کلید آزمون پایان ترم ریاضی عمومی I دی ماه ۱۳۸۵

۱) الف) تعریف انتگرال‌پذیری یک تابع کران‌دار f را بربازه‌ی $[a,b]$ بیان کنید.

ب) بااستفاده از الف) انتگرال‌پذیری تابع زیر را بر $[0,1]$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حل الف) (روش اول) تابع کراندار f را بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ افرازی مانند P_ε موجود باشد به قسمی که $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.

در این صورت عدد منحصر به فردی مانند A وجود دارد که برای هر $\varepsilon > 0$، $U(f,P_\varepsilon) \leq A \leq L(f,P_\varepsilon)$. عدد A را **انتگرال معین** f بر $[a,b]$ می‌نامیم. (۳ نمره)

(روش دوم) تابع کراندار f را بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه دنباله‌ی $\{P_n\}$ از افرازهای $[a,b]$ موجود باشد به قسمی که $-\infty < \lim U(f,P_n) = \lim L(f,P_n) < \infty$. این حد مشترک را انتگرال معین f بر $[a,b]$ می‌نامیم.

ب) فرض کنیم $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ افراز دلخواهی از بازه‌ی $[0,1]$ باشد ، یعنی $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$. در این صورت در هر زیر بازه‌ی $[x_{i-1}, x_i]$ هم نقاط گویا و هم نقاط گنگ وجود دارد. پس

$M_i = sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = x_i^2 + 1 \geq 1$ (۱ نمره)

$m_i = inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = 0$ (۱ نمره)

بنابراین $U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \geq \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$ (۲ نمره)

$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = 0$ (۲ نمره)

پس به ازای $\varepsilon = \frac{1}{2}$ داریم $U(f,P) - L(f,P) > \varepsilon$ (۱ نمره). به عبارت دیگر f بر $[0,1]$ انتگرال پذیر نیست.

۲) فرض کنید تابع f بر بازه‌ی باز I شامل a، کران‌دار و انتگرال‌پذیر باشد. نشان دهید تابع $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ بر I پیوسته است.

حل. صفحه‌ی ۲۴۹ مثال ۱۹ کتاب.

---

۳) پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع زیر را در $x = \circ$ بررسی کنید. (۱۲ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} x^{-x} & x > \circ \\ \\ \pi^x & x \leq \circ \end{cases}$$

حل. $f(\circ) = ۱$ (۱ نمره).

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\circ^+} f(x) &= \lim_{x\to\circ^+} e^{-x\ln x} = e^{\lim_{x\to\circ^+}(-x\ln x)} = ۱ = f(\circ) \quad \text{(۱/۵نمره)} \\ \lim_{x\to\circ^-} f(x) &= \lim_{x\to\circ^-} \pi^x = \pi^{\lim_{x\to\circ^-} x} = ۱ = f(\circ) \quad \text{(۱/۵نمره)} \end{aligned}$$

پس f در $x = \circ$ پیوسته است (۱ نمره). اما

$$\lim_{x\to\circ^+} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to\circ^+} \frac{-(۱ + \ln x)x^{-x}}{۱} = \infty \quad \text{(۲نمره)}$$

چون $\lim_{x\to\circ^+} x^{-x} = ۱$ و $\lim_{x\to\circ^+}(۱ + \ln x) = \infty$ (۲ نمره). بنابراین $f'_+(\circ)$ وجود ندارد. لذا $f'(\circ)$ وجود ندارد (۱ نمره).

---

۴) مرکز همگرایی و مقادیری از x را تعیین کنید که $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۳x + ۱)^n}{۴^n \sqrt[۵]{n}}$ همگرای مطلق ، همگرای مشروط یا واگرا است. حل. شرط کافی برای همگرایی مطلق عبارت است از

$$\lim\left|\frac{\frac{(۳x+۱)^{n+۱}}{۴^{n+۱}\sqrt[۵]{n+۱}}}{\frac{(۳x+۱)^n}{۴^n\sqrt[۵]{n}}}\right| = \lim \frac{۳}{۴}\sqrt[۵]{\frac{n}{n+۱}}\,|x+\frac{۱}{۳}| = \frac{۳}{۴}\,|x+\frac{۱}{۳}| < ۱ \iff -\frac{۵}{۳} < x < ۱$$

به این ترتیب مرکز همگرایی سری فوق $x = -\frac{۱}{۳}$ است.

به ازای $x = -\frac{۵}{۳}$ داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۳x + ۱)^n}{۴^n \sqrt[۵]{n}} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n ۴^n}{۴^n \sqrt[۵]{n}} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{\sqrt[۵]{n}}$$

چون دنباله‌ی $\{\frac{۱}{\sqrt[۵]{n}}\}$ مثبت ، نزولی و همگرا به صفر است، طبق آزمون لایب‌نیتس سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{\sqrt[۵]{n}}$ همگرا است.

