



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی محض

عنوان

مسائل ایزوپریمتری روی گرافها

نگارش

راین جوادی جورتانی

استاد راهنما

دکتر امیردانشگر

شهریور ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری

مسائل ایزوپریمتری روی گرافها

نگارش: رامین جوادی جورتانی

امضاء: استاد راهنما: آقای دکتر امیر دانشگر

امضاء: استاد ممتحن داخلی ۱: آقای دکتر سید عبدالله محمودیان

امضاء: استاد ممتحن داخلی ۲: آقای دکتر بیژن ظهوری زنگنه

امضاء: استاد ممتحن خارجی ۱: آقای دکتر حسین حاجی ابوالحسن

امضاء: استاد ممتحن خارجی ۲: خانم دکتر بهناز عمومی

سپاس‌گزاری

قبل و فراتر از هر چیز و هر کس، بایسته است نهایت شکر و سپاس بی‌کران خود را از معبود یگانه‌ام به‌جا آورم که در همه حال و همه جا، لطف و عنایت و توجه خاص خود را بدون آن‌که ذره‌ای شایستگی آن را داشته باشم، بی دریغ و بی منت، مستمر و بی زحمت، نثارم کرده و حق‌ناشناسی و گستاخی بنده‌اش، ذره‌ای از پرتو ازی مهرش نکاسته است. پس و فروتر از آن، شایسته است سپاس و قدردانی خود را نثار کسانی کنم که تاکنون انگیزه، مشوق، امید، چراغ، چشم و یا دستی برای من بودند. از شما چه پنهان که من چهار سال اخیر را به شکر خدا، به‌طور کلی، بدون دردسر جدی و در آرامش نسبی گذراندم و اکثر لحظات آن، علی‌رغم فراز و فرودهای طبیعی، برایم دل‌نشین و لذت‌بخش بود. (اگر فکر می‌کنید بی دردسر یا لذت‌بخش بودن دوره دکتری، خاصیت طبیعی آن است، احتمالاً هیچ‌وقت دانشجوی دکتری نبوده و با یک دانشجوی دکتری هم‌صحبت نشده‌اید!)

این خوش‌وقتی را بیش و پیش از هر کس، مدیون استاد راهنمای عزیزم، جناب آقای دکتر دانشگر هستم که بدون شک نمی‌توانم همه الطاف ایشان را در این‌جا ذکر کنم. از لحاظ علمی، وسعت دید و جامعیت و اشراف علمی ایشان، که تحسین و اعجاب من را در بر داشت، در شرایطی که برای انتخاب موضوع پژوهش، در دریای موضوعات و مفاهیم متعدد، متنوع و گیج‌کننده، مستغرق و حیران بودم، مرا به سمت موضوعی راهنمایی و هدایت کرد که اکنون ذره‌ای از انتخاب آن پشیمان نیستم. کار و انرژی تمام وقت، نگاه عمیق، ایده‌های نو و مبتکرانه و اطلاعات جامع ایشان باعث شد، عمده تحقیقات صورت گرفته در دوره دکتری‌ام متعلق به، یا ملهم از ایشان باشد. از لحاظ اخلاقی، ایشان را یک حامی و دوست امین و مددکار برای خود دیدم که در شرایط بحران‌های روحی و استرس‌های کاری، برایم نقش هم‌فکری، هم‌دردی و تسکین‌دهنده داشت. علاوه بر این، ایشان را یک هم‌صحبت خوب و دل‌پذیر یافتم که از مباحثه و معاشرت ایشان حظ وافر برده و مطالب فراوان آموختم. (اگر فکر می‌کنید این‌ها، کارهایی است که هر استاد راهنمای دوره دکتری به‌طور طبیعی انجام می‌دهد، احتمالاً فقط نامی از دوره دکتری شنیده‌اید!)

هم‌چنین لازم می‌دانم مراتب قدرشناسی و شکرگزاری خود را از استاد راهنمای دوره کارشناسی ارشد، دوست شفیق و خواهر مهربانم، سرکار خانم دکتر بهناز عمومی به‌جا آورم. ۹ سال آشنایی و مصاحبت با ایشان، تاثیر شگرفی بر

حیات علمی و زندگی شخصی‌ام گذاشت و از ایشان بهره‌های علمی و اخلاقی فراوان نصیبم گردید. تعهد، اخلاق علمی، نظم، صبر و بردباری مثال زدنی، دغدغه و مسئولیت‌پذیری فراتر از تصور و عشق و مهربانی و دلسوزی بی حد و مرز، تنها بخشی از فضائلی بود که در ایشان به کمال دیدم و به حد وسع خود، در آموختن آن کوشیدم. اکنون عمده داشته‌های خود را که به خاطر عدم صلاحیت و استحقاق شخصی‌ام، ناچیز می‌نماید، مرهون انگیزه‌بخشی، هم‌فکری، هدایت و آموزش‌های بی‌دریغ ایشان می‌دانم و از این‌که بخت دوستی و هم‌صحبتی با ایشان را خواهم داشت، خشنود و مسرورم. از جناب آقای دکتر محمودیان، به‌خاطر راهنمایی‌های پدیده‌شان و هم‌چنین آن‌چه در این مدت، از جنبه‌های علمی و اخلاقی به من آموختند، سپاس‌گزارم. ممنون سعی و همت داوران محترم که زحمت مطالعه این رساله را بر خود هموار کردند، هستم. از همه اساتید، دانشجویان و کارمندان دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شریف که با فراهم کردن فضای بدون تنش و آرام، در فرج‌بخش شدن مدت حضورم در دانشکده ریاضی، موثر بودند، کمال امتنان و قدردانی را دارم. از هم‌اطاقی‌های گرامی‌ام تشکر می‌کنم که در بیشتر مواقع، با عدم حضورشان در خوابگاه، به من کمک کردند تا با تنهایی، نزدیک‌ترین همدمم در این چهار سال، خلوت کرده و آرامش و آسایش را بازیابم!

در نهایت و بی‌نهایت، مراتب شکر و سپاس خودم را از پدر و مادر عزیز و مهربانم، به ایشان معروض می‌دارم، نه فقط به خاطر رابطه نَسَبی و نقش آن‌ها در رشد و تربیت من، بلکه به خاطر ساختن و تثبیت محیط آرام، دل‌پذیر، گرم، مقدس و سرشار از عشق و محبت خانه که تحصیل و حیات بی‌دغدغه و فارغ از هر مشکل و مشغله‌ای را برایم فراهم نمود و همواره من را راغب، مشتاق و دلتنگ بازگشت به آن نگه می‌داشت.

با مشاهده همه این شرایط زندگی و افراد پیرامون آن که در این‌جا بخشی را شرح دادم، این نتیجه‌گیری، مشکل نیست که هر فرد پرتلاش و کوشایی، که من نبودم، در چنین اتمسفری، رفیع‌ترین قله‌های سعادت و سربلندی را فتح می‌کرد. این شاید تنها دریغ و افسوس این داستان باشد ...

به دلایلی که بخشی را باز گفتم و بسیاری را، باز هم به دلایلی، ناگفته گذاشتم، می‌خواهم این رساله را متواضعانه به شما پدر و مادر دوست داشتنی‌ام و به ویژه مادر عزیزم که همواره برایم تمثال فراموش‌نشدنی ایثار و گذشت بوده است، تقدیم نمایم و به شما عزیزان بگویم که سخت دلتنگ خانه‌ام و نوید دهم که در حال بازگشت به آن. امیدوارم کلیدها را عوض نکرده باشید!

مرداد ۱۳۹۰

چکیده

این رساله به بررسی و مطالعه مسائل ایزوپریمتری تعمیم یافته برای گراف های وزن دار می پردازد. در این راستا، ثابت ایزوپریمتری k -ام را به عنوان تعمیمی از ثابت چيگر، به صورت مینیم شار خروجی نرمال شده بر روی k -زیرافرازهای (زیرمجموعه های مجزای) راس ها تعریف و خواص اولیه آن ها را بررسی می کنیم. سپس برای این ثابت ها یک قضیه فدرر-فلمینگ گونه ثابت می کنیم. در گام بعد، حدس تعمیم یافته چيگر را به عنوان تعمیمی از نامساوی چيگر کلاسیک که ارتباطی بین ثابت های ایزوپریمتری و ویژه مقدارهای بالاتر لاپلاسن برقرار می کند، بیان می کنیم. در جهت اثبات این حدس، از دو رهیافت دامنه های نودال و طیف همبندی دیریشه استفاده کرده و نشان می دهیم این حدس برای ماتریس های لاپلاسن که گراف متناظر آن ها درخت یا دور است، برای همه ویژه مقدارها با یک ثابت جهانی، برقرار می باشد. در کنار این مطلب، اطلاعاتی درباره تجزیه طیفی ماتریس های لاپلاسن تعمیم یافته روی دورها به دست می دهیم. در نهایت، در راستای مطالعه ابعاد محاسباتی مسائل ایزوپریمتری، نتایجی درباره پیچیدگی محاسباتی این مسائل به دست آورده و الگوریتم های بهینه ای برای محاسبه برخی از این ثابت ها روی درخت های وزن دار ارائه می کنیم. از آن جمله، ثابت می کنیم که برای درخت های وزن دار، مساله تصمیم برای k -امین عدد ایزوپریمتری مهین در زمان خطی قابل حل است، در حالی که مسائل تصمیم برای k -امین عدد ایزوپریمتری میانگین و k -امین مینیم برش نرمال شده مهین و میانگین، جزء مسائل NP -کامل هستند. علاوه براین، در راستای مطالعه پیچیدگی پارامتری این مسائل، ثابت می کنیم که وقتی k عدد ثابتی است، k -امین عدد ایزوپریمتری مهین و میانگین و k -امین مینیم برش نرمال شده مهین، برای درخت های وزن دار، در زمان چندجمله ای قابل محاسبه اند.

واژه های کلیدی: گراف های وزن دار، ثابت ایزوپریمتری، نامساوی چيگر تعمیم یافته، طیف ایزوپریمتری، طیف همبندی دیریشه، تجزیه طیفی دورها، پیچیدگی محاسباتی، خوشه بندی

فهرست مطالب

سه	سپاس‌گزاری
پنج	چکیده
هشت	فهرست تصاویر
نه	فهرست نمادها
۱	مقدمه
۶	۱ حسابان روی گراف‌ها
۶	۱-۱ فضاهای تابعی و ماتریس‌ها
۷	۲-۱ گراف وزن‌دار
۸	۳-۱ ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته
۱۱	۴-۱ ویژه‌مقدارهای لاپلاسین
۱۳	۵-۱ ویژه‌تابع‌های لاپلاسین
۱۵	۶-۱ گراف با مرز و ویژه‌مقدار دیریشله
۱۷	۷-۱ گراف جهت‌دار و گشت تصادفی
۲۰	۸-۱ گراف کوانتومی
۲۳	۹-۱ تاریخچه

۲۵	۲ مسائل ایزوپریمتری مراتب بالا
۲۵	۱-۲ طیف ایزوپریمتری
۳۲	۲-۲ مثال‌ها و حالت‌های خاص
۳۵	۳-۲ یک قضیه فدرر-فلمینگ گونه
۳۹	۴-۲ خوشه‌بندی داده‌ها
۴۳	۵-۲ تاریخچه
۴۵	۳ نامساوی‌های چيگر مراتب بالا
۴۶	۱-۳ دامنه‌های نودال
۴۹	۲-۳ دامنه‌های نودال و نامساوی چيگر
۵۴	۳-۳ طیف همبندی دیریشه
۵۹	۴-۳ طیف همبندی دیریشه و نامساوی چيگر
۶۳	۵-۳ توصیف دامنه‌های نودال روان
۶۸	۶-۳ اصلاح‌پذیری بهینه‌گرهای $\bar{\Delta}_k$ و $\underline{\Delta}_k$
۷۲	۴ تجزیه طیفی دورها و نامساوی چيگر برای آنها
۷۲	۱-۴ روابط بین پارامترهای همبندی دیریشه
۷۸	۲-۴ تجزیه طیفی دورها
۸۲	۳-۴ اثبات حدس میکلو برای دورها
۸۸	۵ جنبه‌های محاسباتی مسائل ایزوپریمتری
۸۸	۱-۵ مقدمات پیچیدگی محاسباتی و الگوریتم‌ها
۸۹	۲-۵ پیچیدگی محاسباتی مسائل ایزوپریمتری
۹۰	۳-۵ تخمین مینیم برش نرمال‌شده در درخت‌ها
۹۹	۴-۵ حالت k ثابت
۱۰۷	۵-۵ فرایند یک‌سازی
۱۱۱	مراجع
۱۱۶	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی و نمایه
۱۲۱	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۱-۱	گراف با مرز (G, A)	۱۶
۲-۱	تابع $f \in \mathcal{F}_*(\mathcal{A})$ و تابع خطی شده متناظرش $\widehat{f}$	۲۲
۳-۱	پیر سیمون لاپلاس	۲۳
۱-۲	ژاکوب اشتاینر	۴۳
۱-۳	علامت ویژه تابع f متناظر با ویژه مقدار دوم ماتریس لاپلاسین ترکیبیاتی گراف پترسن. داریم	
	$\mathfrak{S}(f) = 3 > 2 = \mathfrak{M}(f)$	۴۶
۲-۳	اصلاح کننده بودن (r_1, r_2) برای نقطه a نسبت به $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$	۶۴
۳-۳	یک گردن بند $(a_j)_{j \in [l]}$ و گردن بند تکانش شده $(a_j(\epsilon))_{j \in [l]}$	۶۹
۱-۵	یک درخت وزن دار بدون پتانسیل متناظر با یک نمونه از مساله معدل زیرمجموعه.	۹۲
۲-۵	نمایش های BP یک درخت ریشه دار 10^5 راسی و زیرمجموعه $\{2, 4, 8\}$	۱۰۳
۳-۵	گجت های راسی و یالی استفاده شده در فرایند یکه سازی.	۱۰۹

فهرست نمادها

$\leq_m^p$	تقلیل زمان چندجمله‌ای چند به یک، ۸۸	$K_{m,n}$	گراف کامل دوبخشی، ۳۳، ۵۰
$\langle A \rangle$	گراف القایی روی A ، ۸	K_n	گراف کامل n راسی، ۳۳، ۵۰
A^*	دوگان ماتریس A ، ۷	L	ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته، ۸
$\deg(x)$	درجه راس x ، ۸	$\lambda_k(A)$	ویژه مقدار k -ام دیریشله A ، ۱۷
δA	مرز راسی مجموعه A ، ۱۵	$\underline{\Lambda}_k$	عدد همبندی دیریشله k -ام، ۵۶
$\mathcal{D}_k(X)$	خانواده k -زیرافزای مجموعه X ، ۲۶	$\overline{\Lambda}_k$	عدد همبندی دیریشله بالای k -ام، ۵۷
E	مجموعه یال‌ها، ۷	$N(a)$	همسایگی نقطه $a \in G$ ، ۶۴
$\mathcal{E}(f)$	انرژی تابع f ، ۱۰	∇	عملگر گرادیان، ۱۱
$\mathcal{F}_\circ(G)$	توابع حقیقی مطلقاً پیوسته روی G ، ۲۱	NCP	مساله مینیم برش نرمال‌شده، ۸۹
$\mathcal{F}(X)$	توابع حقیقی روی X ، ۶	$\ \cdot\ _{p,\omega}$	p -نرم، ۶
$\mathcal{F}^+(X)$	توابع حقیقی مثبت روی X ، ۶	p	تابع پتانسیل، ۸
φ	تابع وزن یالی (تابع شار یا رسانایی)، ۸	∂A	مرز یالی مجموعه A ، ۱۵
G/A	گراف خارج قسمت G نسبت به A ، ۵۶	$\partial \mathcal{A}$	مرز توپولوژیک $\mathcal{A}$ ، ۲۱
100		$\mathcal{P}_k(X)$	خانواده k -افزای مجموعه X ، ۲۶
$\iota_k^M(G)$	عدد ایزوپریمتری ماکس k -ام، ۲۷	P_n	گراف مسیر با n یال، ۸۳
$\iota_k^m(G)$	عدد ایزوپریمتری میانگین k -ام، ۲۷	$\rho(A)$	شعاع طیفی ماتریس A ، ۱۳
$\tilde{\iota}_k^M(G)$	مینیم برش نرمال‌شده ماکس k -ام، ۲۷	$\mathfrak{S}(f)$	تعداد دامنه نودال‌های قوی f ، ۴۶
$\tilde{\iota}_k^m(G)$	مینیم برش نرمال‌شده میانگین k -ام، ۲۷	S_n	گراف ستاره n راسی، ۷۷
IPP	مساله ایزوپریمتری، ۸۹	V	مجموعه رئوس، ۷
		ω	تابع وزن راسی، ۸
		$\mathfrak{W}(f)$	تعداد دامنه نودال‌های ضعیف f ، ۴۶

مقدمه

مسئله ایزوپریمتری، به معنای یافتن زیردامنه‌ای در صفحه که با مساحت ثابت کمترین محیط را داشته باشد، از مسائل بسیار قدیمی در هندسه به شمار می‌رود (بخش ۲-۵ را ببینید). این مساله که از دیدگاه شهود هندسی بسیار ملموس به نظر می‌رسد، پس از تجرید به یکی از مسائل مرکزی در ریاضیات تبدیل می‌شود که مطالعه آن را از دیدگاه‌های مختلف بسیار جذاب کرده و همچنین کاربردهای نتایج حاصله را نیز بسیار عمیق و موثر می‌سازد.

اجازه دهید مساله ایزوپریمتری کلاسیک را به صورت یافتن یک زیردامنه از صفحه $\mathbb{R}^2$ با اندازه ثابت در نظر بگیریم که اندازه مرز آن می‌نیم باشد. با این تعبیر می‌توان مساله ایزوپریمتری را برای هر منیفلد ریمانی دلخواه نیز تعریف کرد. هم‌چنین برای یک گراف و یک زیرمجموعه از رئوس مثل A ، اگر اندازه A را تعداد رئوس درون A و اندازه مرز آن را تعداد یال‌های بین A و مکمل A تعریف کنیم، مساله ایزوپریمتری برای گراف‌ها نیز معنی پیدا می‌کند. مسائل ایزوپریمتری ترکیبیاتی در دهه ۷۰ معرفی شد و اولین بار، حل این مسائل برای گراف‌های مکعب به‌طور جدی مورد توجه قرار گرفت و کاربردهایی در مهندسی مانند مساله حداقل کردن طول سیم پیدا کرد. برای مشاهده سیر تحولات این مسائل [۵۳] را ببینید.

مساله‌های ایزوپریمتری برای منیفلدهای ریمانی اولین بار در آنالیز هندسی مطرح شد [۲۲، ۲۳]. چيگر [۲۴] در سال ۱۹۷۰ نشان داد که هر منیفلد ریمانی فشرده n -بعدی $\mathcal{M}$ می‌تواند یک ناوردای نام ثابت ایزوپریمتری $h(\mathcal{M})$ نسبت داد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$h(\mathcal{M}) := \inf_A \max \left\{ \frac{\mu_{n-1}(\partial A)}{\mu_n(A)}, \frac{\mu_{n-1}(\partial A)}{\mu_n(\mathcal{M} \setminus A)} \right\},$$

که اینفیم روی زیرمجموعه‌های باز $A \subset \mathcal{M}$ گرفته می‌شود، ∂A مرز A را نشان می‌دهد و μ_n اندازه n -بعدی است. انگیزه تعریف این ناوردا، مطالعه و تقریب اولین ویژه‌مقدار نابدیهی عملگر لاپلاس-بلترامی است که ارتباط نزدیکی با هندسه منیفلد داده شده، دارد. در این راستا یکی از نتایج کلاسیک به نامساوی چيگر معروف است که

به صورت زیر بیان می شود،

$$\frac{1}{4}h(\mathcal{M})^2 \leq \lambda, \quad (1)$$

که λ اولین ویژه مقدار نابديهی عملگر لاپلاس-بلترامی روی $\mathcal{M}$ است. بدیهی است که می توان فضای داده شده را از یک منیفلد ریمانی، تعمیم داده، وضعیت نه لزوماً هموار یک گراف را در نظر گرفته و ثابت های ایزوپریمتری را برای گراف ها تعریف کرد. اولین شکل از نامساوی های ایزوپریمتری از نوع نامساوی (۱) برای گراف ها توسط آلن در دهه ۹۰ ثابت شد که ارتباطی بین ثابت ایزوپریمتری و ویژه مقدار دوم ماتریس لاپلاسین برقرار می کرد [۲] (برای مطالعه ویژگی های ثابت ایزوپریمتری، به عنوان نمونه [۵۸، ۶۸] را ببینید). در طول سه دهه اخیر، ثابت های ایزوپریمتری به طرز شگفت انگیزی کاربردهای وسیع، متنوع، متفاوت و مهمی در زمینه های مختلف علوم ریاضی، علوم کامپیوتر و مهندسی پیدا کرد. برای تبیین اهمیت مسائل ایزوپریمتری و توجیه انگیزه مطالعه این دسته از مسائل، در ادامه سعی می کنیم برخی از کاربردهای مهم آن ها را در زمینه های مختلف به اختصار بیان کنیم. در نظریه فرایندهای مارکف گسسته، نامساوی های ایزوپریمتری ارتباط مستقیم با زمان همگرایی^۱ این فرایندها دارد که یکی از اولین نتایج در این راستا توسط لاولر و سوکال ارائه شده است [۶۲] (هم چنین [۳۷] و برای نتایج جدید [۷۰، ۷۱] را ببینید).

در علوم کامپیوتر این مسائل به دلیل اهمیت گراف های توسعه گر^۲ ظاهر می شوند. با توجه به نامساوی ایزوپریمتری و در نظر گرفتن ویژه مقدار دوم ماتریس لاپلاسین، به عنوان همبندی جبری^۳، می توان گفت که گراف های d -منظم با ثابت ایزوپریمتری بزرگ، گراف های تُنک^۴ با همبندی زیاد هستند. گراف های توسعه گر که گراف های d -منظم با ثابت ایزوپریمتری بزرگ تعریف می شوند، کاربردهای زیادی در علوم کامپیوتر دارند که از جمله می توان به طراحی و تحلیل شبکه های ارتباطی، نظریه کدهای تصحیح کننده خطا^۵، نظریه مولدهای شبه تصادفی^۶ و غیره اشاره کرد. شایان ذکر است که ساخت گراف های توسعه گر از روی فضاهای همگن را می توان با حالت های گسسته از برنامه لنگلندز^۷ در نظریه اعداد مقایسه کرد که این شهود، راهگشای ساخت اولین توسعه گر ها بوده است. برای مطالعه درباره گراف های توسعه گر و کاربردهای آن ها، هم چنین ارتباطات بیشتری با نظریه اندازه، می توانید به [۵۶، ۶۵] مراجعه کنید.

وجه جالب دیگر موضوع ارتباط مساله ایزوپریمتری با مفهوم تمرکز اندازه^۸ است که در علم احتمال و آمار از

^۱mixing time

^۲expander graphs

^۳algebraic connectivity

^۴sparse

^۵error-correcting codes

^۶pseudorandom generators

^۷Langlands program

^۸concentration of measure

اهمیت خاصی برخوردار است. مفهوم تمرکز اندازه به دلیل صحت نامساوی تالاگرانده^۹ برای فضاهای باناخ با بعد نه لزوماً متناهی، از قضیه حد مرکزی مستقل بوده و چون این ساز و کار از نامساوی‌های کلاسیک ایزوپریمتری یا نامساوی‌های دیگر مرتبط نظیر نامساوی پوانکاره^{۱۰} و نامساوی $\log$ -سوبولف^{۱۱} نتیجه می‌شود، اهمیت مطالعه مساله ایزوپریمتری را دو چندان می‌کند [۱۴].

در نهایت، باید به اهمیت مساله در کاربردهای جهان واقعی نیز توجه داشت. در این راستا ارتباط مستقیم این مساله با مساله خوشه‌بندی (بخش ۲-۴)، مساله برش نرمال شده و کاربردهای آن در پردازش تصویر [۸۳] و همچنین مساله نشانیدن در ابعاد پایین^{۱۲} (PCA و نظایر آن) [۵]، مطالعه روش‌های عملی محاسبه ثابت ایزوپریمتری را در سطوح مختلف بسیار جالب و حائز اهمیت می‌سازد. در این راستا لازم است توجه شود که انگیزه مطالعه ثابت ایزوپریمتری در منیفلدهای ریمانی و فرآیندهای مارکف، تخمین طیف عملگر لاپلاسین به وسیله این ثابت است، درحالی که در حالت گراف‌های متناهی، انگیزه کاملاً برعکس است. در این جا طیف لاپلاسین با وجود الگوریتم‌های کارآمد محاسبات ماتریسی، از لحاظ محاسباتی کاملاً **رام‌شدنی** است، اما محاسبه ثابت ایزوپریمتری، در حالت کلی، مساله‌ای سخت به‌شمار می‌رود. لذا با توجه به اهمیت کاربردی محاسبه این ثابت، نامساوی‌های ایزوپریمتری، از این دیدگاه جدید، اطلاعاتی در مورد تقریب‌پذیری ناوردهای ایزوپریمتری به‌دست می‌دهند.

این رساله به مطالعه و بررسی تعمیم‌های مسائل ایزوپریمتری برای گراف‌ها می‌پردازد. در این راستا دو هدف اصلی دنبال می‌شود. در جهت هدف اول که هدف نظری محسوب می‌شود، به دنبال ارائه تعریف صحیحی از ثابت‌های ایزوپریمتری تعمیم‌یافته هستیم، به طوری که از طریق اثبات نامساوی‌های تعمیم‌یافته چيگر، ارتباطی با ویژه‌مقدارهای بالاتر ماتریس لاپلاسین برقرار شود. توسعه ساز و کارهایی برای اثبات چنین نامساوی‌هایی مقصد اصلی این رساله را تشکیل می‌دهد. با توجه به اهمیت کاربردی مسائل ایزوپریمتری در جهان واقعی، هدف دوم خود را که هدف کاربردی محسوب می‌شود، به بررسی ابعاد محاسباتی ثابت‌های ایزوپریمتری اختصاص می‌دهیم و ضمن تحلیل پیچیدگی محاسباتی این مسائل، الگوریتم‌های کارآمدی برای محاسبه برخی از آن ثابت‌ها در فضاهای خاص معرفی می‌کنیم. توجه کنید که تاکید این رساله بر مطالعه جنبه‌های تحلیلی^{۱۳} مسائل ایزوپریمتری است. برای مشاهده جنبه‌های ترکیبیاتی و روش‌های عمومی^{۱۴}، [۵۳] را ببینید. در ادامه، سازمان‌دهی فصل‌های این رساله را تشریح می‌کنیم.

در فصل ۱، فضای اشیاء مورد مطالعه در این رساله که فضای گراف‌های وزن‌دار، گراف‌های با مرز و گراف‌های کوانتومی هستند را به‌طور دقیق معرفی کرده و یک مطالعه مروری بر روی مفاهیم اساسی حسابان و آنالیز طیفی روی این گراف‌ها انجام می‌دهیم. از آن جمله، ماتریس‌های لاپلاسین تعمیم‌یافته و تجزیه طیفی آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

^۹Talagrand inequality

^{۱۰}Poincaré inequality

^{۱۱} $\log$ -Sobolev inequality

^{۱۲}low dimensional embedding

^{۱۳}analytic

^{۱۴}global methods

مطالب این فصل به گونه‌ای تنظیم شده که خواننده بتواند در کمترین زمان، با اصلی‌ترین مفاهیمی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، آشنا گردد.

در فصل ۲، تعریف دقیقی برای ثابت‌های ایزوپریمتری تعمیم‌یافته ارائه می‌شود. در آن‌جا می‌بینیم که برای سازگار بودن این تعریف (به مفهوم برقراری یک قضیه فدر-فلمنگ گونه)، باید ثابت ایزوپریمتری مرتبه k را به صورت می‌نیم یک تابع هدف روی k -زیرافرازاها (زیرمجموعه‌های مجزا) تعریف کنیم. تفاوت تعریف روی زیرافرازاها به جای افرازاها، موضوعی است که در حالت کلاسیک ($k = 2$) پنهان مانده است (قضیه ۲-۱-۵ را ببینید). علاوه بر این، در این فصل خواص و ویژگی‌های اساسی و اولیه ثابت‌های ایزوپریمتری و پارامترهای مشابه را بررسی کرده و مثال‌هایی را تحلیل خواهیم کرد. نهایتاً ارتباط مسائل ایزوپریمتری با خوشه‌بندی داده‌ها و به خصوص مساله k -میانه‌ها را بیان می‌کنیم. فصل ۲ عمدتاً براساس مطالب مقاله [۳۲] تنظیم شده است.

در فصل ۳، ضمن معرفی حدس تعمیم‌یافته چيگر، دو رهیافت اصلی در جهت اثبات این حدس را معرفی می‌کنیم. رهیافت اول، مقایسه ویژه‌مقدارها و ثابت‌های ایزوپریمتری به ترتیب به عنوان نسخه‌های L^1 و L^2 از نسبت رایلی و بهره‌گیری از مفهوم دامنه نودال، یعنی زیرگراف ماکسیمال که علامت ویژه‌تابع روی آن تغییر نمی‌کند، است. در رهیافت دوم، در ادامه کارهای میکلو [۶۷]، پارامترهای میانه‌ای به نام پارامترهای همبندی دیریشله معرفی می‌شوند که واسطی میان ویژه‌مقدارهای لاپلاسی و پارامترهای ایزوپریمتری هستند. این پارامترهای واسط علاوه بر کمک به اثبات نامساوی‌های چيگر تعمیم‌یافته، توصیفی از ویژه‌تابع‌های لاپلاسی و دامنه‌های نودال آن‌ها به دست می‌دهند. در ادامه این فصل نشان می‌دهیم که دقیقاً در چه مواقعی می‌توان از بهینه‌گرهای ثابت‌های همبندی دیریشله، یک ویژه‌تابع برای ماتریس لاپلاسی تعمیم‌یافته ساخت. این فصل بر پایه مقاله‌های [۳۲] و [۳۴] تدوین شده است.

فصل ۴ را به استفاده از ابزارهای توسعه‌یافته در فصل ۳ در حالت خاص ماتریس‌های لاپلاسی تعمیم‌یافته روی دورها، اختصاص می‌دهیم. به کمک این ابزارها توصیف دقیقی از تجزیه طیفی این ماتریس‌ها به دست آورده و نشان می‌دهیم برای ماتریس‌های لاپلاسی روی دورها، حدس تعمیم‌یافته چيگر با یک ثابت جهانی ۴۸ برقرار است. مطالب این فصل مبتنی بر مقاله [۳۴] است.

در نهایت، در فصل ۵، با توجه به اهمیت کاربردی محاسبه پارامترهای ایزوپریمتری، روی ابعاد محاسباتی این مسائل تمرکز می‌کنیم. در بین نتایج این فصل، ثابت می‌کنیم که برای درخت‌های وزن‌دار، مساله تصمیم برای k -امین عدد ایزوپریمتری مهین در زمان خطی قابل حل است، درحالی که مسائل تصمیم برای k -امین عدد ایزوپریمتری میانگین و k -امین مینیم برش‌نرمال شده مهین و میانگین، جزء مسائل NP -کامل هستند. علاوه بر این، در راستای مطالعه پیچیدگی پارامتری این مسائل، ثابت می‌کنیم که وقتی k عدد ثابتی است، k -امین عدد ایزوپریمتری مهین و میانگین و k -امین مینیم برش‌نرمال شده مهین، برای درخت‌های وزن‌دار، در زمان چندجمله‌ای قابل محاسبه‌اند. در نهایت در این فصل ثابت می‌کنیم که همه مسائل تصمیم‌گیری مطرح شده، برای گراف‌های وزن‌دار دوبخشی با عرض-درختی حداکثر ۲، NP -کامل هستند. سپس نتایجی درباره پیچیدگی محاسباتی روی گراف‌های بدون وزن (ساده) به دست می‌دهیم. مطالب این فصل منطبق بر مقاله [۳۳] است.

لازم به تذکر است که مندرجات این رساله در فضای کلی گراف‌های وزن‌دار با پتانسیل بیان شده است که نسبت به فضای مورد مطالعه در مقالات چاپ شده، یعنی فضای گراف‌های وزن‌دار بدون پتانسیل، کلی‌تر است و این تعمیم‌ها تنها در این رساله ارائه می‌شوند. هم‌چنین قضیه ۳-۱-۵ و برهان آن، جزو نتایج چاپ نشده می‌باشد. نتایجی که اصالت آن‌ها مربوط به خارج از مقالات مستخرج از رساله است، با ذکر مرجع در مقابل عنوان نتیجه، مشخص شده‌اند.

فصل ۱

حسابان روی گرافها

۱-۱ فضاهای تابعی و ماتریسها

اعداد حقیقی، حقیقی مثبت، صحیح و طبیعی به ترتیب با $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$ نشان داده می‌شوند. برای اعداد طبیعی $m \leq n, m, n \in \mathbb{N}$ ، تعریف می‌کنیم $[[m, n]] := \{m, m+1, \dots, n\}$ و $[[1, n]] := [n]$. برای مجموعه متناهی X ، مجموعه کلیه توابع حقیقی و حقیقی مثبت روی X را به ترتیب با $\mathcal{F}(X)$ و $\mathcal{F}^+(X)$ نشان می‌دهیم. برای تابع $f \in \mathcal{F}(X)$ و زیرمجموعه $Y \subset X$ ، تحدید تابع f روی Y را با $f|_Y$ نشان می‌دهیم. تابع مثبت $\omega \in \mathcal{F}^+(X)$ را ثابت بگیرید. روی فضای تابعی $\mathcal{F}(X)$ یک ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X), \quad \langle f, g \rangle_\omega := \sum_{x \in X} \omega(x) f(x) g(x).$$

این فضای هیلبرت را با $\mathcal{F}_\omega(X)$ نشان می‌دهیم. همچنین برای عدد حقیقی $p \geq 1$ ، نرم $\|\cdot\|_{p, \omega}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\forall f \in \mathcal{F}_\omega(X), \quad \|f\|_{p, \omega} := \left(\sum_{x \in X} |f(x)|^p \omega(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

دو تابع $f, g \in \mathcal{F}_\omega(X)$ را نسبت به ω متعامد می‌گوییم و با $f \perp_\omega g$ نشان می‌دهیم، هرگاه $\langle f, g \rangle_\omega = 0$. از جبر خطی مقدماتی می‌دانیم که می‌توان هر عملگر خطی روی $\mathcal{F}_\omega(X)$ را با یک ماتریس $|X| \times |X|$ و هر تابع $f \in \mathcal{F}_\omega(X)$ را با یک بردار ستونی در $\mathbb{R}^{|X|}$ نشان داد. لذا در این رساله، با سوءاستفاده از نماد، برای مفاهیم

عملگر-ماتریس و تابع-بردار از یک نماد استفاده می‌شود.

برای یک عملگر خطی $A : \mathcal{F}_{\omega_1}(X) \rightarrow \mathcal{F}_{\omega_2}(Y)$ ، عملگر **دوگان** A را یک عملگر یکتای $A^* : \mathcal{F}_{\omega_2}(Y) \rightarrow \mathcal{F}_{\omega_1}(X)$ تعریف می‌کنیم که

$$\forall f \in \mathcal{F}_{\omega_1}(X), g \in \mathcal{F}_{\omega_2}(Y), \quad \langle A^*f, g \rangle_{\omega_2} = \langle f, Ag \rangle_{\omega_1}. \quad (1-1)$$

بنابراین به فرم ماتریسی، عملگر دوگان، A^* ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\forall x \in X, y \in Y, \quad A^*(x, y) := \frac{\omega_2(y)}{\omega_1(x)} A(y, x).$$

یک عملگر خطی $A : \mathcal{F}_{\omega}(X) \rightarrow \mathcal{F}_{\omega}(X)$ (ماتریس A) را **خود-الحاق** می‌گوییم، هرگاه $A^* = A$ ، یعنی

$$\forall f, g \in \mathcal{F}_{\omega}(X), \quad \langle Af, g \rangle_{\omega} = \langle f, Ag \rangle_{\omega}. \quad (2-1)$$

توجه کنید که اگر ω تابع ثابت ۱ باشد، آنگاه A^* همان ترانهاد A بوده و خود-الحاق بودن A به این معنی است که A متقارن است.^۱ اگر A خود-الحاق باشد، آنگاه همه ویژه‌مقدارهای A حقیقی هستند و برای $\mathbb{R}^{|X|}$ یک پایه متعامد یکه متشکل از ویژه‌تابع‌های A وجود دارد [۵۷، ۱۷].

یک عملگر خطی خود-الحاق $A : \mathcal{F}_{\omega}(X) \rightarrow \mathcal{F}_{\omega}(X)$ (ماتریس A) را **مثبت نیمه‌معین** می‌گوییم، هرگاه

$$\forall f \in \mathcal{F}_{\omega}(X), \quad \langle Af, f \rangle_{\omega} \geq 0. \quad (3-1)$$

کلیه ویژه‌مقدارهای حقیقی یک ماتریس مثبت نیمه‌معین، نامنفی هستند. برای تابع $f \in \mathcal{F}_{\omega}(X)$ ، کسر زیر را **نسبت رایلی** مربوط به f می‌گوییم،

$$\frac{\langle Af, f \rangle_{\omega}}{\langle f, f \rangle_{\omega}}.$$

۲-۱ گراف وزن‌دار

یک **گراف بدون جهت** (بدون طوقه) یک زوج مرتب $G = (V, E)$ تعریف می‌شود که V مجموعه راس‌ها و E خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های دو عضوی V است که مجموعه یال‌ها خوانده می‌شود. هر یال $\{x, y\} \in E$ را به طور خلاصه با xy نشان می‌دهیم. برای دو راس متمایز $x, y \in V$ ، گوئیم x مجاور y است و می‌نویسیم $x \sim y$ ، هرگاه $xy \in E$. برای دو زیرمجموعه $A, B \subset V$ از راس‌ها، تعریف می‌کنیم

$$E(A, B) := \{e = xy \in E : x \in A, y \in B\}.$$

^۱ وقتی مقادیر توابع در $\mathcal{F}_{\omega}(X)$ مختلط باشند، به جای واژه خود-الحاق از واژه **هرمیتی** نیز استفاده می‌شود.

منظور از یک **گراف وزن‌دار**، یک گراف بدون جهت بدون طوقه $G = (V, E)$ به همراه دو تابع وزن مثبت $\omega: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ و $\varphi \in \mathcal{F}^+(E)$ و یک تابع $p \in \mathcal{F}(V)$ است. توابع $\omega: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ و $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ را به ترتیب توابع وزن راسی و یالی و تابع $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ را تابع پتانسیل می‌گوییم. تابع φ را گاهی تابع **شار** (رسانایی) نیز می‌نامیم که میزان شار (رسانایی) عبوری از هر یال را نشان می‌دهد. گراف وزن‌دار را به صورت $(V, E, \omega, \varphi, p)$ یا به طور خلاصه (G, ω, φ, p) نشان می‌دهیم. در این رساله منظور از گراف، گراف وزن‌دار است، مگر این‌که پسوندی برای آن ذکر شود. از یک **گراف ساده**، گراف وزن‌داری را مراد می‌کنیم که در آن توابع وزن راسی و یالی ω, φ ، تابع ثابت یک و تابع پتانسیل p ، تابع ثابت صفر باشند. هم‌چنین گراف وزن‌داری که تابع پتانسیل آن، تابع ثابت صفر باشد را **گراف بدون پتانسیل** می‌نامیم.

برای راس $x \in V$ ، **درجه** (تعمیم یافته) x به صورت $\deg(x) := \sum_{y: x \sim y} \varphi(xy)$ تعریف می‌شود. بنابراین برای گراف ساده داریم $\deg(x) = |\{y \in V \mid x \sim y\}|$. گراف بدون جهت $G = (V, E)$ را **همبند** می‌گوییم، هرگاه برای هر دو راس $x, y \in V$ ، دنباله متناهی از راس‌ها وجود داشته باشد که از x شروع و به y ختم می‌شود و هر دو راس متوالی، مجاورند. برای زیرمجموعه رئوس $A \subset V$ ، **گراف القایی** G روی A که با $\langle A \rangle$ نشان می‌دهیم، گراف بدون جهتی با مجموعه رئوس A است که هر دو راس $x, y \in A$ مجاورند، اگر و تنها اگر در G مجاور باشند.

منظور از یک **گراف جهت‌دار**، یک زوج مرتب $G = (V, E)$ است که V مجموعه راس‌ها و E خانواده‌ای از زوج مرتب‌ها در $V \times V$ است. برای هر یال $e = (x, y) \in E$ ، راس x را **دم** e خوانده و با e^- نشان می‌دهیم و راس y را **سر** e گفته و با e^+ نمایش می‌دهیم. گراف جهت‌دار G را **قویاً همبند** می‌گوییم، هرگاه برای دو راس $x, y \in V$ ، یک دنباله از راس‌ها $x_0 = x, x_1, \dots, x_{l-1}, x_l = y$ وجود داشته باشد که برای هر $i \in \llbracket l \rrbracket$ ، $(x_{i-1}, x_i) \in E$. برای تعاریف و مفاهیم دیگر درباره گراف‌ها، به [۲۱] مراجعه کنید.

۳-۱ ماتریس لاپلاسین تعمیم یافته

برای گراف وزن‌دار (G, ω, φ, p) ، **عملگر شرودینگر گسسته** آن، یک عملگر خطی $L: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ است که به هر تابع $f \in \mathcal{F}(V)$ ، تابع $Lf \in \mathcal{F}(V)$ را نسبت می‌دهد که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\forall x \in V, \quad (Lf)(x) := \frac{1}{\omega(x)} \left[p(x) f(x) + \sum_{y: x \sim y} \varphi(xy) (f(x) - f(y)) \right]. \quad (۴-۱)$$

در واقع می‌توان L را با یک ماتریس $|V| \times |V|$ نشان داد که درایه‌های آن به صورت زیر است،

$$\forall x, y \in V, \quad L(x, y) := \begin{cases} -\frac{\varphi(xy)}{\omega(x)} & \text{اگر } x \sim y, \\ \frac{p(x) + \deg(x)}{\omega(x)} & \text{اگر } x = y, \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

این ماتریس را **ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته** مربوط به گراف (G, ω, φ, p) می‌خوانیم. اگر تابع پتانسیل p ، تابع ثابت صفر باشد، آن‌گاه L را **ماتریس لاپلاسین** مربوط به گراف و عملگر L را **عملگر لاپلاس-بلترامی** می‌گوییم.

$$\forall f \in \mathcal{F}(V), x \in V, \quad (Lf)(x) := \frac{1}{\omega(x)} \sum_{y: x \sim y} \varphi(xy) (f(x) - f(y)). \quad (۵-۱)$$

برای مشاهده علت نام‌گذاری عملگر لاپلاسین و رابطه آن با لاپلاسین کلاسیک بخش ۱-۹ را ببینید.

مثال ۱-۳-۱

برای یک گراف ساده (وقتی ω, φ توابع ثابت یک و p تابع ثابت صفر باشند)، داریم $L = D - A$ که A ماتریس مجاورت گراف و D ماتریس قطری درجات رئوس گراف هستند. این همان ماتریس لاپلاسین استاندارد برای یک گراف ساده است که گاهی **لاپلاسین ترکیبیاتی** نیز گفته می‌شود.

اگر φ تابع ثابت یک و p تابع ثابت صفر باشد و برای $x \in V$ داشته باشیم $\omega(x) := \deg(x)$ ، آن‌گاه داریم

$$L(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{\deg(x)} & \text{اگر } x \sim y, \\ 1 & \text{اگر } x = y, \end{cases}$$

که همان ماتریس لاپلاسین گشت تصادفی طبیعی روی گراف G است. در واقع داریم $L = I - P$ که I ماتریس همانی و P ماتریس انتقال گشت تصادفی طبیعی روی G است (بخش ۱-۷ را ببینید). ★

خواص ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته

اگر L ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته مربوط به G باشد، داریم

$$\forall x, y \in V, \quad \omega(x) L(x, y) = \omega(y) L(y, x). \quad (۶-۱)$$

بنابراین ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته L نسبت به ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ خود-الحاق است (توجه کنید که شرایط (۶-۱) و (۲-۱) معادلند). بنابراین کلیه ویژه‌مقدارهای L حقیقی هستند.

برای ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته L می‌توانیم یک فرم دوخطی متقارن $\mathcal{E}$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$\forall f, g \in \mathcal{F}_\omega(V), \quad \mathcal{E}(f, g) := \langle Lf, g \rangle_\omega.$$

این فرم را **فرم دیریشله** می‌خوانیم ([۲۴] را ببینید). برای تابع $f \in \mathcal{F}_\omega(V)$ ، مقدار $\mathcal{E}(f) := \mathcal{E}(f, f)$ را **انرژی** f می‌گوییم و داریم

$$\mathcal{E}(f) := \langle Lf, f \rangle_\omega = \sum_{xy \in E} \varphi(xy) |f(x) - f(y)|^2 + \sum_{x \in V} p(x) f(x)^2. \quad (۷-۱)$$

از این رابطه می‌بینیم که اگر تابع پتانسیل p نامنفی باشد، آن‌گاه L مثبت نیمه‌معین بوده و همه ویژه‌مقدارهای آن نامنفی هستند. به‌طور خاص همه ویژه‌مقدارهای ماتریس لاپلاسین نامنفی هستند. در این حالت، علاوه بر این، جمع درایه‌های هر سطر L صفر است. بنابراین اگر $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ طیف مرتب L باشد، آن‌گاه داریم $\lambda_1 = 0$ که ویژه‌تابع آن، تابع ثابت است. هم‌چنین به راحتی از رابطه (۷-۱) می‌توان ثابت کرد که اگر G همبند باشد، آن‌گاه برای هر $i \geq 2$ ، $\lambda_i > 0$ ؛ یعنی λ_1 ویژه‌مقدار ساده L است.^۲ مقدار $\lambda_2 - \lambda_1$ را **حفره طیفی** می‌نامیم. حال فرض کنید L یک ماتریس $n \times n$ دلخواه باشد که در دو خاصیت زیر صدق کند،

۱. یک بردار با مولفه‌های مثبت $\omega \in (\mathbb{R}^+)^n$ یافت می‌شود که L نسبت به ω خود-الحاق است؛ یعنی در رابطه (۶-۱) صدق می‌کند.

۲. درایه‌های خارج از قطر L همگی نامثبت اند.

در این صورت می‌توان یک گراف وزن‌دار (G, ω, φ, p) به‌صورت زیر تعریف کرد که L ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته آن است. قرار می‌دهیم $V := \llbracket n \rrbracket$ و $E := \{xy \mid x, y \in V, x \neq y, L(x, y) \neq 0\}$ و گراف بدون جهت $G = (V, E)$ را تشکیل می‌دهیم. هم‌چنین تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \forall xy \in E, \quad \varphi(xy) &:= -\omega(x) L(x, y) = -\omega(y) L(y, x), \\ \forall x \in V, \quad p(x) &:= \omega(x) \sum_{y \in V} L(x, y). \end{aligned} \quad (۸-۱)$$

حال واضح است که L ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته گراف وزن‌دار (G, ω, φ, p) است. ماتریسی که در شرایط ۱ و ۲ صدق می‌کند را یک **ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته** می‌گوییم. هم‌چنین ماتریسی که علاوه بر این که در شرایط ۱ و ۲ صدق می‌کند، جمع درایه‌های هر سطر آن صفر است (لاپلاسین تعمیم‌یافته بدون پتانسیل) را یک **ماتریس لاپلاسین** می‌گوییم. فرض کنید L یک ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته باشد و تابع پتانسیل p به‌صورت (۸-۱) تعریف شود و ماتریس قطری P را ماتریسی با درایه‌های قطری $p(x)$ تعریف کنید. در این صورت داریم

$$L = L_* + P,$$

که برای هر $x \neq y$ ، $L_*(x, y) := L(x, y)$ و برای هر x ، $L_*(x, x) := \sum_{y: y \neq x} -L(x, y)$. واضح است که L_* یک ماتریس لاپلاسین است که آن را **عملگر بیضوی گسسته** مربوط به L می‌گوییم.

^۲ این مطلب قابل تعمیم به ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته است. نتیجه ۲-۵-۱ را ببینید.

فرمول گرین

فرض کنید $G = (V, E, \omega, \varphi)$ یک گراف وزن دار بدون پتانسیل باشد و یک جهت‌گذاری دلخواه روی یال‌های G در نظر بگیرید. **عملگر گرادیان** به صورت یک عملگر خطی $\nabla: \mathcal{F}_\omega(V) \rightarrow \mathcal{F}_\varphi(E)$ تعریف می‌شود که به هر تابع $f \in \mathcal{F}_\omega(V)$ ، تابع $\nabla f \in \mathcal{F}_\varphi(E)$ را نسبت می‌دهد، به طوری که

$$\forall e \in E, \quad (\nabla f)(e) := f(e^+) - f(e^-). \quad (۹-۱)$$

این عملگر، نظیر گسسته عملگر مشتق (گرادیان) در $\mathbb{R}^n$ است. ماتریس متناظر با این عملگر که یک ماتریس $|E| \times |V|$ است را **ماتریس وقوع** گراف G می‌خوانیم. با سوءاستفاده از زبان، این ماتریس را با همان نماد ∇ نشان داده و داریم

$$\forall e \in E, x \in V, \quad \nabla(e, x) = \begin{cases} 1 & x = e^+, \\ -1 & x = e^-, \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

با توجه به تعریف دوگان، رابطه (۱-۱)، دوگان عملگر گرادیان، به صورت یک عملگر $\nabla^*: \mathcal{F}_\varphi(E) \rightarrow \mathcal{F}_\omega(V)$ تعریف می‌شود که

$$\forall f \in \mathcal{F}_\varphi(E), x \in V, \quad (\nabla^* f)(x) = \frac{1}{\omega(x)} \left(\sum_{e \in E: e^+ = x} \varphi(e) f(e) - \sum_{e \in E: e^- = x} \varphi(e) f(e) \right).$$

حال با توجه به رابطه (۱-۱) و (۷-۱)، برای هر تابع $f \in \mathcal{F}_\omega(V)$ داریم

$$\mathcal{E}(f) = \langle Lf, f \rangle_\omega = \|\nabla f\|_{\varphi, \omega}^2 = \langle \nabla f, \nabla f \rangle_\varphi = \langle \nabla^* \nabla f, f \rangle_\omega. \quad (۱۰-۱)$$

رابطه فوق به **فرمول گرین** معروف است و نظیر فرمول گرین در حالت پیوسته است.^۳ بنابراین برای هر ماتریس لاپلاسیان L داریم $L = \nabla^* \nabla$.

۴-۱ ویژه‌مقدارهای لاپلاسیان

در بخش ۳-۱ دیدیم که ماتریس لاپلاسیان تعمیم‌یافته، نسبت به $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ خود-الحاق است و کلیه ویژه‌مقدارهای آن حقیقی است. مهمترین قضیه درباره ویژه‌مقدارهای ماتریس‌های خود-الحاق، قضیه کورانت-فیشر است که یک تعریف معادل وردشی^۴ برای ویژه‌مقدارهای یک ماتریس خود-الحاق برحسب نسبت رایلی ارائه می‌دهد.

^۳ توجه کنید که رابطه (۱۰-۱) مستقل از نوع جهت‌گذاری گراف است که به نوعی قوانین کیرشهوف در مدارهای الکتریکی را تایید می‌کند.

^۴ variational

([۸۰، ۵۷، ۱۷] را ببینید).

قضیه ۱-۴-۱ (قضیه کورانت-فیشر)

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد که نسبت به ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ خود-الحاق است. همچنین فرض کنید $(\lambda_k)_{k \in [n]}$ طیف مرتب این ماتریس باشد. آنگاه برای هر $k \in [n]$ داریم

$$\lambda_k = \min_{W \in \mathcal{W}_k} \max_{f \in W} \left\{ \frac{\langle Af, f \rangle_\omega}{\langle f, f \rangle_\omega} \right\} = \max_{W \in \mathcal{W}_{k-1}^\perp} \min_{f \in W} \left\{ \frac{\langle Af, f \rangle_\omega}{\langle f, f \rangle_\omega} \right\}, \quad (11-1)$$

که

$$\mathcal{W}_k := \{W \mid \dim(W) \geq k\}, \quad \mathcal{W}_k^\perp := \{W \mid \dim(W^\perp) \leq k\}.$$

واضح است که در رابطه (۱۱-۱) مینیمم روی $\mathcal{W}_k$ ، برای زیرفضای W تولید شده توسط ویژهتابع‌های k ویژه‌مقدار اول به دست می‌آید. همچنین ماکسیمم روی $\mathcal{W}_{k-1}^\perp$ ، برای زیرفضای W° تولید شده توسط ویژهتابع‌های مربوط به ویژه‌مقدارهای $\lambda_k, \dots, \lambda_n$ به دست می‌آید. به کمک این قضیه و رابطه (۷-۱)، می‌توان تعریف وردشی زیر را برای ویژه‌مقدارهای ماتریس لاپلاسین به دست آورد.

نتیجه ۲-۴-۱

اگر L یک ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته و $(\lambda_k)_{k \in [n]}$ طیف مرتب آن باشد، آنگاه داریم

$$\lambda_k = \min_{\dim W \geq k} \max_{f \in W} \left\{ \frac{\mathcal{E}(f)}{\|f\|_{\mathbf{r}, \omega}^2} \right\} = \min_{\dim W \geq k} \max_{f \in W} \left\{ \frac{\|\nabla f\|_{\mathbf{r}, \varphi}^2 + \|f\|_{\mathbf{r}, p}^2}{\|f\|_{\mathbf{r}, \omega}^2} \right\}. \quad (12-1)$$

به‌طور ویژه، اگر L ماتریس لاپلاسین باشد، داریم

$$\lambda_1 = \min_{f \perp \mathbb{1}} \frac{\mathcal{E}(f)}{\|f\|_{\mathbf{r}, \omega}^2}, \quad \lambda_n = \max_{f \neq 0} \frac{\mathcal{E}(f)}{\|f\|_{\mathbf{r}, \omega}^2},$$

که در آن $\mathbb{1}$ تابع ثابت ۱ روی V است.

