قضیه‌ای در مورد جایگشت‌ها

مصطفی عین‌اله زاده

۲۷ دی ۱۳۹۲

Ree [۴] در مقاله‌ای در سال ۱۹۷۱، با استفاده از نظریه‌ی رویه‌های ریمانی، یک قضیه‌ی جالب ترکیبیاتی در رابطه با جایگشت‌ها بیان کرد. در این مقاله، Ree اشاره می‌کند که نتوانسته است، اثباتی ترکیبیاتی برای قضیه‌اش (حتی در بعضی حالت‌های خاص) پیدا کند. تا اینکه Feit ، Lyndon و Scott [۱] اثباتی ترکیبیاتی از قضیه‌ی Ree ارائه کردند. مدتی بعد Herzog و Lehrer [۲] این قضیه را به دیگر گروه‌های کاکستر تعمیم دادند و Scott [۶] نیز با ایده‌هایی مشابه، تعمیمی از آن به گروه‌های ماتریسی به دست آورد که در نتیجه اثباتی جبری هم برای قضیه‌ی Ree بود.

در این مقاله علاوه بر ارائه‌ی این سه اثبات، به کاربردهایی از اثبات توپولوژیک در نشاندن گراف‌ها در رویه‌ها، اشاره خواهیم کرد.

۱ قضیه‌ی اصلی

نمادگذاری.

۱. $[۱, n] =: \{۱, \ldots, n\}$.

۲. $\langle g_۱, \ldots, g_n \rangle$ =: گروه تولید شده توسط $g_۱, \ldots, g_n$.

۳. فرض کنید σ جایگشتی در S_n باشد. عمل گروه تولید شده توسط σ روی $[۱, n]$، این مجموعه را به تعدادی مدار افراز می‌کند. اگر تعداد این مدارها برابر k باشد، $n-k$ را با $\nu(\sigma)$ نشان می‌دهیم. (در واقع k برابر با تعداد دورها در تجزیه‌ی دوری σ است، البته اگر دورهای به طول یک را هم در نظر بگیریم.[۱])

[۱] در این مقاله همه جا منظور از تجزیه‌ی دوری، تجزیه‌ی دوری با در نظر گرفتن دورهای به طول ۱ است.

قضیه‌ی اصلی[۴]. فرض کنید $\sigma_1, \dots, \sigma_k$، تعدادی جایگشت در S_n باشند که گروه تولید شده توسط آنها به صورت تراگذر روی $[1, n]$ عمل می‌کند و $\sigma_1 \cdots \sigma_k = 1$. دراین‌صورت:
$$\nu(\sigma_1) + \cdots + \nu(\sigma_k) \geq 2(n-1).$$

مثلاً در حالت $k = 3$، این قضیه به ما می‌گوید که اگر α و β دو جایگشت در S_n باشند که با ترکیب‌های آنها بتوان هر دو عضو دلخواه $[1, n]$ را به یکدیگر تبدیل کرد، در این‌صورت جمع تعداد دورها در تجزیه‌ی دوری α، β و $\alpha\beta$ از $n + 2$ بیشتر نیست.

۲ اثبات ترکیبیاتی

لم. فرض کنید $\tau_1, \dots, \tau_m$ یک زیرمجموعه‌ی مینیمال از ترانهش‌های S_n باشند که گروه تولیدشده توسط آنها، به صورت تراگذر روی $[1, n]$ عمل می‌کند. دراین‌صورت:

الف) $m = n - 1$،

ب) $\tau_m \dots \tau_1$ یک دور به طول n است.

اثبات [۱]. هر جایگشت τ_i به صورت ترانهشی بین دو عضو $[1, n]$ است. اگر این دوتایی‌ها را به هم وصل کنیم، گرافی با رئوس $[1, n]$ و m یال به دست می‌آید که آن را با G نمایش می‌دهیم.

الف) واضح است که شرط تراگذر بودن عمل $\langle \tau_1, \dots, \tau_m \rangle$، معادل با همبند بودن G است. پس از شرط مینیمال بودن نتیجه می‌شود که G یک درخت با $m = n - 1$ یال است.

