چند واقعه مهم ـ چند گام به پیش

یحیی تابش

دریکی دوسال اخیر چند قضیهٔ مهم که مدتها به صورت حدسهای اثبات نشده‌ای باقی مانده بودند، به اثبات رسیدند. این اثباتها ازجهات گوناگونی حائز اهمیت هستند. نخست به بیان ساده‌ای از این قضایای معروف توجه کنید:

i) **حدس موردل** (۱): فرض کنیم f یک بسجملهٔ همگن سه متغییری باشد که ضرایب آن غیرصفر هستند، همچنین فرض کنیم f ناتکین باشد. اگر درجهٔ f بزرگتر از یا مساوی ۴ باشد، آنگاه تعداد جوابهای $f = 0$ که x و y و z نسبت به یکدیگر اول باشند، متناهی است.

ii) **حدس بیبرباخ** (۲): فرض کنیم f روی یک دایره تحلیلی باشد،

همچنین فرض کنیم f یک به یک ونرمال شده باشد، آنگاه اگر a_n برابر n مین ضریب بسط تیلور آن باشد، به ازای هر n داریم $a_n < n$.

iii) حدس پوانکاره [۳]: فرض کنیم M یک خمینهٔ (ماینفلد) فشردهٔ ۴ بعدی بدون مرزباشد. اگر M همبندساده با عدد مشخصهٔ اویلر ۲ باشد، آنگاه M با کرهٔ ۴ بعدی هومئورف است .

حدس موردل را فالتینگز [۴]، حدس بیبرباخ را دوبرانژ [۵]، وحدس پوانکاره را فریدمان [۶] ثابت کرده اندکه آنان را شهرهٔ آفاق کرده است .

قضیهٔ معروف دیگری نیزکه بیش از یک قرن حل نشده باقی مانده واکنون درمدنظرریاضی‌دانان قرارگرفته حدس ریمان [۷] است، حدس ریمان به قرارزیراست :

حدس ریمان : صفرهای تابع زتا روی خط $R_e(z) = \frac{1}{2}$ قراردارند .

برای حدس ریمان نیزاثباتی عرضه شده است که هنوزدرستی آن تائید نشده است .

دراین شماره با ویژگیهای اثبات فالتینگز آشنا می‌شویم ودرشماره های بعدی بقیه اثباتها رادرحدامکان موردتجزیه وتحلیل قرارمی‌دهیم .

درباب اثبات حدس موردل

گردفالتینگز، ریاضیدانی ازدانشگاه فویرتال (آلمان غربی) درسال ۱۹۸۳ هنگامی‌که هنوز سی‌سالش هم تمام نشده بود، اثباتی برای حدس موردل – عرضه‌کرد. اثبات فالتینگز هیجان زیادی درجوامع ریاضی‌جهان به‌پاکرد، تا آنجاکه‌کار شگفت انگیزاورا قضیهٔ قرن یا دست کم قضیهٔ قرن درنظریهٔ اعداد نام نهادند.

فالتینگز دراثبات خوداز نتایج متعدد به‌دست آمده درهندسهٔ جبری استفاده می‌کند. او با نبوغی خاص، قضایای معروفی را به‌یکدیگر مرتبط کرده است وبا نگرشی کلیدی از کنار هم قراردادن نتایج موجوداثبات خودرا ارائه می‌دهد.

اهمیت دیگر اثبات فالتینگز، ارتباط آن با آخرین قضیهٔ فرما ست. آخرین قضیهٔ فرما حکمی است مبنی برآنکه معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ ، به‌ازای $n>2$ ، جواب صحیح و مثبت ندارد. ارتباط اثبات اخیر با قضیهٔ فرما بدین ترتیب است که هرجواب صحیح وغیرصفرمانند x ، y ، و z برای معادلهٔ $x^n+y^n = z^n$ متناظر است با یک نقطه با مختصات گویا روی منحنی $u^n+v^n=1$ وبالعکس . درنتیجه اثبات می‌شودکه تعداد جوابهای معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ به‌ازای $x>2$ ، متناهی است.

