اجسام افلاطونی

هندسه به دلیل زیباییهای چشمگیرش نظر فیلسوف بزرگ یونانی افلاطون را چنان به خود معطوف کرد که بر سر در آکادمی‌اش نوشته بود «آنکه هندسه نمی‌داند وارد نشود». و شاید دلیل اصلی اینکه چند وجهی‌های منتظم را اجسام افلاطونی می‌نامند همین توجه و نظر ویژه‌ی فلسفه‌ی افلاطون به زیبایی است.

بطور کلی یکی از جنبه های زیبای ریاضیات وجود اعداد ثابت در برخی از قضیه هاست. مثلاً بنا بر قضیه‌ی چهاررنگ در نظریه گراف تنها ۴ رنگ برای رنگ آمیزی یک نقشه‌ی جغرافی کفایت می کند به قسمی که هیچ دو کشور مجاوری رنگ یکسان نداشته باشند. یا بنا بر نظریه فاجعه ها در سیستمهای دینامیکی تنها ۷ گونه فاجعه وجود دارد. یا در فضای اقلیدسی تنها ۵ نوع چند وجهی منتظم وجود دارد که در این نوشتار اثبات کوتاهی برای آن داده می شود. ایده‌ی اصلی این اثبات از کتاب:
"GRIECHISCHE UND ANSCHAULICHE GEOMETRIE"
تألیف هندسه دان برجسته‌ی آلمانی *"WILHELM BLASCHKE"* گرفته شده است.

یک چند وجهی منتظم چند وجهی محدبی [1] است که اضلاعش طول برابر دارند و زاویه‌ی بین هر دو ضلع در تمام راسها برابر باشد.

قضیه: تنها ۵ گونه جسم افلاطونی وجود دارد که عبارتند از ۴ ، ۶ ، ۸ ، ۱۲ و ۲۰ وجهی منتظم.

برهان. هر وجه یک چند وجهی منتظم بنا به تعریف یک چند ضلعی منتظم است. فرض کنیم این وجه یک r وجهی منتظم و زاویه‌ی بین دو ضلع مجاور آن θ باشد. اگر از یک نقطه‌ی دلخواه P درون این r وجهی منتظم به رئوس وصل کنیم r مثلث پدید می آید که مجموع زوایای آنها $r\pi$ است.

از سوی دیگر مجموع زوایای این مثلثها برابر مجموع زوایا در راس P یعنی ۲π به اضافه‌ی مجموع زوایای r وجهی یعنی $r\theta$ است پس :

$$(*) \qquad r\pi = ۲\pi + r\theta$$

[1] مجموعه‌ی S محدب نام دارد هر گاه برای هر دو نقطه‌ی دلخواه A, B در S تمام نقاط پاره خط AB در S واقع باشند

از سوی دیگر اگر بر هر راس s ضلع واقع باشد مجموع زوایا در هر راس کمتر از ۲π است.(زیرا مجموع زوایا در هر کنج کمتر از ۲π است) بنابر این:

$$s\theta \leq ۲\pi \qquad (**)$$

به این تر تیب از $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$\begin{cases} s\theta \leq ۲\pi \\ r\theta = \pi(r-۲) \end{cases}$$

و از آنجا $\frac{۲}{r-۲} \leq \frac{s}{r}$ به عبارت دیگر $rs \leq ۲(r+s)$. سرانجام از $s \geq ۲$ و $r \geq ۲$ و با جایگزینی $r = x + ۲$ و $s = y + ۲$ داریم $xy \leq ۴$ و $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$ که جوابهای صحیح آن در صفحه‌ی مختصات درون ناحیه‌ی محصور بین محورهای مختصات و شاخه‌ای از هذلولی $xy \leq ۴$ واقعند.

این جوابها عبارتند از:

	I	II	III	IV	V
x	۱	۱	۱	۲	۳
y	۱	۲	۳	۱	۱
r	۳	۳	۳	۴	۵
s	۳	۴	۵	۳	۳

بنابر این تنها ۵ جسم افلاطونی وجود دارد و اگر تعداد رئوس را با e ، تعداد اضلاع را با v و تعداد وجوه را با f نمایش دهیم بر هر رأس s ضلع واقع و هر ضلع بر دو رأس واقع است پس $v = \frac{se}{۲}$. همچنین از یک سو تعداد اضلاع se است و هر وجه یک r ضلعی منتظم است پس $f = \frac{se}{r}$. حال به کمک فرمول معروف اویلر $e + f - v = ۲$ داریم $e + \frac{se}{r} - \frac{se}{۲} = ۲$ و ازآنجا:

$$e = \frac{۴r}{۲(r+s) - rs}, \qquad v = \frac{۲rs}{۲(r+s) - rs}, \qquad f = \frac{۴s}{۲(r+s) - rs}$$

که به ترتیب منجر به ۴ ، ۶ ، ۱۲ ، ۸ و ۲۰ وجهی منتظم می شوند.

		I	II	III	IV	V
	r	۳	۳	۳	۴	۵
	s	۳	۴	۵	۳	۳
تعداد رئوس	e	۴	۶	۱۲	۸	۲۰
تعداد اضلاع	v	۶	۱۲	۳۰	۱۲	۳۰
تعداد وجه‌ها	f	۴	۸	۲۰	۶	۱۲