# نظریهٔ فاجعه ها

رضا کرمی

دربسیاری اززمینه‌های سنتی کاربردریاضی، چون فیزیک، شیمی، و مهندسی به پدیده‌هایی برمی‌خوریم که می‌توان ازآنها به نوعی ناپیوستگی جهش واربه ازای تغییرپیوستهٔ یک یا چندعامل کنترل کنندهٔ یک فرآیند تعبیرکرد. مثال بارزی ازاین نوع‌پدیده‌ها، همان است که درفیزیک و مهندسی "امواج تکانه‌ای"(۱) نامیده می‌شود. رفتارناپیوسته وناهموار این گونه‌پدیده‌ها تادیرزمانی اعمال مدلهای متعارف ریاضی‌راکه‌عموما "بر پایه معادلات دیفرانسیل بنا می‌شوندعملا" ناممکن می‌ساخت. از این زمینه‌ها گذشته، گسترهٔ وسیعی ازدانش بشری، اززیست شناسی گرفته تاعلوم اجتماعی به‌خاطرآنکه‌عمدتا "باپدیده‌های بارفتارمنفصل وجهشی سروکارداشته‌اند، سالهای متمادی ازپذیرش تحلیل دقیق ریاضی، سرباززمی‌زدند. وازاینرو بودکه‌این دانشها تامدتها ازقلمرو" علوم‌دقیقه" بسیاردوربودند. اما

نیاز به ساختن الگوهای مناسبی برای این پدیده‌ها، سرانجام به پیدایش ورشد نظریه‌ای ریاضی انجامید که می‌توانند تا حد زیادی این گونه پدیده‌های جهشی را دربرگیرد و توصیف دقیقی از رفتار آنها به دست دهد. این نظریه که به "نظریه فاجعه‌ها" (۲) شهرت یافته، گرچه عمری حدود دو دهه دارد، اما در این مدت کوتاه به خاطر کاربردپذیری شگفت خود و قدرت زیادی که در تحلیل پدیده‌های گسسته از خود نشان داده، به رشد و گسترش سترگی دست یافته است.

پیدایش رسمی این نظریه به انتشار اثر معروف رنه توم، ریاضیدان فرانسوی تحت عنوان "ایستایی ساختاری و پیدایش اندام واره‌ها" (۳) (۱۹۷۲)، باز می‌گردد. توم که خود از بنیانگذاران مباحث جدیدی در زیست شناسی ریاضی است، این نظریه را عمدتا "برای تحلیل پدیده‌های زیستی و وراثتی خاصی که رفتارنا پیوسته‌ای دارند" به کار برد. پس از آن تاریخ این نظریه هم از نظر پایه‌های تئوریک خود و هم از نظر دامنه کاربردهایش، بسرعت رشد یافته و گسترش پیدا کرده است، و امروزه از مهمترین زمینه‌های ریاضیات کاربسته شمار می‌رود.

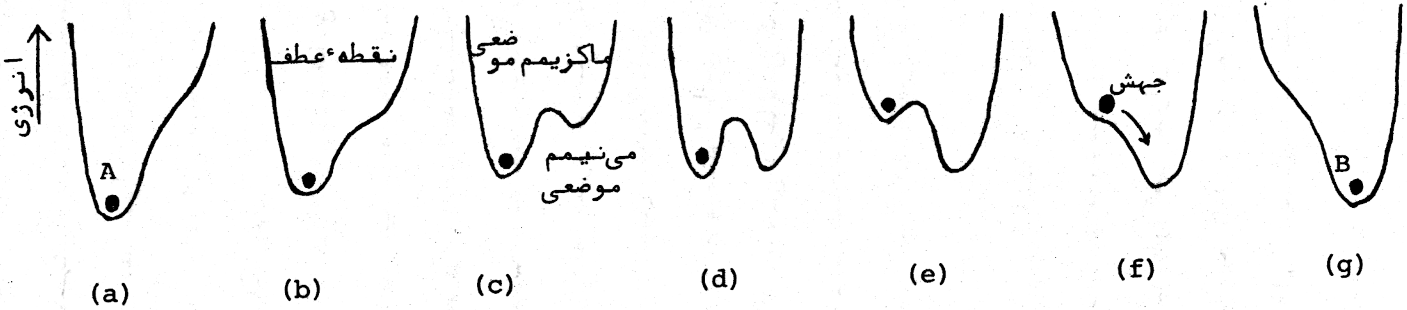
گرچه ورود به این نظریه مستلزم دانش حداقلی از بسیاری نظریه‌های ریاضی و از آن جمله توپولوژی دیفرانسیلی و نظریهٔ تکینگی (۴) است، اما در این مقاله خواهیم کوشید بی‌آنکه از نظر فنی به مطلب نزدیک شویم، شرحی اجمالی از برخی جنبه‌های تئوریک و زمینه‌های کاربرد نظریه به دست دهیم.