فالتینگز دراثبات خود از بیش از ۹ ایده وقضیهٔ اساسی درهندسهٔ جبری، هندسه دیفرانسیل، نظریهٔ گالوا، نظریهٔ گروهها، ونظریه‌های دیگر استفاده کرده است. ولااقل ۶ قضیهٔ اساسی را به‌اثبات رسانده که اینک این قضایا از ارزشهای اساسی برخوردار شده‌اند. درکار فالتینگز یک بار دیگر

گوهر وحدت ریاضیات متبلور شده است وتحرک وتوانایی خارق العاده ٔ ریاضیات قرن بیستم به اثبات رسیده است. کارا و پیام آور لزوم ارتباط هرچه بیشتر ریاضیدانان جهان با یکدیگر است و بیانگر این نکته است که ریاضیات حاصل تلاش نسلهای مختلفی از ملیتهای گوناگونی است که تبلور این تلاشها در ریاضیدانی چون فالتینگز متجلی می‌شود.

حدس موردل از دیدگاه هندسی معادله ٔ فرما برخاسته است. هر ریشه ٔ صحیح معادله ٔ $x^n + y^n = z^n$ متناظر است با نقطه ای گویا روی منحنی $u^n + v^n = 1$، وبعکس، نقاط گویای روی این منحنی با ریشه های صحیح معادله ٔ فرما متناظرند. حدس فرما می‌گوید تنها نقاط گویای منحنی $u^n + v^n = 1$ نقاط بدیهی ($u=0$ و $v=1$ ، یا $u=1$ و $v=0$) هستند.

البته، دست اندرکاران هندسه ٔ جبری میل دارند که با منحنیهای تصویری و اعداد مختلط کار کنند. صفحه ٔ تصویری مختلط عبارت است از رده های هم ارزی سه تایی‌هایی از اعداد مختلط بجز (۰,۰,۰)، دو، سه تایی هم ارزند درصورتی که یکی مضربی از دیگری باشد. یک منحنی تصویری مجموعه ٔ همه نقاط صفحه ٔ تصویری است که در معادله ای همگن (مثلا" $x^n + y^n = z^n$) صدق می‌کنند. این منحنی ناتکینه است درصورتی که در هر نقطه ٔ آن صفحه ٔ مماسی تعریف شده باشد (یعنی همه ٔ مشتقهای پاره ای معادله صفر نباشند).

منحنیهای تصویری، موجودات آشنایی هستند. آنها رویه های بسته ای هستند که از لحاظ توپولوژیک با گونه ٔ خود ــ یعنی تعداد سوراخهای روی آن ــ مشخص می‌شوند. مثلا"، گونه ٔ منحنیی که با ضابطه ٔ $x^n + y^n = z^n$ تعریف

می‌شود برابر $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ است .

در این مورد نیز نقاط گویای روی منحنی تصویری با ریشه‌های صحیح معادلهٔ همگن متناظرند. روی هر منحنی چند نقطهٔ گویا هست؟ در ۱۹۲۲ موردل حدس زد که هر منحنی تصویری ناتکینه (روی هر هیأت جبری) با گونهٔ بزرگتر از یک، تعدادی متناهی نقطهٔ گویا دارد. حدس او معادلهٔ فرما را نیز، به ازای $n > ۳$، دربردارد (حالت $n=۳$ را قبلاً" اویلر ثابت کرده بود)، البته این حدس بسیار کلیتر است.

فالتینگز، حدس موردل، وحتی بیشتر از آن را ثابت کرده است. درواقع مقالهٔ چهل صفحه‌ای او عملاً" حدس تکنیکی شافارویچ (۸) را که مستلزم حدس موردل است ثابت کرده است.

آیا این قضیه راهگشای اثبات کامل و حل نهایی قضیه فرماست؟ پاسخی قطعی برای این سؤال وجود ندارد. درهر حال، اثبات حدس موردل رویداد ریاضی مهمی است.

توضیحات

(۱) Mordell (۲) Biberbach (۳) Poincare

(۴) G.Faltings (۵) L.DeBrange (۶) Freedman

(۷) Rieman (۸) Shafarovich

منابع برای مطالعهٔ بیشتر

(1) Ewing, J., *Editorial*, The Mathematical Inteligencer, Vol.5, No 3, 1983.

(2) Bloch, S., *The proof of Mordell conjecture*, The Mathematical Intelligencer, Vol.6, No.2, 1984.

(3) Ewing, J., *Current Events*, The Mathematical Intellingencer, Vol.7, No.1, 1985.