به ازای $x = ۱$ داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۳x+۱)^n}{۴^n \sqrt[۵]{n}} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴^n}{۴^n \sqrt[۵]{n}} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt[۵]{n}} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{\frac{۱}{۵}}}$$

می‌دانیم به ازای $p < ۱$ سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ واگرا است. پس $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt[۵]{n}}$ واگرا است.

به این ترتیب سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۳x+۱)^n}{۴^n \sqrt[۵]{n}}$ در بازه‌ی $(-\frac{۵}{۳}, ۱)$ همگرای مطلق ، در $x = -\frac{۵}{۳}$ همگرای مشروط و در $(-\infty, -\frac{۵}{۳}) \cup [۱, \infty)$ واگرا است.

---

۵) همگرایی یا واگرایی $\int_{۰}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[۳]{x^۵ + x^۲ + x}}$ را بررسی کنید.

حل. روش اول) دو انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt[۳]{x^۵ + x^۲ + x}} \quad , \quad \int_{۱}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[۳]{x^۵ + x^۲ + x}}$$

ثابت می کنیم هر دو انتگرال همگرا هستند. (۱ نمره)

برای انتگرال اول چون

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۵ + x^۲ + x}} \leq \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$$

و

$$\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt[۳]{x}} = \lim_{r \to ۰^+} \int_{r}^{۱} \frac{dx}{\sqrt[۳]{x}} = \lim_{r \to ۰^+} \frac{۳}{۲} \sqrt[۳]{x^۲}\Big|_r^۱ = \frac{۳}{۲}$$

پس $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt[۳]{x}}$ همگرا و در نتیجه طبق آزمون مقایسه $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt[۳]{x^۵ + x^۲ + x}}$ همگرا است. (۴ نمره)

برای انتگرال دوم چون

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۵ + x^۲ + x}} \leq \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۵}}$$

و

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} = \lim_{b\to\infty} -\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^{-2}}\Big|_1^b = \frac{3}{2}$$

پس $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}$ همگرا و در نتیجه طبق آزمون مقایسه $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^2+x}}$ همگرا است. (۴ نمره)

بنابراین چون هر دو انتگرال همگرا می‌باشند، انتگرال $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^2+x}}$ نیز همگرا است. (۱ نمره)

روش دوم)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^5+x^2+x}}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^5+x^2+x}{x^5}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}} = 1$$

چون انتگرال نامتناهی $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ برای $p>1$ همگرا است ، طبق آزمون نسبت انتگرال نامتناهی $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^2+x}}$ همگرا است. از سوی دیگر

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^5+x^2+x}}} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{\frac{x^5+x^2+x}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{1+x^3+x^5} = 1$$

چون انتگرال ناسره‌ی $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ برای $p<1$ همگرا است ، طبق آزمون نسبت انتگرال‌ناسره‌ی $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^2+x}}$ همگرا است. پس

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^2+x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^2+x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x^2+x}}$$

همگرا است.

---

۶) الف) همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{(1+\sin n)}{n^2}$ را بررسی کنید.

ب) ثابت کنید اگر برای هر n، $a_n>0$ و $\sum_{n=1}^\infty a_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^\infty \ln(1+a_n)$ نیز همگرا است.

حل. الف) (روش اول) قرار می‌دهیم $a_n = (-1)^n \frac{1+\sin n}{n^2}$. در این صورت $|a_n| \le \frac{2}{n^2}$. (۴ نمره)

سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ سری p با $p = 2 > 1$ است پس همگرا است . بنا بر این سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق و در نتیجه همگرا است. (۴ نمره)

(روش دوم) با توجه به $\frac{1+\sin n}{n^2} \le \frac{2}{n^2}$ و این که سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است ، طبق آزمون مقایسه، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+\sin n}{n^2}$ همگرای مطلق و در نتیجه همگرا است.

ب) (روش اول) قرار می‌دهیم $b_n = \ln(1+a_n)$. از $a_n > 0$ یعنی $1 + a_n > 1$ نتیجه می‌شود $b_n = \ln(1+a_n) > 0$ (۲ نمره). اما $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است. پس $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (۲ نمره). در نتیجه $\lim \frac{b_n}{a_n} = \lim \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$. (۲ نمره) زیرا طبق قاعده‌ی هوپیتال $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$.

پس بنا بر آزمون مقایسه‌ی حدی چون $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است ، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا است. (۱ نمره)

(روش دوم) ابتدا نشان می‌دهیم برای $x > 0$ ، $\ln(1+x) < x$.

اثبات: قرار می‌دهیم $f(x) = x - \ln(1+x)$. در این صورت برای $x > 0$ داریم $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0$. پس f روی $[0, \infty)$ صعودی اکید است و در نتیجه برای $x > 0$ ، $f(x) > f(0) = 0$ که معادل است با $\ln(1+x) < x$.