* * * * *

روشهای " نظریهٔ فاجعه‌ها " در اصل بر این حقیقت شناخته شده متکی است که رفتار بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، زیستی، و اجتماعی را می‌توان

بارفتار" تابع پتانسیل "متناظرباآن پدیده‌ها پیوند داد.

مثالهای آشنایی از این وضعیت، توابع پتانسیلی است که به دستگاههای مکانیکی درفیزیک نسبت داده می‌شود. می‌دانیم که مکانیک نیوتونی-لاگرانژی درواقع چیزی نیست جز ارائه‌گونه‌هایی از این تناظروسپس مطالعهٔ رفتار توابع پتانسیل متناظرشده. اما مفهوم تابع پتانسیل را می‌توان بسط داد و از آن برای مطالعه‌نمودهای زیستی‌واجتماعی‌هم استفاده کرد. از این دیدگاه پیدایش هرنمودخاص درفرآیندتحول یک پدیده، متناظراست‌با یک نقطهٔ کمینهٔ تابع پتانسیل وابسته‌به‌آن پدیده. یک پدیده‌خاص می‌تواند‌در یک زمان یک یا چندحالت پایای ممکن داشته‌باشد (تابع پتانسیل آن پدیده، چندنقطهٔ کمینه‌داشته‌باشد). اگربتوان با تغییرپارامترهای کنترل کنندهٔ یک پدیده، به‌نحوی تابع پتانسیل‌حاکم بررفتارپدیده را بگونه‌ای پیوسته‌تغییرداد، دریک لحظه‌خاص ممکن است حرکت پدیده از یک نقطهٔ کمینه به نقطهٔ کمینهٔ دیگر (یعنی دگرگونی‌درحالت پدیده) ماهیتی گسسته وجهش وار بیابد. مثالی می‌زنیم. درشکل (۱) فرض کنیم‌نمودار (a) وضعیت تابع پتانسیل یک پدیده‌فیزیکی خاص را نمایش دهد. همان گونه‌که‌آشکار است، این تابع تنها یک نقطهٔ کمینه (در A) دارد. وبنابراین پدیده‌درحالت ایستایی است. بتدریج با تغییرپارامترهای معینی تابع پتانسیل حاکم‌بررفتارپدیده راآهسته‌آهسته تغییرمی‌دهیم. بدین ترتیب تابع پتانسیل ابتدا یک نقطهٔ عطف، سپس دو مینیموم موضعی ویک ماکزیموم موضعی‌پیدا می‌کند. هنگامی‌که پدیده به وضعیت (f) می‌رسد، یکی ازنقاط مینیموم‌تابع (یعنی همان حالتی که‌سیستم‌درآن قرارداشت) ازبین