به‌طور مشابه می‌توان برای میانگین k ویژه‌مقدار اول یک ماتریس خود-الحاق نیز یک تعریف وردشی به‌صورت زیر ارائه کرد. این قضیه به **قضیه کی-فن** معروف است ([۱۷] را ببینید).

قضیه ۳-۴-۱ (قضیه کی-فن)

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ خود-الحاق نسبت به ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ باشد و $(\lambda_k)_{k \in [n]}$ را طیف مرتب

این ماتریس بگیرید. هم‌چنین برای هر $k \in \llbracket n \rrbracket$ قرار دهید

$$\bar{\lambda}_k := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i.$$

در این صورت داریم

$$\bar{\lambda}_k = \min_{\substack{f_i \perp_{\omega} f_j \\ 1 \leq i \neq j \leq k}} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\langle Af_i, f_i \rangle_{\omega}}{\langle f_i, f_i \rangle_{\omega}}. \quad (13-1)$$

مینیم روی همه k بردارهای دو به دو متعامد در $\mathbb{R}^n$ گرفته می‌شود.

واضح است که در رابطه (۱۳-۱) مینیم برای k ویژه‌تابع متعامد مربوط به ویژه‌مقدارهای $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ به دست می‌آید. ویژه‌مقدارهای لاپلاسین اطلاعات زیادی را درباره ویژگی‌های گراف زمینه در خود دارند. برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به [۶۹، ۶۶، ۳۰، ۲۸، ۱۸] مراجعه کنید.

۵-۱ ویژه‌تابع‌های لاپلاسین

برعکس ویژه‌مقدارها، متاسفانه اطلاعات کمی درباره ویژه‌تابع‌های ماتریس لاپلاسین وجود دارد و بررسی ویژگی‌های هندسی ویژه‌تابع‌ها کمتر مورد توجه بوده است. مهمترین قضیه درباره ویژه‌تابع‌های ماتریس‌ها با دایره‌های نامنفی، به **قضیه پرون-فروبنیوس** معروف است. برای بیان این قضیه، ابتدا چند مفهوم را معرفی می‌کنیم. ماتریس A را **تحویل‌ناپذیر** گوئیم، هرگاه برای هر i, j ، یک k وجود داشته باشد که $(A^k)(i, j) > 0$. برای ماتریس $n \times n$ ، A ، گراف جهت‌دار G_A را با مجموعه رئوس $\llbracket n \rrbracket$ تعریف کنید که i به j وصل است اگر و تنها اگر $A_{ij} > 0$. در این صورت A تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر G_A قویاً همبند باشد. **شعاع طیفی** ماتریس A با $\rho(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ یک ویژه‌مقدار } A \text{ است}\}.$$

قضیه ۱-۵-۱ (قضیه پرون-فروبنیوس)

فرض کنید A یک ماتریس تحویل‌ناپذیر با دایره‌های نامنفی و $\rho = \rho(A)$ شعاع طیفی A باشد. در این صورت

۱. ρ یک ویژه‌مقدار (چپ و راست) A بوده و تکرر هندسی و جبری آن یک است (ویژه‌مقدار ساده است).

۲. ρ یک ویژه‌تابع دارد که همه جا مثبت است.

۳. اگر f یک ویژه‌تابع (چپ یا راست) A باشد که همه جا نامنفی است، آن‌گاه f ویژه‌تابع متناظر با ρ بوده و همه جا مثبت است.

۴. اگر B یک ماتریس نامنفی باشد که درایه به درایه کوچکتر از A است یا B یک زیرماتریس اصلی A باشد و σ یک ویژه‌مقدار B باشد، آن‌گاه $|\sigma| \leq \rho$. هم‌چنین اگر $|\sigma| = \rho$ ، آن‌گاه $A = B$.

برای اثبات قضیه پرون-فروبنیوس و جزئیات بیشتر به عنوان مثال [۴۶، ۴۹] را ببینید. برای تعمیمی از قضیه پرون-فروبنیوس، بخش ۱-۳ را ببینید. به عنوان یک نتیجه از قضیه پرون-فروبنیوس ثابت می‌کنیم که اولین ویژه‌مقدار ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته گراف‌های همبند، ساده است.

نتیجه ۱-۵-۲

فرض کنید L ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته گراف وزن‌دار همبند G باشد. در این صورت کوچکترین ویژه‌مقدار L ، λ_1 ، ساده است و ویژه‌تابع متناظر آن همه جا هم‌علامت و ناصفر است.

برهان. قرار دهید $c := \max\{|L(i, i)| : 1 \leq i \leq |V(G)|\}$. بنابراین همه درایه‌های ماتریس $L' := cI - L$ نامنفی است. از طرف دیگر G همبند است و برای هر یال $ij \in E(G)$ داریم $L'(i, j) > 0$ ، بنابراین L' تحویل‌ناپذیر بوده و طبق قضیه پرون-فروبنیوس، بزرگترین ویژه‌مقدار آن ساده و ویژه‌تابع متناظر آن همه جا هم‌علامت و ناصفر است. اما λ ویژه‌مقدار L است اگر و تنها اگر $c - \lambda$ ویژه‌مقدار L' باشد و ویژه‌تابع متناظر آن دو یکسان است. این مطلب حکم را نتیجه می‌دهد. ■

قضیه مهم بعدی درباره ویژه‌تابع‌های لاپلاسین، در واقع تعمیمی از اصل ماکسیمم برای عملگرهای لاپلاس کلاسیک است. راس $x \in V(G)$ را یک مینیمم موضعی برای تابع $f \in \mathcal{F}(V)$ گوئیم، هرگاه $f(y) \geq f(x)$ ، برای هر $y \sim x$ و حداقل یک $z \sim x$ یافت شود که $f(z) > f(x)$. ماکسیمم موضعی نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

قضیه ۱-۵-۳ (اصل ماکسیمم) [۴۸، ۱۳]

اگر f یک ویژه‌تابع یک ماتریس لاپلاسین باشد، آن‌گاه f مینیمم موضعی نامنفی و ماکسیمم موضعی نامثبت ندارد. برهان. فرض کنید f ویژه‌تابع مربوط به ویژه‌مقدار $\lambda \geq 0$ و x یک مینیمم موضعی برای f باشد. در این صورت با توجه به (۱-۵) داریم

$$\lambda f(x) = (Lf)(x) = \frac{1}{\omega(x)} \sum_{y: x \sim y} \varphi(xy) (f(x) - f(y)) < 0.$$

■ حالت ماکسیمم موضعی نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

ملاحظه ۱-۵-۴

♦ قضیه فوق برای ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته با پتانسیل ناصفر لزوماً برقرار نیست. برای مشاهده دیگر ویژگی‌های ویژه‌تابع‌های لاپلاسین، [۲۰] را ببینید.

۱-۶ گراف با مرز و ویژه‌مقدار دیریشه

نظریه معادلات دیفرانسیل جزئی روی منیفلدهای ریمانی کاربردهای زیادی در فیزیک ریاضی دارد. از جمله مسائل مهم در این نظریه، حل **معادله پواسون** است که برای منیفلد ریمانی M و تابع حقیقی داده شده $f \in \mathcal{C}_0(M)$ ^۵، به دنبال تابع $u \in \mathcal{C}_2(M)$ می‌گردد که در معادله پواسون زیر صدق کند

$$\Delta u = f, \quad \text{روی } M. \quad (۱۴-۱)$$

که در آن Δ عملگر لاپلاس-بلترامی کلاسیک است (بخش ۱-۹ را ببینید). هم‌چنین مساله مهم دیگر **مساله ویژه‌مقدار پواسون** است که به صورت پیدا کردن اسکالر λ و تابع u که در معادله زیر صدق کند، بیان می‌شود،

$$\Delta u = \lambda u, \quad \text{روی } M.$$

در این نظریه به طور مشابه مساله‌های مهم دیگری نیز تحت عنوان **مساله مقدار مرزی** برای منیفلدهای مرزدار وجود دارد. به عنوان مثال اگر M یک منیفلد مرزدار با مرز ∂M باشد، آنگاه **مساله ویژه‌مقدار دیریشه** به صورت زیر بیان می‌شود،

$$\begin{aligned} \Delta u &= \lambda u, \quad \text{روی } M, \\ u &= 0, \quad \text{روی } \partial M. \end{aligned} \quad (۱۵-۱)$$

شرط (۱۵-۱) را **شرط دیریشه** می‌گویند. مطالعه نظیر گسسته این مسائل با در نظر گرفتن گراف‌ها به جای منیفلدها، اخیراً مورد توجه محققین قرار گرفته است. برای نمونه [۷۵، ۱۲، ۱۱] را ببینید. برای بررسی مسائل مقدار مرزی روی گراف‌ها، ابتدا باید مفهوم گراف با مرز را تعریف کنیم.

تعریف ۱-۶-۱

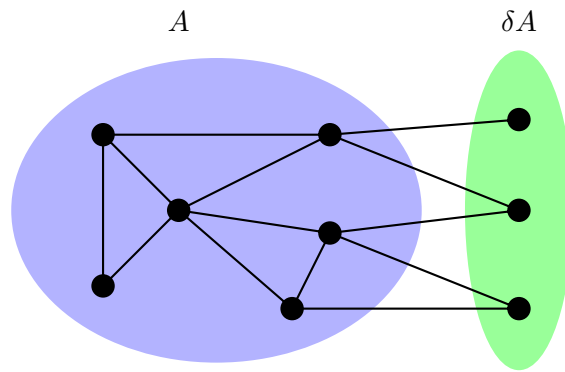
برای گراف بدون جهت $G = (V, E)$ و زیرمجموعه $A \subseteq V$ ، **مرز یالی** و **مرز راسی** A را به ترتیب با ∂A و δA نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\partial A := \{e = xy \in E : x \in A, y \in V \setminus A\},$$

$$\delta A := \{x \in V \setminus A : \exists y \in A, x \sim y\}.$$

اگر برای یک زیرمجموعه $A \subseteq V$ داشته باشیم، $V = A \cup \delta A$ ، آنگاه G به همراه A را یک **گراف با مرز** گفته و δA را مرز G می‌نامیم (شکل ۱-۱ را ببینید). ▲

^۵ $\mathcal{C}_k(M)$ خانواده توابع حقیقی k بار مشتق‌پذیر پیوسته روی M تعریف می‌شود.

شکل ۱-۱: گراف با مرز (G, A) .

فرض کنید (G, A) یک گراف وزن‌دار با مرز و L ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته G است، در این صورت **مساله ویژه مقدار دیریشله** برای این گراف با مرز به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} (Lf)(x) &= \lambda f(x), \quad \forall x \in A, \\ f(x) &= 0, \quad \forall x \in \delta A. \end{aligned} \quad (۱۶-۱)$$

مقدار λ را که برای آن، معادله (۱۶-۱) به ازای یک $f \in \mathcal{F}_\omega(V)$ ناصفر جواب دارد، یک **ویژه مقدار دیریشله** می‌گوییم. لم زیر نشان می‌دهد که تعداد $|A|$ ویژه مقدار دیریشله وجود دارد.

لم ۱-۶-۲

فرض کنید (G, A) یک گراف وزن‌دار با مرز و L ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته G است. ماتریس $L[A]$ را ماتریس $|A| \times |A|$ حاصل از تحدید L به سطرها و ستون‌های مربوط به رئوس A تعریف کنید. در این صورت معادله (۱۶-۱) به ازای یک λ حقیقی و یک $f \in \mathcal{F}_\omega(V)$ ناصفر جواب دارد، اگر و تنها اگر λ ویژه مقدار $L[A]$ باشد. هم‌چنین تحدید f به A یک ویژه تابع $L[A]$ متناظر با ویژه مقدار λ است.

برهان. اگر λ و $f \neq 0$ در معادله (۱۶-۱) صدق کنند، برای هر $x \in A$ داریم

$$\begin{aligned} (Lf)(x) &= \frac{1}{\omega(x)} \sum_{y \in V: y \sim x} \varphi(xy)(f(x) - f(y)) + \frac{p(x)}{\omega(x)} f(x) \\ &= \frac{\deg(x) + p(x)}{\omega(x)} f(x) - \sum_{y \in A: y \sim x} \frac{\varphi(xy)}{\omega(x)} f(y) = (L[A]f)(x). \end{aligned} \quad (۱۷-۱)$$

لذا λ ویژه مقدار $L[A]$ است. حال برعکس اگر λ یک ویژه مقدار $L[A]$ باشد و $f \in \mathcal{F}_\omega(A)$ ویژه تابع آن باشد، می‌توانیم با قراردادن $f = 0$ روی $V \setminus A$ ، f را به یک تابع روی V توسیع دهیم. با توجه به محاسبات بالا نتیجه می‌گیریم که λ و f یک جواب معادله (۱۶-۱) است. ■

ماتریس $L[A]$ خود یک ماتریس لاپلاسیان تعمیم‌یافته است. طیف مرتب $L[A]$ را با نمادهای $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_{|A|}(A)$ نشان می‌دهیم و $\lambda_k(A)$ را k -امین ویژه‌مقدار دیریشله برای گراف با مرز (G, A) می‌نامیم. با توجه به تساوی (۱۷-۱) و قضیه ۱-۴-۱، می‌توانیم یک تعریف وردشی برای کوچکترین ویژه‌مقدار دیریشله، $\lambda_1(A)$ ، به صورت زیر به دست آوریم

$$\lambda_1(A) = \min_{\substack{f \neq 0 \\ f \text{ روی } V \setminus A}} \left\{ \frac{\mathcal{E}(f)}{\langle f, f \rangle_\omega} \right\} = \min_{\substack{f \neq 0 \\ f \text{ روی } V \setminus A}} \left\{ \frac{\langle Lf, f \rangle_\omega}{\sum_{x \in V} \omega(x) f(x)^2} \right\}. \quad (18-1)$$

هم‌چنین با توجه به نتیجه ۲-۵-۱، اگر زیرگراف القایی روی A ، $\langle A \rangle$ ، همبند باشد، در این صورت $\lambda_1(A)$ ساده است، یعنی $\lambda_2(A) > \lambda_1(A)$. ویژه‌مقدار $\lambda_1(A)$ را گاهی ویژه‌مقدار دیریشله اصلی نیز می‌گویند. از نقطه نظر احتمالات، رابطه جالبی بین ویژه‌مقدار دیریشله اصلی و زمان خروج گشت تصادفی از مجموعه A وجود دارد (مثلاً [۱] را ببینید).

ملاحظه ۳-۶-۱

لازم به ذکر است که تا جایی که به مسائل ایزوپریمتري (فصل ۲) و ماتریس لاپلاسیان مربوط است، چارچوب نظریه گراف‌های وزن‌دار با پتانسیل، نظریه گراف‌های با مرز را شامل می‌شود. به عبارت دیگر نظریه گراف‌های با مرز حالت خاصی از نظریه گراف‌های با پتانسیل است. برای دیدن این مطلب، فرض کنید (G, ω, φ, p) یک گراف وزن‌دار، با مرز δA باشد. حال گراف القایی روی A را با G' نشان داده و آن را به یک گراف وزن‌دار بدون مرز $(G', \omega', \varphi', p')$ تبدیل کنید که در آن ω' و φ' به ترتیب تحدید ω و φ به راس‌ها و یال‌های G' است و برای هر $x \in A$ داریم

$$p'(x) := p(x) + \sum_{y \in V \setminus A: y \sim x} \varphi(xy).$$

حال اگر طیف مرتب G' را با $(\lambda'_k)_{k \in [|A|]}$ نشان دهیم، واضح است که

$$\lambda_k(A) = \lambda'_k, \quad \forall k \in [|A|].$$



۷-۱ گراف جهت‌دار و گشت تصادفی

در این بخش می‌خواهیم از سه شرط ماتریس لاپلاسیان (خودالحاقی، نامثبت بودن درایه‌های خارج از قطر و صفر بودن جمع درایه‌های هر سطر) شرط خودالحاقی را برداریم و در واقع گراف بدون جهت را به گراف جهت‌دار تبدیل کنیم و ببینیم چگونه می‌توان مطالب گفته شده را به فضای گراف‌های جهت‌دار تعمیم داد. خودالحاق نبودن عملگرها، مشکلاتی ایجاد می‌کند، از جمله این‌که ویژه‌مقدارها لزوماً حقیقی نیستند. برای غلبه بر این مشکلات، فرایندی به نام فرایند متقارن‌سازی را معرفی می‌کنیم؛ به این معنی که با شروع از یک گراف جهت‌دار وزن‌دار (زنجر مارکف غیر برگشت‌پذیر)، یک گراف بدون جهت وزن‌دار (زنجر مارکف برگشت‌پذیر) به دست می‌آوریم به طوری که بسیاری از

خواص گراف اولیه مثل معیارهای همبندی و رسانایی حفظ شود. این فرایند مقارن‌سازی را می‌توان به عنوان نمونه در [۲۷، ۳۲، ۴۲] مشاهده کرد. برای کسب اطلاعات بیشتر درباره زنجیرهای مارکف روی گراف‌ها، [۱] را ببینید. از طرف دیگر، فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار روی n راس باشد. منظور از **ماتریس انتقال** زنجیر مارکوف روی G ، یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های نامنفی است که برای هر $x, y \in V$ ، $x \neq y$ ، $K(x, y) > 0$ اگر و تنها اگر $(x, y) \in E$ و هم‌چنین برای هر $x \in V$ ، $\sum_{y \in V} K(x, y) = 1$. به کمک این ماتریس می‌توان یک گشت تصادفی روی G تعریف کرد، به‌طوری که در هر گام احتمال رفتن از راس x به راس y برابر $K(x, y)$ است. فرض کنید L یک ماتریس باشد که (۱) درایه‌های خارج از قطر اصلی همگی نامثبت باشند و (۲) جمع درایه‌های هر سطر L برابر صفر باشد، (شرط خودالحاق بودن L لزوماً برقرار نیست)، در این صورت می‌توانیم یک گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ با $V := [n]$ و $E := \{(x, y) \mid x, y \in V, x \neq y, L(x, y) \neq 0\}$ تشکیل دهیم و یک گشت تصادفی روی G با ماتریس انتقال K بسازیم که

$$K = I - L/|L|.$$

که در این جا $|L| := \max_{x \in V} L(x, x)$ و I ماتریس همانی است. ماتریس L را **مولد** گشت تصادفی K می‌گوییم. اگر $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار قویاً همبند و K ماتریس انتقال گشت تصادفی روی آن باشد، آنگاه طبق قضیه پرون-فروبنیوس یک بردار با درایه‌های مثبت $\pi \in \mathcal{F}^+(V)$ وجود دارد که $\pi K = \rho \pi$ که در آن ρ شعاع طیفی K است. اما چون $K \mathbb{1} = \mathbb{1}$ ، داریم $\rho = 1$. هم‌چنین اگر فرض کنیم $\sum_{x \in V} \pi(x) = 1$ ، بردار π با این خاصیت یکتا است. این بردار را **توزیع ایستا** مربوط به K می‌نامیم. در صورتی که G قویاً همبند و غیر دوبخشی باشد، گشت تصادفی با شروع از هر توزیع دلخواه به سمت توزیع ایستا میل می‌کند [۶۴].

$$\pi K = \pi. \quad (۱۹-۱)$$

برای گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ ، یک تابع $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ را یک **شار** یا **چرخش** می‌گوییم، هرگاه برای هر $x \in V$ ، شار خروجی و ورودی راس x برابر باشد، یعنی

$$\sum_{y : (x, y) \in E} \varphi(x, y) = \sum_{z : (z, x) \in E} \varphi(z, x).$$

اگر φ یک شار باشد، آنگاه برای هر زیرمجموعه $A \subseteq V$ ، شار خروجی از A و شار ورودی به A برابر است؛ یعنی

$$\varphi(\vec{\partial} A) := \sum_{\substack{x \in A, y \in V \setminus A \\ (x, y) \in E}} \varphi(x, y) = \varphi(\overleftarrow{\partial} A) := \sum_{\substack{x \in A, y \in V \setminus A \\ (y, x) \in E}} \varphi(x, y).$$

گزاره ۱-۷-۱

اگر $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار، K یک ماتریس انتقال روی آن و π توزیع ایستای مربوط به آن باشد، آن‌گاه تابع $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ که به صورت زیر تعریف می‌شود یک شار روی G است.

$$\forall (x, y) \in E, \quad \varphi(x, y) := \pi(x) K(x, y).$$

برهان. با توجه به رابطه (۱۹-۱) برای هر $x \in V$ داریم

$$\sum_{z: (z, x) \in E} \varphi(z, x) = \sum_{z: (z, x) \in E} \pi(z) K(z, x) = \pi(x) = \sum_{y: (x, y) \in E} \pi(x) K(x, y) = \sum_{y: (x, y) \in E} \varphi(x, y).$$

■

حال آماده‌ایم تا فرایند متقارن‌سازی را انجام دهیم. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار و L یک مولد روی آن با توزیع ایستای π باشد. گراف غیرجهت‌دار $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ را تعریف می‌کنیم که $\bar{V} := V$ و $\bar{E} := \{xy : (x, y) \text{ یا } (y, x) \in E\}$. هم‌چنین شار متقارن $\bar{\varphi}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall xy \in \bar{E}, \quad \bar{\varphi}(xy) := \frac{1}{2} (\varphi(x, y) + \varphi(y, x)).$$

حال یک گراف وزن‌دار بدون پتانسیل $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E}, \pi, \bar{\varphi})$ داریم. گراف‌های (G, π, φ) و $(\bar{G}, \pi, \bar{\varphi})$ از منظرهای مختلف، با یکدیگر تشابه دارند که در این‌جا به دو نمونه اشاره می‌کنیم:^۶

۱. اگر ماتریس لاپلاسیان مربوط به $\bar{G}$ را با $\bar{L}$ نشان دهیم، داریم

$$\forall xy \in \bar{E}, \quad \bar{L}(x, y) = -\frac{\bar{\varphi}(xy)}{\pi(x)} = \frac{1}{2|L|} \left(L(x, y) + \frac{\pi(y) L(y, x)}{\pi(x)} \right).$$

در نتیجه

$$\bar{L} = \frac{1}{2|L|} (L + L^*),$$

که L^* عملگر دوگان L نسبت به ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$ است. لذا توانسته‌ایم از یک ماتریس L که خودالحاق نیست، یک ماتریس لاپلاسیان خودالحاق $\bar{L}$ بسازیم.^۷ هم‌چنین از رابطه فوق می‌بینیم، برای هر $f \in \mathcal{F}(V)$,

$$\langle \bar{L}f, f \rangle_\pi = \frac{1}{2|L|} (\langle Lf, f \rangle_\pi + \langle L^*f, f \rangle_\pi) = \langle \frac{L}{|L|} f, f \rangle_\pi.$$

^۶ ذکر این نکته خالی از لطف نیست که با استفاده از نظریه مدارهای الکتریکی و قوانین کیرشهوف هم می‌توان به طور مستقل این نتایج را به دست آورد.

^۷ روش‌های دیگری نیز برای متقارن‌سازی مثل استفاده از ماتریس $\hat{L} := LL^*$ وجود دارد. برای جزئیات بیشتر [۴۲] را ببینید.

۲. گراف‌های (G, π, φ) و $(\bar{G}, \pi, \bar{\varphi})$ از نظر شار مشابه هستند؛ به این معنی که برای هر زیرمجموعه $A \subseteq V$ داریم

$$\bar{\varphi}(\partial A) = \sum_{\substack{xy \in \bar{E} \\ x \in A, y \in V \setminus A}} \bar{\varphi}(x, y) = \frac{1}{\varphi} (\varphi(\vec{\partial} A) + \varphi(\overleftarrow{\partial} A)) = \varphi(\vec{\partial} A).$$

با توجه به مطالب گفته شده در این بخش، با فرایند مقارن‌سازی تبدیل گراف جهت‌دار (G, π, φ) به گراف غیرجهت‌دار $(\bar{G}, \pi, \bar{\varphi})$ ، می‌توانیم کلیه مطالب این رساله را به فضای گراف‌های جهت‌دار تعمیم دهیم.

۸-۱ گراف کوانتومی

در این بخش گراف‌های کوانتومی را به عنوان تعمیم پیوسته گراف‌های وزن‌دار معرفی کرده، مفاهیم ویژه‌مقدارها و ویژه‌مقدارهای دیریشله را به این گراف‌ها تعمیم می‌دهیم و حسابان روی این گراف‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این گراف‌ها فضای مورد مطالعه در بخش ۳-۳ تا بخش ۳-۴ هستند. خواننده‌ای که علاقه‌ای به مطالعه این قسمت از رساله ندارد، می‌تواند از خواندن این بخش صرف نظر کند.

فرض کنید $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ یک گراف وزن‌دار باشد. می‌خواهیم G را که یک موجود گسسته است به یک ساختار پیوسته تبدیل کنیم. به هر یال $xy \in E$ ، یک بازه از اعداد حقیقی $[x, y]$ نسبت می‌دهیم که طول آن $1/\varphi(xy)$ است و به آن یک **تکه یال** می‌گوییم. نقاط مرزی تکه یال‌ها را که مرتبط با یک راس x هستند، یکی می‌کنیم و هم‌چنان با x نشان می‌دهیم. شی هندسی به‌دست آمده، یک منیفلد یک بعدی با نقاط تکینی است. این منیفلد به همراه متر کوتاه‌ترین فاصله، یک فضای متریک تشکیل می‌دهد. این فضای متریک را یک **گراف متریک** می‌خوانیم و با نماد $\mathcal{G}$ نشان می‌دهیم. این مدل برای گراف‌های ساده توسط فریدمن معرفی شد [۴۳]. مدل وزن‌دار این گراف‌ها، گاهی **گراف متری‌شده** نیز گفته می‌شود [۸، ۷].

نماد ۱-۸-۱

در این رساله نمادهایی مانند $\mathcal{G}, f, \mathcal{A}$ را برای مدل متریک استفاده می‌کنیم و از قلم رومی مانند G, f, A برای حالت گسسته استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال G یک گراف و $\mathcal{G}$ یک گراف متریک را نشان می‌دهد. هم‌چنین f تابع حقیقی روی مجموعه رئوس $V(G)$ و f تابع حقیقی روی $\mathcal{G}$ است. درنهایت A یک زیرمجموعه از رئوس $V(G)$ و $\mathcal{A}$ یک زیرمجموعه از $\mathcal{G}$ را مراد می‌کند. ▼

روی هر تکه یال $[x, y]$ حسابان کلاسیک را به‌کار می‌بریم. به‌ویژه $\rho_{x,y}$ را اندازه لبگ طبیعی روی بازه $[x, y]$ می‌گیریم، سپس این اندازه‌ها را به یک اندازه ρ روی $\mathcal{G}$ توسیع دهیم که به‌صورت $\rho := \sum_{xy \in E} \rho_{x,y}$ تعریف می‌شود. با توجه به این‌که اندازه هر تکه یال $[x, y]$ برابر $\rho([x, y]) = 1/\varphi(xy)$ است و $\varphi(xy)$ رسانایی عبوری از یال xy را نشان می‌دهد (بخش ۲-۱ را ببینید)، لذا می‌توان اندازه ρ را به عنوان **اندازه مقاومت** (عکس رسانایی) روی $\mathcal{G}$ در نظر گرفت (برای دیدن ارتباط این مدل با شبکه‌های الکتریکی، [۸] را ببینید). هم‌چنین توابع ω, p روی $V(G)$ را

می‌توان به اندازه‌های اتمی روی G تعمیم داد. با سوءاستفاده از زبان، این اندازه‌ها را با همان نمادهای p, ω نشان می‌دهیم و داریم

$$\omega := \sum_{x \in V} \omega(x) \delta_x, \quad p := \sum_{x \in V} p(x) \delta_x,$$

که δ_x تابع دلتای دیراک است. با داشتن سه اندازه ρ, ω, p روی G می‌توانیم روی این گراف متریک، حسابان معمول را انجام دهیم. به‌ویژه، در ادامه قصد داریم مفهوم انرژی را برای گراف‌های متریک تعمیم دهیم. به این منظور $\mathcal{F}_*(G)$ را فضای همه توابع حقیقی **مطلقاً پیوسته** روی G تعریف کنید (یعنی روی هر تکه یال مطلقاً پیوسته باشد). برای هر تابع $f \in \mathcal{F}_*(G)$ ، **انرژی** f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{E}(f) := \int (f')^2 d\rho + \int f^2 dp \in \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\},$$

که f' **مشتق ضعیف** f را نشان می‌دهد. توجه کنید که اگر تابع $f \in \mathcal{F}_*(G)$ روی هر تکه یال یک خط راست باشد، آنگاه برای هر نقطه $a \in G \setminus V$ که روی تکه یال $[x, y]$ است، داریم $|f'(a)| = |f(x) - f(y)| / \rho([x, y])$. بنابراین

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{xy \in E} \varphi(xy) |f(x) - f(y)|^2 + \sum_{x \in V} p(x) f(x)^2,$$

که با تعریف انرژی گسسته در رابطه (۷-۱) مطابق است. تابع $f \in \mathcal{F}_*(G)$ که روی هر تکه یال یک خط راست است را یک تابع **قطعه قطعه آفین** می‌گوییم. در نهایت، برای تابع $f \in \mathcal{F}_*(G)$ تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_{\varphi, \omega}^2 := \int f^2 d\omega = \sum_{x \in V} \omega(x) f(x)^2.$$

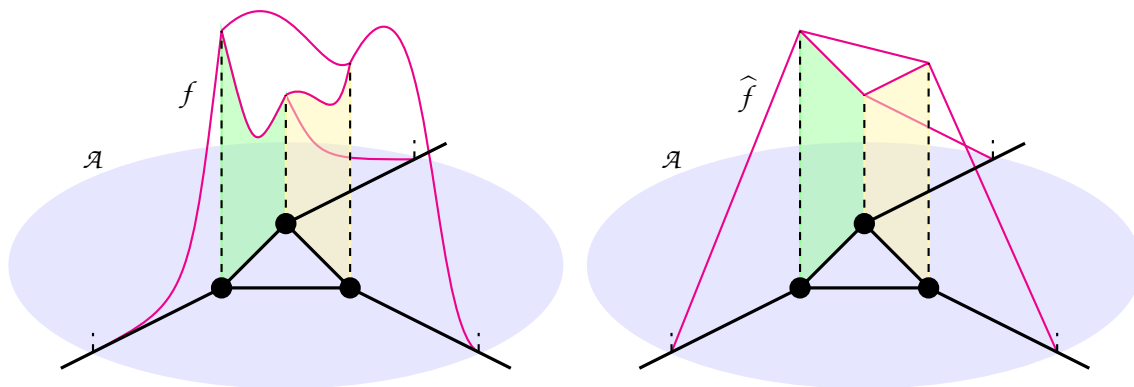
اگر L را ماتریس لاپلاسیان تعمیم‌یافته مربوط به G بگیریم، زوج (G, L) را یک **گراف کوانتومی** می‌خوانیم (می‌توان عملگر L را به‌صورت پیوسته تعمیم داد به‌طوری که روی توابع قطعه قطعه آفین، منطبق بر L باشد، [۸] را ببینید). برای مشاهده سابقه تعریف گراف‌های کوانتومی و کاربردهای آن [۱۶] را ببینید.

حال آماده‌ایم تا ویژه‌مقدار دیریشله را به گراف‌های کوانتومی تعمیم دهیم. خانواده $\mathcal{D}(G)$ (یا به سادگی $\mathcal{D}$) خانواده همه زیرمجموعه‌های G تعریف می‌شود که باز و همبند هستند و اشتراک آن‌ها با مجموعه V ناتهی است. برای یک زیرمجموعه $\mathcal{A} \in \mathcal{D}(G)$ ، نماد $\partial \mathcal{A}$ را مرز (توپولوژیک) $\mathcal{A}$ تعریف می‌کنیم و $\mathcal{F}_*(\mathcal{A})$ را زیرفضای $\mathcal{F}_*(G)$ تعریف می‌کنیم که از توابعی تشکیل شده که روی مجموعه $G \setminus \mathcal{A}$ برابر صفر است. **ویژه‌مقدار دیریشله** اول مجموعه $\mathcal{D}(G)$ ، $\lambda_1(\mathcal{A})$ ، به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lambda_1(\mathcal{A}) := \inf_{f \in \mathcal{F}_*(\mathcal{A}) : \|f\|_{\varphi, \omega}^2 \neq 0} \frac{\mathcal{E}(f)}{\|f\|_{\varphi, \omega}^2} \quad (20-1)$$

در ادامه سعی می‌کنیم اطلاعاتی درباره تابع مینیمم‌گر در رابطه (۲۰-۱) به‌دست آوریم. ابتدا فرض کنید

$f \in \mathcal{F}_*(\mathcal{A})$ داده شده و $\hat{f}$ را تابعی در نظر بگیرید که روی رئوس $\mathcal{A} \cap V$ منطبق بر f است، روی $G \setminus \mathcal{A}$ برابر صفر بوده و روی G به صورت آفین توسیع یافته است، یعنی نقاط تعریف شده با خط راست به هم وصل شده‌اند (شکل ۲-۱ را ببینید). توجه کنید که $\mathcal{E}(\hat{f}) \leq \mathcal{E}(f)$ (چون خط راست کوتاه‌ترین مسیر است) و $\|f\|_{\gamma, \omega} = \|\hat{f}\|_{\gamma, \omega}$. این مشاهده نشان می‌دهد که در رابطه (۲۰-۱) می‌توانیم مینیم را تنها روی توابعی در $\mathcal{F}_*(\mathcal{A})$ بگیریم که توسیع آفین توابع گسسته در $\mathcal{F}(A)$ هستند.



شکل ۲-۱: تابع $f \in \mathcal{F}_*(\mathcal{A})$ و تابع خطی شده متناظرش $\hat{f}$.

حال فرض کنید (G, L) یک گراف کوانتومی باشد و تابع $\tilde{\varphi} : V \times G \rightarrow \mathbb{R}$ را به عنوان توسیعی از تابع شار φ به صورت زیر تعریف کنید،

$$\forall x \in V, a \in G, \quad \tilde{\varphi}(x, a) := \begin{cases} \frac{1}{\rho([x, a])} & a \neq x, \exists xy \in E : a \in [x, y] \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که ρ اندازه تعریف شده در بالا روی G است. حال برای زیرمجموعه $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ ، قرار دهید $A := \mathcal{A} \cap V$ و ماتریس $\hat{L}_{\mathcal{A}} = (\hat{L}_{\mathcal{A}}(x, y))_{x, y \in A}$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$\forall x, y \in A, \quad \hat{L}_{\mathcal{A}}(x, y) := \begin{cases} L(x, y) & x \neq y \\ \frac{1}{\omega(x)} \left(p(x) + \sum_{a \in A \cup \partial \mathcal{A}} \tilde{\varphi}(x, a) \right) & x = y. \end{cases} \quad (21-1)$$

توجه کنید که $\hat{L}_{\mathcal{A}}$ یک ماتریس لاپلاسین تعمیم یافته است. لم زیر که مشابه لم ۲-۶-۱ است، نشان می‌دهد که ویژه مقدار دیریشله اصلی $\lambda_1(\mathcal{A})$ برابر کوچکترین ویژه مقدار ماتریس $\hat{L}_{\mathcal{A}}$ است و توصیفی از مینیم گر رابطه (۲۰-۱) به دست می‌دهد.

برای هر مجموعه $\mathcal{A} \in \mathcal{D}(G)$ ، یک تابع یکتای مثبت $f_{\mathcal{A}}$ وجود دارد که مینیم را در رابطه (۲۰-۱) به دست می‌دهد و $\|f_{\mathcal{A}}\|_{\nu, \omega} = 1$. همچنین $\lambda_1(\mathcal{A})$ کوچکترین ویژه مقدار ماتریس $\hat{L}_{\mathcal{A}}$ است و داریم $\hat{L}_{\mathcal{A}} f_{\mathcal{A}} = \lambda_1(\mathcal{A}) f_{\mathcal{A}}$ که $f_{\mathcal{A}} := f_{\mathcal{A}}|_A$ تحدید تابع $f_{\mathcal{A}}$ به A است. علاوه بر این $f_{\mathcal{A}}$ برابر توسیع آفین $f_{\mathcal{A}}$ روی $\mathcal{A}$ است.

نتیجه ۳-۸-۱

تابع λ_1 روی $\mathcal{D}(G)$ ، نسبت به شمول، اکیداً نزولی است، یعنی اگر $\mathcal{A}, B \in \mathcal{D}(G)$ ، $\mathcal{A} \subsetneq B$ ، آنگاه $\lambda_1(B) < \lambda_1(\mathcal{A})$.

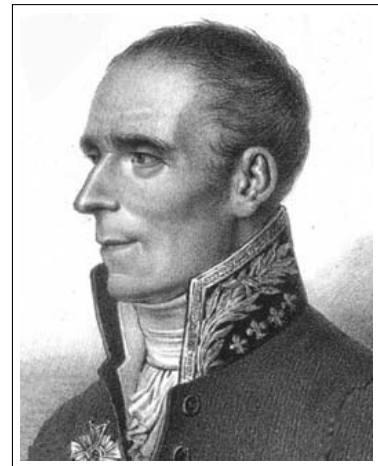
برهان. نامساوی $\lambda_1(B) \leq \lambda_1(\mathcal{A})$ با توجه به تعریف (رابطه (۲۰-۱)) واضح است، زیرا $\mathcal{F}_*(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}_*(B)$. اما با توجه به لم ۲-۸-۱ و نتیجه ۲-۵-۱، تابع مینیم گر f_B روی B کاملاً مثبت است. از طرف دیگر تابع مینیم گر $f_{\mathcal{A}}$ روی $B \setminus \mathcal{A}$ صفر است. بنابراین $f_{\mathcal{A}} \neq f_B$ و با توجه به یکتا بودن این مینیم گر‌ها، داریم $\lambda_1(B) \neq \lambda_1(\mathcal{A})$. ■

۹-۱ تاریخچه

عملگر لاپلاسین

عملگر لاپلاس-بلترامی (لاپلاسین) که پس از کارهای لاپلاس^۸ (۱۷۴۹-۱۸۲۷ م.) (شکل ۳-۱) و بلترامی^۹ (۱۸۳۵-۱۹۰۰ م.) به این نام شناخته شد، یک عملگر مهم در حسابان و آنالیز است. این عملگر در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ برای هر تابع دو بار مشتق پذیر $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر عمل می‌کند.

$$\Delta f := - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \right).$$



شکل ۳-۱: پیر سیمون لاپلاس

عملگر لاپلاسین را می‌توان برای منیفلدهای ریمانی نیز تعریف کرد [۶۰، ۲۳]. عملگر لاپلاسین گسسته تعریف شده در (۵-۱) در واقع نظیر گسسته عملگر لاپلاسین کلاسیک است که بسیاری از خواص آن را دارد. نام‌گذاری این عملگر در حالت گسسته توجیهات مختلفی دارد که در این جا به سه نمونه اشاره می‌کنیم.

توجیه اول. اگر عملگر گرادیان ∇ ، تعریف شده در (۹-۱)، را مانند عملگر مشتق در نظر بگیریم، عملگر لاپلاسین در رابطه (۱۰-۱) صدق می‌کند که نظیر فرمول گرین برای عملگر لاپلاسین کلاسیک است.

^۸Pierre-Simon Laplace

^۹Eugenio Beltrami

توجیه دوم. اگر گراف مسیر $\mathbb{Z}^1$ را نظیر گسسته اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و L را عملگر لاپلاسین آن در نظر بگیریم، داریم

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}), x \in \mathbb{Z}, \quad (Lf)(x) = (f(x) - f(x-1)) + (f(x) - f(x+1)).$$

همچنین در $\mathbb{R}$ برای تابع دو بار مشتق‌پذیر f داریم

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} (f(x-\epsilon) + f(x+\epsilon) - 2f(x)),$$

که تشابه L و Δ را در حالت گسسته و پیوسته نشان می‌دهد. به‌طور مشابه می‌توان تناظر فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ با گراف $\mathbb{Z} \square \dots \square \mathbb{Z}$ که ضرب دکارتی n گراف $\mathbb{Z}$ است، را با محاسبه عملگر لاپلاسین آن‌ها نشان داد.

توجیه سوم [۲۰]. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده اویلری باشد (یعنی همبند و درجه هر راس زوج باشد) و C را یک مدار اویلری بگیرید (برای تعاریف، [۲۱] را ببینید). گراف G را بر اساس تور اویلری C جهت‌گذاری کنید، به‌طوری‌که جهت همه یال‌ها در طول C رو به جلو باشد. مدار C ممکن است از یک راس چند بار عبور کند. فرض کنید این مدار از راس x ، k بار عبور کرده و در عبور i ام، از یال‌های $e_i = (y_i, x)$ و $e'_i = (x, y'_i)$ عبور می‌کند. مشتق دوم تابع $f \in \mathcal{F}(V)$ در نقطه x در جهت i را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$(\partial_{C,i}^2 f)(x) := (\nabla f)(e'_i) - (\nabla f)(e_i) = (f(y'_i) - f(x)) - (f(x) - f(y_i)).$$

حال طبق تعریف، عملگر لاپلاسین به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\Delta f)(x) = - \sum_{i=1}^k (\partial_{C,i}^2 f)(x) = \sum_{y: x \sim y} (f(x) - f(y)),$$

که مجدداً تشابه Δ و L تعریف شده در (۵-۱) را نشان می‌دهد.

^{۱۰} مجموعه رئوس، اعداد صحیح، هر راس i با رئوس $i-1$ و $i+1$ مجاور است و وزن رئوس و یال‌ها یک است.

فصل ۲

مسائل ایزوپریمتری مراتب بالا

۱-۲ طیف ایزوپریمتری

مساله ایزوپریمتری یک مساله قدیمی و عمیق در هندسه است (برای مشاهده تاریخچه این مساله، بخش ۲-۵ را ببینید). ثابت ایزوپریمتری به طور کلاسیک برای منیفلدهای ریمانی تعریف شده و مورد تحلیل قرار گرفته است ([۵۰، ۲۳، ۲۲، ۱۰] را ببینید). نظیر گسسته مساله ایزوپریمتری برای گراف‌ها نیز مورد توجه قرار گرفته و ارتباطات جالبی بین این مساله و مسائل مهم قرن پیدا شده است (مقدمه را ببینید). برای گراف ساده $G = (V, E)$ ، **ثابت ایزوپریمتری** آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$h(G) := \min_{|A| \leq \frac{|V|}{4}} \frac{|\partial A|}{|A|} = \min_{A \subseteq V} \max \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|}, \frac{|\partial A|}{|V \setminus A|} \right\}, \quad (1-2)$$

که ∂A مرز یالی زیرمجموعه A است (تعریف ۱-۶-۱). ثابت ایزوپریمتری معیاری برای میزان همبندی گراف به دست می‌دهد. در متون علمی نام‌های دیگری نیز برای ثابت ایزوپریمتری استفاده شده که از آن جمله می‌توان به **توسیع یالی**، **ثابت چیگر** یا **رسانایی** اشاره کرد. هم‌چنین نسخه میانگین ثابت ایزوپریمتری به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\vartheta(G) := \min_{A \subseteq V} \frac{|\partial A|}{|A||V \setminus A|}. \quad (2-2)$$

مساله ایزوپریمتری کلاسیک به صورت پیدا کردن مقدار دقیق ثابت ایزوپریمتری برای یک گراف ساده و زیرمجموعه مینیمم‌گر آن بیان می‌شود. مساله ایزوپریمتری (در هر دو نسخه عادی و میانگین آن) یک مساله NP -سخت شناخته می‌شود [۸۳، ۶۸] (فصل ۵ را ببینید). گراف‌های d -منظم با ثابت ایزوپریمتری بزرگ که به گراف **توسیع‌گر**

معروفاند، کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف ریاضی و علوم کامپیوتر دارند (مقدمه را ببینید). در این بخش می‌خواهیم مساله ایزوپریمتری را از ۲-افرازها به حالت k -افرازها تعمیم دهیم. اما در ادامه خواهیم دید که در حالت $k > 2$ ، برخلاف $k = 2$ ، تفاوت اساسی بین مساله روی افرازها و زیرافرازها وجود دارد. برای بیان صورت دقیق مساله ابتدا به چند تعریف نیاز داریم.

تعریف ۱-۱-۲

اگر X یک مجموعه متناهی و $f \in \mathcal{F}(X)$ یک تابع حقیقی روی X باشد، آنگاه برای هر زیرمجموعه $Y \subseteq X$ ،
تعریف می‌کنیم

$$f(Y) := \sum_{y \in Y} f(y).$$

همچنین اگر $g \in \mathcal{F}(X \times X)$ یک تابع حقیقی روی $X \times X$ باشد، آنگاه برای هر دو زیرمجموعه $Y, Z \subseteq X$ ،
تعریف می‌کنیم

$$g(Y, Z) := \sum_{y \in Y, z \in Z} g(y, z).$$

▲

تعریف ۲-۱-۲

برای مجموعه متناهی X و عدد صحیح $k, k \in [|X|]$ زیرمجموعه مجزا از X را یک k -زیرافراز می‌نامیم و اگر اجتماع این k زیرمجموعه برابر X باشد، آن را یک k -افراز می‌خوانیم. مجموعه همه k -افرازها و k -زیرافرازهای مجموعه X را به ترتیب با $\mathcal{P}_k(X)$ و $\mathcal{D}_k(X)$ نشان می‌دهیم.

$$\mathcal{D}_k(X) := \{\mathcal{A} := \{A_1, \dots, A_k\} : A_i \subset V, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j\},$$

$$\mathcal{P}_k(X) := \{\mathcal{A} := \{A_1, \dots, A_k\} : \mathcal{A} \in \mathcal{D}_k(X), \cup_{i=1}^k A_i = X\}.$$

▲

حال آماده‌ایم تا ثابت‌های ایزوپریمتری تعمیم‌یافته را در حالت کلی برای گراف وزن‌دار بیان کنیم.

تعریف ۳-۱-۲

برای گراف وزن‌دار داده شده $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ و عدد صحیح $k, k \in [|V|]$ k -امین عدد ایزوپریمتری مهین و

میانگین G را به ترتیب با $\iota_k^M(G)$ و $\iota_k^m(G)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\iota_k^M(G) := \min_{\{A_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(V)} \max_{1 \leq i \leq k} \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)}, \quad (۳-۲)$$

$$\iota_k^m(G) := \min_{\{A_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(V)} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)} \right). \quad (۴-۲)$$

برای زیرمجموعه $A \subset V$ ، مقدار $(\varphi(\partial A) + p(A))/\omega(A)$ را **شار خروجی نرمال‌شده** از A می‌گوییم. هم‌چنین با در نظر گرفتن k -افزاهای مجموعه رئوس، k -امین **مینیم برش نرمال‌شده** مهین و میانگین G را به ترتیب با $\tilde{\iota}_k^M(G)$ و $\tilde{\iota}_k^m(G)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\tilde{\iota}_k^M(G) := \min_{\{A_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(V)} \max_{1 \leq i \leq k} \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)}, \quad (۵-۲)$$

$$\tilde{\iota}_k^m(G) := \min_{\{A_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(V)} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)} \right). \quad (۶-۲)$$

منظور از **مساله ایزوپریمتری**، مساله پیدا کردن مقدار $\iota_k(G)$ و زیرافراز مینیم‌گر و منظور از **مساله برش نرمال‌شده**، مساله پیدا کردن مقدار $\tilde{\iota}_k(G)$ و افزاز مینیم‌گر آن است. $\blacktriangle$

اگر گراف ساده باشد، برای حالت $k=2$ ، داریم $\tilde{\iota}_2^M(G) = h(G)$ و $\tilde{\iota}_2^m(G) = (|V|/2) \vartheta(G)$ بنابراین ثابت‌های ایزوپریمتری کلاسیک، حالت خاصی از ثابت‌های ایزوپریمتری تعمیم‌یافته تعریف شده در بالا هستند.

ملاحظه ۴-۱-۲

توجه کنید که در این رساله هر جا علامت m یا M در بالای ثابت‌های ایزوپریمتری یا مینیم برش نرمال‌شده ظاهر نشده باشد، به این معنی است که گزاره مربوطه در هر دو حالت مهین و میانگین برقرار است. $\blacklozenge$

خواص اولیه ثابت‌های تعریف شده در بالا را در قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۵-۱-۲

برای هر گراف وزن‌دار بدون پتانسیل (G, ω, φ) روی n راس و هر عدد صحیح $k \in \llbracket n \rrbracket$ داریم

- (i) $\tilde{\iota}_2(G) = \iota_2(G)$.
- (ii) $\iota_k(G) \leq \iota_{k+1}(G)$.
- (iii) $\tilde{\iota}_k^M(G) \leq \tilde{\iota}_{k+1}^M(G)$.
- (iv) $\tilde{\iota}_k^m(G) \leq (1 - \frac{1}{k^2}) \tilde{\iota}_{k+1}^m(G) < \tilde{\iota}_{k+1}^m(G)$.
- (v) $\iota_k^M(G) \leq \tilde{\iota}_k^M(G) < (k-1) \iota_k^M(G), \quad \forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket$.

$$(vi) \quad \iota_k^m(G) \leq \tilde{\iota}_k^m(G) < 2(1 - \frac{1}{k}) \iota_k^m(G), \quad \forall k \in [3, n].$$

$$(vii) \quad \iota_k^m(G) \leq \iota_k^M(G) \leq k \iota_k^m(G).$$

همچنین اگر گراف با پتانسیل باشد، نامساوی‌های (ii) و (iii) برقرار هستند. اما تساوی (i) و کران‌های بالای (v)، (vi) و (vii) برقرار نیستند (مثال ۳-۲-۲ را ببینید). همچنین در این حالت به جای نامساوی (iv)، نامساوی زیر برقرار است،

$$(iv)' \quad \tilde{\iota}_k^m(G) < (1 + \frac{1}{k}) \tilde{\iota}_{k+1}^m(G).$$

ملاحظه ۶-۱-۲

همه نامساوی‌های قضیه ۵-۱-۲ محکم هستند. برای مشاهده مثال‌هایی که تساوی‌ها را به دست می‌دهند، بخش ۲-۲ را ببینید. همچنین اگر گراف با پتانسیل باشد، کران‌های بالای (v)، (vi) و (vii) برقرار نیستند، برای مشاهده مثال‌های نقض و همچنین مثالی برای محکم بودن نامساوی (iv)', مثال ۳-۲-۲ را ببینید. ♦
توجه کنید که تساوی (i) بیانگر یکسان بودن مساله ایزوپریمتری و مساله مینیم برش نرمال شده در حالت $k = 2$ است و نامساوی‌های (iv) و (v) نشان می‌دهند که ثابت ایزوپریمتری می‌تواند به عنوان تخمینی برای مینیم برش نرمال شده محسوب شود. برای مشاهده ابعاد محاسباتی این تخمین بخش ۳-۵ را ببینید.
برای اثبات قضیه فوق ابتدا به یک لم نیاز داریم.

لم ۷-۱-۲

برای عدد صحیح داده شده $k \geq 1$ و اعداد نامنفی λ و a_i, b_i ، $i = 1, \dots, k$ ، که $0 \leq \lambda \leq k$ و $\sum_i a_i = 1$ ، نامساوی زیر برقرار است

$$\sum_{i=1}^k a_i b_i \leq \max_j \left(\lambda a_j b_j + (1 - \frac{\lambda}{k}) b_j \right). \quad (7-2)$$

همچنین تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر برای هر i ، $b_i = 0$ یا برای هر i یک ثابت b ، $a_i = 1/k$ و $b_i = b$.
برهان. اگر $\lambda = 0$ یا $\lambda = k$ حکم واضح است. فرض کنید $0 < \lambda < k$ و قرارداد دهید $I := \sum_i a_i b_i$ و برای هر $j \in [k]$ قرار دهید $c_j := \lambda a_j b_j + (1 - \lambda/k) b_j$ و $t_j := k^2 a_j / \lambda + k / (k - \lambda)$. بنابراین

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^k t_j \right) \max_j (c_j - I) &\geq \sum_{j=1}^k t_j (c_j - I) \\ &= \left(\frac{k(k-\lambda)}{\lambda} + \frac{k\lambda}{k-\lambda} - \frac{k^2}{\lambda} - \frac{k^2}{k-\lambda} \right) I + \sum_j \left(k^2 a_j^2 b_j + b_j \right) \\ &= \sum_j \left(k^2 a_j^2 b_j + b_j - 2ka_j b_j \right) = \sum_j (ka_j - 1)^2 b_j \geq 0. \end{aligned}$$

در نتیجه داریم $\max_j (c_j - I) \geq 0$ و نامساوی حاصل می‌شود. همچنین شرایط وجود تساوی به راحتی از اثبات نتیجه می‌شود. ■

برهان قضیه ۵-۱-۲. (i). اگر G ناهمبند باشد، واضح است که $\iota_2(G) = \tilde{\iota}_2(G)$. پس فرض کنید G همبند است و مینیم $\iota_2(G)$ روی زیرافراز $\{A_1, A_2\} \in \mathcal{D}_2(V)$ اتفاق می‌افتد و قرار دهید $A^* = V \setminus (A_1 \cup A_2)$. بدون کم شدن کلیت فرض کنید $\varphi(A_1, A^*) \leq \varphi(A_2, A^*)$. در نتیجه داریم

$$\frac{\varphi(\partial(A_2 \cup A^*))}{\omega(A_2 \cup A^*)} = \frac{\varphi(\partial A_2) - \varphi(A_2, A^*) + \varphi(A_1, A^*)}{\omega(A_2) + \omega(A^*)} < \frac{\varphi(\partial A_2)}{\omega(A_2)}.$$

بنابراین افراز $\{A_1, A_2 \cup A^*\}$ نیز برای $\iota_2(G)$ مینیم‌گر است. لذا $\tilde{\iota}_2(G) \leq \iota_2(G)$ و حکم ثابت می‌شود. که متناقض با مینیم بودن $\{A_1, A_2\}$ است.

