اپسیلون از کجا آمد؟

(کوشی و اصول حسابان دقیق)

نوشتهٔ جودیت و. گرابینر

ترجمهٔ: بهنام بازیگران

دانش‌آموز: سرعت ماشین ۵۰ کیلومتر در ساعت است. این جمله به چه معنی است؟

معلم: به ازای هر $\varepsilon>0$، δیی وجود دارد به طوری که اگر $|t_2-t_1|<\delta$ آنگاه $\left|\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}-50\right|<\varepsilon$.

دانش‌آموز: چطور ممکن است چنین جوابی به فکر کسی برسد؟

شاید این گفتگو به یادمان بیاورد که پایهٔ دقیق برای حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) به هیچ وجه شهودی نیست ـ در واقع، کاملاً برعکس. حسابان موضوعی است که به بررسی سرعتها و فواصل، مماسها و مساحات می‌پردازد. هنگامی که نیوتن و لایب‌نیتز، حسابان را در اواخر قرن هفدهم به وجود آوردند، به اثباتهای دلتا ـ اپسیلونی متوسل نشدند. یک صد و پنجاه سال طول کشید تا این نوع اثبات پدید آید. این بدین معنی است که احتمالاً این کار بسیار مشکل بوده، و جای تعجب نیست که دانش‌آموز

امروزی پایهٔ دقیق حسابان را مشکل درمی‌یابد. پس، چگونه حسابان دارای پایهٔ دقیقی به زبان جبرنامساویها شده است؟

اثباتهای دلتا ـ اپسیلونی اولین بار در آثار آگوستین ـ لوییز کوشی (۱۷۸۹–۱۸۶۷) یافت شده‌اند. البته در این امر همه اتفاق آراء ندارند، زیرا کوشی تعریفی کاملاً "تحت اللفظی" از حد داده است، که در نظر اول شبیه به تعاریف امروزی نیست: "هرگاه مقادیر پی در پی منسوب شده به متغیری یکسان به طور نامحدودی به مقداری معین میل کنند به طوری که در خاتمه آنها به همان کوچکی مطلوب از آن اختلاف داشته باشند، مقدار اخیر حد بقیه نامیده می‌شود". کوشی همچنین تعریفی کاملاً "تحت اللفظی" از مشتق $f(x)$ به عنوان حد خارج قسمت تفاضلهای $(f(x+h)-f(x))/h$ هنگامی که h به سمت صفر می‌رود، داده است، عبارتی بسیار شبیه آنهایی که قبلاً توسط نیوتن، لایب نیتز، دالامبر، ماکلورن و اویلر، ارائه شده‌اند. اما آنچه مهم است این است که کوشی چنین عبارات تحت اللفظی را هنگامی که آنها را در اثباتهایش احتیاج داشته به زبان دقیق نامساویها ترجمه کرده است. مثلاً، برای مشتق:

فرض کنید δ و ε دو عدد بسیار کوچک باشند، ولی طوری انتخاب شده است که به ازای همهٔ مقادیر عددی (یعنی مطلق) h، کوچکتر از δ و به ازای هر مقدار x [در بازهٔ تعریف]، نسبت $(f(x+h)-f(x))/h$ همیشه بزرگتر از $f'(x)-\varepsilon$ و کوچکتر از $f'(x)+\varepsilon$ خواهد بود.

همین یک مثال کافی خواهد بود تا نشان دهد که چگونه کوشی حسابان را دقیق بنا کرد، زیرا سوالی که در مقالهٔ حاضر مورد نظر است این نیست که "چگونه اثبات دقیق دلتا ـ اپسیلونی ساخته شده است؟" همهٔ ما به عنوان وراث فکری کوشی این را می‌دانیم. سوال اصلی این است که، چگونه و چرا کوشی توانست حسابان را بر پایه‌ای دقیق قرار دهد در حالی که