ب) فرض کنید $\tau_i = (ab)$ متناظر با یک یال متصل به برگ a در درخت G باشد. داریم:
$$(\tau_1 \cdots \tau_{i-1})^{-1} (\tau_1 \cdots \tau_m) (\tau_1 \cdots \tau_{i-1}) = \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_m \tau_1 \cdots \tau_{i-1}.$$

در نتیجه $\tau_1 \cdots \tau_m$ و $\tau_i \cdots \tau_m \tau_1 \cdots \tau_{i-1}$ مزدوج یکدیگرند. پس می‌توانیم فرض کنیم $i = 1$. اما با استفاده از استقرا روی n و این نکته که $\tau_2, \dots, \tau_m$ ترانهش‌هایی روی $[1, n] \backslash \{a\}$ هستند که تشکیل یک درخت می‌دهند، می‌توان نتیجه گرفت که $\tau_2 \cdots \tau_m$ یک دور کامل روی $[1, n] \backslash \{a\}$ است. پس داریم:
$$\tau_1 \cdots \tau_m = (ab)(bc_1 \dots c_{n-2}) = (abc_1 \dots c_{n-2}).$$

□

اثبات اول قضیه‌ی اصلی [۱]. می‌دانیم که هر دور به طول l را می‌توان به صورت ترکیبی از $l-۱$ ترانهش نمایش داد. در نتیجه اگر تجزیه‌ی دوری $\sigma \in S_n$ دارای دورهایی به طول $l_۱, \ldots, l_t$ باشد، σ را می‌توان به صورت ترکیبی از $\nu(\sigma) = n - t = \sum(l_i - ۱)$ ترانهش نمایش داد. پس برای هر $۱ \leq j \leq k$، σ_j را می‌توانیم به صورت $\tau_{۱j} \cdots \tau_{r_j j}$ نمایش دهیم که $r_j = \nu(\sigma_j)$ و τ_{ij}ها ترانهش هستند. در ضمن مقدار ν برای ترانهش‌ها برابر ۱ است، پس $\nu(\sigma_j) = \sum_i \nu(\tau_{ij})$. بنابراین کافیست قضیه را برای ترانهش‌ها ثابت کنیم.

فرض کنید $\tau_۱, \ldots, \tau_k$، k ترانهش با خاصیت $\tau_۱ \cdots \tau_k = ۱$ و تراگذری عمل گروه $\langle \tau_۱, \ldots, \tau_k \rangle$ باشند. باید نشان دهیم $k \geq ۲(n-۱)$. اگر $\tau_{i_۱}, \ldots, \tau_{i_m}$ $(i_۱ < \cdots < i_m)$ زیرمجموعه‌ای مینیمال از $\tau_۱, \ldots, \tau_k$ با خاصیت تراگذری عمل گروه $\langle \tau_{i_۱}, \ldots, \tau_{i_m} \rangle$ باشد، بنابر لم، $m = n - ۱$ و $\tau_{i_۱} \cdots \tau_{i_m}$ یک جایگشت دوری به طول n است. از طرف دیگر با مزدوج کردن بقیه‌ی ترانهش‌ها می‌توان از رابطه‌ی $\tau_۱ \cdots \tau_k = ۱$ به رابطه‌ی $\tau_{i_۱} \cdots \tau_{i_m} \tau'_۱ \cdots \tau'_{k-m} = ۱$ رسید که τ'_jها هم ترانهش هستند. در نتیجه $\tau'_۱ \cdots \tau'_{k-m}$ هم جایگشتی دوری به طول n است که به صورت تراگذر روی $[۱, n]$ عمل می‌کند. پس بنابر لم، $k - m \geq n - ۱$ و حکم نتیجه می‌شود:

$$k = m + (k-m) \geq n - ۱ + n - ۱ = ۲(n-۱).$$

$\square$

۳ اثبات با استفاده از جبرخطی

نمادگذاری. فرض کنید V یک فضای برداری n-بعدی است. تبدیلات خطی وارون‌پذیر V را با $\mathrm{Gl}(V)$ و تبدیل همانی را با ۱ نمایش می‌دهیم. برای $g \in \mathrm{Gl}(V)$، V^g زیرفضای متشکل از اعضایی از V است که g آنها را ثابت نگه می‌دارد و $\nu(g)$ نقص بعد این زیرفضا. عدد مشابه برای عمل g روی V^* را[۲] با $\nu(g^*)$ نمایش می‌دهیم. همین‌طور اگر G زیرگروهی از $\mathrm{Gl}(V)$ باشد، بزرگترین زیرفضای V (V^*) که G روی آن به صورت بدیهی عمل می‌کند را با V^G (V^{*G}) و نقص بعدش را با $\nu(G)$ $(\nu(G^*))$ نمایش می‌دهیم.

تذکر. بین زیرفضاهای V و V^* تناظری به صورت زیر وجود دارد:

$$W \subseteq V^* \longleftrightarrow \bigcap_{f \in W} \mathrm{Ker}(f) \subseteq V,$$

که در آن بعد هر زیرفضای V^* با نقص بعد زیرفضای متناظر آن در V برابر است. با توجه به این تناظر می‌توان دید که بزرگترین زیرفضایی از V^* که زیرگروه $G \subseteq \mathrm{Gl}(V)$، روی آن بدیهی عمل

[۲] برای $f \in V^*$ عمل g روی f با $g^* f$ نشان داده می‌شود: $\forall v \in V,\ g^* f(v) = f(g^{-۱} v)$.

می‌کند، متناظر با کوچکترین زیرفضای W در V است که عمل G روی خارج‌قسمت V/W بدیهی است. پس $\nu(G^*)$ برابر با بعد W است، ضمناً

$$W = \sum_{g\in G}(1-g)V.$$

با توجه به این رابطه، برای $g \in \mathrm{Gl}(V)$ داریم:

$$\nu(g^*) = \dim((1-g)V) = \mathrm{codim}(\mathrm{Ker}(1-g)) = \mathrm{codim}(V^g) = \nu(g).$$

اما برای هر زیرگروه دلخواه $G \subseteq \mathrm{Gl}(V)$، لزوماً $\nu(G)$ با $\nu(G^*)$ برابر نیست. اما اگر حالتی را در نظر بگیریم که G متناهی و میدان ضرایب $\mathbb{R}$ باشد، می‌توان یک ضرب داخلی مثبت معین روی V پیدا کرد که تحت G ناوردا باشد. این ضرب داخلی یک ایزومورفیسم بین V و V^* القا می‌کند که به عمل G احترام می‌گذارد و در نتیجه $\nu(G) = \nu(G^*)$.

قضیه ۱. فرض کنید V یک فضای برداری n-بعدی است، $g_1, \dots, g_k \in \mathrm{Gl}(V)$ در رابطه‌ی $g_1 \cdots g_k = 1$ صدق می‌کنند و $G = \langle g_1, \dots, g_k\rangle$. در این‌صورت:

$$\nu(g_1) + \cdots + \nu(g_k) \geq \nu(G) + \nu(G^*).$$

اثبات [۶]. زیرفضای C از V^k را به صورت زیر تعریف کنید:

$$C = \{((1-g_1)v_1, \dots, (1-g_k)v_k) \ : \ v_i \in V\}.$$

برای هر i، بعد $(1-g_i)V$ برابر با $\nu(g)$ است، پس بعد C برابر است با: $\nu(g_1) + \cdots + \nu(g_k)$.