(ii). نامساوی (ii) برای نسخه مهین مستقیماً از تعریف حاصل می‌شود. برای اثبات آن در نسخه میانگین، فرض کنید $\{A_i\}_1^{k+1} \in \mathcal{D}_{k+1}(V)$ زیرافراز مینیم‌گر برای $\iota_{k+1}^m(G)$ باشد به طوری که

$$\frac{\varphi(\partial A_1) + p(A_1)}{\omega(A_1)} \leq \dots \leq \frac{\varphi(\partial A_{k+1}) + p(A_{k+1})}{\omega(A_{k+1})}.$$

در نتیجه

$$\iota_k^m(G) \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)} \leq \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)} = \iota_{k+1}^m(G).$$

(iii) و (iv). نامساوی (iii) به راحتی از تعریف نتیجه می‌شود. برای اثبات (iv)، فرض کنید $\{A_i\}_1^{k+1} \in \mathcal{D}_{k+1}(V)$ یک افراز مینیم‌گر برای $\iota_{k+1}^m(G)$ باشد. برای اندیس‌های $i, j \in \llbracket k+1 \rrbracket$ تعریف کنید

$$T_{i,j} := \frac{1}{k} \left(\frac{\varphi(\partial(A_i \cup A_j))}{\omega(A_i \cup A_j)} + \sum_{l \in \llbracket k+1 \rrbracket \setminus \{i,j\}} \frac{\varphi(\partial A_l)}{\omega(A_l)} \right),$$

و قرار دهید $w_{i,j} := \omega(A_i \cup A_j)$. توجه کنید که $w_{i,j} = kW$ که $W := \sum_{x \in V} \omega(x)$ همچنین

$$\begin{aligned} k \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} w_{i,j} T_{i,j} &= \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} \varphi(\partial(A_i \cup A_j)) + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} \sum_{l \in \llbracket k+1 \rrbracket \setminus \{i,j\}} \omega(A_i \cup A_j) \frac{\varphi(\partial A_l)}{\omega(A_l)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k+1} (\varphi(\partial A_i) + \varphi(\partial A_j) - 2\varphi(A_i, A_j)) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq k+1 \\ i,j \neq l}} \omega(A_i \cup A_j) \frac{\varphi(\partial A_l)}{\omega(A_l)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (k-1) \sum_{l=1}^{k+1} \varphi(\partial A_l) + \sum_{l=1}^{k+1} (k-1)(W - \omega(A_l)) \frac{\varphi(\partial A_l)}{\omega(A_l)} \\
&= (k-1)W \sum_{l=1}^{k+1} \frac{\varphi(\partial A_l)}{\omega(A_l)}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\tilde{t}_k^m(G) \leq \min_{i \neq j \in \llbracket k+1 \rrbracket} T_{i,j} \leq \frac{1}{kW} \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} w_{i,j} T_{i,j} \leq \frac{k^2-1}{k^2} \tilde{t}_{k+1}^m(G).$$

(iv)'. فرض کنید G یک گراف وزن دار با پتانسیل است و $(k+1)$ -افراز $\{A_i\}_1^{k+1}$ را مینیمم گر $\tilde{t}_{k+1}^m(G)$ قرار دهید. فرض کنید دو زیرمجموعه از آن‌ها، مثلاً A_k و A_{k+1} به گونه‌ای باشند که بین آن‌ها حداقل یک یال وجود داشته باشد. حال k -افراز $\{A'_i\}_1^k$ را به صورت $A'_i := A_i$ ، $i \in \llbracket k-1 \rrbracket$ و $A'_k := A_k \cup A_{k+1}$ تعریف کنید. در این صورت داریم

$$k \tilde{t}_k^m(G) \leq \sum_{i=1}^k \frac{\varphi(\partial A'_i) + p(A'_i)}{\omega(A'_i)} < \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)} = (k+1) \tilde{t}_{k+1}^m(G).$$

(v) و (vi). کران‌های پایین با توجه به تعاریف واضح هستند. برای اثبات کران‌های بالا فرض کنید $\{A_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(V)$ یک k -زیرافراز از رئوس V باشد و قرار دهید $A^* := V \setminus (\cup_i A_i)$. برای سادگی قرار دهید $\Phi := \sum_i \phi_i$ و $\phi_i := \varphi(\partial A_i)$ ، $w_i := \omega(A_i)$ ، $B^j := \{B_i^j\}_{i=1}^k$ k -افراز j ثابت، $j \in \llbracket k \rrbracket$ ، برای یک j ثابت، B^j را تعریف کنید که $B_i^j := A_i$ ، برای هر $i \neq j$ و $B_j^j := A_j \cup A^*$. بنابراین داریم

$$\varphi(\partial B_j^j) \leq \sum_{i: i \neq j} \varphi(\partial A_i) = \Phi - \phi_j.$$

لذا برای هر $j \in \llbracket k \rrbracket$

$$\max_{1 \leq i \leq k} \left(\frac{\varphi(\partial B_i^j)}{\omega(B_i^j)} \right) \leq \max_{i: i \neq j} \left(\frac{\phi_i}{w_i}, \frac{\Phi - \phi_j}{w_j + \omega(A^*)} \right), \quad (۸-۲)$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{\varphi(\partial B_i^j)}{\omega(B_i^j)} \leq \frac{\Phi - \phi_j}{w_j + \omega(A^*)} + \sum_{i: i \neq j} \frac{\phi_i}{w_i}. \quad (۹-۲)$$

برای اثبات (v)، فرض کنید $\tilde{t}_k^M(G) \neq \iota_k^M(G)$ (اگر تساوی برقرار باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند) و $\{A_i\}_1^k$ را زیرافراز مینیمم گر برای $\iota_k^M(G)$ بگیرید و قرار دهید $\phi_{j_*} = \max_i \phi_i$. با توجه به نامساوی (۸-۲)، داریم

$$\tilde{t}_k^M(G) \leq \frac{\Phi - \phi_{j_*}}{w_{j_*} + \omega(A^*)} < \frac{\sum_{i: i \neq j_*} \phi_i}{w_{j_*}} \leq (k-1) \frac{\phi_{j_*}}{w_{j_*}} \leq (k-1) \iota_k^M(G).$$

برای اثبات (vi)، فرض کنید $\{A_i\}_k^k$ زیرافراز مینیمگر برای $\iota_k^m(G)$ باشد. با توجه به نامساوی (۹-۲) داریم

$$k \tilde{\iota}_k^m(G) \leq \min_j \left(\frac{\Phi - \phi_j}{w_j + \omega(A^*)} + \sum_{i: i \neq j} \frac{\phi_i}{w_i} \right) < \min_j \left(\frac{\Phi - 2\phi_j}{w_j} \right) + \sum_i \frac{\phi_i}{w_i}. \quad (10-2)$$

حال قرار دهید $C := \sum_i (\phi_i/w_i)$ ، درنتیجه بر اساس لم ۷-۱-۲ با قرار دادن $a_j := \frac{\phi_j/w_j}{C}$ ، $b_j := w_j$ و $\lambda := 2$ به دست می آوریم

$$\frac{\Phi}{C} \leq \max_j \left(\frac{2\phi_j}{C} + \left(1 - \frac{2}{k}\right)w_j \right).$$

بنابراین

$$\min_j \left(\frac{\Phi - 2\phi_j}{w_j} \right) \leq \left(1 - \frac{2}{k}\right) \sum_i \frac{\phi_i}{w_i}, \quad (11-2)$$

و حکم از نامساوی های (۱۰-۲) و (۱۱-۲) حاصل می شود.

(vii). نامساوی های (vii) به راحتی از تعریف نتیجه می شوند، زیرا همواره ماکسیم چند عدد نامنفی، بزرگتر از میانگین و کوچکتر از مجموع آن اعداد است. ■

با توجه به قضیه ۵-۱-۲ (ii)، برای هر گراف وزن دار $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ داریم

$$\iota_1(G) \leq \iota_2(G) \leq \dots \leq \iota_{|V|}(G).$$

از این رو، دنباله $(\iota_k(G))_{k \in [|V|]}$ را طیف ایزوپریمتری (مهمین یا میانگین) مربوط به G می نامیم. برای مشاهده نحوه ارتباط طیف ایزوپریمتری و طیف جبری یک گراف، فصل ۳ را ببینید.

لم بعد نشان می دهد که برای پیدا کردن زیرافراز مینیمگر که $\iota_k(G)$ را به دست می دهد، کافی است در بین زیرافرازی های با بخش های همبند، جستجو کنیم. این مطلب در مورد پارامتر $\tilde{\iota}_k(G)$ برقرار نیست. همین ویژگی کمک می کند تا محاسبه $\iota_k(G)$ نسبت به $\tilde{\iota}_k(G)$ آسان تر شود (بخش های ۳-۵ و ۴-۵ را ببینید). صورت مشابهی از این ویژگی برای مینیمگرهای ثابت ایزوپریمتری در منیفلدهای ریمانی نیز برقرار است ([۸۷] را ببینید).

لم ۸-۱-۲

برای گراف وزن دار داده شده $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ و عدد صحیح $2 \leq k$ ، یک زیرافراز $\{A_i\}_k^k \in \mathcal{D}_k(V)$ وجود دارد که $\iota_k(G)$ را به دست می دهد و گراف القایی روی هر A_i همبند است.

برهان. فرض کنید $\{A_i\}_k^k$ یک زیرافراز باشد که $\iota_k(G)$ را به دست می دهد و فرض کنید گراف القایی G روی A_1

همبند نیست. لذا $A_1 = A \sqcup B$ که هیچ یالی بین A و B وجود ندارد. حال داریم

$$\min \left\{ \frac{\varphi(\partial A) + p(A)}{\omega(A)}, \frac{\varphi(\partial B) + p(B)}{\omega(B)} \right\} \leq \frac{\varphi(\partial A) + \varphi(\partial B) + p(A) + p(B)}{\omega(A) + \omega(B)} = \frac{\varphi(\partial A_1) + p(A_1)}{\omega(A_1)}.$$

در نتیجه می‌توانیم یکی از مجموعه‌های A یا B را از A_1 حذف کنیم به طوری که زیرافراز حاصل، مینیمم‌گر باقی بماند. با ادامه این روند، می‌توانیم به یک زیرافراز مینیمم‌گر با مولفه‌های همبند برسیم. ■

ملاحظه ۹-۱-۲

اگر گراف G بدون پتانسیل باشد، لم ۸-۱-۲ برای پارامترهای $\tilde{l}_2(G)$ و $\tilde{l}_3(G)$ نیز برقرار است (با یک استدلال مشابه برهان قضیه ۵-۱-۲(i))، اما برای $\tilde{l}_k(G)$ ، $k \geq 4$ ، مثال نقض وجود دارد. وقتی گراف با پتانسیل است، برای $k = 2, 3$ نیز مثال نقض وجود دارد. ♦

۲-۲ مثال‌ها و حالت‌های خاص

در این بخش پارامترهای معرفی شده در بخش قبل را برای برخی گراف‌های خاص محاسبه می‌کنیم و هم‌چنین با ارائه مثال‌هایی نشان خواهیم داد که نامساوی‌های قضیه ۵-۱-۲ همگی محکم هستند. لازم به توضیح است که این مثال‌ها گراف‌های وزن‌دار هستند، اما با فرایند یک‌سازی که در بخش ۵-۵ معرفی می‌شود، می‌توان آن‌ها را به گراف‌های ساده تبدیل کرد.

مثال ۱-۲-۲

در این مثال نشان می‌دهیم که نامساوی‌های (v) و (vi) در قضیه ۵-۱-۲ محکم هستند. به این معنی که برای هر $k \geq 3$ ، یک خانواده از گراف‌های وزن‌دار $\{G^t\}_{t \in \mathbb{N}}$ می‌سازیم به طوری که با میل t به بی‌نهایت، $\tilde{l}_k^M(G^t)/\iota_k^M(G^t)$ به $(k-1)$ و $\tilde{l}_k^m(G^t)/\iota_k^m(G^t)$ به $2(1-1/k)$ میل می‌کند. این گراف‌ها هم‌چنین مثال‌هایی فراهم می‌کنند که نشان می‌دهد برای $k \geq 3$ ، مقدار مینیمم برای افرازاها و زیرافرازاها، لزوماً برابر نیست (تعریف ۴-۲-۲ را ببینید). عدد $k \geq 3$ را ثابت بگیرید و برای هر عدد صحیح $t \geq k$ ، گراف G^t را به صورت یک گراف ستاره با راس مرکزی v از درجه k و k راس $v_1, \dots, v_k$ هر کدام از درجه یک، در نظر بگیرید. هم‌چنین توابع وزن ω و φ را به صورت زیر تعریف کنید

$$\omega(v) := k, \forall i \in [k], \omega(v_i) := t, \varphi(vv_i) := 1.$$

تابع پتانسیل را هم صفر بگیرید. در نتیجه با استفاده از تعریف داریم

$$\begin{aligned}\iota_k^M(G^t) &= \frac{1}{t}, & \tilde{\iota}_k^M(G^t) &= \max\left(\frac{1}{t}, \frac{k-1}{t+k}\right) = \frac{k-1}{t+k}, \\ \iota_k^m(G^t) &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{t} = \frac{1}{t}, & \tilde{\iota}_k^m(G^t) &= \frac{1}{k} \left(\frac{k-1}{t+k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{t} \right) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(\frac{1}{t+k} + \frac{1}{t} \right),\end{aligned}$$

که $\iota_k^m(G^t)$ و $\tilde{\iota}_k^M(G^t)$ برای زیرمجموعه‌های مجزای $A_i := \{v_i\}$ ، $i \in \llbracket k \rrbracket$ به دست می‌آیند و $\tilde{\iota}_k^M(G^t)$ و $\iota_k^m(G^t)$ برای k -افراز $\{B_i\}_1^k$ با $B_i := \{v_i\}$ ، $i \in \llbracket k-1 \rrbracket$ و $B_k := \{v_k, v\}$ حاصل می‌شوند. ادعا با یک حدگیری ساده ثابت می‌شود.

★

مثال ۲-۲-۲

در این مثال طیف ایزوپریمتری گراف‌های کامل و دوبخشی کامل را محاسبه می‌کنیم. در این جا وزن همه یال‌ها برابر یک و وزن هر راس برابر درجه آن است، هم‌چنین پتانسیل همه رئوس برابر صفر است. گراف کامل n راسی را با K_n نشان می‌دهیم و عدد صحیح $k \in \llbracket n \rrbracket$ را ثابت می‌گیریم. برای هر k -زیرافراز $\{A_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(V(K_n))$ ، اگر $|A_i| = n_i$ ، آن‌گاه

$$\frac{\varphi(\partial A_i)}{\omega(A_i)} = \frac{n_i(n - n_i)}{(n-1)n_i} = \frac{n - n_i}{n-1}.$$

بنابراین مینیمم در (۲-۳) و (۲-۴) وقتی اتفاق می‌افتد که $\{A_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(V(K_n))$ و $\lceil n/k \rceil$ یا $\lfloor n/k \rfloor$ $n_i =$ لذا

$$\begin{aligned}\tilde{\iota}_k^M(K_n) &= \iota_k^M(K_n) = \frac{\lceil n - n/k \rceil}{n-1}, \\ \tilde{\iota}_k^m(K_n) &= \iota_k^m(K_n) = \frac{n - n/k}{n-1}.\end{aligned}$$

به علاوه، این مثال نشان می‌دهد که نامساوی (iv) در قضیه ۲-۱-۵ محکم است، زیرا

$$\frac{\tilde{\iota}_k^m(K_n)}{\tilde{\iota}_{k+1}^m(K_n)} = \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k} = \frac{k^2-1}{k^2}.$$

حال گراف کامل دوبخشی $K_{m,n}$ را در نظر گرفته و فرض کنید بخش‌های آن X و Y باشند که $|X| = n$ و $|Y| = m$. یک k -افراز $\{A_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(V(K_{m,n}))$ بگیرید که $|A_i \cap X| = x_i$ و $|A_i \cap Y| = y_i$. در نتیجه داریم

$$\frac{\varphi(\partial A_i)}{\omega(A_i)} = \frac{y_i(n - x_i) + x_i(m - y_i)}{mx_i + ny_i} = 1 - \frac{yx_i y_i}{mx_i + ny_i}.$$

ابتدا توجه کنید که تابع $\frac{x_i y_i}{m x_i + n y_i}$ نسبت به x_i و y_i صعودی است. لذا داریم

$$\iota_k(K_{m,n}) = \tilde{\iota}_k(K_{m,n}).$$

علاوه بر این با ماکسیم کردن تابع $\sum_i \frac{x_i y_i}{s x_i + r y_i}$ تحت شرایط $\sum_i x_i = n$ و $\sum_i y_i = m$ به کمک روش ضرایب لاگرانژ به دست می آوریم $m x_i = n y_i$ ، برای هر $i \in [k]$. بنابراین اگر m مضربی از n باشد، برای هر $k \in [n]$ داریم

$$\iota_k^m(K_{m,n}) = \tilde{\iota}_k^m(K_{m,n}) = 1 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{x_i y_i}{n y_i} = 1 - \frac{1}{k}.$$

لذا مثال دیگری برای محکم بودن نامساوی (iv) در قضیه ۵-۱-۲ به دست می آید. ★

مثال ۳-۲-۲ (گراف های با پتانسیل)

در این مثال نشان می دهیم که برای گراف های با پتانسیل تساوی (i) و کران های بالای (v)، (vi) و (vii) در قضیه ۵-۱-۲ برقرار نیستند. به این منظور عدد $k \geq 2$ را ثابت گرفته و برای $t \geq 2$ ، گراف دور C_{k+1}^t را تعریف کنید که $V(C_{k+1}^t) := \{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ و $E(C_{k+1}^t) := \{v_{k+1} v_1\} \cup \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq k\}$ هم چنین وزن همه رئوس و یال ها برابر یک است، پتانسیل همه رئوس غیر از v_{k+1} برابر صفر است و $p(v_{k+1}) := t$. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \iota_k^M(C_{k+1}^t) &= 2, & \tilde{\iota}_k^M(C_{k+1}^t) &= \max\left(2, \frac{2+t}{2}\right) = \frac{2+t}{2}, \\ \iota_k^m(C_{k+1}^t) &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k 2 = 2, & \tilde{\iota}_k^m(C_{k+1}^t) &= \frac{1}{k} \left(\frac{2+t}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} 2 \right) = \left(\frac{2k-1}{k} \right) + \frac{t}{2k}. \end{aligned}$$

لذا

$$\frac{\tilde{\iota}_k(C_{k+1}^t)}{\iota_k(C_t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty.$$

برای نقض کران بالای (vii) کافی است گرافی با پتانسیل منفی بسازیم (مثلاً گراف C_3 را یک دور با سه راس بگیرید که پتانسیل یک راس، یک عدد منفی با قدر مطلق بزرگ و بقیه راس ها بدون پتانسیل است). توجه کنید که نامساوی های (vii) برای گراف های با پتانسیل نامنفی، همواره برقرار است.

هم چنین می خواهیم نشان دهیم که کران (iv)' در ملاحظه ۶-۱-۲ محکم است. برای این منظور $k \geq 2$ را ثابت گرفته و برای $t \geq 2$ گراف C_{k+1}^t را مشابه بالا یک دور با $k+1$ راس در نظر بگیرید، اما وزن ها را به صورت زیر تعریف کنید

$$\omega(v_i) := 1, p(v_i) := 0, i \in [k], \quad \omega(v_{k+1}) := t, p(v_{k+1}) := t^2,$$

و وزن همه یال‌ها برابر یک است. در نتیجه داریم

$$\tilde{l}_k^m(C_{k+1}) = \frac{2(k-1)}{k} + \frac{2+t^2}{k(t+1)}, \quad \tilde{l}_{k+1}^m(C_{k+1}) = \frac{2k}{k+1} + \frac{2+t^2}{t(k+1)}.$$

لذا

$$\frac{\tilde{l}_{k+1}^m(C_{k+1})}{\tilde{l}_k^m(C_{k+1})} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1}.$$

★

در مثال ۲-۲-۱ دیدیم که گراف‌هایی وجود دارد که عدد ایزوپریمتری آن‌ها با مینیمم برش نرمال شده متفاوت است، به عبارتی مینیمم شار خروجی نرمال شده روی زیرافرازاها و افرازاها فرق می‌کند. این موضوع انگیزه تعریف گراف‌های هندسی است.

تعریف ۲-۲-۲

یک گراف وزن دار $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ را k -هندسی مهین (یا میانگین) گوئیم هرگاه $\iota_k^M(G) = \tilde{l}_k^M(G)$ (یا $\iota_k^m(G) = \tilde{l}_k^m(G)$). یک گراف را فوق‌هندسی مهین (میانگین) می‌خوانیم، هرگاه برای هر $k \in \llbracket V \rrbracket$ ، k -هندسی مهین (میانگین) باشد.

▲

رده‌بندی گراف‌های هندسی مستقل از مسائل ایزوپریمتری می‌تواند مساله جالب و مبارزه‌طلبی باشد که از حوزه تحقیقات این رساله خارج است.

۳-۲ یک قضیه فدرر-فلمینگ گونه

اگر $G = (V, E, \varphi, \omega, p)$ یک گراف وزن دار، $A \subset V$ یک زیرمجموعه از رئوس و $f = \chi_A \in \mathcal{F}_\omega(V)$ تابع مشخصه A باشد، یعنی

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in V \setminus A, \end{cases}$$

آن‌گاه داریم

$$\frac{\mathcal{E}(f)}{\|f\|_{\varphi, \omega}^2} = \frac{\sum_{xy \in E} \varphi(xy) + \sum_{x \in A} p(x)}{\sum_{x \in A} \omega(x)} = \frac{\varphi(\partial A) + p(A)}{\omega(A)}. \quad (12-2)$$

با توجه به تساوی فوق و مقایسه رابطه (۳-۲) و (۱۲-۱) می‌بینیم که λ_k (ویژه مقدار k -ام ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته) در واقع **راحت‌سازی** ای از $\iota_k^M(G)$ (عدد ایزوپریمتری k -ام مهین) است. هم‌چنین با مقایسه رابطه (۴-۲) و (۱۳-۱) مشاهده می‌کنیم که $\bar{\lambda}_k$ (میانگین k ویژه مقدار اول ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته) راحت‌سازی ای از $\iota_k^m(G)$ (عدد ایزوپریمتری k -ام میانگین) است (قضیه ۱-۲-۳ را ببینید). این مشاهده از جنبه‌های نظری و عملی اهمیت زیادی دارد. از منظر عملی، این واقعیت، تخمین ثابت‌های ایزوپریمتری به وسیله محاسبه مقادیر ویژه را توجیه می‌کند که پایه نظریه **خوشه‌بندی طیفی** را تشکیل می‌دهد (مثلاً [۷۶] را ببینید) و از جنبه نظری، اهمیت وجود یک تعریف تابعی از ثابت‌های ایزوپریمتری را نشان می‌دهد. در این بخش قصد داریم با اثبات یک **قضیه فدرر-فلمینگ** گونه [۴۰]، چنین تعریفی را ارائه کنیم. این قضیه علاوه بر اهمیت نظری آن ([۷۹] را ببینید)، تعریف ما از اعداد ایزوپریمتری (تعریف براساس زیرافرازاها) را توجیه می‌کند، هم‌چنین یک روش به‌دست می‌دهد تا به کمک آن نامساوی‌های دیگر تعمیم‌یافته ثابت کنیم (بخش ۲-۳ را ببینید). ابتدا دو فضای تابعی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۳-۲

فرض کنید $\mathcal{F}_\omega(X)$ فضای تابعی تعریف شده در بخش ۱-۱ باشد. یک کلاس از توابع $\{f_i\}_1^k$ را مثبت متعامد می‌نامیم هرگاه برای هر $i \in [k]$ داشته باشیم $f_i \in \mathcal{F}_\omega^+(X)$ و علاوه بر این برای هر جفت اندیس $i \neq j$ ، $f_i \perp_\omega f_j$ حال تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{O}_k^+(X) := \left\{ \{f_i\}_1^k : \{f_i\}_1^k \text{ مثبت یکا متعامد است} \right\},$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_k^+(X) := \left\{ \{f_i\}_1^k \in \mathcal{O}_k^+(X) : \{\text{supp}(f_i)\}_1^k \in \mathcal{P}_k(X) \right\}.$$

▲

اکنون برای گراف وزن‌دار (G, ω, φ, p) پارامترهای زیر را در ارتباط با ثابت‌های $\iota_k(G)$ و $\tilde{\iota}_k(G)$ تعریف می‌کنیم

$$\gamma_k^M(G) := \inf_{\{f_i\}_1^k \in \mathcal{O}_k^+(G)} \max_{1 \leq i \leq k} \left(\frac{\|\nabla f_i\|_{\varphi} + \|f_i\|_{p}}{\|f_i\|_{\omega}} \right),$$

$$\gamma_k^m(G) := \inf_{\{f_i\}_1^k \in \mathcal{O}_k^+(G)} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\|\nabla f_i\|_{\varphi} + \|f_i\|_{p}}{\|f_i\|_{\omega}} \right),$$

$$\tilde{\gamma}_k^M(G) := \inf_{\{f_i\}_1^k \in \tilde{\mathcal{O}}_k^+(G)} \max_{1 \leq i \leq k} \left(\frac{\|\nabla f_i\|_{\varphi} + \|f_i\|_{p}}{\|f_i\|_{\omega}} \right),$$

$$\tilde{\gamma}_k^m(G) := \inf_{\{f_i\}_1^k \in \tilde{\mathcal{O}}_k^+(G)} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\|\nabla f_i\|_{\varphi} + \|f_i\|_{p}}{\|f_i\|_{\omega}} \right).$$

حال لم تکنیکی زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۲-۳-۲

برای گراف وزن دار $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ و هر تابع مثبت $f \in \mathcal{F}_\omega^+(V)$ ، یک زیرمجموعه $A \subseteq \text{supp}(f)$ وجود دارد که

$$\frac{\varphi(\partial A) + p(A)}{\omega(A)} \leq \frac{\|\nabla f\|_{\varphi} + \|f\|_{p}}{\|f\|_{\omega}}.$$

برهان. بدون کم شدن کلیت لم را برای توابع $f \in \mathcal{F}_\omega^+(V)$ که $\|f\|_{\omega} = 1$ ثابت می‌کنیم. هم‌چنین از استقرا روی اندازه برد تابع f استفاده می‌کنیم. اگر f تنها دو مقدار 0 و t_1 بگیرد، آنگاه برای $A := f^{-1}(t_1)$ داریم $f = t_1 \chi_A$. در نتیجه اثبات در این حالت مستقیماً از (۱۲-۲) حاصل می‌شود. حال قرار دهید $\text{Range}(f) = \{0, t_1, \dots, t_n\}$ به‌طوری که $0 < t_1 \leq \dots \leq t_n$ و علاوه بر این برای هر $i \in [n]$ قرار دهید $A_i := f^{-1}(t_i)$ و $w_i := \omega(A_i)$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_{\varphi} + \|f\|_{p} &= \sum_{xy \in E} |f(x) - f(y)| \varphi(u, v) + \sum_{x \in V} |f(x)| p(x) \\ &= c_1 t_1 + c_2 t_2 + \dots + c_n t_n, \end{aligned}$$

برای اعداد حقیقی c_i ، که هر c_i تنها به شارهای بین مجموعه‌های A_j و پتانسیل رئوس درون این مجموعه‌ها بستگی دارند. حال می‌خواهیم تابع

$$\psi(x_1, \dots, x_n) := c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

را تحت شرایط

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n, \\ g(x) := \sum_{i=1}^n w_i x_i - 1 = 0. \end{cases} \quad (13-2)$$

مینیم کنیم. ابتدا توجه کنید که اگر $\frac{c_1}{w_1} = \dots = \frac{c_n}{w_n} = \kappa$ ، آنگاه داریم $\|\nabla f\|_{\omega} = \sum_i \kappa w_i t_i = \kappa \psi(t_1, \dots, t_n)$. لذا

$$\frac{\|\nabla f\|_{\varphi} + \|f\|_{p}}{\|f\|_{\omega}} = \kappa = \frac{c_n}{w_n} = \frac{\varphi(\partial A_n) + p(A_n)}{\omega(A_n)},$$

و حکم ثابت است. حال فرض کنید اندیس‌های $i \neq j$ وجود دارد که $\frac{c_i}{w_i} \neq \frac{c_j}{w_j}$. با استفاده از روش لاگرانژ، مینیم ψ تحت شرایط (۱۳-۲) برابر با مینیم تابع $h(x, \lambda) = \psi(x) - \lambda g(x)$ تحت شرایط $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ است. اما داریم $\partial h / \partial x_i = c_i - \lambda w_i$. با توجه به فرض اولیه، مشتقات جزئی همزمان صفر نمی‌شوند. بنابراین ψ مینیم

خود را روی یک نقطه مرزی $(s_1, \dots, s_n)$ می‌گیرد، یعنی یک i_0 وجود دارد که $s_{i_0} = s_{i_0+1}$. حال تابع $\hat{f}$ را طوری تعریف کنید که برای هر i ، روی A_i برابر s_i باشد و بقیه جاها صفر باشد. در نتیجه با استفاده از (۲-۱۳) داریم $\|\hat{f}\|_{1,\omega} = 1$ و

$$\|\nabla \hat{f}\|_{1,\varphi} + \|\hat{f}\|_{1,p} = c_1 s_1 + \dots + c_n s_n = \psi(s_1, \dots, s_n).$$

اما $|Range(\hat{f})| < n+1$ ، بنابراین طبق فرض استقرا می‌توانیم یک زیرمجموعه $A \subseteq \text{supp}(\hat{f}) \subseteq \text{supp}(f)$ پیدا کنیم به طوری که

$$\frac{\varphi(\partial A) + p(A)}{\omega(A)} \leq \|\nabla \hat{f}\|_{1,\varphi} + \|\hat{f}\|_{1,p} = \psi(s_1, \dots, s_n) \leq \psi(t_1, \dots, t_n) = \|\nabla f\|_{1,\varphi} + \|f\|_{1,p}.$$

■

حال آماده‌ایم تا قضیه فدرر-فلمینگ گونه خود را برای پارامترهای ایزوپریمتری ثابت کنیم.

قضیه ۲-۳-۳

برای هر گراف وزن‌دار (G, ω, φ, p) و هر عدد صحیح $k \in [|V(G)|]$ داریم

$$\iota_k(G) = \gamma_k(G) = \tilde{\gamma}_k(G).$$

برهان. با در نظر گرفتن توابع مشخصه و استفاده از رابطه (۲-۱۲) به دست می‌آوریم $\gamma_k(G) \leq \iota_k(G)$. برای این که تساوی را نشان دهیم، فرض کنید $\{f_i\}_1^k \in \mathcal{O}_k^+(G)$ مقدار $\gamma_k(G)$ را به دست دهد. با توجه به لم ۲-۳-۲، برای هر $i \in [k]$ یک زیرمجموعه $A_i \subseteq \text{supp}(f_i)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)} \leq \frac{\|\nabla f_i\|_{1,\varphi} + \|f_i\|_{1,p}}{\|f_i\|_{1,\omega}}.$$

چون $\{f_i\}_1^k$ مثبت متعامد است و $A_i \subseteq \text{supp}(f_i)$ ، نتیجه می‌گیریم که A_i ها زیرمجموعه‌های مجزا هستند و در نتیجه

$$\begin{aligned} \iota_k^M(G) &\leq \max_i \left(\frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)} \right) \leq \max_i \left(\frac{\|\nabla f_i\|_{1,\varphi} + \|f_i\|_{1,p}}{\|f_i\|_{1,\omega}} \right) = \gamma_k^M(G), \\ \iota_k^m(G) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)} \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\|\nabla f_i\|_{1,\varphi} + \|f_i\|_{1,p}}{\|f_i\|_{1,\omega}} \right) = \gamma_k^m(G). \end{aligned}$$

برای اثبات تساوی دوم، با توجه به تعریف داریم $\iota_k(G) = \gamma_k(G) \leq \tilde{\gamma}_k(G)$. حال فرض کنید $\{A_i\}_1^k$ یک

k -زیرافراز از $V(G)$ باشد که $\iota_k(G)$ را به دست دهد. همچنین تعریف کنید

$$A' := \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i, \quad A^* := V(G) \setminus A'.$$

برای عدد حقیقی $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک، توابع $\{g_i^{(\epsilon)}\}_1^k \in \tilde{O}_k^+(G)$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$g_i^{(\epsilon)} := \chi_{A_i}, \quad \forall i \in [k-1], \quad g_k^{(\epsilon)}(x) := \begin{cases} 1 & x \in A_k \\ \epsilon & x \in A^* \\ 0 & x \in A'. \end{cases}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} k \tilde{\gamma}_k^m(G) &\leq \sum_{i=1}^k \left(\frac{\|\nabla g_i^{(\epsilon)}\|_{\varphi} + \|g_i^{(\epsilon)}\|_{\varphi}}{\|g_i^{(\epsilon)}\|_{\omega}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)} + \frac{\varphi(\partial A_k) + \epsilon(\varphi(A^*, A') - \varphi(A_k, A^*)) + p(A_k) + \epsilon p(A^*)}{\omega(A_k) + \epsilon \omega(A^*)}. \end{aligned}$$

با میل دادن ϵ به سمت صفر به دست می آوریم

$$\tilde{\gamma}_k^m(G) \leq \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\varphi(\partial A_i)}{\omega(A_i)} \right) = \iota_k^m(G).$$

■

اثبات برای $\tilde{\gamma}_k^M(G)$ نیز مشابه است.

تعریفی که قضیه ۲-۳-۳ برای ثابت های $\iota_k(G)$ به دست می دهد، یک تعریف تابعی است، در حالی که چنین قضیه ای برای ثابت های $\tilde{\iota}_k(G)$ برقرار نیست. این مطلب نشان می دهد که استفاده از زیرافرازاها به جای افرازاها در تعریف اعداد ایزوپریمتری، طبیعی تر و صحیح تر است. از طرف دیگر با مقایسه این تعریف تابعی با قضیه کورانت-فیشر برای ویژه مقدارها، می توان مشاهده کرد که λ_k و ι_k^M به ترتیب نسخه های L^1 و L^2 از یک تعریف تابعی هستند. همین مطلب برای $\bar{\lambda}_k$ و ι_k^m برقرار است.

۲-۴ خوشه بندی داده ها

خوشه بندی داده ها یک مبحث پایه ای است که کاربردهای زیادی در علوم و رشته های مختلف دارد که از آن جمله می توان به کاربردهای آن در یادگیری ماشین، داده کاوی، تشخیص الگو، پردازش تصویر و بیواینفورماتیک اشاره کرد [۴۵]. در این بخش قصد داریم به ارتباط مساله های ایزوپریمتری و خوشه بندی داده ها بپردازیم.

در [۸۳] نشان داده شده است که **مساله برش نرمال شده** را می‌توان در **مساله قسمت‌بندی عکس** به کار گرفت. هم‌چنین اکثر روش‌های طیفی خوشه‌بندی (نظریه **خوشه‌بندی طیفی**)، مبتنی بر **مساله برش نرمال شده** است [۶، ۵۹، ۷۶]. در این بخش، نشان می‌دهیم که رابطه‌ای بین **مساله برش نرمال شده** و **مساله معروف k -میانها** وجود دارد. این نتایج بر اساس و ادامه کارهای [۳۶] است. برای مشاهده کاربرد دیگر مسائل ایزوپریمتری در خوشه‌بندی، بخش ۳-۵ را ببینید.

مساله k -میانها

یکی از روش‌های مهم و کلاسیک خوشه‌بندی داده‌ها به روش **k -میانها** معروف است. در این روش تعدادی داده به صورت بردارهایی در $\mathbb{R}^d$ و عدد صحیح $k \geq 1$ داده شده، می‌خواهیم بردارها را به k دسته (خوشه) مجزا افراز کنیم به طوری که مجموع مربعات فاصله هر بردار تا مرکز دسته مربوطه‌اش مینیمم شود. برای صورت‌بندی مساله، فرض می‌کنیم که X یک مجموعه متناهی است و داده‌ها را به صورت یک تابع $f \in \mathcal{F}^d(X)$ نمایش می‌دهیم که برای هر $x \in X$ ، بردار $f(x) \in \mathbb{R}^d$ نشان‌دهنده یک داده است. هم‌چنین یک تابع وزن $\omega : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ نیز داده شده که به هر داده یک وزن مثبت نسبت می‌دهد. مشابه قبل، نمادهای $\mathcal{P}_k(X)$ و $\mathcal{D}_k(X)$ را به ترتیب برای کلاس همه k -زیرافرازاها و k -افرازهای مجموعه X در نظر می‌گیریم. به هر k -افراز $A := \{A_1, \dots, A_k\}$ هزینه زیر را منتسب می‌کنیم.

$$\mathfrak{E}_k^{f,\omega}(A) := \sum_{i=1}^k \sum_{x \in A_i} \omega(x) \|f(x) - \mathbf{m}_i\|^2, \quad (14-2)$$

که $\|\cdot\|$ همان ۲-نرم اقلیدسی است و

$$\mathbf{m}_i := \frac{\sum_{x \in A_i} \omega(x) f(x)}{\sum_{x \in A_i} \omega(x)}.$$

مساله k -میانها، پیدا کردن یک افراز $A \in \mathcal{P}_k(X)$ است که هزینه فوق را مینیمم کند. اجازه دهید مینیمم هزینه را با یک نماد نشان دهیم.

$$\mu_k(f, \omega) := \min_{A \in \mathcal{P}_k(X)} \mathfrak{E}_k^{f,\omega}(A).$$

مساله پیدا کردن مقدار μ_k و k -افراز مینیمم‌گر یک مساله NP -سخت است. الگوریتم معروف k -میانها تخمینی از k -افراز مینیمم‌گر را به دست می‌دهد و لزوماً به مینیمم واقعی میل نمی‌کند. در ادامه می‌بینیم که ارتباط نزدیکی بین **مساله k -میانها** و **مساله ایزوپریمتری** وجود دارد. ابتدا یک لم فنی را بیان می‌کنیم.

لم ۲-۴-۱

برای توابع $f \in \mathcal{F}^d(X)$ و $\omega : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ، عدد صحیح $1 \leq k \leq |X|$ و هر $\mathcal{A} \in \mathcal{P}_k(X)$ داریم

$$\mathfrak{E}_k^{f,\omega}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\omega(A_i)} \sum_{x,y \in A_i} \omega(x)\omega(y) \|f(x) - f(y)\|^2,$$

که تابع $\mathfrak{E}$ در (۲-۴-۱) تعریف شده است.

برهان.

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_k^{f,\omega}(\mathcal{A}) &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\omega(A_i)} \sum_{x \in A_i} \omega(x) \left\| \sum_{y \in A_i} (f(x) - f(y)) \omega(y) \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\omega(A_i)} \sum_{x,y,z \in A_i} \omega(x)\omega(y)\omega(z) \left(\langle f(x), f(x) \rangle - \langle f(y), f(x) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle f(x), f(z) \rangle + \langle f(y), f(z) \rangle \right) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\omega(A_i)} \sum_{x,y \in A_i} \omega(x)\omega(y) \|f(x) - f(y)\|^2. \end{aligned}$$

■

قضیه زیر ارتباط دو طرفه بین مساله k -میانه‌ها و مساله برش نرمال شده را نشان می‌دهد.

قضیه ۲-۴-۲

برای هر گراف وزن دار $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ روی n راس، یک تابع $f \in \mathcal{F}^n(V)$ وجود دارد که برای هر $1 \leq k \leq n$

$$\mu_k(f, \omega) = (n - k)\lambda - \text{tr}(L) + k \tilde{t}_k^m(G),$$

که L ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته مربوط به G و λ بزرگترین ویژه مقدار L است.

هم‌چنین برای تابع $f \in \mathcal{F}^d(X)$ و تابع وزن $\omega \in \mathcal{F}^+(X)$ ، یک گراف وزن دار $G = (X, E, \omega, \varphi, p)$ یافت می‌شود که

$$\mu_k(f, \omega) = C + k \tilde{t}_k^m(G).$$

برهان. ابتدا فرض کنید G یک گراف وزن دار باشد و L را ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته آن بگیرید. هم‌چنین W را یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری $\omega(x)$ و λ را بزرگترین ویژه مقدار L بگیرید. حال ماتریس Φ را به صورت زیر

تعریف می‌کنیم.

$$\Phi := (\lambda I - L)W^{-1}.$$

در واقع

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \frac{\varphi(xy)}{\omega(x)\omega(y)} & x \sim y, \\ \frac{\lambda}{\omega(x)} - \frac{\deg(x)+p(x)}{\omega(x)^2} & x = y, \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

ماتریس Φ یک ماتریس مثبت نیمه‌معین است و لذا یک ماتریس P یافت می‌شود که $\Phi = P^t P$. تابع $f \in \mathcal{F}^n(V)$ را به اینصورت تعریف کنید که برای هر $x \in V$ ، $f(x)$ برابر x امین ستون P است. در اینصورت با توجه به لم ۲-۴-۱، برای هر k -افراز $\mathcal{A} := (A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{P}_k(V)$ داریم

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_k^{f, \omega}(\mathcal{A}) &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\omega(A_i)} \sum_{x, y \in A_i} \omega(x)\omega(y) \|f(x) - f(y)\|^2 \\ &= \sum_{x \in V} \omega(x) \langle f(x), f(x) \rangle - \sum_{i=1}^k \sum_{x, y \in A_i} \frac{\omega(x)\omega(y) \langle f(x), f(y) \rangle}{\omega(A_i)} \\ &= n\lambda - \sum_{x \in V} \frac{\deg(x) + p(x)}{\omega(x)} - k\lambda + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\deg(A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)} - \sum_{\substack{x, y \in A_i \\ x \sim y}} \frac{\varphi(xy)}{\omega(A_i)} \right) \\ &= (n - k)\lambda - \text{tr}(L) + \sum_{i=1}^k \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)}. \end{aligned}$$

■

که با مینیمم گرفتن تساوی فوق روی همه اعضای $\mathcal{P}_k(V)$ حکم نتیجه می‌شود.

۵-۲ تاریخچه

مساله ایزوپریمتری



شکل ۱-۲: ژاکوب اشتاینر

مساله ایزوپریمتری کلاسیک از قدیمی‌ترین مسائل در هندسه است و طرح آن به عهد باستان باز می‌گردد. این مساله را می‌توان به صورت زیر بیان کرد. از بین خم‌های بسته در صفحه با محیط ثابت، کدام خم بیشترین مساحت را احاطه می‌کند؟ یا به طور معادل از بین خم‌های بسته در صفحه با مساحت ثابت، کدام خم کمترین محیط را دارد؟ این مساله و مسایل مشابه فضایی، اولین بار توسط زنودوروس^۱ (۱۴۰-۲۰۰ پیش از میلاد) مورد بررسی قرار گرفت. جواب این مساله که یک دایره است از همان زمان دانسته می‌شد و حتی کپلر این اصل را در شکل‌شناسی منظومه شمسی در نظر گرفت. اما یافتن یک اثبات دقیق تا قرن ۱۹ طول کشید، زمانی که ریاضیدان سوییسی ژاکوب اشتاینر^۲ (۱۷۹۶-۱۸۶۳ م.) (شکل ۱-۲) یک روش هندسی که

بعدها **میتارن‌سازی اشتاینر** نامیده شد را معرفی کرد [۸۴] و در ادامه کارهای او، شوارتز^۳ در سال ۱۸۸۴، اثبات دقیقی ارائه کرد.

اهمیت مسائل ایزوپریمتری در فیزیک، اولین بار توسط رایللی^۴ (۱۸۴۲-۱۹۱۹ م.) مورد توجه قرار گرفت. او این حدس را مطرح کرد که فرکانس اصلی غشایی با مساحت ثابت، برای دایره مینیمم می‌شود. در طول زمان، این‌گونه مسائل، اهمیت خود را در علوم نظری و کاربردهای عملی نشان داد. برای مشاهده تاریخچه مبسوط‌تر و سیر تحولات این مسائل [۷۷، ۷۸] را ببینید.

با در نظر گرفتن تعبیرهای مشابهی برای مساحت و محیط در موجودات گسسته ترکیبیاتی، مسائل ایزوپریمتری برای این موجودات نیز تعریف شدند. اولین بار، اصطلاح “مسائل ایزوپریمتری ترکیبیاتی” در [۵۱] مطرح شد. به عنوان مثال، برای گراف بدون جهت n راسی $G = (V, E)$ و زیرمجموعه $A \subset V$ ، اگر مساحت A را تعداد رئوس درون آن، $|A|$ ، و محیط A را اندازه مرز راسی یا یالی آن، $|\partial A|$ یا $|\delta A|$ (تعریف ۱-۶-۱)، قرار دهیم، می‌توانیم مسائل ایزوپریمتری یالی و راسی را به ترتیب به صورت یافتن زیرمجموعه مینیمم‌گر A برای پارامترهای زیر تعریف کنیم

$$\forall k \in \llbracket n \rrbracket, \quad \Phi_E(G, k) := \min_{A \subset V} \{|\partial A| : |A| = k\},$$

^۱Zenodorus^۲Jakob Steiner^۳Hermann Schwarz^۴Rayleigh

$$\forall k \in \llbracket n \rrbracket, \quad \Phi_V(G, k) := \min_{A \subset V} \{ |\delta A| : |A| = k \}.$$

این پارامترها برای خانواده‌های مختلفی از گراف‌ها مانند گراف‌های مکعب، محاسبه شده [۵۲] و کاربردهای متنوعی برای آن‌ها پیدا شده است [۵۳]. به‌طور خاص، مساله ایزوپریمتری یالی برای $k = n/2$ ، به مساله **عرض دوتکه** معروف است. هم‌چنین رابطه‌های عمیقی بین این مسائل و موضوع **نشاندن متریک** وجود دارد ([۵۶] را ببینید).

فصل ۳

نامساوی‌های چِیگر مراتب بالا

نامساوی‌های ایزوپریمتری رابطه‌ای بین طیف ایزوپریمتری و طیف جبری (ثابت‌های ایزوپریمتری و ویژه‌مقدارهای عملگر لاپلاسین) برقرار می‌کنند. اولین شکل از این نوع نامساوی‌ها در تز دکتری چِیگر^۱ برای منیفلدهای ریمانی ظاهر شد [۲۲، ۲۴]. به عنوان مثال نامساوی زیر برای گراف بدون پتانسیل G ، اولین نمونه از این‌گونه نامساوی‌ها در فضای گراف‌ها است.

$$\frac{h(G)^2}{|L|} \leq \lambda_2 \leq 2 h(G), \quad (۱-۳)$$

که λ_2 ویژه‌مقدار دوم ماتریس لاپلاسین L بوده و $h(G)$ در (۱-۲) تعریف شده است. هم‌چنین داریم $|L| := \max_{x \in V(G)} |L(x, x)|$. این نامساوی توسط آلن [۲، ۳] برای گراف‌ها و توسط لاولر و سوکال [۶۲] برای زنجیرهای مارکف ثابت شد. در هر دو حالت، یک ضریب $\frac{1}{2}$ در سمت چپ وجود داشت. این نامساوی، بعداً توسط مونتنگرو و تتالی به این فرم ارتقا یافت [۷۰]. برای بررسی ابعاد مختلف نامساوی ایزوپریمتری گسسته [۶۳، ۸۰] را ببینید.

در این فصل قصد داریم قدم‌های اولیه برای اثبات نامساوی‌های چِیگر تعمیم‌یافته برای ویژه‌مقدارهای بالاتر را برداریم. در این راه از دو رهیافت استفاده می‌کنیم. رهیافت اول مبتنی بر دامنه‌های نودال و مقایسه نسبت رایلی در فرم ۱-نرم و ۲-نرم به کمک قضیه فدرر-فلمینگ گونه بخش ۲-۳ است. رهیافت دوم در ادامه کارهای میکلو^۲ از طریق معرفی یک طیف میانه به نام طیف همبندی دیریشه است. در این فصل و فصل بعد، در همه گراف‌های وزن‌دار، تابع پتانسیل نامنفی است. برای شروع مقدمه‌ای درباره دامنه‌های نودال ارائه می‌کنیم.

^۱J. Cheeger

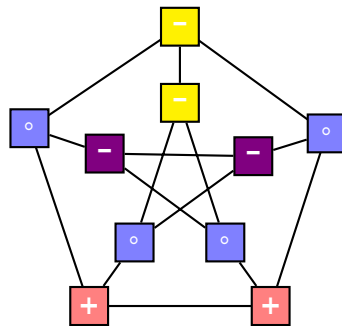
^۲L. Miclo

۱-۳ دامنه‌های نودال

درباره شکل و ساختار هندسی ویژه‌تابع‌های ماتریس لاپلاسین، اطلاعات بسیار کمی وجود دارد. مهمترین قضیه در این باره، قضیه پرون-فروبنیوس (قضیه ۱-۵-۱) است که اطلاعاتی درباره اولین ویژه‌تابع ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته به دست می‌دهد. درباره تعمیم این قضیه به بقیه ویژه‌مقدارهای ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته، تنها قضیه کلی موجود قضیه ۲-۱-۳ است که اطلاعاتی درباره تعداد زیرگراف‌های همبندی که علامت ویژه‌تابع روی آن تغییر نمی‌کند، به دست می‌دهد (ادامه این بخش را ببینید). این قضیه صورت معادل قضیه کورانت-هیلبرت برای عملگرهای بیضوی روی منیفلدها است [۲۹، فصل ۶، §۶]. برای بیان این قضیه ابتدا چند مفهوم را معرفی می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر، تعاریف و پیش‌زمینه‌ها [۲۰] را ببینید.

تعریف ۱-۱-۳

فرض کنید گراف ساده $G = (V, E)$ داده شده است. برای تابع $f \in \mathcal{F}(V)$ ، منظور از یک دامنه نودال قوی مثبت (به ترتیب منفی)، یک مولفه همبندی از گراف القایی روی رئوس $\{v \in V : f(v) > 0\}$ (به ترتیب منفی) است. همچنین یک دامنه نودال ضعیف مثبت (به ترتیب منفی)، یک مولفه همبندی از گراف القایی روی رئوس $\{v \in V : f(v) \geq 0\}$ (به ترتیب $\{v \in V : f(v) \leq 0\}$ است که حداقل یک راس ناصفر دارد. تعداد دامنه نودال‌های قوی و ضعیف یک تابع $f \in \mathcal{F}(V)$ را به ترتیب با $\mathfrak{G}(f)$ و $\mathfrak{W}(f)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $\mathfrak{W}(f) \leq \mathfrak{G}(f)$. یک مثال را در شکل ۱-۳ ببینید. ▲



شکل ۱-۳: علامت ویژه‌تابع f متناظر با ویژه‌مقدار دوم ماتریس لاپلاسین ترکیبیاتی گراف پترسن. داریم $\mathfrak{G}(f) = 3 > 2 = \mathfrak{W}(f)$.

قضیه ۲-۱-۳ [۳۵]

فرض کنید L ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته یک گراف همبند باشد. همچنین فرض کنید ویژه‌مقدار k ام L ، λ_k ، دارای تکرار r باشد و f را یک ویژه‌تابع متناظر λ_k بگیرید. در این صورت

$$\mathfrak{W}(f) \leq k \quad \text{و} \quad \mathfrak{G}(f) \leq k + r - 1.$$

برای اثبات قضیه ۲-۱-۳ و جزئیات بیشتر [۲۰] را ببینید. به کمک این قضیه می‌توانیم نتیجه زیر را درباره ویژه‌مقدار دوم ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته به‌دست آوریم.

نتیجه ۳-۱-۳

فرض کنید L ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته گراف همبند G باشد و f_1 و f_2 را به ترتیب ویژه‌تابع‌های متناظر با ویژه‌مقدارهای اول و دوم L بگیرید. در این صورت داریم $\mathfrak{G}(f_1) = \mathfrak{W}(f_1) = 1$ و $\mathfrak{W}(f_2) = 2$ و $\mathfrak{G}(f_2) \geq 2$.

برهان. حکم درباره f_1 همان نتیجه ۲-۵-۱ است. از قضیه ۲-۱-۳ داریم $\mathfrak{W}(f_2) \leq 2$. اما چون λ_1 ساده است، بنابراین $f_2 \perp_{\omega} f_1$ و لذا f_2 نمی‌تواند همه جا نامنفی یا همه جا نامثبت باشد. لذا $\mathfrak{W}(f_2) = 2$. ■

قضیه زیر نشان می‌دهد که وقتی گراف G یک درخت و f یک ویژه‌تابع هیچ‌جا صفر لاپلاسین تعمیم‌یافته است، تعداد دامنه‌های نودال f حداکثر مقدار ممکن است.

قضیه ۴-۱-۳ [۱۹]

فرض کنید T یک درخت و L یک ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته روی T باشد. هم‌چنین فرض کنید f ویژه‌تابع متناظر با ویژه‌مقدار k ام L ، λ_k ، است که هیچ‌جا صفر نیست. در این صورت λ_k یک ویژه‌مقدار ساده است و داریم $\mathfrak{W}(f) = \mathfrak{G}(f) = k$.

قضیه زیر تعمیمی از قضیه ۴-۱-۳ ارائه می‌دهد که ارتباطی بین تعداد دامنه‌های نودال ویژه‌تابع لاپلاسین تعمیم‌یافته و بعد فضای دوری گراف زمینه به‌دست می‌دهد. صورت دیگری از این قضیه قبلاً در [۱۵] ثابت شده است (شرط ساده بودن ویژه‌مقدار، این‌جا حذف شده است). در این‌جا اثبات دیگری برای آن ارائه می‌دهیم که اطلاعات بیشتری از رابطه دامنه‌های نودال و دوره‌های گراف فراهم می‌کند. برای تعریف فضای دوری [۲۱] را ببینید.

قضیه ۵-۱-۳

فرض کنید L یک ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته $n \times n$ باشد، به‌طوری‌که گراف متناظر آن، G ، همبند و بعد فضای دوری آن برابر l است. برای عدد $k \in [l, n]$ ، اگر $\lambda_k := \lambda$ ویژه‌مقدار k ام L باشد و $f := f_k$ یک ویژه‌تابع متناظر آن باشد که هیچ‌جا صفر نیست. آن‌گاه

$$k - l \leq \nu(f) := \mathfrak{G}(f) = \mathfrak{W}(f) \leq k.$$

هم‌چنین حداقل $k - \nu(f)$ دور در گراف وجود دارد که دامنه‌های نودال f را قطع می‌کند (یعنی هر کدام از این دورها با حداقل دو دامنه نودال f اشتراک دارد).