اسلافش قادرنبودند؟ جوابهای این سؤال تاریخی نمی‌تواندبا تامل کردن برروابط منطقی بین مفاهیم‌حاصل شودبلکه با بازنگری موشکافانه به گذشته‌ودیدن اینکه‌درواقع بیان فعلی مطالب چگونه ازگذشته حاصل می‌شود. بنابراین، ما موقعیت ریاضی رادرقرون هفدهم وهیجدهم بررسی خواهیم‌کرد- دورنمایی که‌دربرابرآن ما می‌توانیم‌نوآوری کوشی رادرک کنیم. ما تکنیکهای قدرتمندحساب این دوره پیشین وجنبه‌های نسبتاً" نا موثرآن راکه‌برای توجیه‌کردن آنها به‌کارمی‌رفت، توصیف خواهیم‌کرد. آنگاه بحث می‌کنیم‌که‌چگونه احساسی ازضرورت دقیق سازی آنالیزدرقرن هیجدهم بتدریج توسعه یافت. مهمتراز همه، پیشرفت تکنیکهای ریاضی لازم‌برای دقت تازه‌را، ازکارافرادی نظیراویلر، دالامبر، پوآسون ومخصوصاً" لاگرانژ، توضیح خواهیم‌داد. درخاتمه، نشان خواهیم‌داد که‌چگونه این نتایج ریاضی، گرچه اغلب به‌منظورهایی سوای ساختن بنیادهای حساب توسعه یافته‌بودند، توسط کوشی درساختن آنالیزجدیددقیق به‌کار رفتند.

به‌کارگیری آنالیز: ازنیوتن تااویلر. دراواخرقرن هفدهم، نیوتن و لایب نیتز، تقریبا "همزمان حساب را مستقلا" اختراع‌کردند. این اختراع‌شامل سه‌چیزبود. اولا"، آنها مفاهیم‌کلی خارج قسمت دیفرانسیلی وانتگرال رااختراع کردند (اینها اصطلاحات لایب نیتزهستند، نیوتن این مفاهیم‌را "فلوکسیون" و "فلوئنت" نامید). ثانیا"، آنها نمادی‌برای این مفاهیم‌اختراع‌کردندکه‌حساب را تبدیل به‌یک آلگوریتم‌کرد: روشها نه‌تنها کارآمدبودندبلکه‌به‌کارگیری آنها نیزآسان بود. نمادهای آنها $\int ydx$ ، $dy/_{dx}$ دارای قدرت اکتشافی زیادی‌بودند، وما، امروزه‌هنوزاز

لایب نیتز ، و $\dot{x}$ نیوتن استفاده می‌کنیم. ثالثا" ، هردو فهمیده بودند که فرایندهای اصلی یافتن مماسها و مساحتها ، یعنی مشتق گیری و انتگرال گیری ، متقابلا" معکوس یکدیگرند - چیزی که اکنون ما آن را قضیهٔ اساسی حسابان می‌نامیم.

با ابداع حسابان ، ریاضیدانان مجهز به مجموعه‌ای از روشهای فوق العاده قوی برای حل کردن مسائل در هندسه ، فیزیک ، و در آنالیز محض شدند. اما ماهیت این مفاهیم اصلی چه بود؟ برای لایب نیتز خارج قسمت دیفرانسیلی ، نسبتی از تفاضلهای بینهایت کوچک بود و انتگرال ، مجموعی از بینهایت کوچکها ، برای نیوتن مشتق ، یا فلوکسیون ، به عنوان میزانی از تغییر توصیف شده بود ؛ انتگرال ، یا فلوئنت نیز عکس آن بود. در واقع در طول قرن هیجدهم ، انتگرال عموما" به عنوان معکوسی برای مشتق در نظر گرفته می‌شد. می‌توان تصور کرد که اگر از لایب نیتز پرسیده شود که یک بینهایت کوچک دقیقا" چیست ، یا از نیوتن پرسیده شود که میزانی از تغییر ممکن است چه باشد ، جواب نیوتن ، بهترین جواب در قرن هیجدهم ، آموزنده است. نسبتی از کمیات متناهی را در نظر بگیرید (با نمادهای امروزی ((f(x+h)-f(x))/h) وقتی که h به صفر میل کند. عاقبت آن نسبت چیزی می‌شود که نیوتن آن را یک " نسبت غایی " می‌نامید. نسبتهای غایی "حدودی هستند که نسبتهای کمیات به طرف آن نزول می‌کنند بدون آن که همیشه حد همگرا شود ، و آنها به آن نزدیکتر از هر تفاضل داده شده‌ای میل می‌کنند اما هرگز نه پیشتر از آن بروند ، و نه هرگز به آن برسند تا اینکه کمیات صفر شوند". می‌توانیم اصطلاحات نیوتن را ، به جز " رسیدن "به حد هنگامی که کمیات صفر شوند ، به زبان جبری خودمان ترجمه کنیم. به هر حال نه خود نیوتن این کار را کرد و نه بیشتر پیروانش در قرن هیجدهم. بعلاوه ، "هرگز پیشتر از آن نروند" اجازه نمی‌دهد متغیری ، در حول حدش نوسان کند. بنابراین اگرچه ایدهٔ نیوتن ، تصویری شهود پسند است ولی