اگر نگاشت‌های خطی $\alpha : V \to C$ و $\beta : C \to V$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} &\alpha(v) = ((1-g_1)v, \dots, (1-g_k)v),\\ &\beta((v_1, \dots, v_k)) = v_1 + g_1 v_2 + \cdots + g_1 \cdots g_{k-1} v_k. \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \beta\alpha(v) &= (1-g_1)v + g_1(1-g_2)v + \cdots + g_1\cdots g_{k-1}(1-g_k)v\\ &= (1-g_1\cdots g_k)v = 0. \end{aligned}$$

پس $\mathrm{Im}\,\alpha \subseteq \mathrm{Ker}\,\beta =: Z$. از طرف دیگر

$$\mathrm{Ker}\,\alpha = \bigcap_{i=1}^{k}\mathrm{Ker}(1-g_i) = V^G.$$

پس بعد $\operatorname{Im}\alpha$ برابر با نقص بعد V^G یعنی همان $\nu(G)$ است. ادعا می‌کنیم:

$$\operatorname{Im}\beta = \sum_{i=1}^{k}(1-g_i)V.$$

در نتیجه

$$\dim C/Z = \dim(\operatorname{Im}\beta) = \nu(G^*),$$

و حکم از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\nu(g_1)+\cdots+\nu(g_k) &= \dim C\\ &= \dim Z + \dim C/Z\\ &\geq \dim(\operatorname{Im}\alpha)+\dim(\operatorname{Im}\beta)\\ &= \nu(G)+\nu(G^*).\end{aligned}$$

اما برای اثبات ادعا، با توجه به تعریف β داریم:

$$\operatorname{Im}\beta = (1-g_1)V + g_1(1-g_2)V+\cdots+g_1\cdots g_{k-1}(1-g_k)V.$$

با استقرا نشان می‌دهیم که برای هر $i\leq k$:

$$(1-g_1)V+\cdots+g_1\cdots g_{i-1}(1-g_i)V = (1-g_1)V+\cdots+(1-g_i)V.$$

(سمت چپ را با W_i و سمت راست را با W'_i نشان می‌دهیم.) حالت $i=1$ واضح است. اگر ادعا برای $i-1$ برقرار باشد، برای گام بعدی با توجه به تودرتو بودن W_iها و W'_iها، کافیست نشان دهیم:

$$W_i/W'_{i-1} = W'_i/W'_{i-1}.$$

اما عمل $g_1,\ldots,g_{i-1}$ روی V/W'_{i-1} همانی است، پس:

$$\begin{aligned}W_i/W'_{i-1} &= (g_1\cdots g_{i-1}(1-g_i)V+W'_{i-1})/W'_{i-1}\\ &= ((1-g_i)V+W'_{i-1})/W'_{i-1} = W'_i/W'_{i-1}.\end{aligned}$$

$\square$

اثبات دوم قضیه‌ی اصلی [۶]. فرض کنید $e_1,\ldots,e_n$ یک پایه برای فضای برداری n-بعدی V روی میدان K باشد. به هر جایگشت $\sigma\in S_n$، تبدیلی خطی به نام T_σ نسبت می‌دهیم که e_i را به $e_{\sigma(i)}$ می‌برد. اگر تجزیه‌ی دوری σ به صورت

$$(i_1 i_2\ldots i_s)(j_1 j_2\ldots j_t)\cdots$$

باشد، به راحتی می‌توان دید که

$$e_{i_1}+\cdots+e_{i_s}, e_{j_1}+\cdots+e_{j_t}, \ldots$$

یک پایه برای V^{T_σ} می‌سازند. در نتیجه بعد V^{T_σ} برابر تعداد دورهای σ است و $\nu(T_\sigma)=\nu(\sigma)$.
همین‌طور اگر $G=\langle T_{\sigma_1},\ldots,T_{\sigma_k}\rangle$، خاصیت تراگذری $\langle \sigma_1,\ldots,\sigma_k\rangle$ نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} V^G &= K(e_1+\cdots+e_n),\\ V^{*G} &= K(e_1^*+\cdots+e_n^*). \end{aligned}$$

($(e_1^*,\ldots,e_n^*)$ پایه‌ی دوگان $(e_1,\ldots,e_n)$ است.) پس $\nu(G)=\nu(G^*)=n-1$ و جایگذاری این مقادیر در قضیه‌ی قبل، قضیه‌ی اصلی را نتیجه می‌دهد. $\square$