برهان. با توجه به این‌که f هیچ‌جا صفر نیست، واضح است که $\mathfrak{W}(f) = \mathfrak{G}(f) \leq k$. قضیه را با استقرا روی l ثابت می‌کنیم. حالت $l = 0$ (یعنی وقتی G درخت است)، همان قضیه ۴-۱-۳ است. فرض کنید قضیه برای گراف‌ها با فضای دوری از بعد $l - 1$ برقرار باشد و G را گرافی با بعد فضای دوری l و L را یک ماتریس لاپلاسین

تعميم‌يافته روی آن بگيريد که نسبت به تابع وزن ω خود-الحاق باشد. توابع وزن p, φ را مطابق (۸-۱) تعريف کنید و هم‌چنين فرض کنید λ, f شرايط قضيه را دارا هستند. يکی از يال‌های G را می‌بريم تا يک گراف G' با بعد فضای دوری $l-1$ و يک ماتريس لاپلاسين تعميم‌يافته L' روی آن بياييم، به‌طوری که λ ويژه‌مقدار L' است، برای يک j که $j \geq k$. هم‌چنين متناظر λ ، يک ويژه‌تابع f' هيچ‌جا صفر برای L' می‌ياييم که $\nu(f') \leq \nu(f) + 1$. لذا نتيجه از فرض استقرا حاصل می‌شود. برش يال به‌صورت زیر انجام می‌گيرد.

يک يال $xy \in E(G)$ را که حذف آن بعد فضای دوری را يک واحد کاهش می‌دهد، ثابت می‌گيريم. يال xy را از G حذف کرده و يک راس تنهای z و يال xz را به گراف اضافه می‌کنيم. به اين طريق گراف جديد G' را به‌دست می‌آوريم. هم‌چنين توابع وزن جديد ω', φ', p' را به‌صورت زیر تعريف می‌کنيم

$$\omega'(z) := 1, \quad \omega'(u) := \omega(u), \quad \forall u \in V(G).$$

$$\varphi'(xz) := \varphi(xy), \quad \varphi'(e) := \varphi(e), \quad \forall e \in E(G'), e \neq xz,$$

$$p'(z) := \lambda + \left(\frac{f(x)}{f(y)} - 1 \right) \varphi(xy), \quad p'(y) := p(y) + \left(1 - \frac{f(x)}{f(y)} \right) \varphi(xy),$$

$$p'(u) := p(u), \quad \forall u \in V(G'), u \neq z, y.$$

نهايتاً تابع $f' \in \mathcal{F}_{\omega'}(V(G'))$ را طوری تعريف می‌کنيم که روی $V(G)$ منطبق بر f باشد و $f'(z) := f(y)$. حال می‌بينيم که f' ويژه‌تابع L' متناظر با ويژه‌مقدار λ است، زیرا

$$(L'f')(z) = \frac{p'(z)}{\omega'(z)} f'(z) + \frac{\varphi'(xz)}{\omega'(z)} (f'(z) - f'(x)) = \lambda f'(z),$$

و

$$(L'f')(y) = (Lf)(y) + \frac{1}{\omega(y)} (\varphi(xy)(f(x) - f(y)) - p(y)f(y) + p'(y)f'(y)) = \lambda f'(y).$$

حال فرض کنید $\lambda'_1 \leq \dots \leq \lambda'_{n+1}$ طيف مرتب ماتريس L' باشد. در ادامه اثبات، می‌خواهيم ثابت کنیم $\lambda'_k \leq \lambda_k$. به اين منظور، با توجه به رابطه (۱۱-۱)، $W_\circ$ را يک زیرفضای k -بعدی از $\mathcal{F}_\omega(V(G))$ بگيريد که

$$\max_{g \in W_\circ} \left\{ \frac{\mathcal{E}_L(g)}{\|g\|_{r,\omega}^2} \right\} = \lambda_k = \lambda.$$

سپس $W'_\circ$ را يک زیرفضای $\mathcal{F}_{\omega'}(V(G'))$ به‌صورت زیر تعريف کنید

$$W'_\circ := \{g' \in \mathcal{F}_{\omega'}(V(G')) \mid g := g'|_{V(G)} \in W_\circ \text{ و } g'(z) = g'(y)\}.$$

بنابراین، به‌وضوح $\dim(W'_\circ) = \dim(W_\circ) = k$ و برای هر $g' \in W'_\circ$ داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{L'}(g') &= \mathcal{E}_L(g) + p'(z)g'(z)^2 + p'(y)g'(y)^2 - p(y)g'(y)^2 \\ &= \mathcal{E}_L(g) + (p'(z) + p'(y) - p(y))g(y)^2 = \mathcal{E}_L(g) + \lambda g(y)^2.\end{aligned}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}\lambda'_k &= \min_{W: \dim(W) \geq k} \max_{g' \in W} \left\{ \frac{\mathcal{E}_{L'}(g')}{\|g'\|_{\mathfrak{r}, \omega'}^2} \right\} \leq \max_{g' \in W'_\circ} \left\{ \frac{\mathcal{E}_{L'}(g')}{\|g'\|_{\mathfrak{r}, \omega'}^2} \right\} \\ &= \max_{g \in W_\circ} \left\{ \frac{\mathcal{E}_L(g) + \lambda g(y)^2}{\|g\|_{\mathfrak{r}, \omega}^2 + g(y)^2} \right\} \leq \lambda = \lambda_k.\end{aligned}$$

لذا با توجه به فرض استقرا داریم

$$k - (l - 1) \leq \nu(f') \leq \nu(f) + 1.$$

اثبات ادعای اول به این شکل کامل می‌شود. برای اثبات ادعای دوم، توجه کنید که با توجه به فرض استقرا، گراف G' حداقل $k - \nu(f')$ دور دارد که دامنه‌های نودال f' را قطع می‌کند. فرض کنید C یک دور در G شامل یال xy باشد. اگر دور C کاملاً در یک دامنه نودال f قرار بگیرد، آنگاه $\nu(f) = \nu(f')$ و حکم استقرا نتیجه می‌شود. در غیر این‌صورت، دور C دامنه‌های نودال f را قطع می‌کند و به‌همراه $k - \nu(f')$ دور قطع‌کننده که از فرض استقرا به‌دست آمده، حداقل $k - \nu(f)$ دور قطع‌کننده در G خواهیم داشت. ■

۲-۳ دامنه‌های نودال و نامساوی چيگر

با مقایسه قضیه ۳-۳-۲ و قضیه ۱-۴-۱ می‌بینیم که λ_k و ι_k به ترتیب نسخه‌های L^2 و L^1 از یک تعریف وردشی هستند. بنابراین برای مقایسه این دو پارامتر باید بتوان ۲-نرم و ۱-نرم‌ها را با هم مقایسه کرد. با کمک قرار دادن توابع مشخصه می‌توان یک طرف نامساوی چيگر تعمیم‌یافته را برای گراف‌های وزن‌دار ثابت کرد.

قضیه ۱-۲-۳

برای گراف وزن‌دار $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ ، فرض کنید $(\lambda_k)_{k \in [|V|]}$ طیف مرتب ماتریس لاپلاسی تعمیم‌یافته آن باشد. در این‌صورت برای هر $k \in [|V|]$ داریم

$$\lambda_k \leq \iota_k^M(G), \quad (2-3)$$

$$\bar{\lambda}_k \leq \iota_k^m(G), \quad (3-3)$$

که $\bar{\lambda}_k$ میانگین k ویژه‌مقدار اول است.

برهان. فرض کنید $\{A_i\}_i^k \in \mathcal{D}_k(V)$ به گونه‌ای انتخاب شود که

$$\iota_k^M(G) = \max_{i \in [k]} \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)}.$$

برای هر $i \in [k]$ ، تعریف کنید

$$h_i(x) = \chi_{A_i} := \begin{cases} 1 & x \in A_i \\ 0 & x \notin A_i. \end{cases}$$

حال فرض کنید W فضای خطی تولید شده توسط توابع $h_1, \dots, h_k$ باشد و $f \in W$ دلخواه به گونه‌ای باشد که $f = c_1 h_1 + \dots + c_k h_k$ در این صورت با توجه به تساوی (۲-۲) و رابطه $(a-b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ ، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}(f)}{\|f\|_{\varphi, \omega}^2} &= \frac{\sum_{xy \in E} |f(x) - f(y)|^2 \varphi(xy) + \sum_{x \in V} p(x) |f(x)|^2}{\sum_{x \in V} \omega(x) |f(x)|^2} \\ &= \frac{(1/2) \sum_{i,j} |c_i - c_j|^2 \varphi(A_i, A_j) + \sum_i c_i^2 p(A_i)}{\sum_i c_i^2 \omega(A_i)} \\ &\leq \frac{\sum_{i \neq j} (c_i^2 + c_j^2) \varphi(A_i, A_j) + \sum_i c_i^2 p(A_i)}{\sum_i c_i^2 \omega(A_i)} \\ &\leq 2 \frac{\sum_i c_i^2 (\varphi(\partial A_i) + p(A_i))}{\sum_i c_i^2 \omega(A_i)} \\ &\leq 2 \max_{i \in [k]} \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)} = 2 \iota_k^M(G). \end{aligned}$$

در نتیجه نامساوی (۲-۳) از قضیه کورانت-فیشِر (قضیه ۱-۴-۱) حاصل می‌شود. برای اثبات نامساوی (۳-۳)، مشابه استدلال فوق را بیان کرده و از قضیه کی-فن (قضیه ۱-۴-۳) استفاده می‌کنیم. ■

مثال ۲-۲-۳

در این مثال محکم بودن نامساوی‌های (۲-۳) و (۳-۳) را نشان می‌دهیم. فرض کنید وزن همه یال‌ها برابر یک و وزن هر راس برابر درجه آن باشد و گراف کامل K_n را در نظر بگیرید. داریم $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_k = \frac{n}{n-1}$ برای هر $k \in [2, n]$. هم‌چنین برای گراف کامل دوبخشی $K_{m,n}$ ، داریم $\lambda_1 = 0$ ، $\lambda_k = 1$ برای هر $k \in [2, m+n-1]$ و $\lambda_{m+n} = 2$. بنابراین با توجه به مثال ۲-۲-۲، برای گراف کامل K_n و گراف کامل دوبخشی $K_{m,n}$ که m مضربی از n است و برای هر $k \in [n]$ ، در نامساوی (۳-۳) تساوی اتفاق می‌افتد. هم‌چنین برای گراف کامل K_{2n}

$k = 2$ ، در نامساوی (۲-۳) تساوی اتفاق می‌افتد. برای اثبات محکم بودن نامساوی (۲-۳) برای هر k دلخواه، کافی است گراف $K_{2n} \sqcup \overline{K_{k-2}}$ را در نظر بگیریم.

قضیه ۱-۲-۳ این حدس را تقویت می‌کند که باید طرف دیگر نامساوی چيگر نیز برای ویژه‌مقدارهای بالاتر برقرار باشد. بر این اساس، به‌طور طبیعی، حدس زیر به عنوان **حدس تعمیم‌یافته چيگر** مطرح می‌شود.

حدس ۳-۲-۳ (حدس تعمیم‌یافته چيگر)

برای هر عدد طبیعی $k \in \mathbb{N}$ ، ثابت‌های جهانی $\chi(k)$ و $\chi'(k)$ وجود دارد، به‌طوری که برای هر گراف وزن‌دار $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ با ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته L داریم

$$\frac{\chi(k)}{|L|} (\iota_k^M(G))^2 \leq \lambda_k, \quad (۴-۳)$$

$$\frac{\chi'(k)}{|L|} (\iota_k^m(G))^2 \leq \bar{\lambda}_k, \quad (۵-۳)$$

که λ_k و $\bar{\lambda}_k$ به ترتیب ویژه‌مقدار k ام L و میانگین k ویژه‌مقدار اول آن است و $|L| := \max_{x \in V} |L(x, x)|$. حدس فوق در حالت $k = 2$ همان نامساوی (۱-۳) است که قبلاً ثابت شده است. اثبات حدس ۳-۲-۳ در حالت کلی بسیار مشکل به نظر می‌رسد (مشابه تعمیم قضیه پرون-فروبنیوس که مشکل است). در این فصل از دو رهیافت به این حدس حمله می‌کنیم. رهیافت اول مبتنی بر دامنه‌های نودال است که در این بخش مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ابتدا لم زیر که مقایسه‌ای بین نسبت رایلی در حالت ۱-نرم و ۲-نرم برقرار می‌کند را بیان می‌کنیم.

لم ۴-۲-۳

فرض کنید $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ یک گراف وزن‌دار و L ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته آن باشد. برای هر تابع $f \in \mathcal{F}_\omega(V)$ داریم

$$\left(\frac{\|\nabla f\|_{\varphi, \varphi}^2 + \|f\|_{\varphi, p}^2}{\|f\|_{\varphi, \omega}^2} \right)^2 \leq 2|L| \frac{\|\nabla f\|_{\varphi, \varphi}^2 + \|f\|_{\varphi, p}^2}{\|f\|_{\varphi, \omega}^2},$$

که در آن $|L| := \max_{x \in V} |L(x, x)|$.

برهان.

$$\begin{aligned} \frac{\|\nabla f\|_{\varphi, \varphi}^2 + \|f\|_{\varphi, p}^2}{\|f\|_{\varphi, \omega}^2} &= \frac{\sum_{xy \in E} |f(x) - f(y)|^2 \varphi(xy) + \sum_{x \in V} |f(x)|^2 p(x)}{\sum_{x \in V} |f(x)|^2 \omega(x)} \\ &\times \frac{\sum_{xy \in E} |f(x) + f(y)|^2 \varphi(xy) + \sum_{x \in V} |f(x)|^2 p(x)}{\sum_{xy \in E} |f(x) + f(y)|^2 \varphi(xy) + \sum_{x \in V} |f(x)|^2 p(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \geq \frac{\left(\sum_{xy \in E} |f(x)^2 - f(y)^2| \varphi(xy) + \sum_{x \in V} |f(x)|^2 p(x) \right)^2}{\left(\sum_{x \in V} |f(x)|^2 \omega(x) \right) \times \left(\sum_{x \in V} |f(x)|^2 (2 \deg(x) + p(x)) \right)} \\
& \geq \frac{1}{2|L|} \left(\frac{\|\nabla f^2\|_{\varphi} + \|f^2\|_{p}}{\|f^2\|_{\omega}} \right)^2.
\end{aligned}$$

■

تعريف ۳-۲-۵

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف بدون جهت، $f \in \mathcal{F}(V)$ یک تابع روی رئوس و $A \subseteq V$ یک زیرمجموعه از رئوس باشد. زوج $(A, V \setminus A)$ یک **مجموعه برشی دوقطبی** برای f گفته می‌شود، اگر برای هر یال $xy \in \partial A$ داشته باشیم $f(x)f(y) \leq 0$. هم‌چنین یک زیرمجموعه $A \subseteq V$ را یک **بخش دوقطبی** غیرمنفی (غیرمثبت) از f گوئیم، اگر تحدید f روی A ، $f|_A$ ، غیرمنفی (غیرمثبت) و حداقل برای یک عضو A ناصفر باشد و $(A, V \setminus A)$ یک مجموعه برشی دوقطبی برای f باشد. واضح است که هر دامنه نودال ضعیف f ، یک بخش دوقطبی از f است. برای یک عدد حقیقی داده شده $\zeta \in \mathbb{R}$ و ماتریس خود-الحاق L ، تابع $f \in \mathcal{F}(V)$ را یک **ζ -فزونی** (به ترتیب **ζ -نقصانی**) برای ماتریس L می‌گوئیم، اگر $Lf \leq \zeta f$ (به ترتیب $Lf \geq \zeta f$). با سوءاستفاده از زبان، در صورت عدم وجود ابهام، یک تابع ζ -فزونی (ζ -نقصانی) برای ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته L ، به سادگی یک تابع ζ -فزونی (ζ -نقصانی) گفته می‌شود. ▲

لم بعدی در اثبات نامساوی چيگر تعمیم‌یافته به کار خواهد رفت. لازم به ذکر است که این لم را می‌توان به عنوان نتیجه‌ای از **لم دوال-ریز** نیز به‌دست آورد ([۳۹] را برای نتیجه اصلی و [۳۱، ۲۰] را برای تاریخچه، اصلاحات و بحث بیشتر ببینید).

لم ۳-۲-۶

فرض کنید $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ یک گراف وزن‌دار با ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته L و $f \in \mathcal{F}(V)$ یک تابع ζ -فزونی (به ترتیب ζ -نقصانی) برای L باشد، به‌طوری که $A \subseteq V$ یک بخش دوقطبی غیرمنفی (به ترتیب غیرمثبت) از f باشد. در این صورت با تعریف $g := f|_A$ ، داریم

$$\zeta \geq \frac{\|\nabla g\|_{\varphi}^2 + \|g\|_{p,p}^2}{\|g\|_{\omega}^2}.$$

برهان. فرض کنید f و A در شرایط صورت لم صدق کنند. حکم را برای وقتی که A بخش دوقطبی غیرمنفی f است، ثابت می‌کنیم و حالت دیگر به‌طور مشابه نتیجه می‌شود. اگر $x \in A$ ، آن‌گاه $g(x) = f(x)$ و برای هر همسایه y از x ، داریم $g(y) \geq f(y)$. بنابراین $g(x) = \zeta f(x) = \zeta g(x)$. $(Lg)(x) \leq (Lf)(x) \leq \zeta f(x)$. هم‌چنین اگر $x \notin A$ ، آن‌گاه

$g(x) = 0$ و چون $g \geq 0$ ، به وضوح $(Lg)(x) \leq \zeta g(x)$. درنتیجه با توجه به رابطه (۷-۱) داریم

$$\|\nabla g\|_{\mathcal{V},\varphi}^2 + \|g\|_{\mathcal{V},p}^2 = \langle Lg, g \rangle_\omega \leq \zeta \langle g, g \rangle_\omega = \zeta \|g\|_{\mathcal{V},\omega}^2.$$

■

تعریف ۷-۲-۳

فرض کنید $\Gamma = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ لیستی از k عدد حقیقی باشد. یک لیست از k تابع حقیقی $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ روی دامنه X به همراه k زیرمجموعه مجزای $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_k)$ ، را یک مجموعه توابع متقاطع سازگار برای L گوئیم هرگاه

- برای هر $i \in \llbracket k \rrbracket$ ، تابع $f_i := f|_{A_i}$ یک تابع ζ_i -فزونی (به ترتیب ζ_i -نقصانی) نسبت به L روی X باشد.
- برای هر $i \in \llbracket k \rrbracket$ ، زیرمجموعه A_i یک بخش دوقطبی غیرمنفی (به ترتیب غیرمثبت) از f_i باشد.

▲

اکنون آماده‌ایم تا قضیه تعمیم‌یافته چيگر را بیان کنیم.

قضیه ۸-۲-۳

یک گراف وزن‌دار G با ماتریس لاپلاسی تعمیم‌یافته L در نظر گرفته و قرار دهید $\Gamma = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$. اگر $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ به همراه $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_k)$ یک مجموعه توابع متقاطع سازگار برای L باشد، آنگاه

$$\mathfrak{L}[L] \max_{i \in \llbracket k \rrbracket} \zeta_i \geq \iota_k^M(G)^2,$$

$$\mathfrak{L}[L] \bar{\zeta}_k \geq \iota_k^m(G)^2.$$

برهان. فرض کنید $g_i := f_i|_{A_i} \neq 0$ ، در این صورت

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_k &\geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\|\nabla g_i\|_{\mathcal{V},\varphi}^2 + \|g_i\|_{\mathcal{V},p}^2}{\|g_i\|_{\mathcal{V},\omega}^2} \geq \frac{1}{\mathfrak{L}[L]} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\|\nabla g_i\|_{\mathcal{V},\varphi}^2 + \|g_i\|_{\mathcal{V},p}^2}{\|g_i\|_{\mathcal{V},\omega}^2} \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{\mathfrak{L}[L]} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\|\nabla g_i\|_{\mathcal{V},\varphi}^2 + \|g_i\|_{\mathcal{V},p}^2}{\|g_i\|_{\mathcal{V},\pi}^2} \right)^2 \geq \frac{1}{\mathfrak{L}[L]} \iota_k^m(G)^2, \end{aligned}$$

که نامساوی‌های اول و دوم به ترتیب از لم‌های ۶-۲-۳ و ۴-۲-۳ نتیجه می‌شود، نامساوی سوم استفاده مستقیم از نامساوی کشی-شوارتز است و نامساوی آخر از به‌کارگیری قضیه ۳-۳-۲ به‌دست می‌آید. هم‌چنین به‌طور مشابه

داريم

$$\max_{i \in [k]} \zeta_i \geq \max_{i \in [k]} \frac{\|\nabla g_i\|_{\varphi}^2 + \|g_i\|_{\varphi,p}^2}{\|g_i\|_{\varphi,\omega}^2} \geq \frac{1}{2|L|} \max_{i \in [k]} \left(\frac{\|\nabla g_i\|_{\varphi}^2 + \|g_i\|_{\varphi,p}^2}{\|g_i\|_{\varphi,\omega}^2} \right)^2 \geq \frac{1}{2|L|} \iota_k^M(G)^2.$$

■

در پايان اين بخش نتايجي كه در حالات خاص مي‌توان از قضيه ۳-۲-۸ گرفت را بيان مي‌كنيم.

قضيه ۳-۲-۹ (قضيه تعميم‌يافته چيگر)

فرض كنيد G يك گراف وزن‌دار روی n راس و L ماتريس لاپلاسين تعميم‌يافته آن با طيف مرتب $(\lambda_k)_{k \in [n]}$ باشد و حداكثر تعداد دامنه‌هاي نودال قوي يك ويژه‌تابع متناظر با ويژه‌مقدار λ_k را با w_k نشان دهيد. در اين صورت براي هر $k \in [n]$

$$\frac{1}{2|L|} \iota_{w_k}^M(G)^2 \leq \lambda_k \leq 2 \iota_k^M(G).$$

با توجه به اين‌كه همواره $w_2 \geq 2$ (نتيجه ۳-۱-۳)، قضيه فوق، قضيه كلاسيك چيگر (رابطه (۳-۱)) را نتيجه مي‌دهد (البته با ضريب $1/2$ در سمت چپ). هم‌چنين اگر T يك درخت باشد و ويژه‌مقدار λ_k يك ويژه‌تابع هيچ‌جاسفر داشته باشد، آنگاه با توجه به قضيه ۳-۱-۴، داريم $w_k \geq k$ و لذا يك نامساوي چيگر تعميم‌يافته به‌دست مي‌آيد. در بخش ۳-۴ مي‌بينيم كه مي‌توان شرط هيچ‌جاسفر بودن ويژه‌تابع را هم حذف كرد و حدس تعميم‌يافته چيگر (حدس ۳-۲-۳) را براي درخت‌ها با يك ثابت جهاني $1/2$ ثابت كرد (نتيجه ۳-۴-۲ را ببينيد).

۳-۳ طيف همبندی ديريشله

در اين بخش به رهيافت دوم در جهت اثبات نامساوي چيگر تعميم‌يافته مي‌پردازيم. در اين رهيافت، در ادامه كارهاي ميكلو [۶۷]، يك طيف ميانه به نام طيف همبندی ديريشله را معرفي مي‌كنيم كه واسطی بين طيف جبري (ويژه‌مقدارهاي لاپلاسين) و طيف ايزوپريمتری هستند و در بخش بعد خواهيم ديد كه چطور مي‌توان اين طيف را در اثبات نامساوي‌هاي چيگر تعميم‌يافته به كار گرفت. تا پايان فصل، فضاي مورد مطالعه ما فضاي گراف‌هاي كوانتومي با پتانسيل نامنفی است و از نمادهای $f, G, \mathcal{A}$ براي مدل متريك استفاده مي‌كنيم و هم‌چنان قلم رومي (f, G, A) را براي مدل گسسته به‌كار مي‌گيريم (بخش ۸-۱ را ببينيد).

ابتدا مفهوم دامنه نودال معرفي شده در بخش ۱-۳ را براي گراف‌هاي متريك تعريف مي‌كنيم. براي يك تابع $f \in \mathcal{F}(G)$ ، يك زيرمجموعه $\mathcal{A} \subseteq G$ را يك **دامنه نودال پيوسته** تابع f گوييم، هرگاه $\mathcal{A}$ يك مولفه همبندی (زيرمجموعه همبند ماكيسمال) از $G \setminus \{x \in G : f(x) = 0\}$ باشد. منظور از دامنه نودال (پيوسته) يك تابع

گسسته $f \in \mathcal{F}(V)$ ، دامنه نودال تابع f ، توسيع آفين f روی G ، است.^۳

لم ۱-۳-۳

فرض کنید $f \neq 0$ یک ویژه‌تابع متناظر با ویژه‌مقدار λ برای ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته L و $\mathcal{A}$ یک دامنه نودال (پیوسته) f باشد. در این صورت $\lambda_1(\mathcal{A}) = \lambda$ و f متناسب با تابع مینیمم‌گر $f_{\mathcal{A}}$ روی $A := \mathcal{A} \cap V$ است.

برهان. اگر تابع دلخواه $g \in \mathcal{F}(G)$ ، روی تکه یال $[x, y]$ خطی باشد و $a \in [x, y]$ ، آنگاه داریم

$$\tilde{\varphi}(x, a)(g(x) - g(a)) = \varphi(xy)(g(x) - g(y)).$$

با توجه به این مطلب و رابطه $Lf = \lambda f$ ، برای هر $x \in A$ داریم

$$\begin{aligned} \lambda f(x) &= (Lf)(x) = \frac{p(x)}{\omega(x)} f(x) + \frac{1}{\omega(x)} \sum_{y: x \sim y} \varphi(xy) (f(x) - f(y)) \\ &= \frac{p(x)}{\omega(x)} f(x) + \frac{1}{\omega(x)} \sum_{y \in A: x \sim y} \varphi(xy) (f(x) - f(y)) + \frac{1}{\omega(x)} \sum_{a \in \partial \mathcal{A}: a \in [x, y]} \tilde{\varphi}(x, a) f(x) \\ &= \hat{L}_{\mathcal{A}}(x, x) f(x) + \sum_{y \in A: x \sim y} \hat{L}_{\mathcal{A}}(x, y) f(y) = (\hat{L}_{\mathcal{A}} f)(x), \end{aligned}$$

که $\tilde{\varphi}$ و $\hat{L}$ در بخش ۱-۸ تعریف شده‌اند. بنابراین تحدید تابع f به A ، ویژه‌تابع ماتریس $\hat{L}_{\mathcal{A}}$ متناظر با ویژه‌مقدار λ است. از طرف دیگر با توجه به لم ۱-۸-۲، $\lambda_1(\mathcal{A})$ ویژه‌مقدار ماتریس $\hat{L}_{\mathcal{A}}$ با ویژه‌تابع $f_{\mathcal{A}}$ است. چون تابع f روی A تغییر علامت نمی‌دهد، با توجه به قضیه پرون-فروبینوس (قضیه ۱-۵-۱) داریم $\lambda = \lambda_1(\mathcal{A})$ و f متناسب با $f_{\mathcal{A}}$ است. ■

حال آماده‌ایم تا طیف همبندی دیریشه را معرفی کنیم. ابتدا مفهوم زیرافراز و افراز را برای گراف‌های متریک تعریف می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که $\mathcal{D}_1(G)$ فضای همه زیرمجموعه‌های باز و همبند $\mathcal{A} \subseteq G$ تعریف می‌شود که $\mathcal{A} \cap V \neq \emptyset$.

تعریف ۲-۳-۳

برای گراف متریک G روی گراف G با n راس و هر عدد $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ، $\mathcal{D}_k(G)$ (یا به سادگی $\mathcal{D}_k$) را خانواده همه k -تایی‌های $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k)$ تعریف می‌کنیم که برای هر $i \in \llbracket k \rrbracket$ ، $\mathcal{A}_i \in \mathcal{D}_1(G)$ و $\mathcal{A}_i$ ها مجزا هستند. هر چنین k -تایی را یک **زیرافراز** می‌گوییم. منظور از مرز $\mathcal{A}$ که با $\partial \mathcal{A}$ نشان می‌دهیم، اجتماع نقاط مرزی اعضای آن است؛ یعنی $\partial \mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^k \partial \mathcal{A}_i$.

یک k -زیرافراز $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \in \mathcal{D}_k(G)$ را یک **افراز** می‌گوییم هرگاه اجتماع بستار مجموعه‌های $\mathcal{A}_i$ برابر G باشد و برای هر نقطه مرزی $x \in \partial \mathcal{A}$ ، اندیس‌های $i \neq j \in \llbracket k \rrbracket$ وجود داشته باشند که $x \in \partial \mathcal{A}_i \cap \partial \mathcal{A}_j$. خانواده

^۳ توجه کنید که این تعریف متفاوت از تعریف دامنه نودال گسسته است که در تعریف ۱-۱-۳ آمده است.

همه k -افزاهای G را با $\mathcal{P}_k(G)$ (یا به‌طور خلاصه $\mathcal{P}_k$) نشان می‌دهیم. در نهایت برای k -زیرافراز داده شده $A = (A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{D}_k(G)$ ، **گراف خارج قسمت** G نسبت به A که با G/A نشان می‌دهیم را یک گراف بدون جهت تعریف می‌کنیم که مجموعه رئوس آن $\{A_1, \dots, A_k\}$ است و A_i و A_j مجاورند، هرگاه حداقل یک نقطه مرزی مشترک داشته باشند، یعنی $\partial A_i \cap \partial A_j \neq \emptyset$. $\blacktriangle$

تعریف ۳-۳-۳ [۶۷]

فرض کنید (G, L) یک گراف کوانتومی با n راس باشد. برای هر $k \in \llbracket n \rrbracket$ تعریف می‌کنیم

$$\underline{\Lambda}_k := \inf_{\{A_i\}_{i=1}^k \in \mathcal{D}_k(G)} \left(\max_{j \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1(A_j) \right). \quad (۶-۳)$$

دنباله $(\underline{\Lambda}_k)_{k \in \llbracket n \rrbracket}$ را **طیف همبندی دیریشله** مربوط به (G, L) می‌خوانیم. $\blacktriangle$ پارامتر $\underline{\Lambda}_k$ در [۶۷] معرفی و خواص آن بررسی شد. به‌طور ویژه ثابت شده است که همواره یک زیرافراز $A \in \mathcal{D}_k(G)$ وجود دارد که مینیم را در (۶-۳) به‌دست می‌دهد [۶۷، لم ۴]. لم زیر را که رابطه این طیف با طیف جبری را نشان می‌دهد، از آن‌جا یادآوری می‌کنیم.

لم ۴-۳-۳

اگر $(\lambda_k)_{k \in \llbracket n \rrbracket}$ و $(\underline{\Lambda}_k)_{k \in \llbracket n \rrbracket}$ به ترتیب طیف جبری و طیف همبندی دیریشله گراف کوانتومی (G, L) باشد، آن‌گاه

$$(i) \quad \text{برای هر } k \in \llbracket n \rrbracket, \text{ داریم } \underline{\Lambda}_k \leq \lambda_k.$$

(ii) در صورتی‌که حداکثر تعداد دامنه‌های نودال قوی یک ویژه‌تابع متناظر با ویژه‌مقدار λ را با w_k نشان دهیم،

$$\text{داریم } \lambda_k \leq \underline{\Lambda}_{w_k}.$$

برهان. فرض کنید $(A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{D}_k(G)$ زیرافراز مینیم‌گر در (۶-۳) باشد و $f_i := f_{A_i}$ تابع مینیم‌گر یکتا برای (A_i) ، مطابق لم ۲-۸-۱ باشد. زیرفضای برداری $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{F}(G)$ را فضای تولید شده توسط توابع $f_1, \dots, f_k$ قرار دهید. برای هر تابع $f \in \mathcal{W}_k$ داریم $f := c_1 f_1 + \dots + c_k f_k$

$$\frac{\mathcal{E}(f)}{\|f\|_{\mathcal{V}, \omega}^2} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i \mathcal{E}(f_i)}{\sum_{i=1}^k c_i \|f_i\|_{\mathcal{V}, \omega}^2} \leq \max_{i \in \llbracket k \rrbracket} \frac{\mathcal{E}(f_i)}{\|f_i\|_{\mathcal{V}, \omega}^2} = \underline{\Lambda}_k.$$

با توجه به این مطلب و قضیه کورانت-فیشِر (قضیه ۱-۴-۱)، قسمت (i) نتیجه می‌شود. برای اثبات قسمت (ii)، فرض کنید $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{w_k}$ دامنه‌های نودال (پیوسته) یک ویژه‌تابع مربوط به ویژه‌مقدار λ_k باشد. با توجه به لم ۱-۳-۳ داریم $\lambda_1(\mathcal{B}_i) = \lambda_k$ و لذا قسمت (ii) از تعریف $\underline{\Lambda}_{w_k}$ نتیجه می‌شود. $\blacksquare$

با در نظر گرفتن لم ۴-۳-۳ و نتیجه ۳-۱-۳، نتیجه می‌گیریم که $\underline{\Lambda}_2 = \lambda_2$. هم‌چنین با در نظر گرفتن n -زیرافرازی که از نصف کردن همه یال‌ها حاصل می‌شود و با توجه به نتیجه ۲-۴-۱ داریم $\underline{\Lambda}_n \leq 2|L| \leq 2\lambda_n$. این مشاهدات به‌طور طبیعی ما را به سمت حدس زیر سوق می‌دهد.

حدس ۳-۳-۵ (حدس ميكلو) [۶۷]

برای هر عدد طبیعی k ، یک ثابت جهانی $\circ > \tilde{\chi}(k)$ وجود دارد که برای هر گراف کوانتومی روی n راس، داریم

$$\forall k \in \llbracket n \rrbracket, \quad \tilde{\chi}(k) \underline{\Delta}_k \leq \lambda_k. \quad (۷-۳)$$

در بخش بعد ارتباط بین حدس ميكلو و حدس تعمیم‌یافته چيگر را بررسی می‌کنیم و در بخش‌های بعد قدم‌هایی به سمت اثبات حدس ميكلو برمی‌داریم.

در کنار طیف همبندی دیریشله که در تعریف ۳-۳-۳ معرفی شد، می‌توان پارامترهای هندسی دیگری نیز به یک گراف منتسب کرد. به‌ویژه برای گراف کوانتومی (G, L) با n راس و هر عدد $k \in \llbracket n \rrbracket$ ، تعریف می‌کنیم

$$\bar{\Delta}_k := \sup_{\{\mathcal{A}_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(G)} \left(\min_{j \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1(\mathcal{A}_j) \right).$$

این پارامترهای جدید در بررسی تجزیه طیفی دوره‌ها به کار می‌آیند (بخش ۲-۴ را ببینید). توجه کنید که برعکس پارامترهای $\underline{\Delta}_k$ که همواره یک زیرافراز مینیمم‌گر برای آن‌ها وجود دارد، ممکن است که افراز ماکسیمم‌گر برای $\bar{\Delta}_k$ وجود نداشته باشد. هم‌چنین در حالت کلی، ارتباطی بین پارامترهای $\underline{\Delta}_k$ و $\bar{\Delta}_k$ وجود ندارد. برای مشاهده حالتی که افراز ماکسیمم‌گر وجود ندارد و هم‌چنین رابطه پارامترها در حالات خاص گزاره ۱-۱-۴ را ببینید.

در ادامه چند تعریف پایه‌ای را درباره زیرافرازاها ارائه می‌کنیم. فرض کنید (G, L) یک گراف کوانتومی روی گراف G باشد. یک زیرافراز $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \in \mathcal{D}_k(G)$ را **یکنواخت** می‌گوییم، هرگاه برای هر $i, j \in \llbracket k \rrbracket$ ، $\lambda_1(\mathcal{A}_i) = \lambda_1(\mathcal{A}_j)$ و در این صورت این مقدار مشترک را با $\lambda_1(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین $\mathcal{A}$ را **روان** می‌گوییم هرگاه برای هر زوج اندیس $i \neq j \in \llbracket k \rrbracket$ داشته باشیم $\partial \mathcal{A}_i \cap \partial \mathcal{A}_j \cap V_3 = \emptyset$ که V_3 مجموعه رئوس با درجه حداقل ۳ در G است.

بسیاری از مطالبی که در این فصل اثبات خواهیم کرد، برای زیرافرازاها روان برقرار هستند. بنابراین برای تعمیم آن‌ها به حالت کلی باید ثابت کنیم که این زیرافرازاها «جنبه عمومی» دارند. برای دقیق کردن این مفهوم، فرض کنید G یک گراف بدون جهت و ω یک تابع وزن راسی باشد. مجموعه $\mathcal{L}(G, \omega)$ را خانواده همه ماتریس‌های لاپلاسی تعمیم‌یافته تعریف می‌کنیم که نسبت به ω خودالحاق هستند و گراف متناظر آن‌ها G است. با توپولوژی طبیعی نقطه به نقطه، $\mathcal{L}(G, \omega)$ را به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌کنیم.^۴ حال می‌گوییم یک خاصیت **به‌طور عمومی** برقرار است، هرگاه این خاصیت برای همه ماتریس‌های درون یک زیرمجموعه چگال از $\mathcal{L}(G, \omega)$ برقرار باشد. اعتقاد ما بر این است که حدس زیر همواره برقرار است.

حدس ۳-۳-۶ [۳۴]

فرض کنید G یک گراف ساده همبند روی n راس و $k \in \llbracket n-1 \rrbracket$ باشد. گزاره‌های زیر **به‌طور عمومی** برقرار هستند.

^۴ در واقع هر ماتریس $n \times n$ به‌صورت یک بردار در $\mathbb{R}^{n^2}$ در نظر گرفته می‌شود.

(i) هر زیرافراز مینیم‌گر $A \in \mathcal{D}_k(G)$ برای $\underline{\Lambda}_k$ روان است.

(ii) یک افراز ماکسیم‌گر $A \in \mathcal{D}_k(G)$ برای $\bar{\Lambda}_k$ یافت می‌شود که روان است.^۵

نتایج [۶۷] نشان می‌دهد که این حدس وقتی که G یک درخت است، برقرار می‌باشد (لم ۷-۳-۳ (iii) و گزاره ۱-۱-۴ (ii) را ببینید). توجه کنید که این حدس برای حالت $k = n$ برقرار نیست، به عنوان مثال در گزاره ۱-۱-۴ (i) خواهیم دید که اگر G یک دور باشد، $\bar{\Lambda}_n = +\infty$ و لذا در این حالت هیچ افراز ماکسیم‌گری برای $\bar{\Lambda}_n$ وجود ندارد. در پایان این بخش، نتایج مهمی که درباره طیف $(\underline{\Lambda}_k)_{k \in \llbracket n \rrbracket}$ در [۶۷] ثابت شده است را به‌طور خلاصه بیان کنیم.

لم ۷-۳-۳ [۶۷]

فرض کنید (G, L) یک گراف کوانتومی روی گراف همبند G باشد.

(i) اگر $A \in \mathcal{D}_k(G)$ یک مینیم‌گر روان برای $\underline{\Lambda}_k$ یا یک ماکسیم‌گر روان برای $\bar{\Lambda}_k$ باشد، آنگاه $A \in \mathcal{D}_k(G)$ یعنی A یک k -افراز است. هم‌چنین A یکنواخت است (قضیه ۱-۶-۳ را ببینید).

(ii) اگر G یک درخت باشد، آنگاه برای هر $k \in \llbracket n \rrbracket$ ، $\underline{\Lambda}_k = \lambda_k$.

(iii) اگر G یک درخت باشد، آنگاه هر مینیم‌گر برای $\underline{\Lambda}_k$ ، به‌طور عمومی، روان است.

(iv) پارامتر $\underline{\Lambda}_k$ به عنوان تابعی حقیقی روی $\mathcal{L}(G, \omega)$ پیوسته است.^۶

ملاحظه ۸-۳-۳

توجه کنید که اگر بتوانیم نامساوی یا تساوی را که شامل پارامترهای λ_k ، $\underline{\Lambda}_k$ یا $\bar{\Lambda}_k$ است (مثلاً حدس میکلو) برای حالت زیرافرازهای روان ثابت کنیم. سپس ثابت کنیم که خاصیت روان بودن برای دسته‌ای از گراف‌ها، به‌طور عمومی برقرار است، آنگاه می‌توان با توجه به پیوسته بودن این پارامترها (قسمت (iv) لم فوق) آن نامساوی یا تساوی را برای همه گراف‌های آن دسته تعمیم داد. به کمک همین روش و با استفاده از قسمت‌های (iii) و (iv) لم فوق، تساوی قسمت (ii) ثابت شده است. از این روش در استدلال‌های مشابه دیگر نیز استفاده خواهیم کرد. ♦

ملاحظه ۹-۳-۳

همان‌طور که ثابت ایزوپریمتری را می‌توان در دو نسخه مهین و میانگین معرفی کرد (تعریف ۳-۱-۲)، طیف همبندی دیریشله را نیز می‌توان در نسخه میانگین تعریف کرد. به عنوان مثال برای گراف کوانتومی (G, L) و هر

^۵در واقع معتقدیم که به‌طور عمومی، همه نقاط مرزی بهینه‌گرها در $G \setminus V$ قرار دارند.

^۶این گزاره درباره پارامتر $\bar{\Lambda}_k$ نیز با استدلال مشابه برقرار است.

$k \in \llbracket n \rrbracket$ ، تعریف می‌کنیم

$$\underline{\Delta}_k^m := \inf_{\{\mathcal{A}_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(G)} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_1(\mathcal{A}_j) \right).$$

مشابه با نتایج به‌دست آمده درباره $\underline{\Delta}_k$ می‌توان روابطی میان پارامتر $\underline{\Delta}_k^m$ و میانگین k ویژه‌مقدار اول، $\bar{\lambda}_k$ و عدد ایزوپریمتری k ، $\iota_k^m(G)$ به‌دست آورد. علی‌رغم طبیعی بودن این تعمیم‌ها، در این رساله بیشتر به تحلیل این پارامتر نمی‌پردازیم (ملاحظه ۳-۶-۲ را ببینید). ♦

۴-۳ طیف همبندی دیریشه و نامساوی چیگر

در این بخش ثابت می‌کنیم که برای اثبات حدس تعمیم‌یافته چیگر (حدس ۳-۲-۳) کافی است حدس میکلو (حدس ۵-۳-۳) را برای گراف‌های کوانتومی همبند ثابت کنیم. در واقع قضیه اصلی را که در این بخش ثابت می‌کنیم، به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱-۴-۳

برای گراف کوانتومی داده شده (G, L) روی n راس و عدد صحیح $k \in \llbracket n \rrbracket$ ، اگر نامساوی (۷-۳) برای L و k صحیح باشد، آن‌گاه نامساوی (۴-۳) نیز برای L و k با ثابت $\chi(k) = \tilde{\chi}(k)/2$ برقرار است. به کمک این قضیه و لم ۷-۳-۳(ii) بلافاصله می‌توان یک قضیه تعمیم‌یافته چیگر برای درخت‌ها ثابت کرد.

نتیجه ۲-۴-۳

اگر T یک درخت وزن‌دار روی n راس با ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته L باشد، آن‌گاه برای هر $k \in \llbracket n \rrbracket$ داریم

$$\frac{1}{2|L|} \iota_k^M(T)^2 \leq \lambda_k \leq 2 \iota_k^M(T).$$

رهیافت ما برای اثبات قضیه ۱-۴-۳ بر اساس یک کران پایین چیگر-گونه برای ویژه‌مقدار اول دیریشه است که رابطه‌ای بین این ویژه‌مقدار و یک ثابت ایزوپریمتری دیریشه برقرار می‌کند (این نامساوی می‌تواند به خودی خود جالب باشد). فرض کنید گراف وزن‌دار (G, ω, φ, p) و زیرمجموعه $A \subseteq V(G)$ داده شده است. ثابت ایزوپریمتری دیریشه برای A به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\iota(A) := \min_{B \subseteq A : B \neq \emptyset} \frac{\varphi(\partial B) + p(B)}{\omega(B)}. \quad (۸-۳)$$

نتیجه زیر می‌تواند به عنوان نسخه معادل دیریشه برای کران چیگر (نامساوی (۱-۳)) در نظر گرفته شود.

گزاره ۳-۴-۳

برای هر زیرمجموعه $A \subseteq V$ ، داریم

$$\frac{\iota^2(A)}{2|L|} \leq \lambda_1(A).$$

برهان. با توجه به لم ۲-۳-۲ داریم

$$\iota(A) = \min_{\substack{f \in \mathcal{F}(A) \\ f \geq 0, f \neq 0}} \frac{\|\nabla f\|_{1,\varphi} + \|f\|_{1,p}}{\|f\|_{1,\omega}}. \quad (۹-۳)$$

فرض کنید f_0 تابع مینیمم‌گر در رابطه (۱۸-۱) باشد. با استفاده از تساوی فوق و لم ۴-۲-۳ داریم

$$\iota^2(A) \leq \left(\frac{\|\nabla f_0^2\|_{1,\varphi} + \|f_0^2\|_{1,p}}{\|f_0^2\|_{1,\omega}} \right)^2 \leq 2|L| \frac{\mathcal{E}(f_0)}{\|f_0^2\|_{2,\omega}^2} = 2|L| \lambda_1(A).$$

■

حال آماده‌ایم که نتیجه زیر را ثابت کنیم که بلافاصله قضیه ۱-۴-۳ را به دست می‌دهد.

نتیجه ۴-۴-۳

برای هر گراف کوانتومی $(\mathcal{G}, L)$ روی گراف وزن‌دار G با n راس، داریم

$$\forall k \in \llbracket n \rrbracket, \quad \frac{1}{2|L|} \left(\iota_k^M(G) \right)^2 \leq \underline{\Lambda}_k.$$

برهان. برای هر زیرمجموعه $C \subseteq V$ ، تعریف می‌کنیم

$$\overline{C} := \bigcup_{\substack{xy \in E \\ x \in C}} [x, y) \subseteq \mathcal{G}.$$

بر اساس گزاره ۳-۴-۳، برای هر زیرمجموعه $\mathcal{A} \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ ، می‌توانیم یک زیرمجموعه ناتهی $B \subseteq A := V \cap \mathcal{A}$ بیابیم به‌طوری که

$$\frac{1}{2|L|} \left(\frac{\varphi(\partial B) + p(B)}{\omega(B)} \right)^2 \leq \lambda_1(A) = \lambda_1(\overline{A}) \leq \lambda_1(\mathcal{A}).$$

نامساوی آخر از این حقیقت ناشی می‌شود که $\mathcal{A} \subseteq \overline{A}$ و λ_1 نسبت به شمول نزولی است (نتیجه ۱-۸-۳). در نتیجه

برای هر $k \in \llbracket n \rrbracket$ و هر $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \in \mathcal{D}_k(G)$ ، می‌توانیم $(B_1, \dots, B_k) \in \mathcal{D}_k(V)$ پیدا کنیم به‌طوری‌که

$$\frac{1}{2|L|} \max_{i \in \llbracket k \rrbracket} \left(\frac{\varphi(\partial B_i) + p(B_i)}{\omega(B_i)} \right)^2 \leq \max_{i \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1(\mathcal{A}_i).$$

■

نامساوی ادعا شده بلافاصله نتیجه می‌شود.

در ادامه این بخش بر روی گراف‌های همبند متمرکز می‌شویم و نشان می‌دهیم که برای اثبات حدس‌های ۳-۲-۳ و ۵-۳-۳ در حالت کلی، کافی است این حدس‌ها را برای گراف‌های همبند ثابت کنیم. با لم پایه‌ای زیر شروع می‌کنیم. این لم در گزاره ۱-۱-۴ نیز به‌کار خواهد رفت.

لم ۵-۴-۳

فرض کنید $(a_i)_{i \in \llbracket n \rrbracket}$ و $(b_i)_{i \in \llbracket m \rrbracket}$ دو دنباله غیرنزولی از اعداد باشند که $a_1 = b_1 = 0$. هم‌چنین فرض کنید $(c_i)_{i \in \llbracket n+m \rrbracket}$ مرتب‌سازی غیرنزولی (با تکرار) مجموعه $\{a_i : i \in \llbracket n \rrbracket\} \cup \{b_i : i \in \llbracket m \rrbracket\}$ باشد و برای هر $k \in \llbracket 2, n+m \rrbracket$ تعریف کنید

$$\underline{c}_k := \min_{l \in \llbracket n \rrbracket \cap \llbracket k-m, k-1 \rrbracket} \max(a_l, b_{k-l}), \quad \bar{c}_k := \max_{l \in \llbracket n \rrbracket \cap \llbracket k-m, k-1 \rrbracket} \min(a_l, b_{k-l}). \quad (10-3)$$

با قرارداد $\underline{c}_1 = \bar{c}_1 = 0$ در این صورت

$$\forall k \in \llbracket n+m \rrbracket, \quad \bar{c}_k \leq \underline{c}_k = c_k. \quad (11-3)$$

برهان. تساوی $\underline{c}_1 = c_1 = \min(a_1, b_1) = 0$ یک نتیجه مستقیم انتخاب $\underline{c}_1$ است. عدد $k \in \llbracket 2, n+m \rrbracket$ را ثابت بگیرید و بدون کم‌شدن کلیت فرض کنید $\underline{c}_k = a_j$ که $j \in \llbracket n \rrbracket \cap \llbracket k-m, k-1 \rrbracket$ کوچکترین چنین اندیس ممکن است. در این صورت

$$\underline{c}_k \geq \max(\{a_1, \dots, a_j\} \cup \{b_1, \dots, b_{k-j}\}),$$

و در نتیجه $\underline{c}_k \geq c_k$.

از طرف دیگر، توجه کنید که $b_{k-j+1} \geq \underline{c}_k$ ، زیرا در غیر این صورت، خواهیم داشت $\max(a_{j-1}, b_{k-j+1}) \leq \underline{c}_k$ که متناقض با شیوه انتخاب j است. در نتیجه،

$$\underline{c}_k \leq \min\{a_{j+1}, \dots, a_n\} = a_{j+1} \quad \text{and} \quad \underline{c}_k \leq \min\{b_{k-j+1}, \dots, b_m\} = b_{k-j+1}$$

که نشان می‌دهد $\underline{c}_k \leq c_k$ و لذا داریم $\underline{c}_k = c_k$.

برای اثبات نامساوی دیگر، $\tilde{a}(t)$ و $\tilde{b}(t)$ را به ترتیب، به عنوان توابعی روی بازه‌های حقیقی $[1, n]$ و $[1, m]$ ،

توسیع‌های آفین طبیعی قطعه به قطعه از $(a_i)_{i \in [n]}$ و $(b_i)_{i \in [m]}$ قرار دهید. سپس برای یک $k \in [2, n+m]$ ثابت، یکی از دو حالت زیر را داریم

- اگر یک نقطه $u \in [\max(1, k-m), \min(n, k-1)]$ وجود داشته باشد به‌طوری که $z := \tilde{a}(u) = \tilde{b}(k-u)$ آن‌گاه به وضوح داریم $\bar{c}_k \leq z \leq c_k$.
- در غیر این صورت روی بازه $[\max(1, k-m), \min(n, k-1)]$ داریم $\tilde{a}(t) \leq \tilde{b}(t)$ یا $\tilde{b}(t) \leq \tilde{a}(t)$ که نشان می‌دهد $\bar{c}_k \leq c_k$.

■

قابل ذکر است که برای هر $k \in [n+m]$ داریم $\bar{c}_k \leq \min(a_n, b_m)$ و در نتیجه هر عضو مجموعه $\{a_k : k \in [n]\} \cup \{b_k : k \in [m]\}$ که بزرگتر از $\min(a_n, b_m)$ است، در خانواده $(\bar{c}_k)_{k \in [n+m]}$ ظاهر نمی‌شود.

گزاره ۳-۴-۶

حدس ۳-۳-۵ برقرار است، اگر این حدس برای گراف‌های کوانتومی همبند برقرار باشد.

برهان. برای $i = 1, 2$ ، فرض کنید (G_i, L_i) گراف کوانتومی روی مجموعه رئوس $V^{(i)}$ باشد که $|V^{(i)}| = n^{(i)}$. از $(\underline{\lambda}_k^{(i)})_{k \in [n^{(i)}]}$ و $(\underline{\Lambda}_k^{(i)})_{k \in [n^{(i)}]}$ به ترتیب طیف جبری و طیف همبندی دیریشه L_i را مراد می‌کنیم. قرار دهید $V := V^{(1)} \sqcup V^{(2)}$ و گراف $G := G_1 \sqcup G_2$ را به همراه عملگر L در نظر بگیرید که برای $i = 1, 2$ ، روی $V^{(i)}$ مطابق $L^{(i)}$ عمل می‌کند. همچنین تعریف کنید $n := n^{(1)} + n^{(2)}$ و $(\lambda_k)_{k \in [n]}$ و $(\underline{\Lambda}_k)_{k \in [n]}$ را به ترتیب طیف جبری و طیف همبندی دیریشه L قرار دهید.

بدون کم شدن کلیت فرض کنید که برای یک دنباله غیرنزولی $(\tilde{\chi}(k))_{k \in \mathbb{N}}$ داریم

$$\forall i \in \{1, 2\}, \forall k \in [n^{(i)}], \quad \tilde{\chi}(k) \underline{\Lambda}_k^{(i)} \leq \lambda_k^{(i)}.$$

چون هیچ یالی بین راس‌های $V^{(1)}$ و $V^{(2)}$ وجود ندارد، طیف جبری L برابر اجتماع طیف‌های جبری $L^{(1)}$ و $L^{(2)}$ است. از لم ۳-۴-۵ داریم

$$\forall k \in [n], \quad \lambda_k = \min_{l \in [n^{(1)}] \cap [k-n^{(2)}, k-1]} \max(\lambda_l^{(1)}, \lambda_{k-l}^{(2)}). \quad (12-3)$$

حال برای $k \in [2, n]$ و $l \in [n^{(1)}] \cap [k-n^{(2)}, k-1]$ اجازه دهید $A^{(1)} \in \mathcal{D}_l^{(1)}$ یک مینیم‌گر برای $\underline{\Lambda}_l^{(1)}$ و $A^{(2)} \in \mathcal{D}_{k-l}^{(2)}$ یک مینیم‌گر برای $\underline{\Lambda}_{k-l}^{(2)}$ باشد. زیرا فرض $A \in \mathcal{D}_k$ را به عنوان اجتماع مجزای $A^{(1)}$ و $A^{(2)}$ تعریف

کنید. لذا داریم

$$\underline{\Delta}_k \leq \max(\underline{\Delta}_l^{(1)}, \underline{\Delta}_{k-l}^{(2)}),$$

و با مینیمم گرفتن روی $l \in \llbracket n^{(1)} \rrbracket \cap \llbracket k - n^{(2)}, k - 1 \rrbracket$ به دست می‌آوریم

$$\underline{\Delta}_k \leq \min_{l \in \llbracket n^{(1)} \rrbracket \cap \llbracket k - n^{(2)}, k - 1 \rrbracket} \max(\underline{\Delta}_l^{(1)}, \underline{\Delta}_{k-l}^{(2)}). \quad (13-3)$$

این به همراه (۱۲-۳) و مفروضات، نشان می‌دهند که

$$\forall k \in \llbracket n \rrbracket, \quad \tilde{\chi}(k) \underline{\Delta}_k \leq \lambda_k.$$

از طرف دیگر، اگر بیش از دو مولفه همبندی وجود داشته باشد، با تکرار بحث فوق، به همان نتیجه می‌رسیم. ■

ذکر این نکته خالی از لطف نیست که می‌توان با استدلال مشابه نشان داد که اثبات حدس ۳-۲-۳ برای گراف‌های همبند، این حدس را در حالت کلی نتیجه می‌دهد.