به‌صورتی که‌هست برای اثباتهایی درباره‌ٔ حدودقابل استفاده‌نیست ونمی‌توانست باشد. تعریف خوبی به‌نظرمی‌رسد، امادرعبارات جبری فهمیده یا به‌کاربرده‌نشد.

اما اکثرریاضیدانان قرن هیجدهم اعتراض می‌کردندکه "چرانگران بنیادها باشیم؟" درقرن هیجدهم، حسابان که‌به‌طورشهودی فهمیده‌شده‌بودو به‌طورآلگوریتمی به‌کاررفته‌بود، درقلمرووسیعی ازمسائل به‌کارمی‌رفت. مثلا"، معادلهٔ دیفرانسیل پاره‌ای برای تارمرتعش حل شد؛ معادلات حرکت برای منظومهٔ شمسی حل شدند؛ تبدیل لاپلاس وحساب وردشها وتابع گاما ابداع‌شدندوبه‌کاررفتند؛ همهٔ مکانیک به‌زبان حسابان درآمد. اینها موفقیتهای بزرگی برای ریاضیدانان قرن هیجدهم‌بودند. هنگامی‌که‌چنین مسائل مهمی می‌توانستندبه‌وسیلهٔ حسابان با موفقیت بررسی شوند، دیگرچه‌کسی می‌توانست نگران بنیادها باشد؟ آنچه‌که‌به‌حساب می‌آمد قضایا بودند.

با بررسی مثالی که‌هم‌رهیافت "غیرانتقادی" به‌مفاهیم‌قرن هیجدهم وهم‌توانایی وسیع تکنیکهای آن قرن را، ازکاراستادبزرگ چنین تکنیکهایی: لئونارد اویلر، شرح می‌دهد، این موضوع‌بهترتصدیق می‌شود. مساله‌پیداکردن مجموع‌سری

$$۱/۱ + ۱/۴ + ۱/۹ + \cdots + 1/k^2 + \cdots$$

است که‌آشکارا مجموع‌متناهی دارد، زیرا با سری

$$۱ + \frac{۱}{۱.۲} + \frac{۱}{۲.۳} + \frac{۱}{۳.۴} + \cdots + \frac{1}{(k-1).k} + \cdots$$

که‌مجموعش برابر ۲ است، ازبالاکراندار است؛ یوهان برنولی این مجموع را با به‌کارگیری $\cdots + \frac{۱}{۳.۴} + \frac{۱}{۲.۳} + \frac{۱}{۱.۲}$ به‌عنوان تفاضل بین

سری $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}$ وسری $\cdots+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ ، ومشاهدهٔ این که این تفاضل درهم می‌رود، پیدا کرده بود.