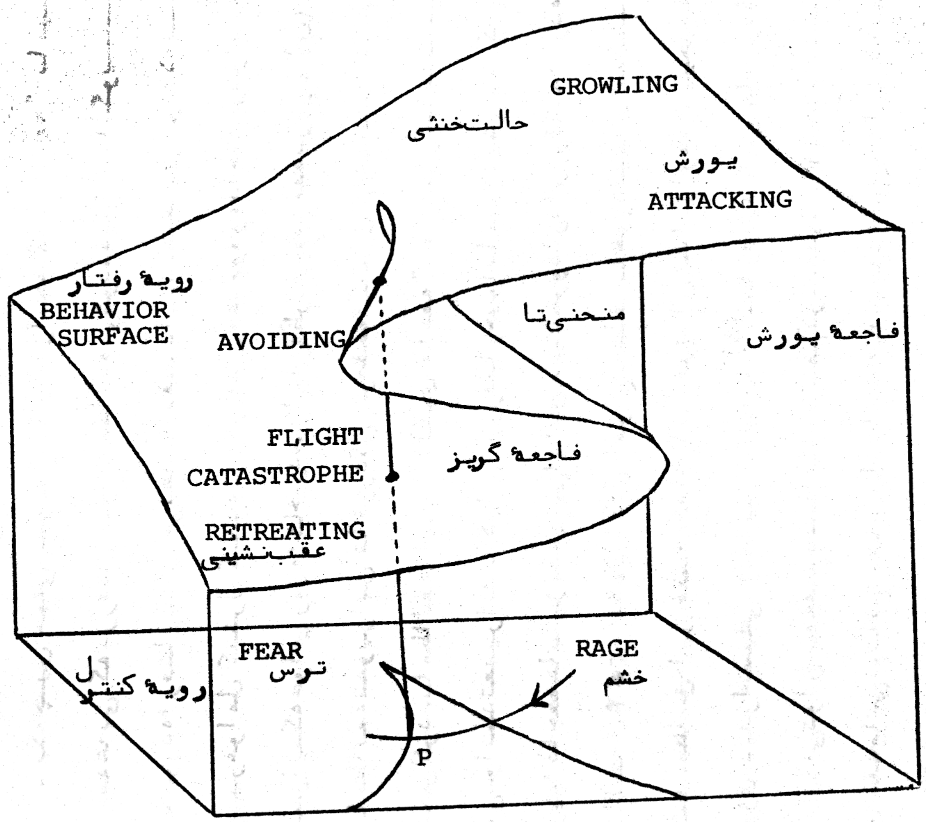

شکل (۱)

می‌رودوسیستم ناگزیراست به نقطهٔ B " بیافتد" حرکت سیستم دراین روند " سقوط "، حرکتی ناپیوسته وجهشی است. سرانجام سیستم درنقطهٔ B آرام - می‌گیردونقطهٔ ایستای جدیدی پدیدمی‌آورد. (درواقع این همان رفتار "ماشین فاجعهٔ زیمن " است. برای شرح بیشترمراجعه‌کنیدبه مرجع شماره ۱)

اکنون دقیقتربه موضوع‌نظربیفکنیم :

فرض‌کنیم $V: R^n \times R^r \longrightarrow R$ یک تابع پتانسیل باشد. $R^r$ رافضای کنترل یافضای پارامتر (یعنی مجموعهٔ متغیرهایی که رفتارپدیده راکنترل می‌کنند) و $R^n$ رافضای حالت پدیده می‌نامند، ازسوی دیگرمی‌توان V راخانواده‌ای هموارازتوابع پتانسیل روی $R^n$، چون $\{V_i\}_{i\varepsilon R^r}$ در نظرگرفت. نظریهٔ فاجعه‌هادرواقع چیزی نیست جزمطالعهٔ مجموعهٔ کمینه‌های چنین خانواده‌ای ازتوابع پتانسیل. قضیه‌اساسی نظریه‌فاجعه‌ها، یعنی " قضیهٔ رده‌بندی توم" که‌درواقع جوهراساسی تمام‌نظریه می‌باشد، بیان این حکم‌است که‌درحالت $r \leqslant ۴$ (یعنی درحالاتی که‌تعدادپارامترهای کنترل کنندهٔ سیستم ازچهاربیشترنباشد) تمام‌فاجعه‌های ممکن رامی‌توان به یکی از" هفت‌فاجعهٔ ابتدایی "برگرداند. برای‌درک بهتراین قضیه مثال زیررادرنظربگیریم(شکل ۲):