۳-۵ توصیف دامنه‌های نودال روان

نکته اصلی در اثبات تساوی $\underline{\Delta}_k = \lambda_k$ برای درخت‌ها (لم ۷-۳-۳(ii)) این است که اگر گراف زمینه G یک درخت باشد، آن‌گاه یک زیرافراز $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_k(G)$ مینیمم‌گر برای $\underline{\Delta}_k$ ، به‌طور عمومی، متناظر با دامنه‌های نودال (پیوسته) یک ویژه‌تابع مربوط به λ_k است. برای این‌که درک بهتری از حدس میکلو (حدس ۵-۳-۳) به دست آوریم، خوب است بررسی کنیم که دقیقاً چه مواقعی یک زیرافراز $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_k(G)$ متناظر با دامنه‌های نودال یک تابع ویژه می‌شود. در این بخش قصد داریم نتیجه‌ای در این جهت به دست دهیم. آن‌چه به دست می‌آوریم برای زیرافرازهای روان برقرار است. به این منظور ابتدا چند مفهوم را معرفی می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که منظور از یک زیرافراز **روان**، یک زیرافراز $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \in \mathcal{D}_k(G)$ است که برای هر زوج اندیس $i \neq j \in \llbracket k \rrbracket$ داشته باشیم $\partial \mathcal{A}_i \cap \partial \mathcal{A}_j \cap V_3 = \emptyset$ که V_3 مجموعه رئوس با درجه حداقل ۳ در G است. لم ۷-۳-۳(iii) و حدس ۶-۳-۳ احتمال عمومی بودن چنین زیرافرازهایی را تقویت می‌کند. هم‌چنین یک ویژه‌تابع مربوط به ماتریس L را **روان** گوئیم، هرگاه خانواده همه دامنه‌های نودال پیوسته‌اش، تشکیل یک زیرافراز روان بدهد. هم‌چنین ماتریس لاپلاسین تعمیم‌یافته L را **روان** گوئیم، هرگاه هر ویژه‌مقدار λ آن که تکرارش m است، حداقل m ویژه‌تابع مستقل روان داشته باشد. لازم به ذکر است که اگر هیچ‌کدام از ویژه‌تابع‌های ماتریس L روی V صفر نشوند، آن‌گاه L به وضوح یک ماتریس روان است (به‌ویژه در این حالت همه ویژه‌مقدارهای L ساده خواهند بود، چون در فضای ویژه دو بعدی، همواره حداقل یک تابع پیدا می‌شود که روی حداقل یک راس صفر است).

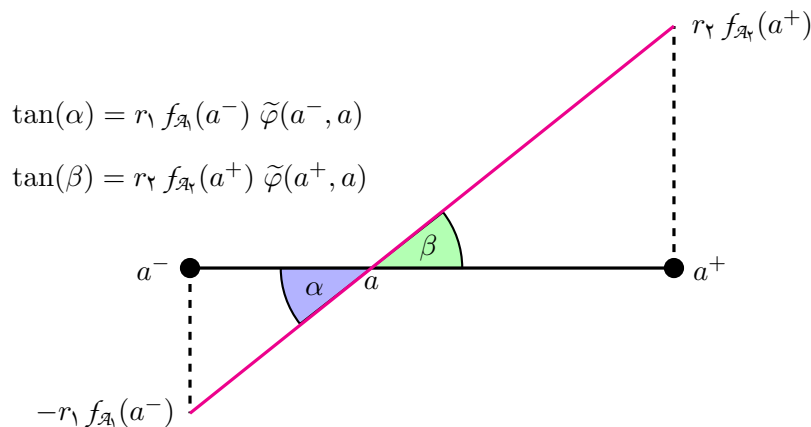
برای یک نقطه $a \in G$ ، همسایگی نقطه a را با $N(a)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N(a) := \{x \in V : x \neq a, \exists e = xy \in E, a \in [x, y]\}.$$

فرض کنید یک ۲-زیرافراز $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \in \mathcal{D}_2(G)$ و یک نقطه مرزی مشترک $a \in \partial \mathcal{A}_1 \cap \partial \mathcal{A}_2$ داده شده است. یک زوج از اعداد حقیقی مثبت (r_1, r_2) را برای نقطه a ، اصلاح‌کننده نسبت به $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ می‌گوییم، اگر $N(a) \cap \mathcal{A}_1 = \{a^-\}$ و $N(a) \cap \mathcal{A}_2 = \{a^+\}$ ، به طوری که

$$r_1 f_{\mathcal{A}_1}(a^-) \tilde{\varphi}(a^-, a) = r_2 f_{\mathcal{A}_2}(a^+) \tilde{\varphi}(a^+, a), \quad (14-3)$$

که در آن $\tilde{\varphi}$ در بخش ۸-۱ تعریف شده و $f_{\mathcal{A}}$ مینیمم‌گر رابطه (۲۰-۱) است (لم ۲-۸-۱ را ببینید).^۷ در واقع، (۱۴-۳) به این معنی است که اگر تابع‌های $r_1 f_{\mathcal{A}_1}$ و $r_2 f_{\mathcal{A}_2}$ را روی G رسم کنیم، نقاط $(a^-, -r_1 f_{\mathcal{A}_1}(a^-))$ ، $(a, 0)$ و $(a^+, r_2 f_{\mathcal{A}_2}(a^+))$ روی یک خط راست قرار می‌گیرند (شکل ۲-۳ را ببینید).



شکل ۲-۳: اصلاح‌کننده بودن (r_1, r_2) برای نقطه a نسبت به $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$.

یک زوج (r_1, r_2) را اصلاح‌کننده برای $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ می‌گوییم، هرگاه برای هر نقطه در $\partial \mathcal{A}_1 \cap \partial \mathcal{A}_2$ اصلاح‌کننده باشد. همچنین یک زیرافراز $A \in \mathcal{D}_k(G)$ را اصلاح‌پذیر می‌گوییم، اگر یک خانواده از اعداد صحیح مثبت $(r_i)_{i \in [k]}$ یافت شود به طوری که برای $i \neq j \in [k]$ ، (r_i, r_j) برای $(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ اصلاح‌کننده باشد. در نهایت یک k -افراز $A \in \mathcal{P}_k(G)$ را دوبخشی می‌گوییم، هرگاه گراف خارج قسمت G/A ، یک گراف دوبخشی باشد (تعریف ۲-۳-۳ را ببینید). با داشتن همه این تعاریف در دست، می‌توانیم قضیه اصلی این بخش را بیان کنیم که توصیفی برای زیرافرازهایی که دامنه نودال توابع ویژه هستند، ارائه می‌دهد.

ملاحظه ۱-۵-۳

لازم به ذکر است که در یک پیش‌نویس از بَند و دیگران [۹]، مفاهیمی به نام‌های افرازهای سره و افرازهای برابر،^۷ توجه کنید که مفهوم اصلاح‌کننده را می‌توان به حالتی که $\text{card}(N(a) \cap \mathcal{A}_1) > 1$ یا $\text{card}(N(a) \cap \mathcal{A}_2) > 1$ تعمیم داد. با این وجود، این تعمیم برای ما کاربردی نخواهد داشت، زیرا ما تنها با زیرافرازهای روان سروکار داریم.

معرفی شده است که مشابه مفاهيم روان بودن و یکنواخت بودن افرازها است و به کمک آن‌ها کمبودهای نودالی گراف‌های کوانتومی بررسی شده است.

قضیه ۳-۵-۲

فرض کنید گراف کوانتومی (G, L) روی n راس، عدد $k \in \llbracket n \rrbracket$ و یک افراز روان $\mathcal{A} \in \mathcal{P}_k(G)$ داده شده است. این افراز متناظر با دامنه‌های نودال (پیوسته) یک ویژه‌تابع روان از L است، اگر و تنها اگر یکنواخت، اصلاح‌پذیر و دوبخشی باشد. این ویژه‌تابع متناظر با ویژه‌مقدار $\lambda_1(\mathcal{A})$ می‌باشد.

برهان. فرض کنید $g \neq 0$ یک ویژه‌تابع L متناظر با ویژه‌مقدار λ باشد و g را توسعه آفین g به روی G بگیرید. هم‌چنین فرض کنید دامنه‌های نودال g مجموعه‌های $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ باشند و $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k)$ یک k -افراز روان در $\mathcal{P}_k(G)$ باشد. نشان می‌دهیم که $\mathcal{A}$ یکنواخت، اصلاح‌پذیر و دوبخشی است.

ابتدا توجه کنید که با توجه به لم ۳-۳-۱، برای هر $i \in \llbracket k \rrbracket$ و $\lambda_1(\mathcal{A}_i) = \lambda$ و در نتیجه $\mathcal{A}$ یکنواخت است. برای اثبات اصلاح‌پذیری و دوبخشی بودن، برای هر $i \in \llbracket k \rrbracket$ ، با توجه به لم ۳-۳-۱، اعداد $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ و $r_i > 0$ را طوری اختیار کنید که روی $\mathcal{A}_i$ ، $g = \sigma_i r_i f_{\mathcal{A}_i}$. فرض کنید a یک نقطه مرزی مشترک در $\partial \mathcal{A}_i \cap \partial \mathcal{A}_j$ باشد. با توجه به تعریف دامنه نودال، داریم $g(a) = 0$ و $\sigma_i \sigma_j = -1$. از طرفی چون g ویژه‌تابع و g روی هر یال خطی است، نتیجه می‌گیریم که زوج (r_i, r_j) برای a نسبت به $(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ اصلاح‌کننده است و چون این زوج مستقل از انتخاب a است، (r_i, r_j) برای $(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ اصلاح‌کننده می‌باشد و لذا $\mathcal{A}$ به وسیله خانواده $(r_i)_{i \in \llbracket k \rrbracket}$ اصلاح‌پذیر است. هم‌چنین $\mathcal{A}$ دوبخشی است، زیرا یال‌های گراف $G/\mathcal{A}$ تنها بین دو بخش مستقل $\{\mathcal{A}_i : \sigma_i = 1\}$ و $\{\mathcal{A}_i : \sigma_i = -1\}$ قرار دارند. این اثبات یک طرف قضیه را کامل می‌کند.

برای اثبات طرف دیگر، عدد $k \in \llbracket n \rrbracket$ را ثابت گرفته و فرض کنید $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \in \mathcal{P}_k(G)$ یک افراز روان، یکنواخت، اصلاح‌پذیر و دوبخشی است و $(r_i)_{i \in \llbracket k \rrbracket}$ را خانواده اصلاح‌کننده متناظر بگیرید. هم‌چنین فرض کنید $(\sigma_i)_{i \in \llbracket k \rrbracket}$ خانواده‌ای از اعداد ± 1 باشد به طوری که گراف $G/\mathcal{A}$ دارای دو بخش مستقل $\{\mathcal{A}_i : \sigma_i = 1\}$ و $\{\mathcal{A}_i : \sigma_i = -1\}$ باشد. ثابت می‌کنیم که تابع $g := \sum_{i \in \llbracket k \rrbracket} \sigma_i r_i f_{\mathcal{A}_i}$ یک ویژه‌تابع L مربوط به ویژه‌مقدار $\lambda_1(\mathcal{A})$ است. این مطلب، اثبات قضیه را کامل می‌کند، زیرا با توجه به دوبخشی بودن، واضح است که $\mathcal{A}$ متناظر با دامنه‌های نودال g است.

با توجه به یکنواختی $\mathcal{A}$ و از لم ۲-۸-۱، برای هر $i \in \llbracket k \rrbracket$ روی $\mathcal{A}_i := \mathcal{A}_i \cap V$ داریم

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{\mathcal{A}_i} g &= \sigma_i r_i \left(\widehat{L}_{\mathcal{A}_i} f_{\mathcal{A}_i} \right) \\ &= \lambda_1(\mathcal{A}) \sigma_i r_i f_{\mathcal{A}_i} \\ &= \lambda_1(\mathcal{A}) g. \end{aligned}$$

نقطه $a \in \partial \mathcal{A}_i \cap \partial \mathcal{A}_j$ را گرفته و ابتدا فرض کنید $a \notin V$. لذا یک یال یکتای $a^- a^+ \in E$ وجود دارد که

$a \in [a^-, a^+]$ و $a^- \in \mathcal{A}_i$ و $a^+ \in \mathcal{A}_j$. بنابراین اصلاح‌پذیری و دوبخشی بودن نتیجه می‌دهد که

$$\tilde{\varphi}(a^-, a) g(a^-) = \varphi(a^- a^+) (g(a^-) - g(a^+)).$$

این نشان می‌دهد که $\hat{L}_{\mathcal{A}_i} g$ روی A_i منطبق با Lg است. از طرف دیگر، فرض کنید $a \in V$ و توجه کنید از روان بودن داریم که یال‌های $a^- a$ و $a^+ a$ به ترتیب یگانه یال‌های مجاور با a درون بستار $\mathcal{A}_i$ و $\mathcal{A}_j$ هستند. بنابراین با توجه به اصلاح‌پذیری، دوبخشی بودن و این حقیقت که $g(a) = \circ$ داریم

$$(Lg)(a) = L(a, a^-)g(a^-) + L(a, a^+)g(a^+) = \circ = \lambda_1(\mathcal{A})g(a).$$

حال چون $\mathcal{A} \in \mathcal{P}_k(\mathcal{G})$ ، همان‌طور که اعلام شد، نتیجه می‌گیریم که $Lg = \lambda_1(\mathcal{A})g$ و این، اثبات قضیه را کامل می‌کند. ■

در ادامه این بخش، قصد داریم یک محک برای تشخیص اصلاح‌پذیر بودن یک زیرافراز داده شده $(a_j)_{j \in [l]} \subset \mathcal{G}$ به دست آوریم. برای عدد $l \in [k]$ ، یک خانواده متناهی از نقاط $(a_j)_{j \in [l]} \subset \mathcal{G}$ را یک **گردن‌بند** (نسبت به $\mathcal{A}$) گوییم، اگر یک خانواده $(n_j)_{j \in [l]}$ از اندیس‌ها در $[k]$ موجود باشد، به‌طوری که $a_j \in (\partial \mathcal{A}_{n_j} \cap \partial \mathcal{A}_{n_{j+1}})$ (با قرارداد $\mathcal{A}_{n_{l+1}} := \mathcal{A}_{n_l}$). گردن‌بند $(a_j)_{j \in [l]}$ را **اصلاح‌پذیر** می‌گوییم، اگر بتوانیم یک خانواده از اعداد مثبت $(r_j)_{j \in [l]}$ بیابیم به‌طوری که برای هر $j \in [l]$ ، (r_j, r_{j+1}) برای a_j نسبت به $(\mathcal{A}_{n_j}, \mathcal{A}_{n_{j+1}})$ اصلاح‌کننده باشد (با قرارداد $r_{l+1} := r_l$). زیرا فرای $\mathcal{A}$ را **اصلاح‌پذیر گردن‌بندی** می‌خوانیم، هرگاه همه گردن‌بندهایش اصلاح‌پذیر باشند. واضح است که اگر $\mathcal{A}$ اصلاح‌پذیر باشد، آن‌گاه اصلاح‌پذیر گردن‌بندی نیز هست. لم زیر نشان می‌دهد که عکس این مطلب نیز برقرار است.

لم ۳-۵-۳

یک زیرافراز $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_k(\mathcal{G})$ اصلاح‌پذیر است اگر و تنها اگر اصلاح‌پذیر گردن‌بندی باشد.

برهان. عدد $k \in [n]$ را ثابت گرفته و فرض کنید $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \in \mathcal{D}_k(\mathcal{G})$ یک زیرافراز اصلاح‌پذیر گردن‌بندی باشد. اصلاح‌پذیر بودن $\mathcal{A}$ را چک می‌کنیم. اعداد $i \neq j \in [k]$ و نقطه $x \in \partial \mathcal{A}_i \cap \partial \mathcal{A}_j$ را ثابت بگیرید. زوج (r_i, r_j) را طوری انتخاب کنید که برای x نسبت به $(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ اصلاح‌کننده باشد و x' را یک نقطه دیگر در $\partial \mathcal{A}_i \cap \partial \mathcal{A}_j$ بگیرید. در این صورت (x, x') یک گردن‌بند برای $\mathcal{A}$ (متناظر با دور $\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j \rightarrow \mathcal{A}_i$ در $G/\mathcal{A}$) است. با توجه به این‌که این گردن‌بند، اصلاح‌پذیر است، (r_i, r_j) برای x' نیز نسبت به $(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ اصلاح‌کننده است، زیرا همه زوج‌های اصلاح‌کننده یک نقطه، متناسب هستند (یعنی همگی مضرب یکدیگرند). در نتیجه (r_i, r_j) برای $(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ اصلاح‌کننده است.

موقتاً فرض کنید که گراف خارج قسمت $G/\mathcal{A}$ ، همبند است. خانواده $(r_i)_{i \in [k]}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم $r_1 = 1$ و برای $i \in [2, k]$ ، $(n_j)_{j \in [l]}$ را یک مسیر از ۱ به i می‌گیریم، یعنی $n_l = i$ ، $n_1 = 1$ ، همه

اعضای آن متمایز بوده و برای هر $j \in [l-1]$ و $\mathcal{A}_{n_j}$ و $\mathcal{A}_{n_{j+1}}$ در G/A مجاور هستند. به‌طور بازگشتی روی r_{n_j} ، $j \in [2, l]$ را به‌طور یکتا به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم که $(r_{n_{j-1}}, r_{n_j})$ برای $(\mathcal{A}_{n_{j-1}}, \mathcal{A}_{n_j})$ اصلاح‌پذیر باشد (این کار براساس قسمت اول اثبات، قابل انجام است). درنهایت به یک تعریف برای r_j می‌رسیم. مقدار به‌دست آمده برای r_j مستقل از انتخاب مسیر از ۱ به j است، زیرا A اصلاح‌پذیر گردن‌بندی است (همه دورهایی که از چسباندن دو مسیر از ۱ به j به‌دست می‌آیند را در نظر بگیرید). حال اجازه دهید چک کنیم که برای هر یال $\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j$ در گراف G/A ، زوج (r_i, r_j) برای $(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ اصلاح‌کننده است. در واقع این یک نتیجه از ساختار فوق و این حقیقت است که یک مسیر $(n_m)_{m \in [l]}$ با شروع از ۱ وجود دارد که $n_{l-1} = i$ ، $n_l = j$ یا $n_{l-1} = j$ ، $n_l = i$. حال اگر گراف G/A همبند نباشد، کافی است که بحث فوق را روی هر مولفه همبندی آن به‌طور جداگانه انجام دهیم. ■

در پایان این بخش یک روش کمی برای تشخیص اصلاح‌پذیری یک گردن‌بند ارائه می‌کنیم. برای $l \in [k]$ ، $(a_j)_{j \in [l]}$ را یک گردن‌بند داده شده نسبت به $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_k(G)$ بگیرید. با یک تغییر اندیس، فرض کنید برای هر $j \in [l]$ ، $a_j \in \partial \mathcal{A}_j \cap \partial \mathcal{A}_{j+1}$. به این گردن‌بند، کمیت زیر را نسبت می‌دهیم.

$$C := \prod_{j \in [l]} \frac{f_{\mathcal{A}_j}(a_j^-) \tilde{\varphi}(a_j^-, a_j)}{f_{\mathcal{A}_{j+1}}(a_j^+) \tilde{\varphi}(a_j^+, a_j)},$$

که عبارت‌های $\tilde{\varphi}$ و $\hat{L}$ از بخش ۸-۱ یادآوری می‌شوند و a_j^+ و a_j^- به ترتیب راس‌های یگانه در $\mathcal{A}_j \cap N(a_j)$ و $\mathcal{A}_{j+1} \cap N(a_j)$ هستند (اندیس‌ها به پیمانه l محاسبه می‌شوند). حال داریم

لم ۳-۵-۴

گردن‌بند $(a_j)_{j \in [l]}$ اصلاح‌پذیر است اگر و تنها اگر $C = 1$.

برهان. فرض کنید r_j برای یک $j \in [l-1]$ داده شده باشد. شرط اصلاح‌کننده بودن (r_j, r_{j+1}) برای a_j نسبت به $(\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_{j+1})$ به‌طور یگانه r_{j+1} را تعیین می‌کند. در حقیقت با توجه به تعریف، داریم

$$r_j f_{\mathcal{A}_j}(a_j^-) \tilde{\varphi}(a_j^-, a_j) = r_{j+1} f_{\mathcal{A}_{j+1}}(a_j^+) \tilde{\varphi}(a_j^+, a_j).$$

با شروع از r_1 و استفاده مکرر از رابطه فوق، $r_1, \dots, r_l$ را می‌سازیم. تنها مشکل در سر راه اصلاح‌کننده بودن $(r_j)_{j \in [l]}$ برای گردن‌بند $(a_j)_{j \in [l]}$ این است که (r_l, r_1) باید برای a_l نسبت به $(\mathcal{A}_l, \mathcal{A}_1)$ اصلاح‌کننده باشد. فرض کنید $r > 0$ به‌گونه‌ای باشد که (r_l, r) برای a_l نسبت به $(\mathcal{A}_l, \mathcal{A}_1)$ اصلاح‌کننده باشد. بنابراین براساس محاسبات فوق داریم $r = Cr_1$. در نتیجه تساوی $r = r_1$ معادل است با $C = 1$. ■

۳-۶ اصلاح‌پذیری بهینه‌گرهای $\underline{\Lambda}_k$ و $\overline{\Lambda}_k$

در قضیه ۳-۵-۲ دیدیم که شرط لازم و کافی برای این‌که یک افراز روان $A \in \mathcal{P}_k(G)$ متناظر با دامنه‌های نودال یک ویژه‌تابع L باشد، این است که این افراز، یکنواخت، اصلاح‌پذیر و دوبخشی باشد. یک روش برای ساختن چنین افرازهایی، استفاده از مینیمم‌گرهای $\underline{\Lambda}_k$ و ماکسیمم‌گرهای $\overline{\Lambda}_k$ است. در این بخش قصد داریم نشان دهیم که این بهینه‌گرها در صورت روان بودن، یکنواخت و اصلاح‌پذیر هستند. بنابراین تنها شرط دیگر برای تبدیل شدن آن‌ها به دامنه‌های نودال یک ویژه‌تابع L ، شرط دوبخشی بودن است که البته همه این بهینه‌گرها این شرط را برآورده نمی‌کنند. لازم به ذکر است که در چهارچوب فضای منیفلدهای ریمانی و عملگرهای لاپلاس-بلترامی در $\mathbb{R}^2$ ، هلیفغ و دیگران [۵۴] ملاحظات مشابهی درباره شرط دوبخشی بودن داشته‌اند.

قضیه ۳-۶-۱

گراف کوانتومی (G, L) روی گراف همبند n راسی G و عدد $k \in \llbracket n \rrbracket$ داده شده است. فرض کنید $A \in \mathcal{D}_k(G)$ یک زیرافراز مینیمم‌گر برای $\underline{\Lambda}_k$ یا یک افراز ماکسیمم‌گر برای $\overline{\Lambda}_k$ باشد. اگر A روان باشد، آنگاه A یک افراز یکنواخت و اصلاح‌پذیر در $\mathcal{P}_k(G)$ است.

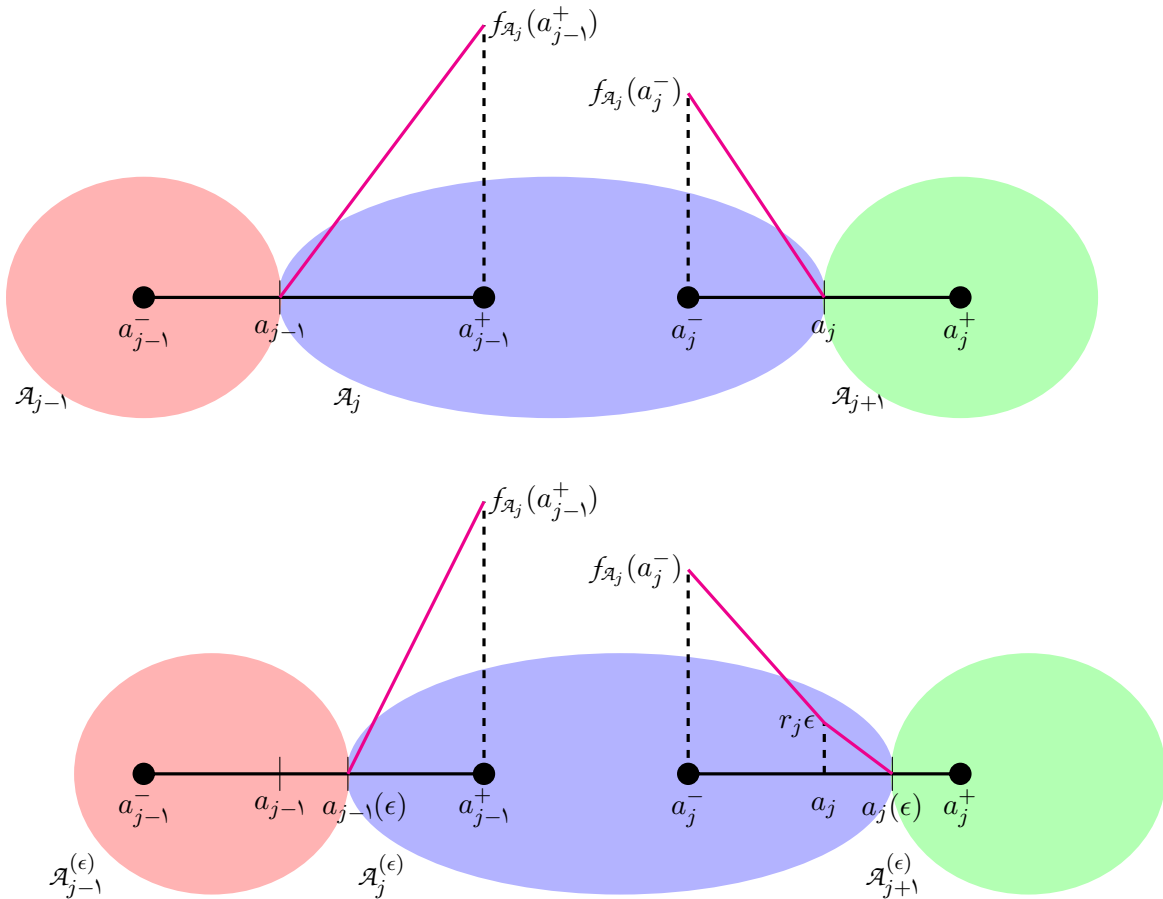
برهان. برای $k \in \llbracket n \rrbracket$ ، $A = (A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{D}_k(G)$ را یک زیرافراز مینیمم‌گر روان برای $\underline{\Lambda}_k$ بگیرید. چون G همبند است، با توجه به لم ۳-۳-۷(i)، A یک k -افراز یکنواخت است. در واقع ایده اصلی پشت این حقیقت، ساده است. اگر A یکنواخت نباشد، آنگاه با توجه به این‌که همه رئوس مرزی از درجه حداکثر دو هستند، می‌توان زیرمجموعه‌های A_i که $\lambda_1(A_i) = \max_{j \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1(A_j)$ را کمی بزرگتر کرد و بقیه زیرمجموعه‌ها را جابه‌جا نمود تا یک افراز بهتر پیدا کرد که متناقض با مینیمم‌گر بودن A است. همین ایده می‌تواند برای ماکسیمم‌گرهای $\overline{\Lambda}_k$ نیز به‌کار گرفته شود.

لذا تنها چیزی که برای اثبات باقی می‌ماند، اثبات اصلاح‌پذیر بودن بهینه‌گرهای روان است. از لم‌های ۳-۵-۳ و ۳-۵-۴ استفاده می‌کنیم تا ثابت کنیم هر مینیمم‌گر روان $\underline{\Lambda}_k$ اصلاح‌پذیر است. همین استدلال می‌تواند ادعا را برای ماکسیمم‌گرهای روان $\overline{\Lambda}_k$ ثابت کند.

بنابراین فرض کنید $(a_j)_{j \in \llbracket l \rrbracket}$ با $l \in \llbracket k \rrbracket$ یک گردن‌بند باشد. از نمادهای بخش قبل استفاده کرده و به‌ویژه فرض می‌کنیم این گردن‌بند، دور $A_l \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_l$ را در گراف خارج‌قسمت G/A القا می‌کند و برای $a_j \in \partial A_j \cap \partial A_{j+1}$ ، $j \in \llbracket l \rrbracket$ هم‌چنین $N(a_j) \cap A_j = \{a_j^-\}$ و $N(a_j) \cap A_{j+1} = \{a_j^+\}$ می‌خواهیم ثابت کنیم که $C = 1$.

ایده اصلی اثبات، این است که موقعیت نقاط مرزی را به مقدار کوچکی تکان می‌دهیم و از خاصیت مینیمم‌گر بودن A بهره می‌گیریم. برای این کار، فرض کنید $(t_j)_{j \in \llbracket l \rrbracket}$ یک خانواده از اعداد حقیقی مثبت و $\epsilon > 0$ یک عدد به اندازه کافی کوچک باشد. برای $j \in \llbracket l \rrbracket$ ، نقطه $a_j(\epsilon) \in [a_j, a_j^+]$ را طوری انتخاب کنید که $\rho([a_j(\epsilon), a_j^+]) = \rho([a_j, a_j^+]) - \epsilon t_j$. حال برای ϵ به قدر کافی کوچک، می‌توانیم افراز $A^{(\epsilon)} = (A_1^{(\epsilon)}, \dots, A_k^{(\epsilon)}) \in \mathcal{P}_k(G)$ را تعریف کنیم که مشابه A است، با این تفاوت که نقاط مرزی $(a_j)_{j \in \llbracket l \rrbracket}$ به

نقاط $(a_j(\epsilon))_{j \in \llbracket l \rrbracket}$ منتقل شده‌اند (به‌ویژه برای $j \in \llbracket l+1, k \rrbracket$ داریم $\mathcal{A}_j^{(\epsilon)} = \mathcal{A}_j$). حال می‌خواهیم تاثیر این تکانش کوچک را روی ویژه‌مقدار اول دیریشه اندازه‌گیری کنیم. به این منظور خانواده اعداد مثبت $(r_j)_{j \in \llbracket l \rrbracket}$ را ثابت گرفته و برای هر $j \in \llbracket l \rrbracket$ تابع $f_j^{(\epsilon)} \in \mathcal{F}_*(\mathcal{A}_j^{(\epsilon)})$ را به‌گونه‌ای تعریف کنید که روی رئوس درون $\mathcal{A}_j \cap V$ ، منطبق بر $f_{\mathcal{A}_j}$ باشد، $f_j^{(\epsilon)}(a_j) := r_j \epsilon$ ، بیرون از $\mathcal{A}_j^{(\epsilon)}$ صفر باشد و به‌طور آفین روی $\mathcal{A}_j^{(\epsilon)}$ تعمیم یابد (شکل ۳-۳ را ببینید).



شکل ۳-۳: یک گردن‌بند $(a_j)_{j \in \llbracket l \rrbracket}$ و گردن‌بند تکانش شده $(a_j(\epsilon))_{j \in \llbracket l \rrbracket}$.

لذا، برای هر $j \in \llbracket l \rrbracket$ داریم (اندیس‌ها به پیمانه l گرفته می‌شوند)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f_j^{(\epsilon)}) &= \mathcal{E}(f_{\mathcal{A}_j}) \\ &+ \left(f_{\mathcal{A}_j}(a_j^-) - r_j \epsilon \right)^2 \tilde{\varphi}(a_j^-, a_j) + (r_j \epsilon)^2 \left(\frac{1}{\epsilon t_j} \right) \\ &- \left(f_{\mathcal{A}_j}(a_j^-) \right)^2 \tilde{\varphi}(a_j^-, a_j) + p(\{a_j\})(r_j \epsilon)^2 \\ &+ f_{\mathcal{A}_j}^2(a_{j-1}^+) \left(\frac{\epsilon t_{j-1}}{1 - \varphi(a_{j-1}^+, a_{j-1}) \epsilon t_{j-1}} \right) \tilde{\varphi}(a_{j-1}^+, a_{j-1}), \end{aligned}$$

که تابع $\tilde{\varphi}$ و اندازه p در بخش ۸-۱ تعريف شده‌اند. بنابراین

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\mathcal{E}(f_j^{(\epsilon)}) \right) \right|_{\epsilon=0} &= -r_j f_{\mathcal{A}_j}(a_j^-) \tilde{\varphi}(a_j^-, a_j) + \frac{r_j^2}{t_j} \\ &+ t_{j-1} f_{\mathcal{A}_j}^+(a_{j-1}^+) \tilde{\varphi}(a_{j-1}^+, a_{j-1}). \end{aligned}$$

حال قرار دهيد

$$r_j := t_j f_{\mathcal{A}_j}(a_j^-) \tilde{\varphi}(a_j^-, a_j).$$

درنتيجه

$$\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\mathcal{E}(f_j^{(\epsilon)}) \right) \right|_{\epsilon=0} = t_{j-1} f_{\mathcal{A}_j}^+(a_{j-1}^+) \tilde{\varphi}(a_{j-1}^+, a_{j-1}) - t_j f_{\mathcal{A}_j}^-(a_j^-) \tilde{\varphi}(a_j^-, a_j).$$

اگر $C \neq 1$ ، می‌توانیم فرض کنیم که $C > 1$ (در غير اين صورت گردن‌بند معکوس $(a_{l+1-j})_{j \in [l]}$ را در نظر می‌گیریم). قرار دهيد $t_1 := 1$ و به‌طور بازگشتی برای $j \in [2, l]$ ، تعريف کنید

$$t_j := t_{j-1} \left(\frac{f_{\mathcal{A}_j}(a_{j-1}^+) \tilde{\varphi}(a_{j-1}^+, a_{j-1})}{f_{\mathcal{A}_j}(a_j^-) \tilde{\varphi}(a_j^-, a_j)} \right)^2 C^{\frac{1}{l}}.$$

این تعريف به پيمانه l سازگار است، زیرا

$$t_{l+1} = t_1 \prod_{j \in [l]} \left(\frac{f_{\mathcal{A}_{j+1}}(a_j^+) \tilde{\varphi}(a_j^+, a_j)}{f_{\mathcal{A}_j}(a_j^-) \tilde{\varphi}(a_j^-, a_j)} \right)^2 C^{\frac{1}{l}} = t_1,$$

و درنتيجه به نامساوی زیر می‌رسیم

$$\forall j \in [l], \quad \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\mathcal{E}(f_j^{(\epsilon)})}{\|f_j^{(\epsilon)}\|_{r,\omega}^2} \right) \right|_{\epsilon=0} = \left(\frac{1}{\|f_{\mathcal{A}_j}\|_{r,\omega}^2} \right) \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\mathcal{E}(f_j^{(\epsilon)}) \right) \right|_{\epsilon=0} < 0.$$

لذا برای $\epsilon > 0$ به قدر کافی کوچک، خواهیم داشت

$$\max_{j \in [l]} \lambda_1(\mathcal{A}_j^{(\epsilon)}) < \max_{j \in [l]} \lambda_1(\mathcal{A}_j),$$

و چون برای $j \in [l+1, k]$ ، $\lambda_1(\mathcal{A}_j^{(\epsilon)}) = \lambda_1(\mathcal{A}_j)$ ، زیرا افزاز $\mathcal{A}^{(\epsilon)}$ یک مینیمم‌گر برای $\underline{\Delta}_k$ است. اما توجه کنید که این افزاز مینیمم‌گر هم‌چنان روان است و با توجه به لم ۷-۳-۳ (i) باید یکنواخت باشد، درحالی که این چنین نیست. این تناقض نشان می‌دهد که در حقیقت $C = 1$. نشان دادیم که اگر $\mathcal{A}$ یک زیرافراز مینیمم‌گر روان برای $\underline{\Delta}_k$ باشد،

■ آنگاه براساس لم ۳-۵-۴، اصلاح‌پذیر گردن‌بندی است و این اثبات را کامل می‌کند.

ملاحظه ۳-۶-۲

اگر حدس ۳-۳-۶ درست باشد، آنگاه برای هر $k \in \llbracket n \rrbracket$ ، به‌طور عمومی، دو راه برای تولید یک k -افراز روان، یکنواخت و اصلاح‌پذیر وجود دارد، یک راه با جستجوی یک مینیم‌گر برای نگاشت

$$\mathcal{D}_k(\mathcal{G}) \ni \mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \mapsto \max_{i \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1(\mathcal{A}_i)$$

و راه دیگر با جستجوی یک ماکسیم‌گر برای نگاشت

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{G}) \ni \mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \mapsto \min_{i \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1(\mathcal{A}_i).$$

یک دسته از نگاشت‌های دیگر که چنین بهینه‌گرهایی تولید می‌کنند، نگاشت

$$\mathcal{L}_{p,k} : \mathcal{P}_k(\mathcal{G}) \ni \mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \mapsto \frac{1}{k} \sum_{i \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1^p(\mathcal{A}_i)$$

که $k \in \llbracket n \rrbracket$ و $p \in [1, +\infty]$. نگاه دقیق‌تر به استدلال‌های فوق نشان می‌دهد که اگر یک افراز $\mathcal{A}$ روان بوده و در ضمن یک نقطه بحرانی برای یکی از نگاشت‌های $\mathcal{L}_{p,k}$ فوق باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ یکنواخت و اصلاح‌پذیر است. با وجود این‌که مطالعه این نگاشت‌ها به خودی خود جالب به نظر می‌رسد، این موضوع خارج از اهداف این رساله است (ملاحظه ۳-۳-۹ را نیز ببینید).

لازم به ذکر است که هِلِفِغ و دیگران [۵۵] نشان داده‌اند که مینیم‌گرهای نگاشت $\mathcal{L}_{1,k}$ (برای $k = 2, 3$) در حالت لاپلاسی‌های دوبعدی روی برخی مستطیل‌ها یا مثلث متساوی‌الاضلاع، یکنواخت نیستند. البته این موضوع تناقضی با آنچه در بالا گفته شد ندارد، زیرا تقارن‌های مثال‌های آن‌ها در آنچه ما “موقعیت‌های عمومی” می‌خوانیم، ظاهر نمی‌شوند. ♦

فصل ۴

تجزیه طیفی دورها و نامساوی چيگر برای آنها

هدف اصلی این فصل، استفاده از ساز و کارهای توسعه‌یافته در فصل قبل برای اثبات یک نامساوی چيگر تعمیم‌یافته برای ماتریس‌های لاپلاسی روی دورها است. به کمک این ابزارها ثابت می‌کنیم که حدس تعمیم‌یافته چيگر (حدس ۳-۲-۳) برای چنین ماتریس‌هایی با یک ثابت جهانی $\chi(k) = 48$ برقرار است. هم‌چنین به کمک پارامترهای همبندی دیریشله، تجزیه طیفی ماتریس‌های لاپلاسی تعمیم‌یافته روی دورها را مورد بررسی قرار داده و ساختار ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابع‌های آنها را تحلیل می‌کنیم.

۴-۱ روابط بین پارامترهای همبندی دیریشله

در این بخش چند نامساوی ابتدایی ثابت می‌کنیم که ارتباط پارامترهای همبندی دیریشله را در حالات خاص درخت‌ها، جنگل‌ها و دورها ثابت می‌کند. هم‌چنین مثال‌هایی می‌بینیم که نشان می‌دهد، همه این نامساوی‌ها ممکن است اکید باشند. در نهایت، ثابت می‌کنیم برای دور C_n و $k \in [n-1]$ ، پارامتر $\bar{\Lambda}_k$ ماکسیمم خود را روی یک k -افراز اختیار می‌کند.

گزاره ۴-۱-۱

فرض کنید (G, L) گراف کوانتومی روی گراف G با n راس باشد. داریم

(i) اگر G یک دور باشد، آنگاه $\bar{\Lambda}_1 = \underline{\Lambda}_1$ و $\bar{\Lambda}_n < \underline{\Lambda}_n = +\infty$ و برای هر $k \in [2, n-1]$

$$\bar{\Lambda}_{k-1} < \underline{\Lambda}_k \leq \bar{\Lambda}_k < \underline{\Lambda}_{k+1},$$

(ii) اگر G یک درخت باشد، آنگاه برای هر $k \in \llbracket n \rrbracket$ داریم $\lambda_k = \underline{\Lambda}_k = \bar{\Lambda}_k$ ،

(iii) اگر G یک جنگل باشد، آنگاه برای هر $k \in \llbracket n \rrbracket$ داریم $\lambda_k = \underline{\Lambda}_k \geq \bar{\Lambda}_k$.

برهان. فرض کنید G یک گراف باشد که برای آن یک افراز مینیمم یکنواخت برای $\underline{\Lambda}_k$ یا یک افراز ماکسیمم یکنواخت برای $\bar{\Lambda}_k$ وجود داشته باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\underline{\Lambda}_k &\leq \max_{i \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1(\mathcal{A}_i) \\ &= \min_{i \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1(\mathcal{A}_i) \\ &\leq \bar{\Lambda}_k.\end{aligned}$$

برای اثبات بخش (i)، یک عدد $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ ثابت بگیرید. توجه کنید که با توجه به لم ۷-۳-۳(i)، مینیمم‌گرهای روان، افرازهای یکنواخت هستند. از طرف دیگر، در یک دور، راسی از درجه بیشتر از ۲ وجود ندارد. بنابراین هر زیرافراز یک دور، روان است. در نتیجه نامساوی $\underline{\Lambda}_k \leq \bar{\Lambda}_k$ همواره برای دورها صادق است. هم‌چنین برای افرازهای داده شده $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \in \mathcal{P}_k$ و $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{k+1}) \in \mathcal{P}_{k+1}$ ، با به‌کار بردن اصل لانه‌کبوتری روی نقاط مرزی، اندیس‌های $i \in \llbracket k \rrbracket$ و $j \in \llbracket k+1 \rrbracket$ وجود دارند به‌طوری که $\mathcal{B}_j$ اکیداً در $\mathcal{A}_i$ مشمول می‌شود. با توجه به نتیجه ۳-۸-۱ داریم

$$\begin{aligned}\min_{l \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1(\mathcal{A}_l) &\leq \lambda_1(\mathcal{A}_i) \\ &< \lambda_1(\mathcal{B}_j) \\ &\leq \max_{l \in \llbracket k+1 \rrbracket} \lambda_1(\mathcal{B}_l).\end{aligned}$$

با توجه به دلخواه بودن افرازهای $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ ، به‌دست می‌آوریم $\bar{\Lambda}_k < \underline{\Lambda}_{k+1}$.^۱ برای اثبات $\bar{\Lambda}_n = +\infty$ ، دنباله n -افرازهای $(\mathcal{A}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، نقاط مرزی اعضای $\mathcal{A}^{(n)}$ از نقاط $(i + (2+n)^{-1})_{i \in \mathbb{Z}_n}$ تشکیل شده است. در نتیجه به راحتی دیده می‌شود که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1(\mathcal{A}^{(n)}) = +\infty$.

برای اثبات قسمت (ii)، از لم ۷-۳-۳(ii) داریم $\lambda_k = \underline{\Lambda}_k$. از طرف دیگر، فرض کنید یک مینیمم‌گر روان $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \in \mathcal{D}_k$ برای $\underline{\Lambda}_k$ وجود داشته باشد. با توجه به لم ۷-۳-۳(i)، $\mathcal{A}$ یک افراز یکنواخت است و در نتیجه با توجه به استدلال ارائه شده در قسمت (i) داریم $\underline{\Lambda}_k \leq \bar{\Lambda}_k$.

برای اثبات نامساوی برعکس، فرض کنید $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ یک k -افراز داده شده باشد. با توجه به این‌که^۱ البته باید توجه کرد که این استدلال فقط ثابت می‌کند که $\bar{\Lambda}_k \leq \underline{\Lambda}_{k+1}$. برای اثبات اکید بودن این نامساوی، کافی است ثابت کنیم یک k -افراز ماکسیمم‌گر برای $\bar{\Lambda}_k$ وجود دارد. این مطلب را در لم ۴-۱-۴ ثابت خواهیم کرد.

گراف زمینه G یک درخت است، گراف خارج قسمت G/B نیز یک درخت است (تعریف ۲-۳-۳ را ببینید) و در نتیجه $|\partial B| \leq k-1$. با توجه به اصل لانه‌کبوتری، یک مولفه $\mathcal{A}_i$ ، $i \in \llbracket k \rrbracket$ ، از مینیم‌گر $\mathcal{A}$ وجود دارد که شامل هیچ نقطه‌ای از ∂B نیست. این نشان می‌دهد که یک $j \in \llbracket k \rrbracket$ وجود دارد به‌طوری که $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{B}_j$ و داریم

$$\begin{aligned} \min_{l \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1(\mathcal{B}_l) &\leq \lambda_1(\mathcal{B}_j) \\ &\leq \lambda_1(\mathcal{A}_i) \\ &= \lambda_1(\mathcal{A}) = \underline{\Lambda}_k, \end{aligned}$$

چون $\mathcal{A}$ یکنواخت است. بنابراین با گرفتن سوپریم روی $\mathcal{B} \in \mathcal{P}_k$ ، نتیجه می‌گیریم $\bar{\Lambda}_k \leq \underline{\Lambda}_k$. در نتیجه در صورتی که یک مینیم‌گر روان برای $\underline{\Lambda}_k$ وجود داشته باشد، تساوی قسمت (ii) برقرار است. از طرف دیگر با توجه به لم ۷-۳-۳ (iii)، به‌طور عمومی یک مینیم‌گر روان برای $\underline{\Lambda}_k$ وجود دارد و با توجه به لم ۷-۳-۳ (iv)، $\bar{\Lambda}_k$ و $\underline{\Lambda}_k$ به عنوان توابع حقیقی روی مجموعه $\mathcal{L}(\omega, G)$ پیوسته‌اند. این دو حقیقت نشان می‌دهد که تساوی قسمت (ii) برای هر درختی برقرار است.

برای اثبات قسمت (iii)، اولاً به آسانی دیده می‌شود که همواره در رابطه (۱۳-۳) تساوی برقرار است. هم‌چنین به‌طور مشابه داریم

$$\bar{\Lambda}_k = \max_{l \in \llbracket n^{(1)} \rrbracket \cap \llbracket k-n^{(2)}, k-1 \rrbracket} \min(\bar{\Lambda}_l^{(1)}, \bar{\Lambda}_{k-l}^{(2)}).$$

در نتیجه برای هر جنگل، با توجه به لم ۵-۴-۳ و قسمت (ii)، خواهیم داشت

$$\forall k \in \llbracket n \rrbracket, \quad \bar{\Lambda}_k \leq \underline{\Lambda}_k = \lambda_k.$$

■

مثال ۲-۱-۴

در این مثال، حالاتی که نامساوی‌های گزاره ۱-۱-۴ اکید می‌شوند را بررسی می‌کنیم. با موقعیت و نمادهایی که در اثبات گزاره ۶-۴-۳ به‌کار رفت، یک گراف با دو مولفه همبندی در نظر بگیرید. برای هر $k \in \llbracket n \rrbracket$ داریم $\bar{\Lambda}_k \leq \min \left\{ \bar{\Lambda}_{n^{(1)}}^{(1)}, \bar{\Lambda}_{n^{(2)}}^{(2)} \right\}$ اما با توجه به لم ۵-۴-۳ داریم

$$\{\underline{\Lambda}_k : k \in \llbracket n \rrbracket\} = \left\{ \underline{\Lambda}_k^{(1)} : k \in \llbracket n^{(1)} \rrbracket \right\} \cup \left\{ \underline{\Lambda}_k^{(2)} : k \in \llbracket n^{(2)} \rrbracket \right\}.$$

این نشان می‌دهد که حتی نامساوی $\max(\underline{\Lambda}_k, \bar{\Lambda}_k) \leq \min(\underline{\Lambda}_{k+1}, \bar{\Lambda}_{k+1})$ نیز در حالت کلی نمی‌تواند درست باشد. به عنوان نمونه، فرض کنید یکی از مولفه‌های همبندی، یک گراف تهی با تنها یک راس باشد و مولفه دیگر

یک درخت باشد و توجه کنید که برای $k \in \llbracket n \rrbracket$ ، داریم $\bar{\Lambda}_k = 0$ درحالی که برای $k \geq 3$ پارامتر $\underline{\Lambda}_k$ ناصفر است. همین مثال نشان می‌دهد که نامساوی $\bar{\Lambda}_k \leq \underline{\Lambda}_k$ می‌تواند برای جنگل‌ها اکید باشد.

هم‌چنین ذکر این نکته حائز اهمیت است که توابع $\bar{\Lambda}_k$ و $\underline{\Lambda}_k$ لزوماً روی همه گراف‌ها (گراف‌های ناهمبند) پیوسته نیستند و شرط همبندی در لم ۷-۳-۳ (iv) لازم است. برای دیدن این مطلب، موقعیت مثال فوق را در نظر بگیرید و فرض کنید $V^{(1)} = \{x\}$ و راس y را در $V^{(2)}$ به دلخواه اختیار کنید. گراف $G(\epsilon)$ را از گراف G با اضافه کردن یال xy با وزن ϵ بسازید. نتایج نظریه **تکانش** کلاسیک نشان می‌دهد که طیف جبری گراف $G(\epsilon)$ ، $(\lambda_k(\epsilon))_{k \in \llbracket n \rrbracket}$ ، در $\epsilon = 0$ پیوسته است (برای مثال کتاب [۶۱] را ببینید). هم‌چنین توجه کنید که گراف $G(\epsilon)$ ، برای $\epsilon > 0$ ، یک درخت است و با توجه به گزاره ۱-۱-۴ (ii) داریم $(\bar{\Lambda}_k(\epsilon))_{k \in \llbracket n \rrbracket} = (\underline{\Lambda}_k(\epsilon))_{k \in \llbracket n \rrbracket} = (\lambda_k(\epsilon))_{k \in \llbracket n \rrbracket}$. هم‌چنین با توجه به آنچه در بالا گفته شد، برای هر $k \in \llbracket n \rrbracket$ ، داریم $\bar{\Lambda}_k = 0$. درنتیجه $(\bar{\Lambda}_k(\epsilon))_{k \in \llbracket n \rrbracket}$ برای $k \geq 3$ در $\epsilon = 0$ پیوسته نیست. ★

ملاحظه ۳-۱-۴

لازم به ذکر است که اگر حدس ۶-۳-۳ درست باشد، استدلالی که در بند اول اثبات گزاره ۱-۱-۴ مطرح شد، به همراه پیوستگی توابع $\bar{\Lambda}_k$ و $\underline{\Lambda}_k$ (لم ۷-۳-۳ (iv))، نتیجه می‌دهد که نامساوی $\underline{\Lambda}_k \leq \bar{\Lambda}_k$ برای همه گراف‌های کوانتومی همبند برقرار است (ملاحظه ۸-۳-۳ را ببینید). ♦

در لم بعد قصد داریم نشان دهیم در یک دور n راسی، برای هر $k \in \llbracket n-1 \rrbracket$ ، $\bar{\Lambda}_k$ ماکسیمم خود را در یک k -افراز اختیار می‌کند. توجه کنید که براساس گزاره ۱-۱-۴ (i)، در حالت دورها داریم $\bar{\Lambda}_n = +\infty$.

لم ۴-۱-۴

فرض کنید (C_n, L) یک گراف کوانتومی روی دور C_n باشد. در این صورت برای هر $k \in \llbracket n-1 \rrbracket$ ، یک افراز $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \in \mathcal{P}_k(C_n)$ وجود دارد به‌طوری که

$$\bar{\Lambda}_k = \min_{i \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1(\mathcal{A}_i).$$

برهان. ابتدا توجه کنید که با توجه به رابطه $\bar{\Lambda}_k \leq \underline{\Lambda}_{k+1}$ که در گزاره ۱-۱-۴ ثابت شد، برای $k \in \llbracket n-1 \rrbracket$ ، $\bar{\Lambda}_k$ متناهی است. فرض کنید $(\mathcal{A}^{(m)} = \{\mathcal{A}_i^{(m)}\}_1^k)_{m \in \mathbb{N}}$ یک دنباله از اعضای $\mathcal{P}_k(C_n)$ باشد که برای $\bar{\Lambda}_k$ ماکسیمم‌گر است، یعنی

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \min_{i \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1(\mathcal{A}_i^{(m)}) = \bar{\Lambda}_k.$$

با توجه به فشردگی فضای زیرمجموعه‌های فشرده $C_n = \mathbb{R}/(n\mathbb{Z})$ ، با توپولوژی هاسدورف، می‌توان یک زیردنباله از دنباله $(\partial \mathcal{A}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ (که برای راحتی هم‌چنان با $(\partial \mathcal{A}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ نشان می‌دهیم) و یک زیرمجموعه فشرده

$B \subset C_n$ یافت به‌طوری که

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \partial \mathcal{A}^{(m)} = B.$$

ضرورتاً خواهیم داشت $l := \text{card}(B) \leq k$ (و $l \geq k/2$). فرض کنید $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_l$ مولفه‌های همبندی $C_n \setminus B$ باشد. خانواده $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_l)$ پوششی است، به این معنی که C_n برابر اجتماع بستار مجموعه‌های $\mathcal{A}_i$ است، اما $\mathcal{A}$ ممکن است یک افراز در $\mathcal{P}_l(C_n)$ نباشد، زیرا برخی از مولفه‌های آن ممکن است $\mathbb{Z}_n$ را قطع نکنند. مجموعه‌های $\mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_{l'}$ را مجموعه‌های $\mathcal{A}_i$ ، $i \in [l]$ ، بگیرید که در شرط $\mathcal{A}_i \cap \mathbb{Z}_n \neq \emptyset$ صدق می‌کنند. با تعریف $\mathcal{A}' = (\mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_{l'})$ داریم که $\mathcal{A}'$ یک l' -زیرافراز است و

$$\min_{i \in [l']} \lambda_1(\mathcal{A}'_i) = \bar{\Lambda}_k.$$

این نتیجه‌ای از این حقیقت است که نگاشت

$$C_n^* \ni (x, y) \mapsto \lambda_1((x, y)) \in \mathbb{R}^+ \sqcup \{+\infty\}$$

پیوسته است (برای نمونه [۶۷، لم ۶] را ببینید)، که در سمت راست (x, y) بازه بازی در C_n است که از حرکت خلاف عقربه‌های ساعت، از x به y به‌دست می‌آید. براساس قرارداد، اگر $(x, y) \cap \mathbb{Z}_n = \emptyset$ ، می‌گذاریم $\lambda_1((x, y)) = +\infty$.