روش مجموع‌یابی اویلر برای $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ از لمی در نظریهٔ معادلات استفاده می‌کند: معادله‌ای بسجمله (چندجمله‌ای) که جملهٔ ثابت آن یک است داده شده است، در این صورت ضریب جملهٔ خطی برابر مجموع معکوس ریشه‌ها با علامت قرینه است. این قضیه با درنظرگرفتن معادلهٔ $(x-a)(x-b)=0$ با ریشه‌های a و b، هم کشف وهم مدلل شده بود. با ضرب کردن و آنگاه تقسیم کردن بر ab، چنین به دست می‌آید $(\frac{1}{ab})x^2-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})x+1=0$؛ حال قضیه بدیهی است، به همان اندازه که تعمیم آن به معادلات درجهٔ بالاتر.

سپس اویلر معادلهٔ $\sin x=0$ را درنظر می‌گیرد.

اویلر با بسط این معادله، به‌عنوان یک سری نامتناهی، تساوی

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots=0$$

را به دست می‌آورد.

با تقسیم کردن بر x حاصل می‌شود
$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots=0$$

درخاتمه با جایگذاری $x^2=u$ حاصل می‌شود

$$1-\frac{u}{3!}+\frac{u^2}{5!}-\ldots=0$$

اما اویلر فکر می‌کرد که سریهای توانی را می‌توان درست مانند بسجمله‌ها به کار گرفت. بنابراین ما اکنون معادله‌ای بسجمله‌ای برحسب u داریم که جملهٔ ثابتش یک است. با به‌کاربردن لم درباره‌ٔ آن، ضریب جملهٔ خطی با علامت قرینه $\frac{1}{6}=\frac{1}{3!}$ است. ریشه‌های معادله برحسب u، ریشه‌های $\sin x=0$ با جایگذاری $u=x^2$ هستند، یعنی π^2 ، $4\pi^2$ ، $9\pi^2,\ldots$. پس این لم ایجاب می‌کند

$$1/6=1/\pi^2+1/4\pi^2+1/9\pi^2+\cdots$$

با ضرب کردن آن در π^2 ،مجموع سری اصلی نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \; .$$

اگرچه انتقاد کردن به براهین قرن هیجدهم ،مانند این ،به خاطر عدم دقت آسان است ،لیکن بی انصافی نیز هست .برای مردانی همچون اویلر بنیادها ،یعنی مشخصات دقیق شرایطی که تحت آنها چنین رفتاری با نامتناهیها یا بینهایت کوچکها مجاز بودند ،خیلی مهم نبوده‌اند ،زیرا آنها بدون چنین مشخصاتی نیز اکتشافات جدید مهمی انجام داده‌اند که نتایج آنها ،در مواردی مانند این ،می‌توانست بسهولت تحقیق شود .هنگامی که بنیادهای حساب در قرن هیجدهم مورد بحث قرار گرفته بود ،به عنوان مطلبی فرعی تلقی شد .مباحث بنیادها در مقدمهٔ کتابها ،در نوشته‌های فلسفی و در نوشته‌های عامه پسند انتشار می‌شدند و ـ همان طور که اکنون هستند و از زمان کوشی نیز چنین بوده‌اند ـ موضوع مقالات در مجلات تحقیقاتی نبودند.

بنابراین ،به جای یک سوال ،اکنون دو سوال در پیش روی خود داریم .سوال اول ،یعنی "تکنیکهای دقیق کوشی از کجا آمدند؟"، در جای خود باقی است .سوال دوم که اکنون باید پرسید این است که چرا حساب را در مرحلهٔ ابتدایی دقیق کنیم؟ اگر در قرن هیجدهم کمتر ریاضیدانی به بنیادها علاقه داشت ،پس کی و چرا نظرها تغییر یافتند؟

مطمئناً "برای کسب دقت ،لازم است ـ هرچند کافی نیست ـ که ابتدا برای آن اهمیت قائل شویم .اما مهمتر از ایجاد دقت لازم است (اگرچه کافی نیست)که مجموعه‌ای از تکنیکها را ،که برای آن منظور مناسب هستند ،در اختیار داشته باشیم .مخصوصاً" ،اگر قرار است حساب با تبدیل یافتن به نامساویها

جبری دقیق طرح شود، باید هم جبر نامساویها و هم حقایقی درباره‌ٔ حسابان را که می‌تواند به زبان جبر نامساویها بیان شود، در دست باشد.