۴ اثبات توپولوژیک

اثبات سوم قضیه‌ی اصلی. $k+1$ نقطه‌ی متمایز $x_0,\ldots,x_k$ را روی کره‌ی دوبعدی (S^2) در نظر بگیرید و تعریف کنید $X=S^2\setminus\{x_1,\ldots,x_k\}$. با انتخاب مناسبی از خم‌های بسته‌ی γ_i (مانند شکل ۱)، می‌توان دید که

$$\pi_1(X,x_0)=\langle \gamma_1,\ldots,\gamma_k|\gamma_1\cdots\gamma_k=1\rangle.$$

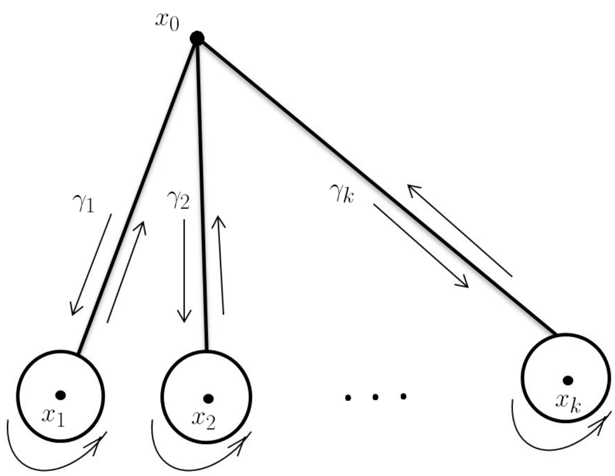
می‌دانیم که هر پوشش شاخه‌ای همبند S^2 از درجه‌ی n، که فقط روی نقاط $x_1,\ldots,x_k$ شاخه شده باشد، با عمل تراگذری از $\pi_1(X,x_0)$ روی تار بالای x_0 (عمل مونودرومی) داده می‌شود که در تناظر با $[1,n]$ است. با توجه به نمایش فوق از این گروه، اگر عمل γ_i را با σ_i تعریف کنیم، یک عمل یکتای خوش‌تعریف و تراگذر به دست می‌آید که با یک پوشش شاخه‌ای همبند و جهت‌پذیر Y از S^2 که واجد همه‌ی خواص ذکر شده نیز هست، در تناظر است. تصویر وارون هر یک از x_iها در Y متناظر با مدارهای σ_i ($\simeq$ مدارهای مونودرومی موضعی حول x_i) هستند و بنابراین جمع اندیس‌های شاخه‌ای در این نقاط برابر $\nu(\sigma_i)$ است. اگر گونای Y را با g نمایش دهیم، بنابر فرمول ریمان-هرویتز داریم:

$$2-2g=2n-\sum_{i=1}^{k}\nu(\sigma_i).$$

اما گونای یک رویه نمی‌تواند منفی باشد، پس

$$\sum_{i=1}^{k}\nu(\sigma_i)-2(n-1)=2g\geq 0.$$

$\square$



شکل ۱:

بیان دیگر اثبات. برای اینکه ببینیم در اثبات بالا دقیقاً چه اتفاقی می‌افتد، آن را به بیانی ساده‌تر در حالت $k = ۳$ ارائه می‌کنیم.

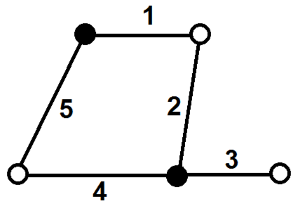
پس فرض کنید $\sigma_۱ = \alpha$ و $\sigma_۲ = \beta$ دو جایگشت در S_n باشند که گروه تولیدشده توسط آنها به صورت تراگذر روی $[1, n]$ عمل می‌کند. گراف دوبخشی G با دو بخش سیاه و سفید را به این صورت می‌سازیم. برای هر دور در تجزیه‌ی دوری α یک رأس در بخش سفید و برای هر دور β، یک رأس در بخش سیاه در نظر می‌گیریم. هر $۱ \leq i \leq n$ در دقیقاً یک دور α و یک دور β قرار دارد که متناظر با دو رأس G هستند؛ یالی با شماره‌ی i که این دو رأس را به هم متصل می‌کند، به G اضافه می‌کنیم. در نتیجه G گرافی دو بخشی است که یال‌های آن با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. هر یال G مانند i را می‌توان به دو طریق سفید به سیاه یا سیاه به سفید، جهت‌دهی کرد. این دو جهت‌دهی را با $i_۱$ و $i_۲$ نشان می‌دهیم.

