\ ,\ E < ۰$.

به کمک آنچه بیان شد، مقادیر ماکزیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + ۲z^۲ + xy - ۹x - ۳y + ۴z + ۱۰$ را پیدا کنید.

۸۶) آیا تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - xyz$ در مبدأ دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی است؟

۸۷) با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را با قید داده شده در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x,y) = x^۲ + ۸y^۲\ ,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = ۱$

ب) $f(x,y,z) = ۲x - ۳y + z - ۱\ ,\ x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱۴$

ج) $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲\ ,\ x - ۲y + ۲z = ٦$

د) $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲\ ,\ ۲x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۲$

ه) $f(x,y,z) = xy + xz\ ,\ x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ = ۴$

۸۸) با استفاده از روش تکثیرکننده‌های لاگرانژ مطلوب است:

الف) فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P = (-۱,۴)$ و خط $۱۲x - ۵y + ۷۱ = ۰$.

ب) نقاطی از بیضی با معادله‌ی $۳x^۲ - ۲xy + ۳y^۲ - ۲ = ۰$ که فاصله‌ی آن‌ها تا مبدا کمترین یا بیشترین مقدار است.

ج) فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P = (۱,۱,۱)$ و صفحه‌ی π به معادله‌ی $۲x + ٦y - ۹z + ۱۲ = ۰$.

د) فاصله‌ی بین مبدأ و مقطع صفحات $x + ۲y - z - ۵ = ۰$ و $x - y + z - ۳ = ۰$.

۸۹) اکسترمم‌های مطلق توابع زیر را روی ناحیه‌های مشخص شده تعیین کنید.

الف) $f(x,y) = x^۲ + xy\ ,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲\ :\ x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$

ب) $f(x,y) = ۲x - y^۲\ ,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲\ :\ ۰ \leq x, ۰ \leq y, x + y \leq ۱\}$

ج) $f(x,y) = \sin(\frac{\pi xy}{۲})\ ,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲\ :\ ۱ \leq x \leq ۲, ۱ \leq y \leq ۲\}$

د) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^۲}{x^۲ + y^۲} & (x,y) \neq \mathbf{0} \\ ۰ & (x,y) = \mathbf{0} \end{cases}\ , D = \{(x,y) : ۱ \leq x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$

۹۰) درجه‌ی حرارت نقاط ناحیه‌ی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$ با رابطه‌ی $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ داده می‌شود. گرم‌ترین و سردترین نقاط D کدامند؟

۹۱) اکسترمم‌های مقید توابع زیر را تحت شرط‌های داده شده تعین کنید.

الف) $f(x,y,z) = x + y + z \ , \ g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$

ب) $f(x,y,z) = xyz \ , \ g(x,y,z) = 2xy + 3xz + yz = 72$

ج) $f(x,y,z) = xy \ , \ g(x,y,z) = y^2 + z^2 - 1$

۹۲) نقطه‌ای را بر صفحه‌ی $x + 4y + 3z = 2$ تعیین کنید که تابع $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ در آن دارای کمترین مقدار باشد.

۹۳) نزدیکترین نقطه به مبدا مختصات و واقع بر رویه‌ی $xyz = 8$ را تعیین کنید و نشان دهید خط واصل از مبدا به این نقطه، بر رویه عمود است.

۹۴) تعیین کنید در کدام مثلث مجموع سینوس زوایا بیشترین مقدار ممکن را دارد؟