این شکل مدل رفتاری یک حیوان رانشان می‌دهد. به‌علل روانی - زیستی پارامترهای کنترل کننده‌رفتاردرموردحیوان تنهادوعامل "ترس" و"خشم" است. صفحهٔ شامل دومحوری که‌بطورکمی میزان این دوعامل رانشان می‌دهند، "رویهٔ کنترل "می‌نامیم که‌درواقع نمایش فضای کنترل رفتار است. رویهٔ بالایی "رویه‌رفتار" است ونواحی مختلف‌آن حالتهای روانی


GROWLING
حالت‌خنثی
یورش
ATTACKING
رویهٔ رفتار
BEHAVIOR
SURFACE
AVOIDING
منحنی‌تا
فاجعهٔ یورش
FLIGHT
CATASTROPHE
فاجعهٔ گریز
RETREATING
عقب‌نشینی
FEAR
ترس
RAGE
خشم
رویهٔ کنترل
P

شکل (۲)

مختلف حیوان را نمایش می‌دهند. فرض کنیم عوامل محیطی حاکم بر حیوان درطول منحنی $\Gamma$ درصفحهٔ کنترل تغییر کنند. به این ترتیب رفتار حیوان به طور پیوسته ونا محسوسی دگرگون می‌شود. هنگامی که عوامل کنترل کننده از نقطهٔ $P$ گذر کنند، رفتار حیوان از نقطهٔ $K$ برروی رویهٔ رفتار به نقطهٔ $L$ "می‌جهد". یک چنین جهشی نمونه‌ای است از آنچه یک "فاجعه" نامیده می‌شود. فاجعه‌هایی که در رفتار حیوان مشاهده می‌شود دقیقاً "با الگویی که رویهٔ تاخوردهٔ رفتار نشان می‌دهد مطابقت دارند. همچنین توجه کنید که جهت تغییر عوامل کنترل کننده نیز در وقوع یا عدم وقوع فاجعه موثر است. نکته جالبتر اینکه خواص رویهٔ تاخورده، را (از نظر وقوع فاجعه بر روی آن) — می‌توان با مطالعه تصویر این تاخوردگی برصفحهٔ کنترل (منحنی $\Delta$) دقیقاً "مشخص کرد. با مطالعهٔ این "الگوی فاجعه"، رفتارشناسان براحتی می‌توانند تغییرات ناگهانی دررفتار حیوانات را پیش بینی کنند.

نظریهٔ فاجعه‌ها با پژوهشهایی از این دست سروکار دارد و قضیهٔ "رده‌بندی توم" درحالت $r \leqslant 4$ دقیقاً "شکل انواع مختلف تاخوردگیهای ممکن را مشخص می‌کند. مطابق این قضیه، که اثبات دقیق آن به ابزارهای پیچیده‌ای از توپولوژی دیفرانسیلی ونظریهٔ خمینه‌ها [5] نیاز دارد، این تاخوردگیها (فاجعه‌ها) را می‌توان به هفت دستهٔ کلی تقسیم کرد. جدول (۱) نام این فاجعه‌های مقدماتی وتابع پتانسیل وابسته به پدیده‌هایی که این فاجعه‌ها درآنها اتفاق می‌افتند را به دست می‌دهد. "قضیهٔ رده بندی توم "نتیجهٔ ریاضی زیبا وشگرفی است که نوعی نظم خارق العاده حاکم بر "بی نظمیهای طبیعت" را آشکار می‌کند ونمونه‌ای است از قدرت شگفت انگیز الگوهای ریاضی.