برای هر $۱ \leq i \leq n$، می‌توان یک گردش بسته‌ی جهت‌دار به صورت زیر ساخت:

$$i_۱,\ (\beta(i))_۲,\ (\alpha\beta(i))_۱,\ (\beta\alpha\beta(i))_۲, \ldots$$

(این روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که اولین تکرار با در نظر گرفتن جهت، رخ دهد.) گردش‌هایی که به این طریق به دست می‌آیند[3] در تناظر با دورهای $\alpha\beta$ هستند و هر یال جهت‌دهی‌شده‌ی G، در دقیقاً یکی از این گردش‌ها ظاهر می‌شود. حال G را به عنوان گرافی توپولوژیک نگاه کنید و به ازای هر یک از این گردش‌های بسته، یک دیسک در نظر بگیرید و مرز آن را روی همین گردش به G بچسبانید تا نهایتاً به فضای توپولوژیک M برسید. با توجه به آنچه گفته شد، فضای توپولوژیک حاصل

[3] دو گردش که یک ترتیب دوری یکسان روی یال‌های جهت‌دار می‌دهند را یکی در نظر می‌گیریم.



شکل ۲:

یک رویه‌ی فشرده و جهت‌پذیر است.[۴] ضمناً شرط تراگذری همبندی M را هم نتیجه می‌دهد. اگر گونای M برابر g باشد، با توجه به تناظری که بین وجوه M و دورهای $\alpha\beta$ داشتیم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} (\text{تعداد دورهای } \alpha) + (\text{تعداد دورهای } \beta) + (\text{تعداد دورهای } \alpha\beta) - n &= \chi(M) \\ &= ۲ - ۲g \leq ۲. \end{aligned}$$

□

یک مثال از نحوه‌ی ساختن رویه‌ی M در حالتی که α و β به صورت زیر داده شده باشند، در شکل ۲ نشان داده شده است:

$$\alpha = (۱۲)(۳)(۴۵), \ \beta = (۱۵)(۲۴۳).$$

در این حالت $\alpha\beta$ دو دور دارد که متناظر با دو وجه بیرونی و دورنی در شکل است. رویه‌ی حاصل نیز با کره یکریخت است.

با استفاده از این ایده می‌توان نشاندن‌هایی برای گراف‌های دوبخشی همبند در رویه‌های جهت‌دار ارائه کرد. به این ترتیب که اگر G، n یال داشته باشد، یال‌هایش را با ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم. بعد دو جایگشت α و β می‌سازیم که دورهای آنها با رئوس دو بخش G (سفید و سیاه) در تناظرند و دور متناظر با هر رأس شامل یال‌های مجاور آن است. البته معمولاً در ترتیب اعداد درون هر یک از دورها آزادی عمل زیادی داریم که در نتیجه‌ی نهایی مؤثر است. سپس رویه‌ی M را مانند اثبات می‌سازیم و یک نشاندن G در M به دست می‌آید که گونای آن به راحتی قابل محاسبه است. ضمناً اگر گردش‌های بسته‌ای که مرزهای وجوه M را تشکیل می‌دهند، دور (گردش بسته بدون رأس تکراری) باشند، اصطلاحاً یک نشاندن قوی برای G به دست می‌آید. در صورتی که G گرافی دوبخشی نباشد، باز با اضافه کردن یک رأس در وسط هر یال می‌توان به گرافی دوبخشی و هومیومورف با G رسید و از همین ایده برای یافتن نشاندن‌های خوبی برای G استفاده کرد.

[۴] برای اثبات این ادعا باید رفتار موضعی M در رئوس و درون یال‌ها بررسی شود. جهت‌پذیری نیز از اینکه هر یال جهت‌دهی شده در دقیقاً دو گردش قرار دارد، نتیجه می‌شود. اثبات این نکات به خوانندگان علاقه‌مند واگذار می‌شود.