توجه کنید که $l' \neq 0$. این به خاطر فرض $k \leq n-1$ است که نتیجه می‌دهد $\mathbb{Z}_n \not\subset B$ و لذا یک $i \in \mathbb{Z}_n$ و یک $j \in [l']$ وجود دارد که $i \in \mathcal{A}'_j$. اگر $\mathcal{A}' \notin \mathcal{P}_{l'}(C_n)$ ، اجازه دهید نشان دهیم که می‌توان یک l -افراز $\mathcal{A}'' \in \mathcal{P}_l(C_n)$ یافت که

$$\min_{i \in [l]} \lambda_1(\mathcal{A}''_i) \geq \min_{i \in [l']} \lambda_1(\mathcal{A}'_i). \quad (1-4)$$

درحقیقت، اگر $\mathcal{A}' \notin \mathcal{P}_{l'}(C_n)$ ، الزاماً $l' < l$ و $i \in [l]$ ، که از $\mathcal{A}$ حذف شده‌اند تا $\mathcal{A}'$ به‌دست آید، زیرمجموعه‌ای از $(x, x+1)$ برای $x \in \mathbb{Z}_n$ هستند. برای $\epsilon \in (0, 1)$ به قدر کافی کوچک و برای هر چنین x ، داریم

$$\lambda_1((x, x+1+\epsilon)) \geq \min_{i \in [l']} \lambda_1(\mathcal{A}'_i),$$

زیرا با توجه به پیوستگی تابع λ_1 ، با کوچک شدن ϵ ، سمت چپ نامساوی فوق به سمت بی‌نهایت می‌رود. هم‌چنان برای چنین x ، اگر $x \notin \partial \mathcal{A}'$ ، مجموعه $(x+\epsilon, x+1+\epsilon)$ و اگر $x \in \partial \mathcal{A}'$ ، مجموعه $(x, x+1+\epsilon)$ را در نظر بگیرید (توجه کنید که $\lambda_1((x, x+1+\epsilon)) > \lambda_1((x+\epsilon, x+1+\epsilon))$). این مجموعه‌ها را $\mathcal{A}''_{i'+1}, \dots, \mathcal{A}''_{l'}$ بنامید. حال مجموعه‌های $\mathcal{A}'_i$ ، $i \in [l']$ ، را کمی کوچک کنید، طوری که با مجموعه‌های بالا تقاطع نداشته باشد و زیرمجموعه‌های جدید را $\mathcal{A}''_i$ ، $i \in [l']$ ، بنامید (باید توجه کرد که چون $\mathcal{A}''_i \subset \mathcal{A}'_i$ داریم $\lambda_1(\mathcal{A}''_i) \geq \lambda_1(\mathcal{A}'_i)$).

l -افراز $A'' := (A''_1, \dots, A''_l)$ در (۴-۱) صدق می‌کند. اگر A' متعلق به $\mathcal{P}_{l'}(C_n)$ بود، درحقیقت داشتیم $A' = A$ و $l' = l$. در این حالت فقط قرار می‌دهیم $A'' := A$.

حال l -افراز A'' را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم تا یک k -افراز $A''' \in \mathcal{P}_k(C_n)$ به دست آوریم به طوری که

$$\min_{i \in [k]} \lambda_1(A'''_i) \geq \min_{i \in [l]} \lambda_1(A''_i). \quad (۲-۴)$$

این نتیجه می‌دهد که A''' یک ماکسیم‌گر برای $\bar{\Lambda}_k$ است و حکم حاصل می‌شود.

اگر $l = k$ ، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند و تنها قرار می‌دهیم $A''' := A''$. در غیر این صورت، یعنی وقتی $l < k$ ، ابتدا حالتی که $\partial A'' \cap \mathbb{Z}_n \neq \emptyset$ را در نظر گرفته و یک $x \in \partial A'' \cap \mathbb{Z}_n$ انتخاب می‌کنیم. برای $\epsilon \in (0, 1)$ به قدر کافی کوچک، یک مولفه $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ می‌سازیم به طوری که

$$\lambda_1((x - \epsilon, x + \epsilon)) > \min_{i \in [l]} \lambda_1(A''_i).$$

همزمان A''_i هایی را که x را به عنوان مرز خود دارد، کمی کوچک می‌کنیم. در نتیجه به یک $(l+1)$ -افراز می‌رسیم که کمترین ویژه‌مقدار اول دیریشله مولفه‌های آن کمتر از $\min_{i \in [l]} \lambda_1(A''_i)$ نیست. اگر $l+1 < k$ و این $(l+1)$ -افراز هنوز نقطه مرزی در $\mathbb{Z}_n$ داشته باشد، کار فوق را تکرار می‌کنیم. با انجام مکرر این کار به یک t -افراز $\tilde{A}$ می‌رسیم که

$$\min_{i \in [t]} \lambda_1(\tilde{A}_i) \geq \min_{i \in [l]} \lambda_1(A''_i),$$

به طوری که $t = k$ یا $\partial \tilde{A} \cap \mathbb{Z}_n = \emptyset$. در حالت اول، فقط قرار می‌دهیم $A''' := \tilde{A}$. در حالت دوم، $i \in [t]$ وجود دارد به طوری که $\tilde{A}_i$ شامل دو نقطه متوالی از $\mathbb{Z}_n$ است (زیرا $1 < t \leq n$). حال $\tilde{A}_i$ را از وسط یال واصل این دو نقطه متوالی می‌بریم تا دو عضو از $\mathcal{D}_1(C_n)$ به دست آوریم، که ویژه‌مقدار اول دیریشله آن‌ها بزرگتر از $\lambda_1(\tilde{A}_i)$ است. با جایگزینی $\tilde{A}_i$ با این دو زیرمجموعه، به یک $(t+1)$ -افراز می‌رسیم که کمترین ویژه‌مقدار اول دیریشله مولفه‌های آن حداقل برابر $\min_{i \in [t]} \lambda_1(\tilde{A}_i)$ است. با تکرار این فرایند به یک k -افراز A''' می‌رسیم که در (۴-۲) صدق می‌کند. ■

مثال ۴-۱-۵

وجود یک ماکسیم‌گر برای $\bar{\Lambda}_k$ ، برای $k \in [n-1]$ ، در حالت کلی برقرار نیست. به عنوان مثال یک گراف ستاره S_n به ازای $n = 4$ در نظر بگیرید که بدون پتانسیل است، وزن همه راس‌ها برابر ۱ و وزن یال‌ها اعداد ۱، ۲، ۳ است.

بنابراین ماتریس لاپلاسین آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

یک دنباله ماکسیمم‌گر برای $\bar{\Lambda}_2$ دنباله $(A^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ است که $\mathcal{A}_1^{(m)} := [2, x_m)$ و $\mathcal{A}_4^{(m)} := [3, 1] \cup [4, 1] \cup [1, x_m)$ که در آن x_m نقطه‌ای در $(2, 1)$ است که به سمت ۱ میل می‌کند. داریم

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \min \{ \lambda_1(\mathcal{A}_1^{(m)}), \lambda_1(\mathcal{A}_4^{(m)}) \} = 1 = \bar{\Lambda}_2.$$

اما هیچ افزایی در $\mathcal{P}_2(\mathcal{S}_2)$ پیدا نمی‌شود که کمترین ویژه مقدار اول دیریشله مولفه‌های آن برابر ۱ باشد (توجه کنید که طبق تعریف، مولفه‌ها باید زیرمجموعه‌های باز و همبند باشند). از طرف دیگر $\{(2, 1), (3, 1)\}$ یک زیرافراز مینیمم‌گر برای $\underline{\Lambda}_2$ است و داریم $\underline{\Lambda}_2 = \bar{\Lambda}_2 = 1$. لازم به ذکر است که شهوداً این مثال نمی‌تواند “عمومی” محسوب شود، زیرا وزن دو یال برابر است. ★

۲-۴ تجزیه طیفی دورها

در این بخش تمرکز خود را بر گراف‌های کوانتومی محدود می‌کنیم که گراف زمینه آن‌ها یک دور است. قصد داریم ابزارهایی که در فصل قبل توسعه یافت را به کار گیریم تا تجزیه طیفی ماتریس‌های لاپلاسین تعمیم یافته روی دورها را به طور کامل منش‌نمایی کرده و توصیف دقیقی از ویژه تابع‌های آن ارائه کنیم.

گراف وزن دار $C_n = (\mathbb{Z}_n, E, \omega, \varphi, p)$ را در نظر می‌گیریم که $\mathbb{Z}_n$ مجموعه باقیمانده‌های هم‌نهشتی به پیمانه n است و $E := \{i(i+1) : i \in \mathbb{Z}_n\}$ (به پیمانه n محاسبه می‌شود). گراف متریک متناظر آن، C_n ، را با یکی کردن نقاط 0 و n در بازه $[0, n]$ به دست می‌آوریم، یعنی $C_n := \mathbb{R}/(n\mathbb{Z})$. این گراف را با ماتریس لاپلاسین تعمیم یافته C_n ، همراه می‌کنیم تا گراف کوانتومی (C_n, L) را به دست آوریم. در این حالت، هر زیرافراز $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_k(C_n)$ ، روان است و بین پارامترهای همبندی دیریشله، خاصیت به هم تنیدگی وجود دارد، یعنی برای هر $k \in \llbracket n-1 \rrbracket$ داریم $\underline{\Lambda}_k \leq \bar{\Lambda}_k < \underline{\Lambda}_{k+1} \leq \bar{\Lambda}_{k+1}$ (گزاره ۴-۱-۱ (i) را ببینید). در واقع، در این بخش قصد داریم قضیه زیر را ثابت کنیم.

قضیه ۱-۲-۴

هرگاه (C_n, L) یک گراف کوانتومی روی دور C_n باشد، داریم

$$\forall k \in \llbracket n \rrbracket, \quad \lambda_k = \begin{cases} \underline{\Delta}_1 = \overline{\Delta}_1 & \text{اگر } k = 1 \\ \underline{\Delta}_k & \text{اگر } k \text{ زوج باشد} \\ \overline{\Delta}_{k-1} & \text{اگر } k \neq 1 \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

علاوه بر این، برای $k \in \llbracket n \rrbracket$ ، زوج، توابع ویژه مرتبط با λ_k و λ_{k+1} (اگر $k+1 \leq n$)، دقیقاً k دامنه نودال (قوی و ضعیف) دارند. تساوی $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ تنها برای k زوج ممکن بوده و معادل تساوی $\underline{\Delta}_k = \overline{\Delta}_k$ است. به ویژه تکرار هر ویژه مقدار حداکثر برابر ۲ است.

این قضیه شکل و ساختار ویژه تابع ها و ویژه مقدارهای ماتریس های لاپلاسین تعمیم یافته روی دورها را به طور کامل توصیف می کند. لازم به ذکر است که آخرین جمله در قضیه فوق، در حالت کلی برای همه ماتریس های **هرمیتی** که گراف زمینه آنها یک دور است، برقرار می باشد [۴۱].

در اولین گام در راه اثبات قضیه ۱-۲-۴، ثابت می کنیم که پارامترهای $\underline{\Delta}_k$ ، $\overline{\Delta}_k$ و $k \in \llbracket n \rrbracket$ ، $k \in \llbracket n-1 \rrbracket$ ، وقتی که k زوج است، ویژه مقدارهای L هستند.

گزاره ۲-۲-۴

فرض کنید (C_n, L) یک گراف کوانتومی روی دور C_n و $k \in \llbracket n \rrbracket$ یک عدد صحیح زوج باشد. در این صورت $\underline{\Delta}_k$ یک ویژه مقدار L است. همچنین اگر $k \neq n$ ، $\overline{\Delta}_k$ یک ویژه مقدار L است. در نهایت $\underline{\Delta}_1 = \overline{\Delta}_1$ برابر ویژه مقدار اول L است.

برهان. رابطه $\lambda_1 = \underline{\Delta}_1 = \overline{\Delta}_1$ از تعریف واضح است. با توجه به این حقیقت که درجه هر راس در C_n برابر ۲ است، همه زیرافرازاها روان هستند. بنابراین، برای $k \in \llbracket n \rrbracket$ ، قضیه ۱-۶-۳ نتیجه می دهد که مینیمم گر A برای $\underline{\Delta}_k$ و ماکسیمم گر B برای $\overline{\Delta}_k$ (به شرط $k \neq n$) الزاماً k -افرازهای یکنواخت و اصلاح پذیر هستند. اگر علاوه بر این k زوج باشد، نتیجه می شود که A و B دوبرخشی اند. لذا قضیه ۲-۵-۳ نتیجه می دهد که $\underline{\Delta}_k = \lambda_1(A)$ و $\overline{\Delta}_k = \lambda_1(B)$ ویژه مقدارهای L هستند. ■

گزاره ۲-۲-۴ نشان می دهد که در صورتی که مقادیر k زوج $(\overline{\Delta}_k)_{k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket}$ ، k زوج $(\underline{\Delta}_k)_{k \in \llbracket 2, n \rrbracket}$ ، متمایز باشند، این اعداد، طیف L را به طور کامل مشخص می کنند. زیرا، اگر n زوج باشد، $1 + n/2 + n/2 - 1 = n$ و ویژه مقدار متمایز و اگر n فرد باشد، $1 + (n-1)/2 + (n-1)/2 = n$ ، ویژه مقدار متمایز پیدا می کنیم. بنابراین اگر برای هر $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ ، $\underline{\Delta}_k \neq \overline{\Delta}_k$ ، آنگاه با توجه به گزاره های ۱-۱-۴ و ۲-۲-۴، طیف L همان طور که در قضیه ۱-۲-۴ شرح داده شده، به دست می آید. اثبات قضیه ۱-۲-۴ در حالت کلی، یک نتیجه بلافاصله از گزاره زیر

است.

گزاره ۳-۲-۴

فرض کنید (C_n, L) یک گراف کوانتومی روی دور C_n و $k, k \in [2, n-1]$ زوج، داده شده و داریم $\underline{\Delta}_k = \bar{\Delta}_k$. در این صورت، ویژه مقدار $\underline{\Delta}_k$ برای L دارای تکرار ۲ است و ویژه تابع های ناصفر مربوط به آن دقیقاً k دامنه نودال (قوی و ضعیف) دارند.

برهان. فرض کنید k ، عدد داده شده در صورت گزاره و $A = (A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{P}_k(C_n)$ یک مینیمم گر یکنواخت برای $\underline{\Delta}_k$ باشد. قرارداد می کنیم $A_1 = (b_1, b_2)$ ، $A_2 = (b_2, b_3)$ ، $\dots$ و $A_k = (b_k, b_1)$ که نقاط مرزی در شرط $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k < n$ صدق می کنند (توجه کنید که $C_n = \mathbb{R}/(n\mathbb{Z})$ با $[0, n)$ یکی شده است). چون $k < n$ ، با توجه به اصل لانه کبوتری، یکی از A_i ها، $i \in [k]$ ، وجود دارد که بستار آن، $\bar{A}_i$ ، شامل دو راس از $\mathbb{Z}_n$ است. با یک تغییر اندیس، فرض کنید که $1, 2 \in \bar{A}_1$. برای $y_1 \in (1, 2)$ داده شده، نگاشت زیر را در نظر بگیرید

$$F : (0, n) \ni s \mapsto \lambda_1((y_1, y_1 + s)) \in \mathbb{R}^+ \sqcup \{+\infty\}$$

(که $y + s$ باید به عنوان نقطه ای از $C_n = \mathbb{R}/(n\mathbb{Z})$ در نظر گرفته شود). برای $s \in (0, 2 - y_1)$ ، داریم $F(s) = +\infty$. اما روی بازه $[2 - y_1, n)$ ، F اکیداً نزولی است (نتیجه ۳-۸-۱). چون $y_1 \in A_1$ ، داریم $(y_1, b_2) \subset A_1$ و $A_2 \subset (y_1, b_3)$ و این شمول ها اکید هستند. بنابراین یک نقطه یکتای $y_2 \in A_2$ یافت می شود به طوری که $\lambda_1((y_1, y_2)) = \lambda_1(A)$. با ادامه این فرایند، می توانیم $y_3 \in A_3$ بیابیم که $\lambda_1(y_2, y_3) = \lambda_1(A)$ و الی آخر. در نهایت $y_k \in A_k$ را می یابیم که $\lambda_1(y_{k-1}, y_k) = \lambda_1(A)$.

سه امکان برای این نقطه نهایی، y_k ، وجود دارد. داریم $y_k < y_1$ یا $y_k = y_1$ یا $y_k > y_1$. می خواهیم ثابت کنیم که شرط $\underline{\Delta}_k = \bar{\Delta}_k$ نتیجه می دهد که $y_k = y_1$.

ابتدا توجه کنید که حالت $y_k < y_1$ همواره غیرممکن است. درحقیقت، اگر $y_k < y_1$ ، برای $i \in [k]$ ، تعریف می کنیم $\mathcal{B}_i := (y_i, y_{i+1})$. لذا $B := (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ یک زیرافراز مینیمم گر برای $\underline{\Delta}_k$ است. بنابراین براساس قضیه ۳-۶-۱، باید یک افراز باشد، در حالی که در این حالت افراز نیست. این تناقض نشان می دهد که همواره $y_k \geq y_1$.

حال فرض کنید $y_k > y_1$. در این حالت، می توانیم نقاط y_i ، $i \in [k]$ ، را به نقاط جدید y'_i ، $i \in [k]$ ، منتقل کنیم، که $y'_k = y_1 = y'_1$ ، به طوری که اگر $B' := (\mathcal{B}'_1, \dots, \mathcal{B}'_k)$ را افرازی با نقاط مرزی $\partial B' = \{y'_i : i \in [k]\}$ تعریف کنیم، خواهیم داشت

$$\forall i \in [k], \quad \lambda_1(\mathcal{B}'_i) > \lambda_1((y_i, y_{i+1}))$$

درحقیقت، این کار روی گراف C_n ، به این صورت انجام می شود که به ترتیب نقاط $y_k, y_{k-1}, \dots, y_2$ را در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت می دهیم، به طوری که بازه های بین نقاط متوالی، ویژه مقدار اول دیریشه برابر داشته

باشند. وقتی که نقطه‌ای که از y_k شروع شده بود، به y_1 رسید، نقاط y'_i ، $i \in [k]$ ، را به دست آورده‌ایم. در نتیجه

$$\bar{\Lambda}_k \geq \min_{i \in [k]} \lambda_1(B_i) > \min_{i \in [k]} \lambda_1((y_i, y_{i+1})) = \lambda_1(A) = \underline{\Lambda}_k$$

که متناقض با فرض اولیه ما است. لذا همان‌طور که گفتیم $y_k = y_1$ و B که به وسیله $B_i := (y_i, y_{i+1})$ ، برای $i \in [k]$ ، تعریف می‌شود، یک افراز مینیمم‌گر برای $\underline{\Lambda}_k$ است. با توجه به قضیه ۳-۵-۲، یک ویژه‌تابع‌های f, g مربوط به ویژه‌مقدار $\underline{\Lambda}_k = \bar{\Lambda}_k$ برای L وجود دارند که دامنه‌های نودال (پیوسته) آن‌ها به ترتیب مولفه‌های A, B هستند. نشان می‌دهیم که f و g مضرب یکدیگر نیستند. این موضوع به خاطر انتخاب y_1 است که تضمین می‌کند، g روی رئوس ۱ و ۲ هم‌علامت است، در حالی که f روی این رئوس علامت مختلف دارد.

بنابراین تساوی $\underline{\Lambda}_k = \bar{\Lambda}_k$ نتیجه می‌دهد که بعد فضای ویژه L مرتبط با $\underline{\Lambda}_k$ حداقل برابر ۲ است. این عدد نمی‌تواند بیشتر از ۲ باشد، زیرا در این صورت به تعداد بیشتر از n ویژه‌تابع مستقل می‌رسیم. در واقع شمارش تعداد ویژه‌مقدارها به صورت زیر انجام می‌شود (گزاره ۴-۱-۱-۱) را در نظر داریم تا مطمئن باشیم یک ویژه‌مقدار را دوبار نمی‌شماریم). ابتدا از تعریف واضح است که $\lambda_1 = \underline{\Lambda}_1$ یک ویژه‌مقدار از تکرار یک است (قضیه پرون-فروبنیوس). هم‌چنین برای هر $l \in [2, n]$ ، زوج، اگر $\underline{\Lambda}_l \neq \bar{\Lambda}_l$ ، آنگاه دو ویژه‌مقدار از تکرار یک می‌یابیم (به جز برای $l = n$ زوج که $\underline{\Lambda}_n$ یک ویژه‌مقدار از تکرار یک است) و اگر $\underline{\Lambda}_l = \bar{\Lambda}_l$ ، آنگاه یک ویژه‌مقدار از تکرار ۲ می‌یابیم. مقدار n هرچه باشد (زوج یا فرد)، n ویژه‌مقدار (با تکرار) به دست می‌آوریم.

تنها می‌ماند ثابت کنیم که هرگاه $\underline{\Lambda}_k = \bar{\Lambda}_k$ ، k زوج، هر ویژه‌تابع ناصفر f متناظر با $\underline{\Lambda}_k$ ، دارای k دامنه نودال (قوی و ضعیف) است. اول توجه کنید که چون درجه هر راس برابر ۲ است، تعداد دامنه‌های نودال قوی و ضعیف هر تابع برابر است. فرض کنید l تعداد دامنه‌های نودال f باشد و B را یک l -زیرافراز متشکل از دامنه‌های نودال پیوسته f قرار دهید. ابتدا نشان می‌دهیم که f نمی‌تواند روی دو راس متوالی صفر شود. فرض کنید $x \in \mathbb{Z}_n$ چنان باشد که $f(x) = 0$ ، در این صورت تساوی $\underline{\Lambda}_k f(x) = (Lf)(x)$ ، نشان می‌دهد که $f(x-1)$ و $f(x+1)$ باید علامت مختلف داشته باشند و به‌ویژه هیچ‌کدام نباید صفر باشند، یا هر دو باید صفر باشند. اما در حالت دوم، رابطه $\underline{\Lambda}_k f(x+1) = (Lf)(x+1) = 0$ نتیجه می‌دهد $f(x+2) = 0$ و با تکرار این استدلال به $f = 0$ می‌رسیم که تناقض است. بنابراین، B یک افراز l زوج است. هم‌چنین داریم B یکنواخت است و $\lambda_1(B) = \underline{\Lambda}_k$. بنابراین الزاماً $l = k$ ، زیرا در غیر این صورت برای k -افراز مینیمم‌گر A ، با توجه به اصل لانه‌کبوتری، یکی از مولفه‌های B اکیداً در یکی از مولفه‌های A مشمول است (حالت $l > k$) یا یکی از مولفه‌های A اکیداً در یکی از مولفه‌های B مشمول است که در تناقض با $\lambda_1(B) = \lambda_1(A)$ است. ساختار ارائه شده در ابتدای این اثبات، با گشتن y_1 درون بازه $[b_1, b_2]$ ، همه ویژه‌تابع‌های مرتبط با $\underline{\Lambda}_k$ را، تحت یک ضرب، به دست می‌دهد. ■

در پایان این بخش، سعی می‌کنیم اطلاعات بیشتری درباره ویژه‌تابع‌های ماتریس L روی یک دور، وقتی که تابع پتانسیل صفر است، به دست آوریم. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک زیرمجموعه همبند از یک مسیر متریک بدون پتانسیل باشد و $f_{\mathcal{A}} \geq 0$ را تابع یکتای معرفی شده در لم ۱-۸-۲ بگیرید. با توجه به استدلال موجود در برهان قضیه ۱-۵-۳، این تابع مینیمم موضعی در $\mathcal{A}$ ندارد. بنابراین شکل این تابع به صورت زیر است. از یک طرف مسیر با مقدار صفر شروع

می‌شود، افزایش می‌یابد و به یک نقطه ماکسیمم، که یک راس در $V \cap \mathcal{A}$ است، می‌رسد. ممکن است در راس بعدی هم همان مقدار را بگیرد و سپس کاهش می‌یابد تا در طرف دیگر مسیر به صفر برسد. با توجه به این مطلب و با ساختار ارائه شده در برهان گزاره ۴-۲-۳، می‌بینیم که f ، توسیع آفین ویژه‌تابع مربوط به $\underline{\Delta}_k$ یا $\overline{\Delta}_k$ ، $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ زوج، شکل سینوسی زیر را خواهد داشت. این تابع تکه‌های متوالی صعودی و نزولی دارد که بین هر دو تکه متوالی، یک یا دو راس مینیمم یا ماکسیمم موضعی قرار دارد. دقیقاً $k/2$ تکه صعودی و $k/2$ تکه نزولی وجود دارد و در هر تکه، f یک بار از صفر عبور می‌کند (در یک راس یا یک نقطه در C_n).

این رفتار قبلاً در ویژه‌تابع‌های ماتریس لاپلاسن ترکیبیاتی روی یک دور (یعنی حالت همگن، وقتی که وزن همه راس‌ها و یال‌ها برابر یک است، مثال ۱-۳-۱) دیده شده است. زیرا ویژه‌تابع‌ها در این حالت به‌صورت زیر هستند

• ویژه‌تابع $\mathbb{1}$ (تابع ثابت یک) مربوط به ویژه‌مقدار صفر است،

• فضای ویژه متناظر با ویژه‌مقدار $(1 - \cos(2\pi k/n))$ ، برای $k \in \llbracket (n-1)/2 \rrbracket$ ، توسط توابع $\mathbb{Z}_n \ni x \mapsto \sin(2\pi kx/n)$ و $\mathbb{Z}_n \ni x \mapsto \cos(2\pi kx/n)$ تولید می‌شوند و

• اگر n زوج باشد، تابع $\mathbb{Z}_n \ni x \mapsto \cos(\pi x)$ نیز یک ویژه‌تابع متناظر ویژه‌مقدار ۲ است.

بنابراین ویژه‌تابع‌های ماتریس‌های لاپلاسن که گراف متناظر آن‌ها یک دور است، رفتار کیفی عمومی یکسانی دارند، چه متناظر ویژه‌مقدارهای مکرر باشند (مانند حالت لاپلاسن ترکیبیاتی) یا نباشند.

۴-۳ اثبات حدس میکلو برای دورها

در این بخش نشان می‌دهیم که **حدس میکلو** (حدس ۳-۳-۵) برای ماتریس‌های لاپلاسن روی دورها با یک ثابت جهانی ۲۴ برقرار است. با توجه به این‌که حدس میکلو، حدس تعمیم‌یافته چيگر را نتیجه می‌دهد، از این یافته می‌توانیم یک نامساوی چيگر تعمیم‌یافته برای همه دورها و همه ویژه‌مقدارهای آن‌ها، با یک ثابت جهانی ۴۸ به‌دست آوریم (بخش ۴-۳ را ببینید). فضای مورد مطالعه در این بخش فضای ماتریس‌های لاپلاسن دلخواه (با تابع پتانسیل صفر) روی دورها است. قضیه اصلی که در این بخش ثابت می‌کنیم به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه ۴-۳-۱

فرض کنید (C_n, L) یک گراف کوانتومی بدون پتانسیل روی دور C_n باشد. در این صورت

$$\forall k \in \llbracket n \rrbracket, \quad \underline{\Delta}_k \leq \begin{cases} \lambda_k & \text{اگر } k = 1 \text{ یا } k \text{ زوج باشد} \\ 24 \lambda_k & \text{اگر } k \geq 3 \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

اگر k زوج باشد، حکم قضیه از قضیه ۴-۲-۱ واضح است، چون $\underline{\Delta}_k = \lambda_k$. عدد $k \in \llbracket n \rrbracket$ فرد را ثابت بگیرید و فرض کنید $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \in \mathcal{P}_k(C_n)$ یک افراز مینیمم‌گر برای $\underline{\Delta}_k$ باشد که یکنواخت و اصلاح‌پذیر

است. مانند قبل قرارداد می‌کنیم که $\mathcal{A}_1 = (b_1, b_2)$, $\mathcal{A}_2 = (b_2, b_3)$, $\dots$ و $\mathcal{A}_k = (b_k, b_{k+1})$ ، که نقاط مرزی در شرط $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k < n$ صدق می‌کنند در حالی که $C_n = \mathbb{R}/(n\mathbb{Z})$ با $[\circ, n)$ یکی گرفته شده است. هم‌چنین برای راحتی اندیس‌ها را به پیمانه k حساب می‌کنیم، یعنی $b_{k+1} = b_1$, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_k$, $\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_1$ و غیره. اولین گام در جهت اثبات قضیه ۱-۳-۴، این است که ثابت می‌کنیم یک $i \in \llbracket k \rrbracket$ یافت می‌شود که

$$\lambda_1(\mathcal{A}_i \sqcup \{b_{i+1}\} \sqcup \mathcal{A}_{i+1}) \geq (1/24) \lambda_1(\mathcal{A}). \quad (3-4)$$

اگر این ادعا درست باشد و برای راحتی فرض کنیم $i = k$ ، آن‌گاه افراز $\mathcal{A}' := (\mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_{k-1}) \in \mathcal{P}_{k-1}(C_n)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall l \in \llbracket k-1 \rrbracket, \quad \mathcal{A}'_l := \begin{cases} \mathcal{A}_k \sqcup \{b_1\} \sqcup \mathcal{A}_1 & \text{اگر } l = 1 \\ \mathcal{A}_l & \text{اگر } l \in \llbracket 2, k-1 \rrbracket. \end{cases}$$

با در نظر گرفتن قضیه ۱-۲-۴، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (1/24) \underline{\lambda}_k &= (1/24) \lambda_1(\mathcal{A}) \\ &\leq \lambda_1(\mathcal{A}'_1) \\ &= \min_{l \in \llbracket k-1 \rrbracket} \lambda_1(\mathcal{A}'_l) \\ &\leq \bar{\lambda}_{k-1} \\ &= \lambda_k \end{aligned}$$

و قضیه ۱-۳-۴ نتیجه می‌شود. برای پیدا کردن یک اندیس $i \in \llbracket k \rrbracket$ که در (۳-۴) صدق کند، به تعدادی پیش‌نیاز محتاجیم. ابتدا لم زیر را از [۲۶] یادآوری می‌کنیم که یک نامساوی وزن‌دار هاردی برای ویژه‌مقدار اول دیریشله ماتریس‌های لاپلاسین روی مسیرها (فرایندهای تولد-مرگ)، با شرط دیریشله در دو طرف مسیر، ارائه می‌دهد. برای اطلاعات بیشتری در این زمینه و ارتباط نامساوی وزن‌دار هاردی با نامساوی پوانکاره [۲۵، ۲۶] را ببینید.

لم ۲-۳-۴ [۲۶]

فرض کنید $P_n = (V, E, \omega, \varphi)$ یک مسیر وزن‌دار بدون پتانسیل با ماتریس لاپلاسین L باشد که $V := \{x_0, \dots, x_{n+1}\}$ و $E := \{x_i x_{i+1} : i \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$. هم‌چنین قرار دهید $A := \{x_1, \dots, x_n\}$. در این صورت

$$\frac{1}{4} \kappa^{-1}(A) \leq \lambda_1(A) \leq \kappa^{-1}(A),$$

که

$$\kappa^{-1}(A) := \min_{\substack{s, t \in \llbracket n \rrbracket \\ s \leq t}} \left[\left(\sum_{i=s}^{t-1} \frac{1}{\phi_i} \right)^{-1} + \left(\sum_{i=t}^n \frac{1}{\phi_i} \right)^{-1} \right] \left(\sum_{j=s}^t \omega(x_j) \right)^{-1},$$

که در آن $\phi_i := \varphi(x_i x_{i+1})$ ، برای $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

فرض کنید $\mathcal{P}_n$ گراف متریک متناظر با مسیر P_n باشد. از بخش ۱-۸ به یاد آورید که دو اندازه ω و ρ روی $\mathcal{P}_n$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\omega := \sum_{x \in V} \omega(x) \delta_x, \quad \rho := \sum_{\{x, y\} \in E} \rho_{x, y}, \quad (4-4)$$

که برای هر یال $xy \in E$ ، اندازه لبگ طبیعی روی تکه یال $[x, y]$ است. حال به آسانی می‌توانیم لم ۴-۳-۲ را به مدل گراف‌های کوانتومی تعمیم دهیم.

لم ۴-۳-۳

فرض کنید $(\mathcal{P}_n, L)$ یک مسیر کوانتومی بدون پتانسیل روی مسیر P_n باشد. برای هر زیرمجموعه همبند $\mathcal{A} := (a, b) \subset \mathcal{P}_n$ داریم

$$(1/4) \kappa^{-1}(\mathcal{A}) \leq \lambda_1(\mathcal{A}) \leq \kappa^{-1}(\mathcal{A}),$$

که

$$\kappa^{-1}(\mathcal{A}) := \inf_{a < x \leq y < b} \left(\frac{1}{\rho((a, x))} + \frac{1}{\rho((y, b))} \right) \frac{1}{\omega([x, y])}, \quad (5-4)$$

که اندازه‌های ω, ρ در (۴-۴) تعریف شده‌اند.

برهان. فرض کنید اینفیمم در (۵-۴) برای نقاط $x_*, y_* \in \mathcal{P}_n$ اتفاق بیفتد. کافی است نشان دهیم که $\{x_*, y_*\} \subset V(P_n)$ و لم‌های ۱-۸-۲ و ۲-۳-۴ را به‌کار گیریم. به برهان خلف و بدون کم شدن کلیت، فرض کنید $x_* \in \mathcal{P}_n \setminus V(P_n)$. سپس x'_* را نزدیک x_* بجوئید به‌طوری که $\rho(a, x'_*) > \rho(a, x_*)$ و بازه (x_*, x'_*) شامل هیچ راسی از $V(P_n)$ نباشد. در این صورت $\omega([x'_*, y_*]) = \omega([x_*, y_*])$ و در نتیجه

$$\left(\frac{1}{\rho((a, x'_*))} + \frac{1}{\rho((y_*, b))} \right) \frac{1}{\omega([x'_*, y_*])} < \left(\frac{1}{\rho((a, x_*))} + \frac{1}{\rho((y_*, b))} \right) \frac{1}{\omega([x_*, y_*])},$$

که با انتخاب x_*, y_* در تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که $\{x_*, y_*\} \subset V(P_n)$ و اثبات تمام می‌شود. ■

حال اجازه دهید به افراز مینیمم گر $A = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \in \mathcal{P}_k(C_n)$ برای $\underline{\Delta}_k$ که در ابتدای این بخش

معرفی شد، برگردیم. برای هر $i \in \llbracket k \rrbracket$ ، از c_i نقطه یکتای وسط $\mathcal{A}_i$ را مراد می‌کنیم، به این معنی که $\rho((b_i, c_i)) = \rho((c_i, b_{i+1})) = \rho(\mathcal{A}_i)/2$ سپس k -افراز $\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall i \in \llbracket k \rrbracket, \quad \mathcal{B}_i := (c_i, c_{i+1}).$$

یک اندیس $i \in \llbracket k \rrbracket$ وجود دارد به‌طوری که $\lambda_1(\mathcal{B}_i) \geq \underline{\Lambda}_k = \lambda_1(\mathcal{A})$. زیرا در غیر این صورت خواهیم داشت

$$\max_{i \in \llbracket k \rrbracket} \lambda_1(\mathcal{B}_i) < \underline{\Lambda}_k$$

که در تناقض با تعریف $\underline{\Lambda}_k$ است. نتیجه بعد نشان می‌دهد که این اندیس i همان اندیسی است که ما به دنبال آن می‌گشتیم.

گزاره ۴-۳-۴

اگر $i \in \llbracket k \rrbracket$ به گونه‌ای باشد که $\lambda_1(\mathcal{B}_i) \geq \lambda_1(\mathcal{A})$ ، آن‌گاه رابطه (۳-۴) برقرار است.

برهان. بدون کم شدن کلیت فرض کنید $i = k$. تعریف کنید $\mathcal{A}' := \mathcal{A}_k \sqcup \{b_1\} \sqcup \mathcal{A}_1$ و همان نمادهای قبل را به کار ببرید، یعنی $\mathcal{A}_1 = (b_1, b_2)$ ، $\mathcal{A}_k = (b_k, b_1)$ و $\mathcal{B}_k = (c_k, c_1)$. فرض کنید $x_\circ, y_\circ \in \mathcal{A}'$ دو نقطه‌ای باشند که (۴-۵) را مینیمم کرده، $\kappa^{-1}(\mathcal{A}')$ را به دست می‌دهد. بنابراین

$$\kappa^{-1}(\mathcal{A}') = \left(\frac{1}{\rho((b_k, x_\circ))} + \frac{1}{\rho((y_\circ, b_2))} \right) \frac{1}{\omega([x_\circ, y_\circ])}.$$

کران (۳-۴) را در سه حالت زیر ثابت می‌کنیم.

حالت ۱. $\rho((y_\circ, b_2)) \geq (3/5) \rho(\mathcal{A}_1)$ و $\rho((b_k, x_\circ)) \geq (3/5) \rho(\mathcal{A}_k)$.
در این حالت $c_k < x_\circ < y_\circ < c_1$ داریم

$$\begin{aligned} \rho((c_k, x_\circ)) &= \rho((b_k, x_\circ)) - \frac{\rho(\mathcal{A}_k)}{2} \\ &\geq \frac{\rho((b_k, x_\circ))}{6}. \end{aligned}$$

به‌طور مشابه $\rho((y_\circ, b_2)) \leq 6\rho((y_\circ, c_1))$ و از طریق لم ۴-۳-۳ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathcal{A}') &\geq \frac{1}{4} \kappa^{-1}(\mathcal{A}') = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho((b_k, x_\circ))} + \frac{1}{\rho((y_\circ, b_2))} \right) \frac{1}{\omega([x_\circ, y_\circ])} \\ &\geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{6 \rho((c_k, x_\circ))} + \frac{1}{6 \rho((y_\circ, c_1))} \right) \frac{1}{\omega([x_\circ, y_\circ])} \geq \frac{1}{24} \kappa^{-1}(\mathcal{B}_k) \geq \frac{1}{24} \lambda_1(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

حالت ۲. $\rho((y_\circ, b_2)) < (3/5) \rho(\mathcal{A}_1)$ و $\rho((b_k, x_\circ)) < (3/5) \rho(\mathcal{A}_k)$.

نقاط $d_1, d_2 \in \mathcal{A}'$ را به‌ترتیب به عنوان نقاط وسط بازه‌های (c_k, b_1) و (b_1, c_1) اختیار کنید، یعنی

$$\rho((c_k, d_1)) = \rho((d_1, b_1)) = (1/4) \rho(\mathcal{A}_k), \quad \rho((b_1, d_2)) = \rho((d_2, c_1)) = (1/4) \rho(\mathcal{A}_k).$$

لذا داریم $x_* < d_1 < d_2 < y_*$ و به‌وسیله لم ۳-۳-۴ داریم

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathcal{A}) &\leq \kappa^{-1}(\mathcal{A}_k) \leq \left(\frac{1}{\rho((b_k, x_*))} + \frac{1}{\rho((d_1, b_1))} \right) \frac{1}{\omega([x_*, d_1])}, \\ \lambda_1(\mathcal{A}) &\leq \kappa^{-1}(\mathcal{B}_k) \leq \left(\frac{1}{\rho((c_k, d_1))} + \frac{1}{\rho((d_2, c_1))} \right) \frac{1}{\omega([d_1, d_2])}, \\ \lambda_1(\mathcal{A}) &\leq \kappa^{-1}(\mathcal{A}_1) \leq \left(\frac{1}{\rho((b_1, d_2))} + \frac{1}{\rho((y_*, b_2))} \right) \frac{1}{\omega([d_2, y_*])}. \end{aligned}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} \omega([x_*, d_1]) \lambda_1(\mathcal{A}) &\leq \left(\frac{1}{\rho((b_k, x_*))} + \frac{12}{5 \rho((b_k, x_*))} \right), \\ \omega([d_1, d_2]) \lambda_1(\mathcal{A}) &\leq \left(\frac{12}{5 \rho((b_k, x_*))} + \frac{12}{5 \rho((y_*, b_2))} \right), \\ \omega([d_2, y_*]) \lambda_1(\mathcal{A}) &\leq \left(\frac{12}{5 \rho((y_*, b_2))} + \frac{1}{\rho((y_*, b_2))} \right), \end{aligned}$$

و سپس

$$\omega([x_*, y_*]) \lambda_1(\mathcal{A}) \leq 6 \left(\frac{1}{\rho((b_k, x_*))} + \frac{1}{\rho((y_*, b_2))} \right).$$

این به همراه لم ۳-۳-۴ نتیجه می‌دهند که

$$\lambda_1(\mathcal{A}) \leq 6 \kappa^{-1}(\mathcal{A}') \leq 24 \lambda_1(\mathcal{A}').$$

حالت ۳. $\rho((y_*, b_2)) \geq (3/5) \rho(\mathcal{A}_1)$ و $\rho((b_k, x_*)) < (3/5) \rho(\mathcal{A}_k)$

مجدداً d_1 را نقطه وسط بازه (c_k, b_1) اختیار کرده و مشابه حالت ۲، داریم

$$\begin{aligned} \omega([x_*, d_1]) \lambda_1(\mathcal{A}) &\leq \left(\frac{1}{\rho((b_k, x_*))} + \frac{1}{\rho((d_1, b_1))} \right) \leq \left(\frac{1}{\rho((b_k, x_*))} + \frac{12}{5 \rho((b_k, x_*))} \right), \\ \omega([d_1, y_*]) \lambda_1(\mathcal{A}) &\leq \omega([d_1, y_*]) \lambda_1(\mathcal{B}_k) \\ &\leq \left(\frac{1}{\rho((c_k, d_1))} + \frac{1}{\rho((y_*, c_1))} \right) \leq \left(\frac{12}{5 \rho((b_k, x_*))} + \frac{6}{\rho((y_*, b_2))} \right). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\omega([x_0, y_0]) \lambda_1(\mathcal{A}) \leq \epsilon \left(\frac{1}{\rho((b_k, x_0))} + \frac{1}{\rho((y_0, b_2))} \right),$$

و مطلوب حاصل است.

■

فصل ۵

جنبه‌های محاسباتی مسائل ایزوپریمتری

با توجه به این که محاسبه ویژه مقادارها و ویژه تابع‌های یک ماتریس در زمان چندجمله‌ای قابل انجام است و با در نظر گرفتن نامساوی‌های تعمیم یافته چيگر که در فصل ۳ مورد بررسی قرار گرفتند، ویژه مقادارهای لاپلاسین را می‌توان، از جهتی، تخمینی برای ثابت‌های ایزوپریمتری در نظر گرفت. از طرف دیگر، با توجه به اهمیت کاربردی و عملی مسائل ایزوپریمتری، در این فصل قصد داریم به جنبه‌های محاسباتی مسائل ایزوپریمتری و به‌طور ویژه، پیچیدگی محاسباتی آن‌ها بپردازیم. مطالب این فصل براساس محتویات مقاله [۳۳] تنظیم شده است.

۵-۱ مقدمات پیچیدگی محاسباتی و الگوریتم‌ها

برای مشاهده تعاریف و مفاهیم اولیه پیچیدگی محاسباتی، مانند تعاریف الگوریتم زمان چندجمله‌ای، مساله NP -کامل و کلاس‌های پیچیدگی به کتاب‌های کلاسیک در این زمینه از جمله [۴] مراجعه کنید. در این فصل، یک **تقلیل زمان چندجمله‌ای چند به یک** را با نماد $\leq_m^p$ نشان می‌دهیم [۴].

فرض کنید یک مساله مینیمم‌سازی داریم که برای هر نمونه I از مساله، جواب بهینه برابر $Opt(I)$ است. در صورتی که این مساله NP -سخت باشد، یافتن الگوریتمی که بتواند تخمین مناسبی از جواب بهینه را به دست دهد حائز اهمیت است. منظور از یک الگوریتم α -تخمین، یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای است که جوابی که برمی‌گرداند یک جواب امکان‌پذیر بوده و حداکثر α برابر جواب مینیمم واقعی باشد. به عبارت دیگر، به ازای نمونه I از مساله، در زمان چندجمله‌ای مقدار $Approx(I)$ را برمی‌گرداند، به‌طوری که

$$Opt(I) \leq Approx(I) \leq \alpha Opt(I).$$

برای یک مساله مینیم‌سازی، مراد از یک **طرح تخمین زمان چندجمله‌ای** (PTAS)، یک الگوریتم است که یک نمونه از مساله، به همراه یک عدد $\epsilon > 0$ را می‌گیرد و یک جواب امکان‌پذیر برمی‌گرداند که حداکثر $(1 + \epsilon)$ برابر مینیم واقعی است. منظور از یک **طرح تخمین زمان چندجمله‌ای کامل** (FPTAS)، یک طرح تخمین زمان چندجمله‌ای است که زمان اجرای آن به وسیله یک چندجمله‌ای از اندازه نمونه ورودی و عدد $1/\epsilon$ کران‌دار شده است. برای جزئیات بیشتر [۸۵] را ببینید.

فرض کنید نمونه‌های یک مساله تصمیم‌گیری شامل پارامترهای عددی است. این مساله را **قویاً NP -کامل** گوئیم، در صورتی که این مساله NP -کامل باقی بماند، هرگاه همه پارامترهای عددی مساله به وسیله یک چندجمله‌ای از طول ورودی، کران‌دار باشند [۴۷]. به طور معادل، یک مساله عددی، قویاً NP -کامل است، هرگاه مساله NP -کامل باشد، وقتی که اعداد ورودی مساله با **کدهای یک‌یکی** داده شده باشند. می‌توان ثابت کرد در صورتی که $P \neq NP$ ، برای یک مساله بهینه‌سازی قویاً NP -سخت، تحت شرایط طبیعی، نمی‌توان یک طرح تخمین زمان چندجمله‌ای کامل پیدا کرد [۸۵].

۲-۵ پیچیدگی محاسباتی مسائل ایزوپریمتری

برای مطالعه پیچیدگی محاسباتی مسائل ایزوپریمتری، همان طور که در نتایج پیچیدگی مسائل بهینه‌سازی معمول است، مساله تصمیم‌گیری متناظر با مساله اصلی را در نظر می‌گیریم. علاوه بر این، چون پارامترهای ایزوپریمتری به عنوان عملگرهایی از توابع وزن، ضرب اسکالر را حفظ می‌کنند، بدون کم شدن کلیت، فرض می‌کنیم که برد همه توابع وزن به جای اعداد گویا $\mathbb{Q}$ ، اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ است. برای راحتی از چند نماد استفاده می‌کنیم.

نماد ۱-۲-۵

نمادهای IPP و NCP به ترتیب برای مساله ایزوپریمتری و مینیم برش نرمال‌شده به کار می‌رود (تعریف ۲-۱-۳). بالانویس‌های m و M به ترتیب نسخه میانگین و مهین این مسائل را مشخص می‌کند (هرگاه بالانویس‌های m یا M حذف شوند، به این معنی است که گزاره برای هر دو نسخه میانگین و مهین برقرار است). پانویس k وقتی به کار می‌رود که k یک ثابت است و حذف می‌شود، هرگاه k بخشی از ورودی است. برای مثال NCP_k^M نمادی برای مساله زیر است.

مساله NCP_k^M

ثابت‌ها: عدد صحیح k .

نمونه: یک گراف وزن‌دار $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ و یک عدد گویای $N \in \mathbb{Q}$.

سوال: آیا نامساوی $\tilde{t}_k^M(G) \leq N$ درست است؟ به عبارت دیگر، آیا یک k -افراز

$$\exists \max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)} \right\} \leq N \text{ وجود دارد که } \{A_i\}_1^k \in \mathcal{P}_k(V)$$



با توجه به قضیه ۵-۱-۲(i)، اگر گراف بدون پتانسیل باشد، مساله IPP_2 و NCP_2 معادلند. به عبارت دیگر مساله روی ۲-افرازا و ۲-زیرافرازا جواب یکسان می‌دهد. نتایج زیر نشان می‌دهد که این دو مساله معادل، NP -کامل هستند.

قضیه ۵-۲-۲

(i) [۶۸] مساله NCP_2 برای گراف‌های بدون وزن با یال چندگانه، یک مساله NP -کامل است.

(ii) [۸۳] مساله NCP_2 برای گراف‌های وزن‌دار بدون پتانسیل، مسطح و دوبخشی، NP -کامل است.

لازم به ذکر است که اگرچه مسطح و دوبخشی بودن در قضیه ۵-۲-۲(ii) به طور صریح در [۸۳] ذکر نشده است، اما براحتی از تقلیل ذکر شده در اثبات، قابل استخراج است.

برای مدت زیادی این‌که تا چه حد خوب، می‌توان $\nu_2 = \tilde{\nu}_2$ را برای گراف‌های کلی در زمان چندجمله‌ای تخمین زد، یک مساله باز و چالش برانگیز بوده است. تاکنون بهترین نتیجه موجود از آرورا و دیگران است که یک الگوریتم تخمین چندجمله‌ای ارائه داده‌اند که برای یک گراف ساده n راسی، ν_2 را تا حد $O(\sqrt{\log n})$ محاسبه می‌کند ([۸۵، ۸۲، ۵] را ببینید). آن‌ها از برنامه‌ریزی نیمه‌معین و نشانند هندسی در این الگوریتم استفاده کردند. هم‌چنین وو و دیگران یک الگوریتم چندجمله‌ای $((4 + o(1)) \log n)$ -تخمین برای محاسبه $\tilde{\nu}_k$ روی یک گراف n راسی وزن‌دار (بدون پتانسیل) با هر k دلخواه ارائه کرده‌اند [۸۶].

لازم به ذکر است که شکل غیرنرمال‌شده مسائل ایزوپریمتری و برش نرمال‌شده، به ترتیب به نام‌های مساله k -زیرافراز مینیم و مساله برش k -جهته مینیم شناخته می‌شوند (برای جزئیات و پیش‌زمینه [۷۳] را ببینید). به‌ویژه ما می‌دانیم که برای مساله برش k -جهته مینیم یک الگوریتم چندجمله‌ای $(1 - 1/k)$ -تخمین وجود دارد که مبتنی بر محاسبه مساله k -زیرافراز مینیم است [۷۴]. در راستای ادامه همین خط فکر، اگر به قضیه ۵-۱-۲(v) و (vi) نگاه کنیم، می‌بینیم که می‌توان اعداد ایزوپریمتری را به عنوان تخمین‌هایی برای مینیم برش نرمال‌شده در نظر گرفت. در ادامه این فصل قصد داریم جنبه‌های محاسباتی این تخمین را بررسی کنیم. به‌طور ویژه درخت‌های وزن‌دار محیطی هستند که تفاوت پیچیدگی محاسباتی مسائل ایزوپریمتری را با مسائل برش نرمال‌شده نشان می‌دهند.

۵-۳ تخمین مینیم برش نرمال‌شده در درخت‌ها

در این بخش مسائل IPP و NCP را برای درخت‌های وزن‌دار بررسی می‌کنیم. به این منظور ثابت می‌کنیم که NCP^M برای درخت‌های وزن‌دار قویاً NP -کامل است. در حالی که مساله متناظر آن روی زیرافرازا، یعنی مساله IPP^M با یک الگوریتم بازگشتی در زمان خطی حل می‌شود. این الگوریتم خطی می‌تواند یک الگوریتم تخمین چندجمله‌ای برای محاسبه مینیم برش نرمال‌شده روی درخت‌های وزن‌دار فراهم آورد. با توجه به سرعت این الگوریتم

و کاربردهای مهم برش نرمال شده در خوشه‌بندی داده‌ها، می‌توان کاربردهای عملی جالبی برای این الگوریتم پیدا کرد ([۸۱] را ببینید).

قضیه ۵-۳-۱

مساله NCP^M برای درخت‌های وزن‌دار بدون پتانسیل، قویاً NP -کامل است.

برهان. به‌طور واضح NCP^M در NP است. برای این‌که قویاً NP -کامل بودن این مساله را ثابت کنیم، دنباله‌ای از تقلیل‌ها را به شکل زیر ارائه می‌کنیم.

$$NCP^M \leq_m^p \text{مساله معدل زیرمجموعه} \leq_m^p \text{مساله ۳-افراز}$$

که مساله ۳-افراز و مساله معدل زیرمجموعه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

مساله ۳-افراز

نمونه: یک عدد صحیح $B \in \mathbb{Z}^+$ و $3m$ عدد صحیح مثبت $x_1, \dots, x_{3m} \in \mathbb{Z}^+$ ، به‌طوری‌که

$$B/4 < x_i < B/2, \text{ برای هر } 1 \leq i \leq 3m \text{ و } \sum_{i=1}^{3m} x_i = mB.$$

سوال: آیا یک m -افراز $\{S_i\}_1^m \in \mathcal{P}_m(\llbracket 3m \rrbracket)$ وجود دارد که برای هر $1 \leq j \leq m$ ،

$$\sum_{i \in S_j} x_i = B$$

مساله معدل زیرمجموعه

نمونه: اعداد صحیح $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{Z}^+$ که میانگین آن‌ها برابر عدد صحیح α است، به همراه

$$m \leq n.$$

سوال: آیا یک m -افراز $\{T_i\}_1^m \in \mathcal{P}_m(\llbracket n \rrbracket)$ وجود دارد که برای هر $1 \leq j \leq m$ ، میانگین

$$\sum_{i \in T_j} y_i = \alpha |T_j| \text{ یعنی } T_j \text{ برابر } \alpha \text{ باشد؛}$$

توجه کنید که مساله ۳-افراز یک مساله قویاً NP -کامل است [۴۷]. در نتیجه ادعای قضیه از تقلیل‌های فوق نتیجه می‌شود.