| فاجعه | ابعاد کنترل | ابعاد رفتار | تابع پتانسیل حاکم بر حرکت پدیده |
|---|---|---|---|
| تا | ۱ | ۱ | $\frac{1}{3}x^3 - ax$ |
| نقطه بازگشت | ۲ | ۱ | $\frac{1}{4}x^4 - ax - \frac{1}{2}bx^2$ |
| دم پرستویی | ۳ | ۱ | $\frac{1}{5}x^5 - ax - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}cx^3$ |
| پروانه‌ای | ۴ | ۱ | $\frac{1}{6}x^6 - ax - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}cx^3 - \frac{1}{4}dx^4$ |
| نافی هذلولوی | ۳ | ۲ | $x^3+y^3+ax+by+cxy$ |
| نافی بیضوی | ۳ | ۲ | $x^3-xy^2+ax+by+cx^2+cy^2$ |
| نافی سهموی | ۴ | ۲ | $x^2y+y^4+ax+by+cx^2+dy^2$ |

جدول (۱) ـ فاجعه‌های ابتدایی : حروف a ، b ، c و d متغیرهای کنترل و حروف x و y متغیرهای رفتارهستند.

کاربردها :

فیزیک وآیرودینامیک : کثرت پدیده‌های فیزیکی که درآنها موجهای تکانه‌ای رخ می‌دهد ،فیزیک را به‌صورت یکی از زمینه‌های اصلی به‌کارگیری روشهای نظریهٔ فاجعه‌ها درآورده است .این روشها بخصوص در آیرودینامیک وآیروناتیک (فیزیک پرواز هواپیماها) ،برای مطالعهٔ رفتارهواپیماها در سرعتهای بسیاربالا (که همواره‌با نوعی تغییر ناگهانی فشارهمراه‌است )کاربرددارند .

زیست شناسی‌وعلم‌وراثت : گسترهٔ وسیعی ازپدیده‌های زیستی ازساده‌ترین تقسیم‌سلولی‌درتک یاختگان گرفته‌تا پیچیده‌ترین سازوکارهای وراثتی،همگی ازالگوهای گسسته پیروی می‌کنند .نظریهٔ فاجعه‌ها با رده‌بندی و مطالعهٔ این الگوها ،امکانات وسیعی برای پیش‌بینی فرآیندهای زیستی دراختیار زیست شناسان قرارمی‌دهد .بسیاری ازاختلالات هورمونی راکه منجربه‌نابهنجاریهای‌اندامی می‌شود ،می‌توان باروشهای این نظریه مطالعه وکنترل کرد .این گونه مطالعات می‌تواننددرآینده منجربه‌انقلابی درروشهای پزشکی گردد..

روانشناسی وعلوم‌اجتماعی: الگوهای رفتاری جانداران ،چه‌به‌صورت
فردی وچه‌به‌صورت اجتماعی،زمینهٔ دیگری‌است‌از
حوزهٔ کاربستهای روشهای نظریهٔ فاجعه‌ها .بدین
گونه‌جنبه‌هایی ازرفتارزیستمندان که‌تا
مدتها درحیطهٔ علوم‌اجتماعی‌بود ،اینک به‌عرصهٔ
تحلیل دقیق ریاضی‌بدل می‌شوند .

اینها ودهها زمینهٔ دیگر ،نمونه‌هایی است‌ازدامنهٔ کاربردنظریهٔ فاجعه‌ها . این نظریهٔ‌که‌عمدتاً‌توسط ریاضیدانانی چون رنه‌توم ،زیمن، -ویتنی ، بروکرودیگران پدیدآمده‌ورشدکرده‌است ،هنوزدرمراحل ابتدایی‌گسترش خودمی‌باشد .گرچه‌دامنه‌گسترده‌کاربردهای نظریه‌محرک نیرومندی است برای گسترش روزافزون آن .شایددرآینده‌نتایج گرانقدری ازاین گسترش به‌بارآید .

توضیحات

(۱) Shock Waves (۲) Catastrophe Theory

(۳) Stabilité Structurelle et Morphogénèse

(۴) Sigularity Theory (۵) Monifolds Theory

## مـــراجع :


(1) E.C.Zeeman, " *Catastrophe Theory* ",Scientific American , 234 (Apil 1976)

(2) Y.C.Lu, *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory* " ,Springer-Verlag ,NewYork,1976.