چون برای هر n ، $a_n > 0$، برای هر n همواره $\ln(1+a_n) < a_n$. طبق آزمون مقایسه از همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ نتیجه می‌شود.

---

۷) مطلوب است محاسبه‌ی $\int \frac{\tan^3\theta}{1+\sin 2\theta}\, d\theta$.

حل. قرار می‌دهیم $x = \tan\theta$ (۲ نمره). پس $\theta = \frac{dx}{1+x^2}$ (۱ نمره) و

$\sin ۲\theta = \dfrac{۲x}{۱+x^۲}$ (۱ نمره). با جایگذاری داریم:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan^۳\theta}{۱+\sin ۲\theta}\,d\theta &= \int \frac{x^۳}{۱+\frac{۲x}{۱+x^۲}}\,\frac{dx}{۱+x^۲} \quad (\text{۱نمره})\\
&= \int \frac{x^۳ dx}{۱+۲x+x^۲} \quad (\text{۱نمره})\\
&= \int \left(x-۲+\frac{۳x+۲}{(۱+x)^۲}\right)dx \quad (\text{۱نمره})\\
&= \int (x-۲)dx + \int \frac{۳dx}{۱+x} - \int \frac{dx}{(۱+x)^۲} \quad (\text{۲نمره})\\
&= \frac{x^۲}{۲} - ۲x + ۳\ln|۱+x| + \frac{۱}{x+۱} + C \quad (\text{۲نمره})\\
&= \frac{\tan^۲\theta}{۲} - ۲\tan\theta + ۳\ln|۱+\tan\theta| + \frac{۱}{۱+\tan\theta} + C \quad (\text{۱نمره})
\end{aligned}$$

---

۸) برای عدد صحیح و نامنفی n و با فرض همگرایی $I_n := \int_۰^\infty t^{۲n}\, e^{-t^۲} dt$

الف) نشان دهید $I_n = \dfrac{۲n-۱}{۲}\, I_{n-۱}$.

ب) باجایگزینی بسط مک‌لورن تابع $y = \cosh\theta$ و با فرض اعتبار انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری توان و $I_۰ = \dfrac{\sqrt{\pi}}{۲}$ نشان دهید $\int_۰^\infty e^{-t^۲}\cosh(۲xt)dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{۲}e^{x^۲}$.

حل. (٦ نمره) به روش جزء به جزء اگر قرار دهیم

$u = t^{۲n-۱}, dv = te^{-t^۲}dt$ آنگاه $du = (۲n-۱)t^{۲n-۲}dt, v = -\dfrac{۱}{۲}e^{-t^۲}$.

در این صورت

$$\int t^{۲n}e^{-t^۲}dt = -e^{-t}t^{۲n-۱} + \frac{۲n-۱}{۲}\int t^{۲n-۲}e^{-t^۲}dt$$

از سوی دیگر $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}t^{۲n-۱} = ۰$. پس

$$I_n = \int_۰^\infty t^{۲n}e^{-t^۲}dt = (\frac{۲n-۱}{۲})\int_۰^\infty t^{۲n-۲}e^{-t^۲}dt = (\frac{۲n-۱}{۲})\, I_{n-۱}$$

ب) به استقرا (۲ نمره)

$$I_n = (\frac{۲n-۱}{۲})\ I_{n-۱} = (\frac{۲n-۱}{۲})(\frac{۲n-۳}{۲})\ I_{n-۲} = ... = \frac{(۲n-۱)\ ...\ (۱)}{۲^n} I_۰$$

پس

$$\begin{aligned}
\int_۰^\infty e^{-t^۲}\cosh(۲xt)dt &= \int_۰^\infty e^{-t^۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(۲xt)^{۲n}}{(۲n)!}dt \quad (\text{۱نمره})\\
&= \sum_{n=۰}^{\infty}\int_۰^\infty e^{-t^۲}\frac{(۲xt)^{۲n}}{(۲n)!}dt \quad (\text{۱نمره})\\
&= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(۲x)^{۲n}}{(۲n)!}\int_۰^\infty e^{-t^۲}t^{۲n}dt \quad (\text{۱نمره})\\
&= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^{۲n}\ x^{۲n}}{(۲n)(۲n-۱)(۲n-۲)\ ...\ (۲)(۱)}\ I_n \quad (\text{۱نمره})\\
&= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^{۲n}\ x^{۲n}}{۲^n\ n!(۲n-۱)...\ (۱)}\frac{(۲n-۱)...(۱)}{۲^n}I_۰ (\text{۱نمره})\\
&= I_۰\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n}}{n!} \quad (\text{۱نمره})\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{۲}e^{x^۲} \quad (\text{۱نمره})
\end{aligned}$$