مثال. $G=K_{n,n}$. در این حالت G دوبخشی است و اگر تناظری بین رأس‌های هر دو بخش G و $\mathbb{Z}_n$ برقرار کنیم، یال‌های G متناظر با $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ می‌شود. برای یافتن نشاندن‌های G، کافیست دو جایگشت α و β روی $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ معرفی کنیم که دورهای α به صورت $\{i\}\times\mathbb{Z}_n$ و دورهای β به صورت $\mathbb{Z}_n\times\{j\}$ باشند.

مثلاً اگر قرار دهیم:

$$\begin{aligned}\alpha(i,j) &= \begin{cases}(i,j+۱) & i\neq ۰\\ (i,j-۱) & i=۰,\end{cases}\\ \beta(i,j) &= (i+۱,j).\end{aligned}$$

در این‌صورت برای دورهای $\alpha\beta$ داریم:

$$\begin{aligned}(۰,۰)\xrightarrow{\alpha\beta}(۱,۱)\xrightarrow{\alpha\beta}\cdots\xrightarrow{\alpha\beta}(n-۱,n-۱)\xrightarrow{\alpha\beta}(۰,n-۲)\xrightarrow{\alpha\beta}\\ \cdots\xrightarrow{\alpha\beta}(۰,n-۴)\xrightarrow{\alpha\beta}\\ \cdots\end{aligned}$$

پس برای nهای فرد، $\alpha\beta$ فقط یک دور و برای nهای زوج، $\alpha\beta$ ۲ دور دارد:

$$g=\frac{۱}{۲}\left(n^{۲}-۲n-\begin{cases}۱ & n\ \text{فرد}\\ ۲ & n\ \text{زوج}\end{cases}+۲\right)=\left\lfloor\frac{(n-۱)^{۲}}{۲}\right\rfloor.$$

که ماکزیمم گونای نشاندن‌هایی از G را می‌دهد که مکمل G اجتماع مجزای تعدادی دیسک باشد.(چون کمترین وجوه ممکن را دارد)

اما اگر در حالت n زوج قرار دهیم:

$$\alpha(i,j)=(i,j+(-۱)^{i}),\quad \beta(i,j)=(i+(-۱)^{j},j).$$

با این تعریف مرز وجوه به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}(i,j)\xrightarrow{\beta}(i+(-۱)^{j},j)\xrightarrow{\alpha}(i+(-۱)^{j},j-(-۱)^{i}) &\xrightarrow{\beta}\\ (i,j-(-۱)^{i}) &\xrightarrow{\alpha}(i,j).\end{aligned}$$

پس همه‌ی این گردش‌ها، دورهای به طول ۴ هستند و یک نشاندن قوی G در رویه‌ای با گونای $(\frac{n}{۲}-۱)^{۲}$ به دست می‌آید که کمترین گونای G است.

* * *

برای مشاهده‌ی اطلاعات بیشتر در زمینه‌ی گونای مینیمم گراف‌های کامل و گراف‌های کامل دوبخشی می‌توانید به [۵] مراجعه کنید. نشاندن‌های گراف‌ها در رویه‌ها به زمینه‌های مختلفی از ریاضی مرتبط است. [۳] به این موضوع و کاربردهای مختلف آن پرداخته است.

مراجع

[۱] Feit W., Lyndon R., Scott L.- *A remark about permutations*, J. Comb. Theory, vol. 18 (1975), 234-235.

[۲] Herzog M., Lehrer G.- *A note concerning Coxeter groups and permutations*, Springer lecture notes in math., vol. 573 (1977), 53-56.

[۳] Lando S., Zvonkin A.- *Graphs on surfaces and their applications*, Springer, 2004.

[۴] Ree R.- *A theorem on permutations*, J. Comb. Theory, vol. 10 (1971), 174-175.

[۵] Ringel G.- *Map color theorem*, Springer, 1974.

[۶] Scott L.- *Matrices and cohomology*, Annals of Math., vol. 105 (1977), 473-492.