گام ۱. (مساله معدل زیرمجموعه) $\leq_m^p$ (مساله ۳-افراز).

در گام اول با ارائه یک تقلیل از مساله ۳-افراز، نشان می‌دهیم که مساله معدل زیرمجموعه قویاً NP -کامل است.

فرض کنید $3m$ عدد صحیح مثبت $x_1, \dots, x_n$ به عنوان نمونه‌ای از مساله ۳-افراز داده شده است. برای هر

$1 \leq i \leq 3m$ ، تعریف کنید $y_i := x_i + B + 1$ و برای هر $3m + 1 \leq i \leq 4m$ ، تعریف کنید $y_i := 1$. حال اعداد

$\{y_1, \dots, y_{4m}\}$ همراه عدد صحیح m را به عنوان نمونه‌ای از مساله معدل زیرمجموعه در نظر بگیرید. میانگین y_i ها برابر $B+1$ است. اگر جواب مساله ۳-افراز مثبت باشد، آنگاه یک m -افراز $\{S_i\}_1^m \in \mathcal{P}_m(\llbracket 3m \rrbracket)$ وجود دارد که برای هر $1 \leq j \leq m$ ، $\sum_{i \in S_j} x_i = B$ ، چون $B/4 < x_i < B/2$ ، هر S_j شامل دقیقاً ۳ عضو است. حال با تعریف $T_j := S_j \cup \{3m+j\}$ داریم $T_j \subseteq [3m+j]$ ، $\sum_{i \in T_j} y_i = 4B+4 = (B+1)|T_j|$ ، بنابراین جواب مساله معدل زیرمجموعه نیز مثبت است.

از طرف دیگر، فرض کنید جواب به مساله معدل زیرمجموعه مثبت است. در نتیجه یک m -افراز $\{T'_i\}_1^m \in \mathcal{P}_m(\llbracket 4m \rrbracket)$ وجود دارد که برای هر $1 \leq j \leq m$ ، $\sum_{i \in T'_j} y_i = (B+1)|T'_j|$ ، چون x_i ها مثبت هستند، هر T'_j شامل حداقل یکی از اعضای $y_{3m+1}, \dots, y_{4m}$ است و چون m زیرمجموعه مجزا T'_j وجود دارد، هر T'_j شامل دقیقاً یکی از آن‌ها است. بنابراین با تعریف $S'_j := T'_j \setminus \{3m+1, \dots, 4m\}$ داریم $\sum_{i \in S'_j} x_i = B$ ، در نتیجه جواب به مساله ۳-افراز نیز مثبت است. این استدلال تقلیل را کامل می‌کند.

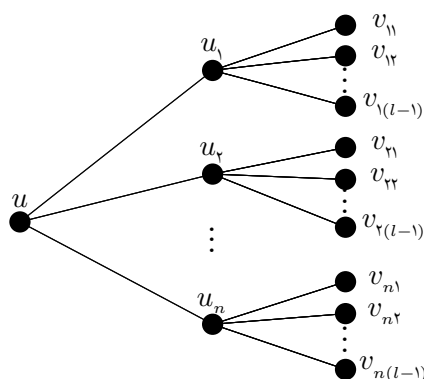
گام ۲. (مساله NCP^M) $\leq_m^p$ (مساله معدل زیرمجموعه).

در گام دوم، یک تقلیل از مساله معدل زیرمجموعه به NCP^M روی درخت‌های وزن‌دار بدون پتانسیل ارائه می‌کنیم که وزن همه یال‌ها برابر یک است. اعداد صحیح مثبت $y_1, \dots, y_n$ با میانگین α و یک عدد صحیح مثبت $m \leq n$ به عنوان نمونه‌ای از مساله معدل زیرمجموعه در نظر بگیرید. فرض کنید l یک عدد صحیح مثبت دلخواه باشد و درخت وزن‌دار بدون پتانسیل $T = (V, E, \omega, \varphi)$ را به صورت زیر تعریف کنید، (شکل ۵-۱ را ببینید)

$$V := \{u, u_i, v_{ij} \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, l-1\},$$

$$E := \{uu_i, u_i v_{ij} \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, l-1\},$$

$$\omega(u) := n\alpha, \quad \omega(u_i) := ly_i, \quad \omega(v_{ij}) := \alpha, \quad \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l-1.$$



شکل ۵-۱: یک درخت وزن‌دار بدون پتانسیل متناظر با یک نمونه از مساله معدل زیرمجموعه.

همچنین وزن همه یال‌ها را برابر ۱ قرار دهید. درخت وزن‌دار T به همراه ثابت‌های $k := n(l-1) + m + 1$ و $N := 1/\alpha$ یک نمونه برای مساله NCP^M هستند. با فرض این‌که افراز $\{T_i\}_1^m \in \mathcal{P}_m(\llbracket n \rrbracket)$ یک جواب مثبت

برای مساله معدل زیرمجموعه است، k -افراز

$$\{A_*\} \cup \{A_t\}^m \cup \{A_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l-1\} \in \mathcal{P}_k(V)$$

را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$A_* := \{u\}, \quad A_t := \{u_i \mid i \in T_t\}, \quad \forall 1 \leq t \leq m, \quad A_{ij} := \{v_{ij}\}, \quad \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l-1.$$

حال داریم

$$\frac{\varphi(\partial A_*)}{\omega(A_*)} = \frac{n}{n\alpha}, \quad \frac{\varphi(\partial A_t)}{\omega(A_t)} = \frac{l|T_t|}{\sum_{i \in T_t} ly_i} = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\varphi(\partial A_{ij})}{\omega(A_{ij})} = \frac{1}{\alpha},$$

و در نتیجه جواب به NCP^M نیز مثبت است.

از طرف دیگر، فرض کنید $\{A'_j\}^k$ یک جواب مثبت برای NCP^M باشد. باید یک جواب مثبت برای مساله معدل زیرمجموعه بیابیم. به این منظور یک افراز از $\llbracket n \rrbracket$ به حداقل m زیرمجموعه معرفی می‌کنیم که میانگین هر زیرمجموعه برابر α است (سپس در صورت لزوم، می‌توانیم بعضی زیرمجموعه‌ها را تلفیق کرده و به یک m -افراز برسیم). چون $|V| = nl + 1$ ، داریم $|A'_j| \leq n - m + 1$ و حداقل m مجموعه A'_j وجود دارد که هر یک با مجموعه $\{u_i\}^n$ اشتراک دارد. حال تعریف کنید $T'_j := \{i \mid u_i \in A'_j\}$. در بین T'_j ها، آن‌هایی که ناتهی هستند، تشکیل یک افراز از مجموعه $\llbracket n \rrbracket$ را می‌دهند. ادعا می‌کنیم میانگین هر مجموعه در این افراز برابر α است. عدد j را که به ازای آن T'_j ناتهی است، ثابت نگه دارید و قرار دهید $\sigma(T'_j) := \sum_{i \in T'_j} y_i$. چون $|A'_j| \leq n - m + 1$ ، داریم

$$\frac{1}{\alpha} \geq \frac{\varphi(\partial A'_j)}{\omega(A'_j)} \geq \frac{l|T'_j| - (n - m)}{l\sigma(T'_j) + (n - m - 1)\alpha}. \quad (۱-۵)$$

حال l را به اندازه کافی بزرگتر از m, n, α می‌گیریم به طوری که

$$\frac{|T'_j|}{\sigma(T'_j)} - \frac{l|T'_j| - (n - m)}{l\sigma(T'_j) + (n - m - 1)\alpha} < \frac{1}{n\alpha^2}. \quad (۲-۵)$$

توجه کنید که l تنها به n, m, α بستگی دارد و به j و T'_j بستگی ندارد، زیرا $|T'_j|$ و $\sigma(T'_j)$ از بالا به ترتیب با n و $n\alpha$ کران دارند (برای مثال می‌توانیم قرار دهیم $l = \alpha^3 n^2 (3n - 2m - 1)$). چون $\sigma(T'_j) \leq n\alpha$ ، روابط (۱-۵) و (۲-۵) نتیجه می‌دهند

$$\frac{|T'_j|}{\sigma(T'_j)} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n\alpha^2} \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha \sigma(T'_j)}.$$

در نتیجه $|T'_j|/\sigma(T'_j) \leq 1/\alpha$ و این نشان می‌دهد که میانگین اعداد $(y_i : i \in T'_j)$ حداقل برابر α است. در نهایت چون مجموعه‌های ناتهی T'_j یک افراز از مجموعه $\llbracket n \rrbracket$ را تشکیل می‌دهند، میانگین اعداد $(y_i : i \in T'_j)$ دقیقاً برابر

α است. لذا تقلیل ما کامل می‌شود و بنابراین NCP^M قویاً NP -کامل است. ■

اگرچه قضیه ۵-۳-۱ نشان می‌دهد که مساله NCP^M برای درخت‌های وزن‌دار یک مساله سخت است، مساله متناظر آن روی زیرافرازاها، یعنی IPP^M به طرز غیر قابل انتظاری **رام‌شدنی** است. نکته اصلی در وجود راه‌حل بهینه برای این مساله، این است که برخلاف $\tilde{\iota}(G)$ ، همواره یک زیرافراز مینیمم‌گر با مولفه‌های همبند برای $\iota(G)$ وجود دارد (لم ۲-۱-۸).

قضیه ۵-۳-۲

یک الگوریتم چندجمله‌ای وجود دارد که IPP^M را برای هر درخت وزن‌دار n راسی در زمان $O(n)$ تصمیم می‌گیرد. **برهان.** برای درخت وزن‌دار $T = (V, E, \omega, \varphi, p)$ روی n راس، عدد صحیح $k \geq 2$ و یک عدد N به عنوان ورودی IPP^M ، الگوریتم ۵-۱ را روی T اجرا می‌کنیم تا تعیین کنیم آیا $\iota_k^M(T) \leq N$ برقرار است و در صورت وجود، یک اثبات (زیرافراز تاییدکننده) پیدا کنیم.

فرض کنید $v \in V$ یک راس دلخواه باشد و درخت ریشه‌دار T با ریشه v را در نظر بگیرید. راس‌های T را به صورت $v_1, \dots, v_n = v$ مرتب کنید به طوری که برای هر i ، راس‌های سطح $i+1$ قبل از راس‌های سطح i قرار گیرد. این کار در زمان خطی با یک الگوریتم **جستجوی عرض-اول** قابل انجام است.

حال درستی الگوریتم را ثابت می‌کنیم. ابتدا چند نماد را معرفی می‌کنیم. دو نمونه (G_1, k_1, N_1) و (G_2, k_2, N_2) را **معادل** گوییم، اگر جواب به مساله IPP^M برای هر دو آن‌ها یکسان باشد. برای گراف وزن‌دار داده شده $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ و راس $v \in V$ ، گراف $G \setminus v = (V', E', \omega', \varphi', p')$ یک گراف وزن‌دار است که از حذف راس v در گراف G به دست می‌آید که $\omega' := \omega|_{V'}$ ، $\varphi' := \varphi|_{E'}$ و برای هر $u \in V'$ ، $p'(u) := p(u) + \sum_{e=uv \in E} \varphi(e)$ علاوه بر این برای هر یال $e \in E$ ، گراف G/e گراف وزن‌داری را نشان می‌دهد که از **انقباض** یال e در گراف G به دست می‌آید و وزن راس جدید ایجاد شده برابر جمع وزن رئوس دو سر یال e تعریف می‌شود (در صورت لزوم، یال‌های چندگانه را یکی کرده و وزن آن‌ها را جمع می‌کنیم تا یک گراف ساده به دست آوریم). فرض کنید v یک برگ در $V(T)$ و $e = vu$ یال آویخته آن باشد.

۱. اگر $p(v) + \varphi(e) \leq N\omega(v)$ ، در این صورت به وضوح (T, k, N) معادل با $(T \setminus v, k-1, N)$ است.

۲. اگر حالت (۱) درست نباشد و $p(v) - \varphi(e) < N\omega(v)$ ، آنگاه (T, k, N) معادل با $(T/e, k, N)$ است. برای اثبات این مطلب، فرض کنید $\mathcal{A} := \{A_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(V)$ یک جواب مثبت برای T باشد که گراف القایی روی هر A_i همبند است (لم ۲-۱-۸ را ببینید). اگر $u \notin \cup A_i$ ، آنگاه $v \notin \cup A_i$ (زیرا A_i ها همبند هستند) و بنابراین $\mathcal{A}$ یک جواب مثبت برای T/e نیز هست. حال فرض کنید $u \in A_1$ و $v \notin \cup A_i$. تعریف کنید $A'_1 := A_1 \cup \{v\}$ ، آنگاه

$$p(A'_1) + \varphi(\partial A'_1) - N\omega(A'_1) = p(A_1) + \varphi(\partial A_1) - N\omega(A_1) + p(v) - \varphi(e) - N\omega(v) < 0.$$

الگوریتم ۱-۵ حل IPP^M .

تابع $\eta: V \rightarrow P(V)$ را با $\eta(v_i) := \{v_i\}$ ، برای هر $i \in [n]$ ، تعریف کنید.

تعریف کنید $i, j := 1$.

تا وقتی $i \leq n$ و $j < k$ انجام دهید

راس u را یگانه پدر v_i قرار دهید و تعریف کنید $e := uv_i \in E$ (اگر $i = n$ ، آنگاه تعریف کنید $e := \circ$).

اگر $p(v_i) + \varphi(e) \leq N\omega(v_i)$ آنگاه

$$p(u) \leftarrow p(u) + \varphi(e), \varphi(\partial A_j) \leftarrow \varphi(e) + p(v_i), \omega(A_j) \leftarrow \omega(v_i), A_j \leftarrow \eta(v_i), j \leftarrow j + 1$$

در غیر این صورت اگر $p(v_i) - \varphi(e) < N\omega(v_i)$ آنگاه

$$p(u) \leftarrow p(u) + p(v_i), \omega(u) \leftarrow \omega(u) + \omega(v_i), \eta(u) \leftarrow \eta(u) \cup \eta(v_i)$$

در غیر این صورت {یعنی $p(v_i) - \varphi(e) \geq N\omega(v_i)$ }

$$p(u) \leftarrow p(u) + \varphi(e)$$

پایان اگر

پایان تا وقتی

اگر $j = k$ آنگاه

برگردان بله و $\{A_1, \dots, A_k\}$

در غیر این صورت

برگردان نه

پایان اگر

بنابراین جواب برای $(T/e, k, N)$ نیز مثبت است.

۳. نهایتاً اگر $p(v) - \varphi(e) \geq N\omega(v)$ ، آنگاه (T, k, N) معادل با $(T \setminus v, k, N)$ است. برای اثبات این

مطلب، مانند قبل فرض کنید $A := \{A_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(V)$ یک جواب مثبت برای T باشد که گراف القایی روی

هر A_i همبند است. اگر $v \notin \cup A_i$ ، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. اگر $v \in A_1$ ، آنگاه $u \in A_1$ (زیرا A_1

همبند است). تعریف کنید $A'_1 := A_1 \setminus \{v\}$ ، سپس داریم

$$p(A'_1) + \varphi(\partial A'_1) - N\omega(A'_1) = p(A_1) + \varphi(\partial A_1) - N\omega(A_1) - p(v) + \varphi(e) + N\omega(v) \leq 0.$$

بنابراین جواب برای $(T \setminus v, k, N)$ نیز مثبت است.

این نشان می‌دهد که IPP^M برای درخت‌های وزن‌دار خود-تقلیل‌پذیر است. علاوه بر این، توجه کنید که زمان

■

اجرای این الگوریتم به وضوح از مرتبه $O(n)$ است.

با استفاده از الگوریتم ۱-۵ به همراه یک روش تکرارشونده استاندارد، می‌توانیم یک طرح تخمین زمان

چندجمله‌ای کامل برای تخمین $\iota_k^M(T)$ به دست آوریم (برای تعریف، بخش ۵-۱ را ببینید). هم‌چنین با استفاده از قضیه ۵-۱-۲ می‌توانیم الگوریتم‌های تخمین با زمان چندجمله‌ای برای محاسبه پارامترهای $\iota_k^m(T)$ ، $\tilde{\iota}_k^M(T)$ و $\tilde{\iota}_k^m(T)$ برای درخت‌های بدون پتانسیل ارائه کنیم.

نتیجه ۳-۳-۵

فرض کنید T یک درخت وزن‌دار و $2 \leq k \leq |V(T)|$ یک عدد صحیح باشد.

(i) یک طرح تخمین زمان چندجمله‌ای کامل وجود دارد که پارامتر $\iota_k^M(T)$ را تخمین می‌زند.

(ii) اگر درخت بدون پتانسیل باشد، برای هر $\epsilon > 0$ ، یک الگوریتم تخمین چندجمله‌ای وجود دارد که پارامترهای $\iota_k^m(T)$ ، $\tilde{\iota}_k^M(T)$ و $\tilde{\iota}_k^m(T)$ را به ترتیب با فاکتورهای $k + \epsilon$ ، $k - 1 + \epsilon$ و $2k - 2 + \epsilon$ تخمین می‌زند.

برهان. برای درخت وزن‌دار داده شده $T = (V, E, \omega, \varphi, p)$ ، عدد صحیح $2 \leq k \leq |V|$ و یک عدد $\epsilon > 0$ ، تعریف کنید $\iota_k^M(T) := \sum_{e \in E} \varphi(e)$ و $\phi_* := \min_{e \in E} \varphi(e)$ ، $W := \sum_{v \in V} \omega(v)$ ، $w_* := \min_{v \in V} \omega(v)$ در بازه $[2\phi_*/W, \Phi/w_*]$ است. با این بازه شروع کرده و کارهای زیر را مکرراً انجام می‌دهیم.

فرض کنید $[a_i, b_i]$ بازه‌ای باشد که در گام i به دست آمده است. در گام $i + 1$ ، با استفاده از الگوریتم ۵-۱، چک کنید که آیا $\iota_k^M(T) \leq (a_i + b_i)/2$ برقرار است یا خیر و یک بازه شامل $\iota_k^M(T)$ پیدا کنید که طول آن برابر $(b_i - a_i)/2$ است. این فرایند را تا t گام ادامه می‌دهیم، که $t := \log(1/(2\epsilon)) + \log(\Phi W / \phi_* w_* - 2)$. نهایتاً به یک بازه $[a_t, b_t]$ شامل $\iota_k^M(T)$ می‌رسیم که طول آن برابر $2\phi_*/W - \epsilon$ است. حال b_t را به عنوان تخمینی برای $\iota_k^M(T)$ به خروجی می‌دهیم. داریم

$$\iota_k^M(T) \leq b_t = a_t + \epsilon \frac{2\phi_*}{W} \leq (1 + \epsilon) \iota_k^M(T).$$

هم‌چنین زمان اجرای الگوریتم برابر است با

$$O(nt) = O\left(n \left(\log\left(\frac{1}{2\epsilon}\right) + \log\left(\frac{\Phi W}{\phi_* w_*} - 2\right) \right)\right),$$

و در نتیجه این یک طرح تخمین زمان چندجمله‌ای کامل برای تخمین $\iota_k^M(T)$ است.

■

قسمت (ii) از قسمت (i) و قضیه ۵-۱-۲ نتیجه می‌شود.

نتیجه بعدی (قضیه ۵-۳-۵) نشان می‌دهد که روش تخمین فوق برای محاسبه $\tilde{\iota}_k^M$ به وسیله ι_k^M ، نمی‌تواند برای تخمین $\tilde{\iota}_k^m$ به وسیله ι_k^m به کار رود، زیرا برعکس نسخه مهین، مساله IPP^m برای درخت‌های وزن‌دار یک مساله NP -کامل است. برای اثبات این مطلب، ابتدا لم ساده زیر را ثابت می‌کنیم که در اثبات قضیه ۵-۴-۷ نیز به کار خواهد رفت.

لم ۴-۳-۵

فرض کنید $G = (V, E, \omega, \varphi)$ یک گراف وزن دار همبند باشد و $S = \{v_1, \dots, v_s\} \subset V$ یک زیرمجموعه ثابت از رئوس باشد. تعریف کنید $\Phi := \sum_{e \in E} \varphi(e)$ ، $W := \sum_{u \in V \setminus S} \omega(u)$ ، اگر $k \in \llbracket s, |V| \rrbracket$ و $\phi_* := \min_{e \in E} \varphi(e)$ ، $\omega(v_i) \geq (2\Phi W / \phi_*)$ ، $1 \leq i \leq s$ برای هر یک عدد صحیح باشد و برای هر k یک افراز (به ترتیب زیرافراز) مینیمم گر وجود دارد که $\tilde{l}_k(G)$ (به ترتیب $\iota_k(G)$) را به دست می‌دهد که در آن همه رئوس $v_1, \dots, v_s$ در بخش‌های متفاوت آن قرار دارند. هم چنین هیچ کدام از رئوس درون S ، k -بیرون‌باش نیستند.

برهان. لم را برای $\iota_k^m(G)$ ثابت می‌کنیم و بقیه حالات به طور مشابه ثابت می‌شوند. فرض کنید $\{A_i\}_1^k$ یک زیرافراز مینیمم گر باشد که $\iota_k^m(G)$ را به دست می‌دهد و هم چنین فرض کنید که A_1 شامل دو راس در S ، مثل v_1, v_2 است که $\omega(v_1) \geq \omega(v_2) \geq (2\Phi W / \phi_*)$. لذا یک زیرمجموعه، مثلاً A_2 ، یافت می‌شود که شامل هیچ راسی از S نیست. حال v_2 را از A_1 به A_2 منتقل کنید و زیرمجموعه‌های جدید را A'_1 و A'_2 بنامید. بنابراین

$$\frac{\varphi(\partial A'_1)}{\omega(A'_1)} + \frac{\varphi(\partial A'_2)}{\omega(A'_2)} \leq \frac{2\Phi}{\omega(v_2)} \leq \frac{\varphi(\partial A_2)}{\omega(A_2)} < \frac{\varphi(\partial A_1)}{\omega(A_1)} + \frac{\varphi(\partial A_2)}{\omega(A_2)}.$$

این مطلب متناقض با این واقعیت است که $\{A_i\}_1^k$ یک زیرافراز مینیمم گر است. بنابراین، همه رئوس $v_1, \dots, v_s$ در بخش‌های متفاوت هستند. علاوه بر این، اگر یک راس v_i در این زیرافراز نباشد، می‌توانیم این راس را به یک زیرمجموعه A_j که اشتراکی با S ندارد، اضافه کرده تا یک زیرافراز جدید پیدا کنیم که با مینیمم گر بودن $\{A_i\}_1^k$ در تناقض است. لذا هیچ راسی از S نمی‌تواند یک k -بیرون‌باش باشد. ■

قضیه ۵-۳-۵

مسائل IPP^m و NCP^m برای درخت‌های وزن دار بدون پتانسیل، NP -کامل هستند.

برهان. یک تقلیل از مساله افراز برابر ارائه می‌کنیم که یک مساله NP -کامل است [۴۷].

مساله افراز برابر

نمونه: $2n$ عدد صحیح $x_1, \dots, x_{2n}$ به طوری که $\sum_{i=1}^{2n} x_i = 2B$.

سوال: آیا یک زیرمجموعه $I \subset \llbracket 2n \rrbracket$ وجود دارد به طوری که $|I| = n$ و $\sum_{i \in I} x_i = B$ ؟

اعداد صحیح مثبت $x_1, \dots, x_{2n}$ با جمع $2B$ را به عنوان نمونه‌ای از مساله افراز برابر در نظر بگیرید. تعریف کنید $Q := (1/2) \sum_{i=1}^{2n} x_i^2$ که یک عدد صحیح است و یک درخت وزن دار بدون پتانسیل $T = (V, E, \omega, \varphi)$ بسازید که $V := \{v_0, v_1, \dots, v_{2n}, u_1, \dots, u_{2n}\}$ و $E := \{v_0 u_i, u_i v_i, i = 1, \dots, 2n\}$. هم چنین قرار دهید $k := 3n + 1$ و

برای اعداد صحیح مثبت دلخواه d, D ، توابع وزن را به صورت زیر تعریف کنید.

$$\omega(v_0) := \mathfrak{z}dB, \quad \omega(v_i) := \mathfrak{z}D, \quad \omega(u_i) := \mathfrak{z}x_i, \quad \forall 1 \leq i \leq \mathfrak{z}n,$$

$$\phi_i := \varphi(v_0 u_i) = \varphi(u_i v_i) = x_i \left((d+1)^{\mathfrak{z}} B^{\mathfrak{z}} + Q - Bx_i \right).$$

فرض کنید d, D به اندازه کافی بزرگتر از B باشند. در نتیجه با توجه به لم ۴-۳-۵، هیچ کدام از رئوس $v_0, v_1, \dots, v_{\mathfrak{z}n}$ ، k -بیرون باش نیستند. همچنین اگر برای یک i ، راس u_i ، k -بیرون باش باشد، آن گاه می توانیم u_i را به مجموعه شامل v_i منتقل کنیم، بدون این که شار خروجی نرمال شده این مجموعه را افزایش دهیم. بنابراین درخت k -هندسی است، یعنی $\iota_k(T) = \tilde{\iota}_k(T)$ و یک k -افراز مینیمم گر وجود دارد که راس های $v_0, v_1, \dots, v_{\mathfrak{z}n}$ در بخش های متفاوت قرار می گیرند. علاوه بر این، فرض کنید D به اندازه کافی بزرگتر از d باشد، در این صورت یک k -افراز مینیمم گر وجود دارد که در این افراز، هر راس v_i یک بخش مجزای تک عضوی را تشکیل می دهد. بنابراین افراز مینیمم گری که $\tilde{\iota}_k^m(T) = \iota_k^m(T)$ را به دست می دهد، به شکل زیر است

$$\mathcal{A}_I := \{ \{v_1\}, \dots, \{v_{\mathfrak{z}n}\}, \{v_0, u_i, i \in I\}, \{u_j\}, j \notin I \},$$

برای یک زیر مجموعه $I \subset [\mathfrak{z}n]$ که $|I| = n$. بنابراین $k \iota_k^m(T) = k \tilde{\iota}_k^m(T) \leq N$. اگر و فقط اگر یک n -زیرمجموعه $I \subset [\mathfrak{z}n]$ وجود داشته باشد که

$$\sum_{i=1}^{\mathfrak{z}n} \frac{\phi_i}{\omega(v_i)} + \frac{\sum_{i=1}^{\mathfrak{z}n} \phi_i}{\omega(v_0) + \sum_{i \in I} \omega(u_i)} + \sum_{i \notin I} \frac{\mathfrak{z} \phi_i}{\omega(u_i)} \leq N. \quad (3-5)$$

از طرف دیگر،

$$\sum_{i=1}^{\mathfrak{z}n} \phi_i = \left((d+1)^{\mathfrak{z}} B^{\mathfrak{z}} + Q \right) \sum_i x_i - B \sum_i x_i^{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z} (d+1)^{\mathfrak{z}} B^{\mathfrak{z}}.$$

در نتیجه، نامساوی (۳-۵) معادل است با

$$\frac{(d+1)^{\mathfrak{z}} B^{\mathfrak{z}}}{D} + \frac{(d+1)^{\mathfrak{z}} B^{\mathfrak{z}}}{dB + \sum_{i \in I} x_i} + \sum_{i \notin I} \left((d+1)^{\mathfrak{z}} B^{\mathfrak{z}} + Q - Bx_i \right) \leq N.$$

اگر تعریف کنیم

$$N := n(d+1)^{\mathfrak{z}} B^{\mathfrak{z}} + nQ + dB^{\mathfrak{z}} + \frac{(d+1)^{\mathfrak{z}} B^{\mathfrak{z}}}{D}, \quad (4-5)$$

آنگاه با جایگذاری N از (۴-۵) و ساده‌سازی، به نامساوی زیر می‌رسیم.

$$(d+1)^2 B^2 \leq \left(dB + \sum_{i \in I} x_i \right) \left(dB + \sum_{i \notin I} x_i \right).$$

حال چون $\sum_{i=1}^n x_i = 2B$ داریم $(dB + \sum_{i \in I} x_i)(dB + \sum_{i \notin I} x_i) \leq (d+1)^2 B^2$ و تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر یک I وجود داشته باشد که $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \notin I} x_i = B$. در نتیجه $\tilde{l}_k^m(T) = l_k^m(T) \leq N/k$ ، اگر و تنها اگر یک زیرمجموعه I با $|I| = n$ وجود داشته باشد که $\sum_{i \in I} x_i = B$. این اثبات را کامل می‌کند. ■

۴-۵ حالت k ثابت

در این بخش، در راستای بررسی پیچیدگی پارامتری مسائل ایزوپریمتری، مساله محاسبه پارامترهای ایزوپریمتری برای درخت‌های وزن‌دار، وقتی که k یک عدد ثابت فرض شده است، را مورد تحلیل قرار می‌دهیم. در حقیقت، مهمترین قضیه این بخش، قضیه زیر است که به اثبات آن می‌پردازیم.

قضیه ۱-۴-۵

فرض کنید $k \geq 2$ یک عدد صحیح ثابت باشد.

(i) یک الگوریتم با زمان چندجمله‌ای وجود دارد که برای هر درخت وزن‌دار بدون پتانسیل T ، مقدار $\iota_k^M(T)$ و $\iota_k^m(T)$ را محاسبه می‌کند و زمان اجرای آن در $O(n^{\lfloor (2k-3)/2 \rfloor})$ است.

(ii) یک الگوریتم چندجمله‌ای وجود دارد که برای هر درخت وزن‌دار بدون پتانسیل T ، مقدار $\tilde{l}_3^M(T)$ را محاسبه می‌کند و زمان اجرای آن در $O(n^2)$ است.

(iii) اگر $k \geq 4$ ، یک الگوریتم چندجمله‌ای وجود دارد که برای هر درخت وزن‌دار بدون پتانسیل T ، مقدار $\tilde{l}_k^M(T)$ را محاسبه می‌کند و زمان اجرای آن در $O(n^{(2k-3)-\epsilon k})$ است.

توجه کنید که زمان اجرای الگوریتم‌های ارائه شده در قضیه ۱-۴-۵ همگی از مرتبه‌نمایی نسبت به k هستند، اما وقتی k ثابت است، چندجمله‌ای از n هستند. با این وجود به نظر می‌رسد که این ناکارایی‌نمایی، با توجه به قضیه‌های ۱-۳-۵ و ۵-۳-۵ غیر قابل اجتناب هستند.

به منظور اثبات این قضیه، دو مرحله پایه‌ای را انجام می‌دهیم. ابتدا با اثبات لم‌های ۳-۴-۵، ۴-۴-۵ و ۵-۴-۵، فضای جستجو را از همه k -زیرافرازاها (یا k -افرازاها) به فضایی از افرازاها با بخش‌های همبند که تعداد بخش‌هایشان به وسیله چندجمله‌ای از k کران‌دار شده است، محدود می‌کنیم. سپس در مرحله دوم، یک رویه جستجو ارائه می‌کنیم که همه این چنین افرازاها را تولید کرده و در بین آن‌ها به جستجوی افراز مینیمم‌گر می‌پردازد. محاسبه شار خروجی نرمال‌شده برای هر افراز، در زمان ثابت انجام می‌شود (لم ۶-۴-۵ را ببینید). این کار با استفاده از یک نمایش درختی فشرده انجام می‌شود که امکان اعمال ناوبری روی درخت را در زمان ثابت فراهم می‌کند.

برای شروع، مفهوم گراف خارج قسمت که در تعریف ۲-۳-۳ برای گراف‌های متریک معرفی شد را برای گراف‌های وزن دار تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲-۴-۵

یک گراف وزن دار $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ و یک k -افراز $\mathcal{A} := \{A_i\}_i^k \in \mathcal{P}_k(V)$ داده شده است. برای هر $\{A_i^1, \dots, A_i^{n_i}\}$ را مجموعه همه مولفه‌های همبندی گراف القایی G روی A_i قرار دهید. **گراف خارج قسمت G نسبت به $\mathcal{A}$** که با $G/\mathcal{A}$ نشان داده می‌شود، یک گراف وزن دار $G/\mathcal{A} := (V', E', \omega', \varphi', p')$ است که

$$\begin{aligned} V' &:= \{v_i^r : 1 \leq i \leq k, 1 \leq r \leq n_i\}, \\ E' &:= \{v_i^r v_j^s : E(A_i^r, A_j^s) \neq \emptyset\}, \\ \omega'(v_i^r) &:= \omega(A_i^r), \quad p'(v_i^r) := p(A_i^r), \quad \varphi'(v_i^r v_j^s) := \sum_{e \in E(A_i^r, A_j^s)} \varphi(e). \end{aligned}$$

واضح است که گراف خارج قسمت $G/\mathcal{A}$ ، یک **کپین** از G است. بنابراین اگر G مسطح باشد، آنگاه $G/\mathcal{A}$ نیز مسطح است. علاوه بر این، اگر G بدون دور باشد، آنگاه $G/\mathcal{A}$ نیز بدون دور است. برای یک زیرمجموعه $F \subseteq E$ ، گرافی که از G با حذف یال‌های درون F به دست می‌آید را با $G \setminus F$ نشان می‌دهیم. ▲

لم ۳-۴-۵

فرض کنید $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ یک گراف وزن دار و $\mathcal{A} := \{A_i\}_i^k \in \mathcal{P}_k(V)$ یک زیرافراز مینیمم‌گر برای $\iota_k(G)$ باشد. $(k+1)$ -افراز $\overline{\mathcal{A}} := \{A_i\}_i^{k+1}$ را تعریف کنید که $A_{k+1} := V \setminus (\cup_i^k A_i)$ و $G/\overline{\mathcal{A}}$ را گراف خارج قسمت G نسبت به $\overline{\mathcal{A}}$ بگذارید. در این صورت، داریم $\iota_k(G) = \iota_k(G/\overline{\mathcal{A}})$. گزاره‌های مشابهی نیز برای پارامترهای دیگر $\tilde{\iota}_k^M(G)$ و $\tilde{\iota}_k^m(G)$ برقرار است.

برهان. لم را برای ثابت می‌کنیم و بقیه حالات به‌طور مشابه نتیجه می‌شوند. فرض کنید $V', \varphi', \omega', p'$ همانطوری باشند که در تعریف ۲-۴-۵ آمده است و برای هر $1 \leq i \leq k$ ، تعریف کنید $A_i' := \{v_i^r : 1 \leq r \leq n_i\}$. در این صورت داریم

$$\iota_k^m(G) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\varphi(\partial A_i) + p(A_i)}{\omega(A_i)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\varphi'(\partial A_i') + p'(A_i')}{\omega'(A_i')} \geq \iota_k^m(G/\overline{\mathcal{A}}).$$

هم‌چنین اگر $B' := \{B_i'\}_i^k \in \mathcal{P}_k(V')$ یک زیرافراز مینیمم‌گر برای $\iota_k^m(G/\overline{\mathcal{A}})$ باشد و $B_i := \cup\{A_j^s : v_j^s \in B_i'\}$ باشد

آنگاه

$$\iota_k^m(G/\overline{\mathcal{A}}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\varphi'(\partial B_i') + p'(B_i')}{\omega'(B_i')} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\varphi(\partial B_i) + p(B_i)}{\omega(B_i)} \geq \iota_k^m(G).$$

■

لم ۴-۴-۵

فرض کنید $G = (V, E, \omega, \varphi)$ یک گراف بدون پتانسیل و $2 \leq k \leq |V|$ یک عدد صحیح باشد. در این صورت، یک زیرافراز $\mathcal{A} := \{A_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(V)$ وجود دارد که $\iota_k(G)$ را به دست می‌دهد به طوری که تعداد مولفه‌های همبندی گراف $G \setminus \cup_i E(A_i, V \setminus A_i)$ برابر است با

(i) حداکثر $\lfloor (3k-1)/2 \rfloor$ ، اگر G بدون دور باشد.

(ii) حداکثر $3k-4$ ، اگر G مسطح باشد.

برهان. مجموعه ناتهی $\mathcal{C}_k(V)$ از همه زیرافرازهای مینیمم گر $\{A_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(V)$ را تعریف کنید که گراف القایی روی هر زیرمجموعه A_i همبند است (لم ۸-۱-۲ را ببینید) و برای هر چنین زیرافرازی، فرض کنید $\{A_{k+1}^1, \dots, A_{k+1}^d\}$ مجموعه همه مولفه‌های همبندی گراف القایی G روی $A_{k+1} := V \setminus (\cup_1^k A_i)$ باشد. حال یک زیرافراز اکسترمال $\mathcal{A} := \{A_i\}_1^k \in \mathcal{C}_k(V)$ انتخاب کنید که برای آن d مینیمم باشد. قرار دهید $\overline{\mathcal{A}} := \{A_i\}_1^{k+1}$ و $V(G/\overline{\mathcal{A}}) = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}^1, \dots, v_{k+1}^d\}$ را مطابق تعریف ۲-۴-۵ تعریف کنید. ابتدا ادعا می‌کنیم برای هر $1 \leq p \leq d$ ، $\deg(v_{k+1}^p) \geq 3$ ، به برهان خلف، فرض کنید $\deg(v_{k+1}^p) \leq 2$. لذا A_{k+1}^p به حداکثر دو زیرمجموعه در $\mathcal{A}$ ، مثل A_1 و A_2 ، متصل است. بدون کم شدن از کلیت، فرض کنید که $\varphi(A_{k+1}^p, A_1) \geq \varphi(A_{k+1}^p, A_2)$. تعریف کنید $B_1 := A_1 \cup A_{k+1}^p$ و $B_i := A_i$ برای هر $2 \leq i \leq k$. بنابراین $\mathcal{A}' = \{B_i\}_1^k \in \mathcal{D}_k(G)$ یک زیرافراز است و

$$\frac{\varphi(\partial B_1)}{\omega(B_1)} = \frac{\varphi(\partial A_1) - \varphi(A_1, A_{k+1}^p) + \varphi(A_{k+1}^p, A_2)}{\omega(A_1) + \omega(A_{k+1}^p)} < \frac{\varphi(\partial A_1)}{\omega(A_1)},$$

که با مینیمال بودن d متناقض است. در نتیجه برای هر $1 \leq p \leq d$ ، $\deg(v_{k+1}^p) \geq 3$ و مجموعه رئوس $G/\overline{\mathcal{A}}$ با درجه کمتر از ۳، یک زیرمجموعه از $\{v_1, \dots, v_k\}$ است.

فرض کنید G' یک گراف باشد که از گراف $G/\overline{\mathcal{A}}$ با حذف همه یال‌های $e = v_i v_j \in E(G/\overline{\mathcal{A}})$ برای هر $1 \leq i, j \leq k$ به دست می‌آید. در این صورت

$$|E(G')| = \sum_{p=1}^d \deg(v_{k+1}^p) \geq 3(|V(G')| - k). \quad (5-5)$$

از طرف دیگر، اگر G بدون دور باشد، آنگاه G' نیز بدون دور است و $|E(G')| \leq |V(G')| - 1$. این حقیقت همراه با (۵-۵)، نتیجه می‌دهد $|V(G/\overline{\mathcal{A}})| = |V(G')| \leq (3k-1)/2$.

حال اگر G مسطح باشد، آنگاه G' نیز مسطح است. علاوه بر این، G' دوبخشی است، با بخش‌های مستقل $\{v_1, \dots, v_k\}$ و $\{v_{k+1}^1, \dots, v_{k+1}^d\}$. بنابراین G' یک گراف مسطح دوبخشی است و $|E(G')| \leq 2|V(G')| - 4$. این حقیقت به همراه نامساوی (۵-۵) نتیجه می‌دهد $|V(G/\bar{A})| = |V(G')| \leq 3k - 4$. ■

لم ۵-۴-۵

فرض کنید $T = (V, E, \omega, \varphi)$ یک درخت وزن دار بدون پتانسیل و $3 \leq k \leq |V|$ یک عدد صحیح باشد. آنگاه یک افراز مینیمم گر $A := \{A_i\}_i^k \in \mathcal{P}_k(V)$ برای $\tilde{t}_k^M(T)$ یافت می‌شود، به طوری که تعداد مولفه‌های همبندی $T \setminus \cup_i E(A_i, A_i^c)$ حداکثر برابر $\max\{2k^2 - 6k - 2, k\}$ است.

برهان. فرض کنید $A = \{A_i\}_i^k \in \mathcal{P}_k(V)$ یک k -افراز مینیمم گر باشد که $\tilde{t}_k^M(T)$ را به دست می‌دهد و برای آن تعداد رئوس گراف T/A مینیمال است. مجموعه $\{A_i^1, \dots, A_i^{n_i}\}$ را مجموعه مولفه‌های همبندی گراف القایی T روی A_i و V' را مجموعه رئوس T/A مطابق تعریف ۲-۴-۵ بگذارید. برای هر i ، مجموعه $\llbracket n_i \rrbracket$ را به دو زیرمجموعه L_i و $R_i := \llbracket n_i \rrbracket \setminus L_i$ افراز کنید، که $L_i := \{r \mid 2 \leq r \leq n_i, \frac{\varphi(\partial A_i^r)}{\omega(A_i^r)} \geq \frac{\varphi(\partial A_i)}{\omega(A_i)}\}$. ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر $r \in L_i$ ، $\deg(v_i^r) \geq 3$. به برهان خلف، فرض کنید $r \in L_i$ و $\deg(v_i^r) \leq 2$. بنابراین A_i^r به حداکثر دو مجموعه، مثلاً A_j^s ، A_l^t ، متصل است. بدون کم شدن کلیت فرض کنید $\varphi(A_i^r, A_j^s) \geq \varphi(A_i^r, A_l^t)$. حال قرار دهید $B_i := A_i \setminus A_i^r$ ، $B_j := A_j \cup A_i^r$ و $B_l := A_l$ ، برای هر $h \neq i, j$ ، $B_h := A_h$. لذا $\{B_i\}_i^k$ یک k -افراز از V است و چون $r \in L_i$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\partial B_i)}{\omega(B_i)} &= \frac{\varphi(\partial A_i) - \varphi(\partial A_i^r)}{\omega(A_i) - \omega(A_i^r)} \leq \frac{\varphi(\partial A_i)}{\omega(A_i)}, \\ \frac{\varphi(\partial B_j)}{\omega(B_j)} &= \frac{\varphi(\partial A_j) - \varphi(A_i^r, A_j^s) + \varphi(A_i^r, A_l^t)}{\omega(A_j) + \omega(A_i^r)} < \frac{\varphi(\partial A_j)}{\omega(A_j)}. \end{aligned}$$

در نتیجه $\{B_i\}_i^k$ نیز یک افراز مینیمم گر است که با مینیمال بودن $|V(T/A)|$ متناقض است. بنابراین، تا وقتی که $\deg(v_i^r) \geq 3$ ، $r \in L_i$ ، علاوه بر این، بحث فوق نشان می‌دهد که اگر $k = 3$ ، آنگاه برای هر i ، $L_i = \emptyset$ و $|V(T/A)| = k = 3$.

در مرحله بعد، به شرط $k \geq 4$ ، ثابت می‌کنیم که برای هر i ، $|R_i| \leq k - 3$. به برهان خلف، فرض کنید که $|R_i| \geq k - 2$ و تعریف کنید $A' := A_2$ و $A'' := \cup_{3 \leq i \leq k} A_i$. برای هر $r \in L_1$ ، مانند قبل، رئوس درون A_1^r را به A' یا A'' منتقل می‌کنیم، بدون این که شار خروجی نرمال شده این مجموعه‌ها را افزایش دهیم. زیرمجموعه‌های جدید را B' و B'' بنامید. در نتیجه $A' := \{B', B'', A_1^r \mid r \in R_1\}$ یک k -افراز است که $\tilde{t}_k^M(T)$ را به دست می‌دهد، در حالی که $|V(T/A')| < |V(T/A)|$. این در تناقض با مینیمال بودن $|V(T/A)|$ است و بنابراین برای هر i ، $|R_i| \leq k - 3$ ، به شرطی که $k \geq 4$.

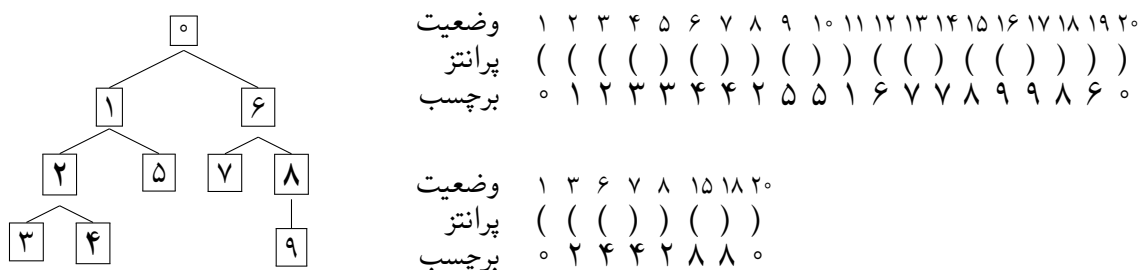
این حقایق نشان می‌دهد که تعداد رئوس در $V' := V(T/A)$ که درجه‌شان کمتر از ۳ است، حداکثر برابر

لذا $k(k-3)$ است.

$$2(|V'| - 1) = 2|E(T/A)| = \sum_{v \in V'} \deg(v) \geq 2(|V'| - k(k-3)) + k(k-3),$$

و در نتیجه تا وقتی که $k \geq 4$ ، $|V(T/A)| \leq 2k(k-3) - 2$.

تا بدین جا فضای جستجو برای زیرافرازاها و افزازهای مینیمم‌گر را محدود کردیم. حال باید روش کارآمدی برای تولید این زیرافرازاها و افزازها و یافتن مینیمم‌گر، ارائه دهیم. به این منظور از نمایش درختی فشرده استفاده می‌کنیم. برای درخت داده شده $T = (V, E)$ ، می‌توانیم نمایشی از T به وسیله رشته‌ای از $2n$ پرانتز متوازن ارائه داد که پرانتزها از ۱ تا $2n$ شماره‌گذاری شده و هر جفت پرانتز در تناظر یک به یک با یک راس درخت است. بر اساس این تناظر، می‌توانیم یک برجسب‌گذاری از مجموعه رئوس ارائه کنیم، به طوری که i امین پرانتز باز، متناظر با راس با برجسب $i-1$ باشد (بنابراین ریشه درخت است).^{۱۰} این برجسب‌گذاری را به رشته پرانتزها و ترتیب آن‌ها اضافه می‌کنیم تا یک نمایش از درخت به دست آوریم که **نمایش پرانتز متوازن** (یا نمایش BP) از T نامیده می‌شود. یک مثال از چنین نمایشی در شکل ۲-۵ نشان داده شده است. نمایش BP (القا شده) از یک زیرمجموعه $X \subset V \setminus \{\circ\}$ یک زیرآرایه از نمایش BP درخت T تعریف می‌شود که شامل ستون‌های متناظر با رئوس درون $X \cup \{\circ\}$ است. به راحتی با کمک یک **الگوریتم جستجوی عمق-اول**، می‌توان نمایش BP یک درخت ریشه‌دار را در زمان خطی از آن استخراج کرد.



شکل ۲-۵: نمایش‌های BP یک درخت ریشه‌دار ۱۰ راسی و زیرمجموعه $\{2, 4, 8\}$.

در [۲۲] ثابت شده است که برای هر $2n$ پرانتز متوازن، می‌توان به شیوه موثری یک نمایش فشرده با استفاده از $2n + o(n)$ بیت ساخت به طوری که **اعمال ناوبری** زیر در این نمایش در زمان ثابت انجام می‌شود. این نمایش را **نمایش درختی فشرده** می‌نامیم.

اعمال ناوبری. برای وضعیت یک پرانتز باز داده شده،

- وضعیت پرانتز بسته متناظر آن را پیدا کن و برعکس.
- عدد i را پیدا کن که این پرانتز، i امین پرانتز باز در دنباله است.
- وضعیت پرانتز باز بعدی را پیدا کن.

^{۱۰} از این به بعد هر راس با برجسبش یکسان گرفته می‌شود.

از این جا به بعد، با سوء استفاده از زبان، فرض می‌کنیم که در هر نمایش BP یک درخت ریشه‌دار داده شده، **اعمال ناوبری** بالا در زمان ثابت انجام می‌شوند (این کار با استفاده نمایش درختی فشرده قابل انجام است).

لم ۵-۴-۶

فرض کنید $\mathcal{R}(T)$ و $\mathcal{R}(X)$ به ترتیب نمایش BP درخت ریشه‌دار $T = (V, E)$ روی n راس و زیرمجموعه رئوس $X = \{a_1, \dots, a_t\} \subset \{1, \dots, n-1\}$ با $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_t$ باشد. عدد i_0 را بزرگترین عدد i تعریف کنید که $a_i + 1 \notin X$. در این صورت، می‌توانیم نمایش BP مجموعه $\{a_1, \dots, a_{i_0-1}, a_{i_0} + 1, a_{i_0} + 2, \dots, a_{i_0} + t - i_0 + 1\}$ را در زمان $O(t)$ بیابیم.

برهان. اثبات این لم یک استنتاج مستقیم از به‌کارگیری اعمال ناوبری زمان ثابت است. برای این کار، وضعیت راس a_{i_0} در $\mathcal{R}(X)$ ، وضعیت پرانتز باز بعدی با برچسب $a_{i_0} + 1$ در $\mathcal{R}(T)$ و وضعیت پرانتز بسته متناظر با آن در $\mathcal{R}(T)$ را پیدا می‌کنیم. سپس در $\mathcal{R}(X)$ ، ستون‌های متناظر با برچسب a_{i_0} را حذف کرده و ستون‌ها در $\mathcal{R}(T)$ با برچسب $a_{i_0} + 1$ را براساس ترتیب مشخص شده اضافه می‌کنیم. ادعا با تکرار یک سری از این رویه‌ها روی نمایش $\mathcal{R}(X)$ به‌دست می‌آید. ■

برهان قضیه ۵-۴-۱. حال آماده‌ایم تا الگوریتم‌هایی برای محاسبه $\iota_k^m(T)$ ، $\iota_k^M(T)$ و $\tilde{\iota}_k^M(T)$ برای یک درخت وزن‌دار بدون پتانسیل T ، ارائه کرده و زیرافرازاها و افرازهای مینیمم‌گر متناظر را بیابیم. برای این کار از لم‌های ۵-۴-۴، ۵-۴-۵، ۶-۴-۵ و این حقیقت استفاده می‌کنیم که با حذف t یال از یک درخت، جنگلی با دقیقاً $t + 1$ مولفه همبندی به‌دست می‌آید.

فرض کنید $T = (V, E, \omega, \varphi)$ یک درخت ریشه‌دار وزن‌دار بدون پتانسیل روی رئوس $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$ با ریشه 0 باشد. برای هر راس v ، $v \neq 0$ ، $\text{epar}(v)$ را برابر یال uv بگذارید که u پدر راس v در T است و برای هر راس $v \in V$ ، درخت T_v را زیردرختی از T بگذارید که از ریشه v شروع شده است. هم‌چنین تعریف کنید

$$\bar{\omega}(v) := \omega(V(T_v)), \quad \bar{\varphi}(v) := \sum_{u \text{ بچه } v \text{ است}} \varphi(vu).$$

با یک پیمایش از پایین به بالا، مقادیر $\bar{\omega}(v)$ و $\bar{\varphi}(v)$ برای هر $v \in V$ را محاسبه کرده و ذخیره می‌کنیم. این کار در زمان $O(n)$ انجام می‌شود. حال الگوریتم ۵-۲ را اجرا می‌کنیم. هم‌چنین با یک تغییر جزئی در خطوط ۲، ۶-۹ و ۱۴ در الگوریتم ۵-۲، می‌توانیم مقدار $\tilde{\iota}_k^M(T)$ را نیز محاسبه کنیم (الگوریتم ۵-۳ را ببینید).

اکنون به آسانی دیده می‌شود که با توجه به لم ۶-۴-۵، همه محاسبات درون حلقه تاوقتی در الگوریتم ۵-۲ در زمان ثابت انجام می‌شود (برای k ثابت). هم‌چنین همه محاسبات بیرون حلقه برای در زمان خطی انجام می‌شوند. بنابراین زمان اجرای الگوریتم ۵-۲ از مرتبه $O(n^{\lfloor (3k-3)/2 \rfloor})$ و زمان اجرای الگوریتم ۵-۳، وقتی که $k = 3$ ، از مرتبه $O(n^2)$ و وقتی $k \geq 4$ ، از مرتبه $O(n^{2k^2-6k-3})$ است.

الگوریتم ۲-۵ محاسبه $\iota_k^M(T)$, $\iota_k^m(T)$

- ۱: قرار دهید $I^M = I^m := \sum_{e \in E} \varphi(e)$ و $a_\circ := \circ$.
- ۲: برای $k-1$ تا $t := \lfloor (3k-3)/2 \rfloor$ انجام دهید
- ۳: قراردید $(1, 2, \dots, t) \leftarrow (a_1, a_2, \dots, a_t)$. نمایش BP زیرمجموعه $X = \{a_1, \dots, a_t\}$ را تولید کنید و T' را درخت متناظر این نمایش بگذارید که روی مجموعه راس $X \cup \{\circ\}$ تعریف می‌شود.
- ۴: تاوقتی $(a_1, a_2, \dots, a_t) \neq ((n-t+1), \dots, (n-2), (n-1))$ انجام دهید
- ۵: برای هر $i \in [\circ, t]$ قرار دهید

$$w_i := \bar{\omega}(a_i) - \sum_{\substack{a_j \\ a_j \text{ بچه } a_i \text{ در } T' \text{ است}}} \bar{\omega}(a_j), \quad \phi_i := \varphi(\text{epar}(a_i)) + \sum_{\substack{a_j \\ a_j \text{ بچه } a_i \text{ در } T' \text{ است}}} \bar{\varphi}(a_j)$$
مقادیر $f_i := \phi_i/w_i$ برای هر $i \in [\circ, t]$ را محاسبه کنید.
- ۶: مقادیر $f_\circ, \dots, f_t$ را به ترتیب غیرنزولی مرتب کنید، مثلاً $f_{n_\circ} \leq f_{n_1} \leq \dots \leq f_{n_t}$ و تعریف کنید
 $J^m := (f_{n_\circ} + \dots + f_{n_{k-1}})/k$ و $J^M := f_{n_{k-1}}$
- ۷: اگر $J^M < I^M$ (به ترتیب $J^m < I^m$) آنگاه
- ۸: $I^M \leftarrow J^M$ (به ترتیب $I^m \leftarrow J^m$)
- ۹: تعریف کنید $\mathcal{A}^M := (a_{n_\circ}, \dots, a_{n_t})$ (به ترتیب $\mathcal{A}^m := (a_{n_\circ}, \dots, a_{n_t})$).
پایان اگر
- ۱۰: تعریف کنید $i_\circ$ بزرگترین عدد i باشد که $a_i + 1 \notin X$ و قرار دهید
 $(a_1, a_2, \dots, a_t) \leftarrow (a_1, \dots, a_{i_\circ-1}, a_{i_\circ} + 1, a_{i_\circ} + 2, \dots, a_{i_\circ} + t - i_\circ + 1)$
- ۱۱: با استفاده از لم ۵-۴-۶، نمایش BP زیرمجموعه جدید را پیدا کنید و T' را درخت متناظر این نمایش بگیرید.
- ۱۲: پایان تاوقتی
- ۱۳: پایان برای
- ۱۴: زیرمجموعه $F \subset E$ را به صورت $F := \cup_{\circ \neq v \in \mathcal{A}^M} \text{epar}(v)$ تعریف کنید و مولفه‌های همبندی $T \setminus F$ را محاسبه کنید.
- برای هر $i \in [\circ, k-1]$ مجموعه A_i را مجموعه راس‌های مولفه همبندی شامل a_{n_i} قرار دهید تا k -زیرافراز $\{A_\circ, \dots, A_{k-1}\}$ تشکیل شود. همین کار را برای $\mathcal{A}^m$ انجام دهید تا k -زیرافراز $\{B_\circ, \dots, B_{k-1}\}$ را به دست آورید.
- ۱۵: برگردان I^M و $\{A_i\}_\circ^{k-1}$ و هم‌چنین I^m و $\{B_i\}_\circ^{k-1}$

الگوریتم ۳-۵ محاسبه $\tilde{t}_k^M(T)$

- ۱: مانند الگوریتم ۲-۵
- ۲: برای $k-1 := t$ تا $\max\{2k^2 - 6k - 3, k-1\}$ انجام دهید
- ۳: مانند الگوریتم ۲-۵
- ۴: " "
- ۵: " "
- ۶: همه k -رنگ‌آمیزی‌های سره درخت T' با رنگ‌های $0, 1, \dots, k-1$ با کلاس‌های رنگی $\mathcal{C} = \{C_0, \dots, C_{k-1}\}$ را در نظر بگیرید و تعریف کنید $g_i(\mathcal{C}) := (\sum_{j \in C_i} \phi_j) / (\sum_{j \in C_i} w_j)$ ، برای $0 \leq i \leq k-1$ و $J^M := \min_{\mathcal{C}} \max_i g_i(\mathcal{C}) = \max_i g_i(\mathcal{C}_0)$ برای یک $\mathcal{C}_0$.
- ۷: اگر $J^M < I^M$ آن‌گاه
- ۸: $I^M \leftarrow J^M$ و تعریف کنید $\mathcal{C}^M := \mathcal{C}_0$.
- ۹: پایان اگر
- ۱۰: مانند الگوریتم ۲-۵
- ۱۱: " "
- ۱۲: " "
- ۱۳: پایان برای
- ۱۴: برای $\mathcal{C}^M = \{C_0^M, \dots, C_{k-1}^M\}$ ، زیرمجموعه $F \subset E$ را به صورت $F := \bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{v \in C_i^M} \text{epar}(v)$ تعریف کنید و مولفه‌های همبندی گراف $T \setminus F$ را $A_0, \dots, A_t$ بنامید. برای هر $i \in [0, k-1]$ ، تعریف کنید $B_i := \bigcup_{j \in C_i^M} A_j$.
- ۱۵: برگردان I^M و $\{B_i\}_{i=0}^{k-1}$

قضیه ۱-۴-۵ به عنوان تعمیمی از نتیجه موهار برای $k=2$ [۶۸]، نشان می‌دهد که برای هر عدد صحیح ثابت $2 \leq k$ ، محاسبه k امین پارامترهای ایزوپریمتری ذکر شده برای درخت‌های وزن‌دار بدون پتانسیل، در زمان چندجمله‌ای قابل حل است. با این وجود قضیه زیر نشان می‌دهد که این نتیجه قابل تعمیم به حالت گراف‌های وزن‌دار با عرض-درختی کران‌دار نیست (برای تعریف و پیش‌زمینه‌ها، مثلاً [۳۸] را ببینید).

قضیه ۷-۴-۵

برای هر عدد صحیح ثابت $2 \leq k$ ، مسائل IPP_k و NCP_k (در هر دو نسخه مهین و میانگین) برای گراف‌های وزن‌دار بدون پتانسیل دوبخشی با عرض-درختی حداکثر ۲، NP -کامل هستند.^۲

^۲توجه کنید که عرض-درختی حداکثر ۲، مسطح بودن را نتیجه می‌دهد.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که کافی است قضیه را برای $k = 2$ ثابت کنیم. برای این کار، فرض کنید $k > 2$ یک عدد صحیح و G یک گراف وزن‌دار باشد. به گراف G ، $k - 2$ راس جدید تنها با وزن ۱ اضافه کنید تا گراف وزن‌دار جدید G' حاصل شود. برای هر k -زیرافراز از $V(G')$ ، دو زیرمجموعه از این زیرافراز وجود دارد که کاملاً در $V(G)$ قرار می‌گیرند. بنابراین حل IPP_2 (معادلاً NCP_2) برای گراف G ، معادل با حل IPP_k و NCP_k برای گراف G' است. از این‌جا به بعد، روی مساله NCP^M تمرکز می‌کنیم، با ذکر این نکته که اثبات نسخه میانگین نیز مشابه است. مساله NP -کامل زیر را در کلاس مسائل KNAPSACK در نظر بگیرید که به **مساله افراز** معروف است [۴۷].

مساله افراز

نمونه: n عدد صحیح مثبت $x_1, \dots, x_n$ به‌طوری که $\sum_{i=1}^n x_i = 2B$.

سوال: آیا یک زیرمجموعه $I \subset [n]$ وجود دارد که $\sum_{i \in I} x_i = B$ ؟

در ادامه یک تقلیل چندجمله‌ای از مساله افراز به مساله NCP^M ارائه می‌کنیم. فرض کنید $x_1, \dots, x_n$ اعداد صحیح مثبت باشند که $\sum_{i=1}^n x_i = 2B$. سپس گراف وزن‌دار دوبخشی G را به‌صورت زیر تعریف کنید.

$$V(G) := \{u_1, u_2, v_1, \dots, v_n\}, \quad E(G) := \{u_1 v_i, u_2 v_i, 1 \leq i \leq n\},$$

$$\omega(u_1) = \omega(u_2) = M, \quad \omega(v_i) := x_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

که M یک عدد صحیح مثبت دلخواه است. هم‌چنین، فرض کنید وزن همه یال‌ها برابر ۱ است. واضح است که گراف G دارای عرض-درختی ۲ است. فرض کنید M به اندازه کافی بزرگتر از B باشد. در این‌صورت با توجه به **لم ۴-۳-۵**، یک ۲-افراز مینیمم گر (A_1, A_2) وجود دارد که $\tilde{t}_2^M(G)$ را به‌دست می‌دهد و u_1 و u_2 در بخش‌های متفاوت هستند. بنابراین

$$\tilde{t}_2^M(G) = \max \left\{ \frac{\varphi(\partial A_1)}{\omega(A_1)}, \frac{\varphi(\partial A_2)}{\omega(A_2)} \right\} = \max \left\{ \frac{n}{M + \sum_{v_i \in A_1} x_i}, \frac{n}{M + \sum_{v_i \in A_2} x_i} \right\}.$$

■ در نتیجه $\tilde{t}_2^M(G) \leq n/(M+B)$ اگر و فقط اگر $\sum_{v_i \in A_1} x_i = B$. این مطلب اثبات را کامل می‌کند.

۵-۵ فرایند یک‌سازی

در این بخش ساز و کاری ارائه می‌دهیم که به کمک آن می‌توان نتایج سختی محاسباتی را از گراف‌های وزن‌دار به گراف‌های بدون وزن (ساده)، یعنی گراف‌هایی که وزن همه راس‌ها و یال‌ها برابر یک است، تعمیم داد. این روش که

آن را **فرایند یک‌سازی** می‌گوییم، یک تقلیل چندجمله‌ای است که با استفاده از آن چند نتیجه پیچیدگی محاسباتی برای گراف‌ها و درخت‌های بدون وزن ارائه می‌کنیم. کلاس ISO را مجموعه همه مسائل IPP ، NCP ، IPP_k و NCP_k در نسخه‌های مهین و میانگین، تعریف کنید.

گزاره ۵-۵-۱

اگر P یک مساله در کلاس ISO باشد که برای گراف‌های وزن دار بدون پتانسیل، قویاً NP -کامل است، آن‌گاه این مساله برای گراف‌های بدون وزن (ساده) نیز NP -کامل خواهد بود.

برهان. گزاره را برای NCP^M حل می‌کنیم و بقیه حالات به‌طور مشابه ثابت می‌شوند. فرض کنید NCP^M قویاً NP -کامل است و $G = (V, E, \omega, \varphi)$ به همراه عدد صحیح $k \geq 2$ و عدد $N = M/L$ را یک نمونه از مساله NCP^M بگیرد، که همه وزن‌ها و اعداد M, L در **کدهای یک‌یکی** داده شده‌اند. یک فرایند یک‌سازی روی G انجام می‌دهیم تا یک گراف ساده G' (با همه وزن‌ها برابر ۱) و یک عدد N' به‌دست آوریم، به‌طوری که در مساله NCP^M ، (G, k, N) یک نمونه مثبت است اگر و تنها اگر (G', k, N') یک نمونه مثبت باشد. این NP -کامل بودن مساله NCP^M را برای گراف‌های بدون وزن ثابت می‌کند. فرایند در دو گام زیر انجام می‌شود.

گام ۱. یک‌سازی وزن‌های رئوس.

در این گام، روشی ارائه می‌دهیم که وزن همه رئوس را برابر یک می‌کند. عدد χ را یک عدد به اندازه کافی بزرگ بگیرد به‌طوری که برای هر راس $u \in V$ ، $\chi\omega(u) \geq \sum_{e=uv \in E} \varphi(e)$ در این صورت برای هر $A \subset V$ داریم $\varphi(\partial A)/\omega(A) \leq \chi$. حال برای ساختن گراف $G' = (V', E', \varphi')$ از گراف G ، برای هر راس $u \in V$ یک مجموعه W_u از دقیقاً $\chi\omega(u) - 1$ راس جدید اضافه می‌کنیم و همه راس‌های درون W_u را به u وصل می‌کنیم (شکل ۵-۳ را ببینید). علاوه بر این وزن همه یال‌های ux ، برای $x \in W_u$ را برابر ۱ قرار می‌دهیم. ادعا می‌کنیم که $\tilde{t}_k^M(G) = \chi \tilde{t}_k^M(G')$. فرض کنید $\{A_i\}_i^k$ یک افراز مینیمم‌گر برای $\tilde{t}_k^M(G)$ باشد. در این صورت با تعریف $A'_i := A_i \cup (\cup_{u \in A_i} W_u)$ ، واضح است که $\varphi(\partial A'_i)/|A'_i| = (\chi) \varphi(\partial A_i)/\omega(A_i)$. بنابراین $\tilde{t}_k^M(G') \leq (\chi) \tilde{t}_k^M(G)$. برای اثبات تساوی، فرض کنید $\{B'_i\}_i^k$ یک افراز مینیمم‌گر باشد که $\tilde{t}_k^M(G')$ را به‌دست می‌دهد. برای یک راس $u \in V$ ، فرض کنید $u \in B'_i$ ، برای یک i . اگر $x \in W_u$ وجود داشته باشد که $x \in B'_j$ ، برای یک $j \neq i$ ، آن‌گاه x را از B'_j به $B'_i \cup \{x\}$ منتقل کرده و تعریف می‌کنیم $B''_i := B'_i \cup \{x\}$ و $B''_j := B'_j \setminus \{x\}$. چون $1 \leq \varphi(\partial B'_j)/|B'_j| \leq \tilde{t}_k^M(G') \leq (\chi) \tilde{t}_k^M(G)$ داریم

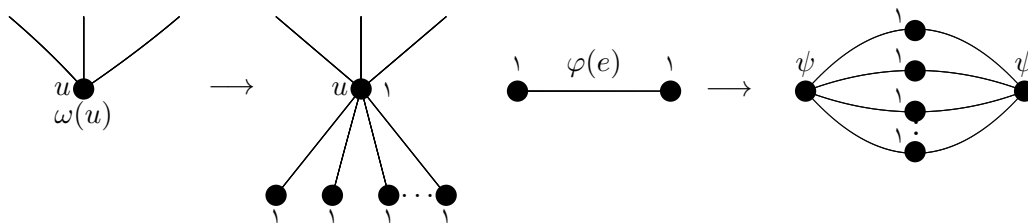
$$\frac{\varphi(\partial B''_j)}{|B''_j|} = \frac{\varphi(\partial B'_j) - 1}{|B'_j| - 1} \leq \frac{\varphi(\partial B'_j)}{|B'_j|}, \quad \frac{\varphi(\partial B''_i)}{|B''_i|} = \frac{\varphi(\partial B'_i) + 1}{|B'_i| + 1} \leq \frac{\varphi(\partial B'_i)}{|B'_i|}.$$

با ادامه دادن این فرایند، به یک افراز مینیمم‌گر $\{B''_i\}_i^k$ می‌رسیم که $\tilde{t}_k^M(G')$ را به‌دست می‌دهد، با این ویژگی که برای هر راس $u \in V$ و رئوس درون W_u همگی در یک بخش افراز قرار دارند. بنابراین، با تعریف $B_i := V \cap B''_i$ ، داریم $\varphi(\partial B_i)/\omega(B_i) = \chi \varphi(\partial B''_i)/|B''_i|$. در نتیجه $\tilde{t}_k^M(G) \leq \chi \tilde{t}_k^M(G')$. تنها باقی می‌ماند

که قرار دهیم $N' := N/\chi$.

گام ۲. یک‌سازی وزن‌های یال‌ها.

فرض کنید $n := |V|$ و همه وزن‌های رئوس برابر ۱ است. هر یال $e \in E$ را با دقیقاً $\varphi(e)$ یال چندگانه جایگزین کنید. سپس همه یال‌ها را زیر تقسیم کنید تا یک گراف ساده G' به دست آید و تابع وزن یالی جدید φ' را تابع ثابت ۱ قرار دهید (شکل ۳-۵ را ببینید). برای هر یال $e \in E$ ، مجموعه رئوس جدید که از زیرتقسیم‌ها به دست می‌آیند را با S_e نشان دهید و تعریف کنید $S := \cup_{e \in E} S_e$. هم‌چنین برای یک ثابت ψ ، تابع وزن راسی ω' را طوری تعریف کنید که روی مجموعه S برابر ۱ و روی مجموعه V برابر ψ باشد.



شکل ۳-۵: گجت‌های راسی و یالی استفاده شده در فرایند یک‌سازی.

ادعا می‌کنیم که اگر ψ به اندازه کافی بزرگتر از n, L و $|S|$ باشد، آنگاه $\tilde{t}_k^M(G) \leq N$ اگر و تنها اگر $\tilde{t}_k^M(G') \leq (N/\psi)$. به این منظور ابتدا فرض کنید $\tilde{t}_k^M(G) \leq N$ و $\{A_i\}_1^k$ را یک k -افراز مینیمم‌گر برای $\tilde{t}_k^M(G)$ قرار دهید. تعریف کنید $A'_i := A_i \cup (\cup_{e \in E(A_i, A_j), 1 \leq j \leq i} S_e)$. واضح است که $\varphi'(\partial A'_i) = \varphi(\partial A_i)$ و $\omega'(A'_i) \geq \psi|A_i|$. بنابراین $\tilde{t}_k^M(G') \leq (N/\psi)$ از طرف دیگر فرض کنید که $\tilde{t}_k^M(G') \leq (N/\psi)$ و $\{B'_i\}_1^k$ را یک افراز مینیمم‌گر برای $\tilde{t}_k^M(G')$ قرار دهید. با تعریف $B_i := B'_i \cap V$ ، داریم $\varphi(\partial B_i) \leq \varphi'(\partial B'_i)$. علاوه بر این، اگر ψ به اندازه کافی بزرگتر از n, L و $|S|$ باشد، آنگاه

$$\frac{\varphi(\partial B_i)}{|B_i|} < \frac{\psi \varphi(\partial B_i)}{\psi |B_i| + |S|} + \frac{1}{nL} \leq \frac{\psi \varphi'(\partial B'_i)}{\omega'(B'_i)} + \frac{1}{nL}.$$

لذا

$$\max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{\varphi(\partial B_i)}{|B_i|} \right\} = \frac{\varphi(\partial B_{i_*})}{|B_{i_*}|} < \psi \tilde{t}_k^M(G') + \frac{1}{nL} \leq \frac{M}{L} + \frac{1}{nL} \leq \frac{M}{L} + \frac{1}{L|B_{i_*}|}.$$

و در نتیجه $\tilde{t}_k^M(G) \leq \max_i (\varphi(\partial B_i)/|B_i|) \leq M/L = N$ این گام دوم را تکمیل می‌کند.

نهایتاً با تکرار گام ۱، به یک گراف ساده می‌رسیم که وزن همه یال‌ها و راس‌ها در آن برابر ۱ است. توجه کنید که چون وزن همه یال‌ها و راس‌های G و هم‌چنین M, L در کدهای یک‌یک‌ی داده شده است، گراف ساده حاصل، در زمان چندجمله‌ای قابل محاسبه است. ■

به‌وسیله قضیه ۲-۲-۵ (i)، می‌دانیم که NCP_2 برای گراف‌های با یال چندگانه NP -کامل است. بنابراین NCP_2 برای گراف‌های وزن‌دار قویاً NP -کامل است. نتیجه زیر از این حقیقت به همراه قضیه ۱-۳-۵ و

گزاره ۱-۵-۵ نتیجه می‌شود. بخش (i) به عنوان تعمیمی از نتیجه موهار (قضیه ۲-۲-۵) (i) است. هم‌چنین توجه کنید برای بخش (ii)، گام ۲ از فرایند یکه‌سازی را استفاده نمی‌کنیم، زیرا در تقلیل استفاده شده در اثبات قضیه ۱-۳-۵، همه وزن یال‌ها برابر ۱ است. در نتیجه این فرایند، خاصیت بدون دور بودن را حفظ می‌کند.

نتیجه ۲-۵-۵

(i) برای هر عدد ثابت $k \geq 2$ ، مسائل IPP_k و NCP_k (در هر دو نسخه مهین و میانگین) برای گراف‌های بدون وزن (ساده) NP -کامل است.

(ii) مساله NCP^M برای درخت‌های بدون وزن NP -کامل است.

مراجع

- [١] Aldous, D. and Fill, J. Reversible Markov chains and random walks on graphs. Manuscript available at <http://www.stat.berkeley.edu/~aldous/RWG/book.html>, 1999. ١٧, ١٨
- [٢] Alon, N. Eigenvalues and expanders. *Combinatorica*, 6(2):83–96, 1986. Theory of computing (Singer Island, Fla., 1984). ٢, ٤٥
- [٣] Alon, N. and Milman, V. D. λ_1 , isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators. *J. Combin. Theory Ser. B*, 38(1):73–88, 1985. ٤٥
- [٤] Arora, Sanjeev and Barak, Boaz. *Computational complexity*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. A modern approach. ٨٨
- [٥] Arora, Sanjeev, Rao, Satish, and Vazirani, Umesh. Expander flows, geometric embeddings and graph partitioning. *J. ACM*, 56(2):Art. 5, 37, 2009. ٣, ٩٠
- [٦] Bach, Francis R. and Jordan, Michael I. Learning spectral clustering, with application to speech separation. *J. Mach. Learn. Res.*, 7:1963–2001, 2006. ٤٠
- [٧] Baker, Matt and Rumely, Robert. Harmonic analysis on metrized graphs. *Canad. J. Math.*, 59(2):225–275, 2007. ٢٠
- [٨] Baker, Matthew and Faber, Xander. Metrized graphs, Laplacian operators, and electrical networks. In *Quantum graphs and their applications*, Vol. 415 of *Contemp. Math.*, pp. 15–33. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006. ٢٠, ٢١
- [٩] Band, R., Berkolaiko, B., Raz, H., and Smilansky, U. On the connection between the number of nodal domains on quantum graphs and the stability of graph partitions. *ArXiv e-prints*, March 2011. ٦٢
- [١٠] Bandle, Catherine. *Isoperimetric inequalities and applications*, Vol. 7 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1980. ٢٥, ٤٥
- [١١] Bendito, E., Carmona, A., and Encinas, A. M. Boundary value problems on weighted networks. *Discrete Appl. Math.*, 156(18):3443–3463, 2008. ١٥
- [١٢] Bendito, Enrique, Carmona, Angeles, and Encinas, Andrés M. Solving boundary value problems on networks using equilibrium measures. *J. Funct. Anal.*, 171(1):155–176, 2000. ١٥
- [١٣] Bensoussan, Alain and Menaldi, José-Luis. Difference equations on weighted graphs. *J. Convex Anal.*, 12(1):13–44, 2005. ١٤
- [١٤] Berestycki, Nathanaël and Nickl, Richard. Concentration of measure. University of Cambridge, December 2009. ٣
- [١٥] Berkolaiko, Gregory. A lower bound for nodal count on discrete and metric graphs. *Comm. Math. Phys.*, 278(3):803–819, 2008. ٢٧

- [۱۶] Berkolaiko, Gregory, Carlson, Robert, Fulling, Stephen A., and Kuchment, Peter, Eds. *Quantum graphs and their applications*, Vol. 415 of *Contemporary Mathematics*, Providence, RI, 2006. American Mathematical Society. ۲۱
- [۱۷] Bhatia, Rajendra. *Matrix analysis*, Vol. 169 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. ۷, ۱۲
- [۱۸] Biggs, Norman. *Algebraic graph theory*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second Ed., 1993. ۱۳
- [۱۹] Bıyıkoglu, Türker. A discrete nodal domain theorem for trees. *Linear Algebra Appl.*, 360:197–205, 2003. ۴۷
- [۲۰] Bıyıkoglu, Türker, Leydold, Josef, and Stadler, Peter F. *Laplacian eigenvectors of graphs*, Vol. 1915 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2007. Perron-Frobenius and Faber-Krahn type theorems. ۱۴, ۲۴, ۴۶, ۴۷, ۵۲
- [۲۱] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. *Graph theory*, Vol. 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008. ۸, ۲۴, ۴۷
- [۲۲] Buser, Peter. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010. Reprint of the 1992 edition. ۱, ۲۵, ۴۵
- [۲۳] Chavel, Isaac. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Vol. 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk. ۱, ۲۳, ۲۵, ۴۵
- [۲۴] Cheeger, J. A lower bound for the lowest eigenvalue of the laplacian. *Problems in Analysis*, p. 195–199, 1970. ۱, ۴۵
- [۲۵] Chen, Mu-Fa. *Eigenvalues, inequalities, and ergodic theory*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag London Ltd., London, 2005. ۸۳
- [۲۶] Chen, Mu-Fa. Speed of stability for birth-death processes. *Front. Math. China*, 5(3):379–515, 2010. ۸۳
- [۲۷] Chung, Fan. Laplacians and the Cheeger inequality for directed graphs. *Ann. Comb.*, 9(1):1–19, 2005. ۱۸
- [۲۸] Chung, Fan R. K. *Spectral graph theory*, Vol. 92 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1997. ۱۳
- [۲۹] Courant, R. and Hilbert, D. *Methods of mathematical physics. Vol. I*. Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953. ۴۶
- [۳۰] Cvetković, Dragoš, Rowlinson, Peter, and Simić, Slobodan. *An introduction to the theory of graph spectra*, Vol. 75 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010. ۱۳
- [۳۱] Daneshgar, Amir and Hajiabolhassan, Hossein. Graph homomorphisms and nodal domains. *Linear Algebra Appl.*, 418(1):44–52, 2006. ۵۲
- [۳۲] Daneshgar, Amir, Hajiabolhassan, Hossein, and Javadi, Ramin. On the isoperimetric spectrum of graphs and its approximations. *J. Combin. Theory Ser. B*, 100(4):390–412, 2010. ۴, ۱۸
- [۳۳] Daneshgar, Amir and Javadi, Ramin. On complexity of isoperimetric problems on trees. to appear in *Discrete Appl. Math.*, 2011. ۴, ۸۸
- [۳۴] Daneshgar, Amir, Javadi, Ramin, and Miclo, Laurent. On nodal domains of finite reversible Markov processes and spectral decomposition of cycles. hal-00598589, 24 pages, 2011. ۴, ۵۷
- [۳۵] Davies, E. Brian, Gladwell, Graham M. L., Leydold, Josef, and Stadler, Peter F. Discrete nodal domain theorems. *Linear Algebra Appl.*, 336:51–60, 2001. ۴۶
- [۳۶] Dhillon, Inderjit, Guan, Yuqiang, and Kulis, Brian. A unified view of kernel k-means, spectral clustering and graph cuts. tech. rep., 2004. UTCS Technical Report, TR-04-25. ۴۰

- [٣٧] Diaconis, Persi and Stroock, Daniel. Geometric bounds for eigenvalues of markov chains. *The Annals of Applied Probability*, 1(1):pp. 36–61, 1991. ٢
- [٣٨] Diestel, Reinhard. *Graph theory*, Vol. 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Heidelberg, fourth Ed., 2010. ١٠٦
- [٣٩] Duval, Art M. and Reiner, Victor. Perron-Frobenius type results and discrete versions of nodal domain theorems. *Linear Algebra Appl.*, 294(1-3):259–268, 1999. ٥٢
- [٤٠] Federer, Herbert and Fleming, Wendell H. Normal and integral currents. *Ann. of Math. (2)*, 72:458–520, 1960. ٣٦
- [٤١] Fernandes, Rosário and da Fonseca, C. M. The inverse eigenvalue problem for Hermitian matrices whose graphs are cycles. *Linear Multilinear Algebra*, 57(7):673–682, 2009. ٧٩
- [٤٢] Fill, J.A. Eigenvalue bounds on convergence to stationary for nonreversible markov chains, with an application to the exclusion process. *The Annals of Applied Probability*, 1:62–87, 1991. ١٨, ١٩
- [٤٣] Friedman, Joel. Some geometric aspects of graphs and their eigenfunctions. *Duke Math. J.*, 69(3):487–525, 1993. ٢٠
- [٤٤] Fukushima, Masatoshi, Oshima, Yoichi, and Takeda, Masayoshi. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, Vol. 19 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, extended Ed., 2011. ١٠
- [٤٥] Gan, Guojun, Ma, Chaoqun, and Wu, Jianhong. *Data clustering*, Vol. 20 of *ASA-SIAM Series on Statistics and Applied Probability*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2007. Theory, algorithms, and applications. ٣٩
- [٤٦] Gantmacher, F. R. *Applications of the theory of matrices*. Translated by J. L. Brenner, with the assistance of D. W. Bushaw and S. Evanusa. Interscience Publishers, Inc., New York, 1959. ١٢
- [٤٧] Garey, Michael R. and Johnson, David S. *Computers and intractability, A guide to the theory of NP-completeness*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979. ٨٩, ٩١, ٩٧, ١٠٧
- [٤٨] Gladwell, G. M. L. and Zhu, H. Courant’s nodal line theorem and its discrete counterparts. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 55(1):1–15, 2002. ١٢
- [٤٩] Godsil, Chris and Royle, Gordon. *Algebraic graph theory*, Vol. 207 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001. ١٢
- [٥٠] Grigor’yan, Alexander and Yau, Shing-Tung. Isoperimetric properties of higher eigenvalues of elliptic operators. *Amer. J. Math.*, 125(4):893–940, 2003. ٢٥
- [٥١] Harper, L. H. Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs. *J. Combinatorial Theory*, 1:385–393, 1966. ٢٣
- [٥٢] Harper, L. H. On an isoperimetric problem for Hamming graphs. In *Proceedings of the Conference on Optimal Discrete Structures and Algorithms—ODSA ’97 (Rostock)*, Vol. 95, pp. 285–309, 1999. ٢٢
- [٥٣] Harper, L. H. *Global methods for combinatorial isoperimetric problems*, Vol. 90 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. ١, ٣, ٢٢
- [٥٤] Helffer, B., Hoffmann-Ostenhof, T., and Terracini, S. Nodal domains and spectral minimal partitions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(1):101–138, 2009. ٦٨
- [٥٥] Helffer, B., Hoffmann-Ostenhof, T., and Terracini, S. On spectral minimal partitions: the case of the sphere. In *Around the research of Vladimir Maz’ya. III*, Vol. 13 of *Int. Math. Ser. (N. Y.)*, pp. 153–178. Springer, New York, 2010. ٧١
- [٥٦] Hoory, Shlomo, Linial, Nathan, and Wigderson, Avi. Expander graphs and their applications. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 43(4):439–561 (electronic), 2006. ٢, ٢٢
- [٥٧] Horn, Roger A. and Johnson, Charles R. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Corrected reprint of the 1985 original. ٧, ١٢

- [٥٨] Houdré, C. and Tetali, P. Isoperimetric invariants for product Markov chains and graph products. *Combinatorica*, 24(3):359–388, 2004. ٢
- [٥٩] Jordan, Michael I. and Bach, Francis R. Learning spectral clustering. In *Advances in Neural Information Processing Systems 16*. MIT Press, 2003. ٢٠
- [٦٠] Jost, Jürgen. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, fifth Ed., 2008. ٢٣
- [٦١] Kato, T. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition. ٧٥
- [٦٢] Lawler, G.F. and Sokal, A.D. Bounds on the L^2 spectrum for Markov chains and Markov processes: a generalization of Cheeger's inequality. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 309(2):557–580, 1988. ٢, ٢٥
- [٦٣] Leader, Imre. Discrete isoperimetric inequalities. In *Probabilistic combinatorics and its applications (San Francisco, CA, 1991)*, Vol. 44 of *Proc. Sympos. Appl. Math.*, pp. 57–80. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991. ٢٥
- [٦٤] Levin, David A., Peres, Yuval, and Wilmer, Elizabeth L. *Markov chains and mixing times*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. With a chapter by James G. Propp and David B. Wilson. ١٨
- [٦٥] Lubotzky, Alexander. *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010. With an appendix by Jonathan D. Rogawski, Reprint of the 1994 edition. ٢
- [٦٦] Merris, Russell. A survey of graph Laplacians. *Linear and Multilinear Algebra*, 39(1-2):19–31, 1995. ١٣
- [٦٧] Miclo, L. On eigenfunctions of Markov processes on trees. *Probab. Theory Related Fields*, 142(3-4):561–594, 2008. ٢, ٢٢, ٥٢, ٥٦, ٥٧, ٥٨, ٧٦
- [٦٨] Mohar, Bojan. Isoperimetric numbers of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 47(3):274–291, 1989. ٢, ٢٥, ٩٠, ١٠٦
- [٦٩] Mohar, Bojan. The Laplacian spectrum of graphs. In *Graph theory, combinatorics, and applications. Vol. 2 (Kalamazoo, MI, 1988)*, Wiley-Intersci. Publ., pp. 871–898. Wiley, New York, 1991. ١٣
- [٧٠] Montenegro, R. and Tetali, P. Mathematical aspects of mixing times in Markov chains. *Found. Trends Theor. Comput. Sci.*, 1(3):x+121, 2006. ٢, ٢٥
- [٧١] Montenegro, Ravi Rico. *Faster mixing by isoperimetric inequalities*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2002. Thesis (Ph.D.)–Yale University. ٢
- [٧٢] Munro, J. Ian and Raman, Venkatesh. Succinct representation of balanced parentheses and static trees. *SIAM J. Comput.*, 31(3):762–776 (electronic), 2001/02. ١٠٣
- [٧٣] Nagamochi, Hiroshi and Ibaraki, Toshihide. *Algorithmic aspects of graph connectivity*, Vol. 123 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. ٩٠
- [٧٤] Nagamochi, Hiroshi and Kamidoi, Yoko. Minimum cost subpartitions in graphs. *Inform. Process. Lett.*, 102(2-3):79–84, 2007. ٩٠
- [٧٥] Neuberger, John M. Nonlinear elliptic partial difference equations on graphs. *Experiment. Math.*, 15(1):91–107, 2006. ١٥
- [٧٦] Ng, Andrew Y., Jordan, Michael I., and Weiss, Yair. On spectral clustering: Analysis and an algorithm. In *ADVANCES IN NEURAL INFORMATION PROCESSING SYSTEMS*, pp. 849–856. MIT Press, 2001. ٣٦, ٢٠
- [٧٧] Osserman, Robert. The isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(6):1182–1238, 1978. ٢٣

- [٧٨] Ros, Antonio. The isoperimetric problem. In *Global theory of minimal surfaces*, Vol. 2 of *Clay Math. Proc.*, pp. 175–209. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005. ٤٣
- [٧٩] Rothaus, O. S. Analytic inequalities, isoperimetric inequalities and logarithmic Sobolev inequalities. *J. Funct. Anal.*, 64(2):296–313, 1985. ٣٩
- [٨٠] Saloff-Coste, Laurent. Lectures on finite Markov chains. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1996)*, Vol. 1665 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 301–413. Springer, Berlin, 1997. ١٢, ٤٥
- [٨١] Shariat Razavi, Basir. On graph partitioning algorithms and its applications in image segmentation. Master's thesis, Sharif University of Technology, April 2011. ٩١
- [٨٢] Sherman, J. Breaking the multicommodity flow barrier for $O(\sqrt{\log n})$ -approximations to sparsest cut. *arXiv:0908.1379*, 2009. ٩٠
- [٨٣] Shi, Jianbo and Malik, Jitendra. Normalized cuts and image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22:888–905, 1997. ٣, ٢٥, ٤٠, ٩٠
- [٨٤] Steiner, Jakob. Einfacher beweis der isoperimetrischen hauptsätze. *J. reine angew Math.*, 18:281–296, 1838. ٢٣
- [٨٥] Vazirani, Vijay V. *Approximation algorithms*. Springer-Verlag, Berlin, 2001. ٨٩, ٩٠
- [٨٦] Wu, Xiaodong, Chen, Danny Z., Mason, James J., and Schmid, Steven R. Efficient approximation algorithms for pairwise data clustering and applications. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, 14(1-2):85–104, 2004. ٩٠
- [٨٧] Yau, Shing Tung. Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 8(4):487–507, 1975. ٣١

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی و نمایه

ا

pigeon-hole principal	اصل لانه‌کبوتری، ۷۳، ۷۴، ۸۰
maximum principle	اصل ماکسیمم، ۱۴
rectifiable	اصلاح‌پذیر، ۶۴، ۶۶
necklace-rectifiable	اصلاح‌پذیر گردن‌بندی، ۶۶
rectifying	اصلاح‌کننده، ۶۴
navigational operations	اعمال ناوبری، ۹۹، ۱۰۳، ۱۰۴
partition	افراز، ۲۶، ۵۵
Depth-First Search algorithm	الگوریتم جستجوی عمق-اول، ۱۰۳
resistance measure	اندازه مقاومت، ۲۰
energy	انرژی، ۱۰، ۲۱
contraction	انقباض، ۹۴

ب

bipolar part	بخش دوقطبی، ۵۲
semidefinite programming	برنامه‌ریزی نیمه‌معین، ۹۰
generically	به‌طور عمومی، ۵۷
interlacing	به‌هم تنیدگی، ۷۸
outlier	بیرون‌باش، ۹۷

پ

parameterized complexity	پیچیدگی پارامتری، ۴، ۹۹
--------------------------	-------------------------

ت

irreducible	تحویل‌ناپذیر، ۱۳
α -approximation	α -تخمین، ۸۸
many to one polynomial time reduction	تقلیل زمان چندجمله‌ای چند به یک، ۸۸
perturbation	تکانش، ۷۵

edge-segment	تکه یال، ۲۰
stationary distribution	توزیع ایستا، ۱۸
edge expansion	توسیع یالی، ۲۵
expander	توسیع‌گر، ۲، ۲۵

ث

isoperimetric constant	ثابت ایزوپریمتری، ۲۵
Dirichlet isoperimetric constant	ثابت ایزوپریمتری دیریشله، ۵۹
Cheeger constant	ثابت چیگر، ۲۵

ج

breadth-first search	جستجوی عرض-اول، ۹۴
----------------------	--------------------

چ

circulation	چرخش، ۱۸
-------------	----------

ح

Cheeger's generalized conjecture	حدس تعمیم‌یافته چیگر، ۵۱
Miclo's conjecture	حدس میکلو، ۵۷، ۸۲
spectral gap	حفره طیفی، ۱۰

خ

self-adjoint	خود-الحاق، ۷، ۱۲
self-reducible	خود-تقلیل‌پذیر، ۹۵
clustering	خوشه‌بندی، ۳۹
spectral clustering	خوشه‌بندی طیفی، ۳۶، ۴۰

د

continous nodal domain	دامنه نودال پیوسته، ۵۴
weak nodal domain	دامنه نودال ضعیف، ۴۶
strong nodal domain	دامنه نودال قوی، ۴۶
degree	درجه، ۸
tail	دم، ۸
bipartite	دوبخشی، ۶۴
dual	دوگان، ۷، ۱۹

ر

relaxation	راحت‌سازی، ۳۶
tractable	رام‌شدنی، ۳، ۹۴
conductance	رسانایی، ۸، ۲۵
handy	روان، ۵۷، ۶۳
iterative method	روش تکرارشونده، ۹۵

ز

subpartition زیرافراز، ۲۶، ۵۵

س

head سر، ۸

ش

flow شار، ۸، ۱۸

normalized outgoing flow شار خروجی نرمال شده، ۲۷

Dirichlet condition شرط دیریشله، ۱۵

spectral radius شعاع طیفی، ۱۳

ط

polynomial time approximation scheme طرح تخمین زمان چندجمله‌ای، ۸۹

fully polynomial time approximation scheme طرح تخمین زمان چندجمله‌ای کامل، ۸۹، ۹۶

isoperimetric spectrum طیف ایزوپریمتری، ۳۱

Dirichlet connectivity spectrum طیف همبندی دیریشله، ۴۵، ۵۶

ع

isoperimetric number عدد ایزوپریمتری، ۲۶

bisection width عرض دوتکه، ۴۴

tree-width عرض-درختی، ۱۰۶

discrete elliptic operator عملگر بیضوی گسسته، ۱۰

discrete Schrödinger operator عملگر شرودینگر گسسته، ۸

gradient operator عملگر گرادیان، ۱۱

Laplace-Beltrami operator عملگر لاپلاس-بلترامی، ۹

ف

unitarization process فرایند یک‌سازی، ۳۲، ۱۰۸

birth-death processes فرایندهای تولد-مرگ، ۸۳

Dirichlet form فرم دیریشله، ۱۰

Green's formula فرمول گرین، ۱۱

ζ -excessive ζ -فزون، ۵۲

supergeometric فوق هندسی، ۳۵

ق

image segmentation قسمت‌بندی عکس، ۴۰

Perron-Frobenius theorem قضیه پرون-فروبونیوس، ۱۳، ۸۱

generalized Cheeger's theorem قضیه تعمیم‌یافته چیگر، ۵۳، ۵۴

Federer-Fleming theorem قضیه فدر-فلمینگ، ۳۶، ۳۸، ۴۵

Courant-Hilbert theorem قضیه کورانت-هیلبرت، ۴۶

Ky Fan theorem قضیه کی-فن، ۱۲

piecewise affine	قطعه قطعه آفین، ۲۱
strongly connected	قویاً همبند، ۸
strongly NP -complete	قویاً NP -کامل، ۸۹، ۹۰

ک

unary codes	کدهای یک‌یک‌ی، ۸۹
unary codes	کدهای یک‌یک‌ی، ۱۰۸
minor	کهن، ۱۰۰

گ

induced graph	گراف القایی، ۸
graph with boundary	گراف با مرز، ۱۵
potential-less graph	گراف بدون پتانسیل، ۸
undirected graph	گراف بدون جهت، ۷
directed graph	گراف جهت‌دار، ۸
quotient graph	گراف خارج‌قسمت، ۵۶، ۱۰۰
simple graph	گراف ساده، ۸
quantum graph	گراف کوانتومی، ۲۱
metrized graph	گراف متری‌شده، ۲۰
metric graph	گراف متریک، ۲۰
weighted graph	گراف وزن‌دار، ۸
necklace	گردنبند، ۶۶

ل

combinatorial Laplacian	لاپلاسیان ترکیبیاتی، ۹، ۸۲
Duval-Reiner lemma	لم دوآل-رینر، ۵۲

م

transition matrix	ماتریس انتقال، ۱۸
Laplacian matrix	ماتریس لاپلاسیان، ۹، ۱۰
generalized Laplacian matrix	ماتریس لاپلاسیان تعمیم‌یافته، ۹، ۱۰
incidence matrix	ماتریس وقوع، ۱۱
local maximum	ماکسیمم موضعی، ۱۴
orthogonal	متعامد، ۶
symmetrization	مقارن‌سازی، ۱۷
Steiner symmetrization	مقارن‌سازی اشتاینر، ۴۳
positive semidefinite	مثبت نیمه‌معین، ۷
bipolar cut-set	مجموعه برشی دوقطبی، ۵۲
compatible transverse set of functions	مجموعه توابع متقاطع سازگار، ۵۳
vertex boundary	مرز راسی، ۱۵

edge boundary	مرز یالی، ۱۵
3-partition problem	مساله ۳-افراز، ۹۱، ۱۰۷
equipartition problem	مساله افراز برابر، ۹۷
isoperimetric problem	مساله ایزوپریمتری، ۲۵، ۲۷
minimum k -way cut problem	مساله برش k -جهته مینیم، ۹۰
normalized cut problem	مساله برش نرمال شده، ۲۷، ۴۰
minimum k -subpartition problem	مساله k -زیرافراز مینیم، ۹۰
subset average problem	مساله معدل زیرمجموعه، ۹۱
boundary value problem	مساله مقدار مرزی، ۱۵
Poisson eigenvalue problem	مساله ویژه مقدار پواسون، ۱۵
Dirichlet eigenvalue problem	مساله ویژه مقدار دیریشله، ۱۵، ۱۶
weak derivative	مشتق ضعیف، ۲۱
absolutely continuous	مطلقاً پیوسته، ۲۱
equivalent	معادل، ۹۴
Poisson equation	معادله پواسون، ۱۵
generator	مولد، ۱۸
k -means	k -میانه ها، ۴۰
minimum normalized cut	مینیم برش نرمال شده، ۲۷
local minimum	مینیم موضعی، ۱۴

ن

Cauchy-Schwarz inequality	نامساوی کشی-شوارتز، ۵۲، ۵۳
weighted Hardy inequality	نامساوی وزن دار هاردی، ۸۳
isoperimetric inequalities	نامساوی های ایزوپریمتری، ۴۵
Rayleigh quotient	نسبت رایلی، ۷
metric embedding	نشاندن متریک، ۴۴
geometric embedding	نشاندن هندسی، ۹۰
ζ -deficient	ζ -نقصانی، ۵۲
balanced parenthesis representation	نمایش پرانتز متوازن، ۱۰۳
succinct tree representation	نمایش درختی فشرده، ۹۹، ۱۰۳

و

Dirichlet eigenvalue	ویژه مقدار دیریشله، ۱۶، ۱۷، ۲۱
principal Dirichlet eigenvalue	ویژه مقدار دیریشله اصلی، ۱۷

ه

Hermitian	هرمیتی، ۷، ۷۹
connected	همبند، ۸
neighborhood	همسایگی، ۶۴
geometric	هندسی، ۳۵

ی

uniform	یکنواخت، ۵۷
---------	-------------

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

absolutely continuous	مطلقاً پیوسته، ۲۱
α -approximation	α -تخمین، ۸۸

B

balanced parenthesis representation	نمایش پرانتز متوازن، ۱۰۳
bipartite	دوبخشی، ۶۴
bipolar cut-set	مجموعه برشی دوقطبی، ۵۲
bipolar part	بخش دوقطبی، ۵۲
birth-death processes	فرایندهای تولد-مرگ، ۸۳
bisection width	عرض دوتکه، ۴۴
boundary value problem	مساله مقدار مرزی، ۱۵
breadth-first search	جستجوی عرض-اول، ۹۴

C

Cauchy-Schwarz inequality	نامساوی کشی-شوارتز، ۵۲، ۵۳
Cheeger constant	ثابت چیگر، ۲۵
Cheeger's generalized conjecture	حدس تعمیم‌یافته چیگر، ۵۱
circulation	چرخش، ۱۸
clustering	خوشه‌بندی، ۳۹
combinatorial Laplacian	لاپلاسیان ترکیبیاتی، ۹، ۸۲
compatible transverse set of functions	مجموعه توابع متقاطع سازگار، ۵۳
conductance	رسانایی، ۸، ۲۵
connected	همبند، ۸
continous nodal domain	دامنه نودال پیوسته، ۵۴
contraction	انقباض، ۹۴
Courant-Hilbert theorem	قضیه کورانت-هیلبرت، ۴۶

D

ζ -deficient	۵۲، نقصانی
degree	درجه، ۸
Depth-First Search algorithm	الگوریتم جستجوی عمق-اول، ۱۰۳
directed graph	گراف جهت‌دار، ۸
Dirichlet condition	شرط دیریشله، ۱۵
Dirichlet connectivity spectrum	طیف همبندی دیریشله، ۴۵، ۵۶
Dirichlet eigenvalue	ویژه‌مقدار دیریشله، ۱۶، ۱۷، ۲۱
Dirichlet eigenvalue problem	مساله ویژه‌مقدار دیریشله، ۱۵، ۱۶
Dirichlet form	فرم دیریشله، ۱۰
Dirichlet isoperimetric constant	ثابت ایزوپریمتری دیریشله، ۵۹
discrete elliptic operator	عملگر بیضوی گسسته، ۱۰
discrete Schrödinger operator	عملگر شرودینگر گسسته، ۸
dual	دوگان، ۷، ۱۹
Duval-Reiner lemma	لم دوال-رینر، ۵۲

E

edge boundary	مرز یالی، ۱۵
edge expansion	توسیع یالی، ۲۵
edge-segment	تکه یال، ۲۰
energy	انرژی، ۱۰، ۲۱
equipartition problem	مساله افراز برابر، ۹۷
equivalent	معادل، ۹۴
ζ -excessive	۵۲، فزونی
expander	توسیع‌گر، ۲، ۲۵

F

Federer-Fleming theorem	قضیه فدر-فلمینگ، ۳۶، ۳۸، ۴۵
flow	شار، ۸، ۱۸
fully polynomial time approximation scheme	طرح تخمین زمان چندجمله‌ای کامل، ۸۹، ۹۶

G

generalized Cheeger's theorem	قضیه تعمیم‌یافته چیگر، ۵۳، ۵۴
generalized Laplacian matrix	ماتریس لاپلاسی تعمیم‌یافته، ۹، ۱۰
generator	مولد، ۱۸
generically	به‌طور عمومی، ۵۷
geometric	هندسی، ۳۵
geometric embedding	نشانیدن هندسی، ۹۰
gradient operator	عملگر گرادیان، ۱۱
graph with boundary	گراف با مرز، ۱۵
Green's formula	فرمول گرین، ۱۱

H

handy	روان، ۵۷، ۶۳
head	سر، ۸
Hermitian	هرمیتی، ۷، ۷۹

I

image segmentation	قسمت‌بندی عکس، ۴۰
incidence matrix	ماتریس وقوع، ۱۱
induced graph	گراف القایی، ۸
interlacing	به هم تنیدگی، ۷۸
irreducible	تحویل‌ناپذیر، ۱۳
isoperimetric constant	ثابت ایزوپریمتری، ۲۵
isoperimetric inequalities	نامساوی‌های ایزوپریمتری، ۴۵
isoperimetric number	عدد ایزوپریمتری، ۲۶
isoperimetric problem	مساله ایزوپریمتری، ۲۵، ۲۷
isoperimetric spectrum	طیف ایزوپریمتری، ۳۱
iterative method	روش تکرارشونده، ۹۵

K

k -means	k -میانه‌ها، ۴۰
Ky Fan theorem	قضیه کی-فن، ۱۲

L

Laplace-Beltrami operator	عملگر لاپلاس-بلترامی، ۹
Laplacian matrix	ماتریس لاپلاسی، ۹، ۱۰
local maximum	ماکسیم موضعی، ۱۴
local minimum	مینیم موضعی، ۱۴

M

many to one polynomial time reduction	تقلیل زمان چندجمله‌ای چند به یک، ۸۸
maximum principle	اصل ماکسیم، ۱۴
metric embedding	نشانیدن متریک، ۴۴
metric graph	گراف متریک، ۲۰
metrized graph	گراف متریک‌شده، ۲۰
Miclo's conjecture	حدس میکلو، ۵۷، ۸۲
minimum normalized cut	مینیم برش نرمال‌شده، ۲۷
minimum k -subpartition problem	مساله k -زیرافراز مینیم، ۹۰
minimum k -way cut problem	مساله برش k -جهته مینیم، ۹۰
minor	کهن، ۱۰۰

N

navigational operations	۹۹، ۱۰۳، ۱۰۴
necklace	۶۶
necklace-rectifiable	۶۶
neighborhood	۶۴
normalized cut problem	۴۰، ۲۷
normalized outgoing flow	۲۷

O

orthogonal	۶
outlier	۹۷

P

parameterized complexity	۹۹، ۴
partition	۵۵، ۲۶
3-partition problem	۱۰۷، ۹۱
Perron-Frobenius theorem	۸۱، ۱۳
perturbation	۷۵
piecewise affine	۲۱
pigeon-hole principal	۸۰، ۷۴، ۷۳
Poisson eigenvalue problem	۱۵
Poisson equation	۱۵
polynomial time approximation scheme	۸۹
positive semidefinite	۷
potential-less graph	۸
principal Dirichlet eigenvalue	۱۷

Q

quantum graph	۲۱
quotient graph	۱۰۰، ۵۶

R

Rayleigh quotient	۷
rectifiable	۶۶، ۶۴
rectifying	۶۴
relaxation	۳۶
resistance measure	۲۰

S

self-adjoint	۱۲، ۷
self-reducible	۹۵
semidefinite programming	۹۰

simple graph	گراف ساده، ۸
spectral clustering	خوشه‌بندی طیفی، ۳۶، ۴۰
spectral gap	حفره طیفی، ۱۰
spectral radius	شعاع طیفی، ۱۳
stationary distribution	توزیع ایستا، ۱۸
Steiner symmetrization	مقارن‌سازی اشتاینر، ۴۳
strong nodal domain	دامنه نودال قوی، ۴۶
strongly connected	قویاً همبند، ۸
strongly NP -complete	قویاً NP -کامل، ۸۹، ۹۰
subpartition	زیرافراز، ۲۶، ۵۵
subset average problem	مساله معدل زیرمجموعه، ۹۱
succinct tree representation	نمایش درختی فشرده، ۹۹، ۱۰۳
supergeometric	فوق‌هندسی، ۳۵
symmetrization	مقارن‌سازی، ۱۷

T

tail	دم، ۸
tractable	رام‌شدنی، ۳، ۹۴
transition matrix	ماتریس انتقال، ۱۸
tree-width	عرض-درختی، ۱۰۶

U

unary codes	کدهای یک‌یکی، ۸۹، ۱۰۸
undirected graph	گراف بدون جهت، ۷
uniform	یکنواخت، ۵۷
unitarization process	فرایند یک‌سازی، ۳۲، ۱۰۸

V

vertex boundary	مرز راسی، ۱۵
-----------------	--------------

W

weak derivative	مشتق ضعیف، ۲۱
weak nodal domain	دامنه نودال ضعیف، ۴۶
weighted graph	گراف وزن‌دار، ۸
weighted Hardy inequality	نامساوی وزن‌دار هاردی، ۸۳

Abstract

This thesis is concerned with studying several aspects of the generalized isoperimetric problems on weighted graphs. In this regard, as a generalization of well-known Cheeger constant, we define k -th isoperimetric constant as the minimum of normalized outgoing flow over all k -subpartitions (disjoint subsets) of the vertex set. Also, we investigate basic properties of these parameters and particularly we prove a Federer-Fleming-type theorem. We then introduce a generalized Cheeger conjecture which is a generalization of celebrated Cheeger inequality and relates defined isoperimetric constants to higher eigenvalues of Laplace operator. In order to find a partial proof for this conjecture, we deploy two approaches by applying nodal domains and Dirichlet connectivity spectrum and prove that a generalized Cheeger conjecture is valid with a universal constant, for all Laplacians whose underlying graphs are trees or cycle. Moreover, as a by-product, we characterize spectral decomposition of Laplacians on cycles and describe the shape of their eigenfunctions. Finally, in direction of studying computational aspects of generalized isoperimetric problems, we obtain several hardness results and introduce some novel efficient algorithms for computing isoperimetric constants on weighted trees. Among these results, we show that for weighted trees, the decision problem for the k -th maximum isoperimetric number can be solved in linear time, while the decision problems for the k -th mean isoperimetric number and the k -th max/mean minimum normalized cuts are NP-complete. Furthermore, in direction to explore parametrized complexity of the problems, we investigate the case of fixed k and for weighted trees, we present some algorithms to determine the k -th max/mean isoperimetric numbers and the k -th max minimum normalized cuts.

Keywords: *weighted graphs, isoperimetric constant, isoperimetric spectrum, Dirichlet connectivity spectrum, generalized Cheeger inequality, spectral decomposition of cycles, computational complexity, clustering*



Sharif University of Technology
Department of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE
DEGREE OF

Doctor of Philosophy in Mathematics

Isoperimetric Problems on Graphs

supervisor

Professor Amir Daneshgar

by

Ramin Javadi

2011