در اوایل قرن نوزدهم، برای اولین بار این سه شرط به دست آمدند: برای دقت اهمیت قائل شدند؛ جبر پیشرفته‌ای از نامساویها وجود داشت؛ و، خاصیتهای معینی درباره‌ٔ مفاهیم اصلی آنالیز به دست آمده بود — حدود، همگرایی، پیوستگی، مشتقها، انتگرالها — خاصیتهایی که در صورت لزوم می‌توانست به زبان نامساویها بیان شود. کوشی، با استفاده از جبر نامساویهای موجود پایه‌ٔ دقیقی به حسابان داد، و ساختمانی منطقاً یکدست از قضایایی درباره‌ٔ مفاهیم حسابان به وجود آورد که توسط ریمان و وایرشتراس دنبال شد. این وظیفه‌ٔ ماست که توضیح دهیم چگونه این سه شرط — جبر نامساویهای پیشرفته، اهمیت دقت، خاصیتهای مناسب درباره‌ٔ مفاهیم حسابان — به وجود آمد.

جبر نامساویها. امروزه جبر نامساویها به خاطر کاربردش به عنوان پایه‌ای برای حسابان، در دروس حسابان مطالعه می‌شود، اما چرا جبر نامساویها باید در قرن هیجدهم، آن هم هنگامی که این کاربردش ناشناخته بود، مطالعه می‌شده است؟ در قرن هیجدهم، اهمیت نامساویها در مطالعه‌ٔ دسته‌ٔ بزرگتری از قضایا بود: تقریبها. مثلاً" معادله‌ٔ $(x+1)^{\mu} = a$ را در نظر بگیرید که μ عدد صحیح نیست. معمولاً" a نمی‌تواند دقیقاً" معین شود، اما می‌تواند با یک سری نامتناهی تقریب زده شود. عموماً "ریاضیدانان قرن هیجدهم با داده شدن n عدد از جملات چنین سری تقریبی، به دنبال محاسبه‌ٔ کرانی بالا برای خطای تقریب بودند — یعنی تفاضل بین مجموع سری و nمین مجموع جزیی. این محاسبه مساله‌ای است در جبر نامساویها. ژان دالامبر آن را برای حالت مهم سریهای دوجمله‌ای حل کرد؛ با داده شدن

عدد از جملات سری n، و به طور ضمنی پذیرفتن این که سری به مجموعش همگرا است، او توانست کرانهای خطا ــ یعنی کرانهای ماندهٔ سری بعد از جملهٔ nام ــ را با کراندار کردن سری از بالا و پایین با تصاعد همگرای هندسی پیدا کند. به همین نحو، ژوزف لویی لاگرانژ روش تقریب جدیدی با استفاده از کسرهای مسلسل اختراع کرد و، با محاسبات فوق العاده بغرنج نامساویها، شرایط لازم و کافی را برای اینکه تکرار داده شده‌ای از تقریب، از تکرار قبلی به نتیجه نزدیکتر باشد به دست آورد. لاگرانژ همچنین ماندهٔ لاگرانژ سری تیلور را با استفاده از نامساوی ای که مانده را از بالا و پایین با مقادیر ماکزیموم و مینیموم مشتق nام کراندار می‌کند، و سپس به کاربردن قضیهٔ مقدار میانی برای توابع پیوسته، به دست آورد. بنابراین به خاطر چنین کاری در قرن هیجدهم، تا پایان آن قرن جبر پیشرفته‌ای از نامساویها وجود داشت، و به کار کردن با آن عادت کرده بودند. به ازای n ی داده شده، عادت داشتند تا خطا ــ یعنی همان اپسیلون ــ را بیابند.

گرایش به دقت. ریاضیدانان در ۱۸۰۰ به یافتن بنیادهای دقیق برای حسابان بسیار علاقه‌مندتر از یک صد سال پیش از آن بودند. این موضوع دلایل بسیاری دارد که هیچکدام بتنهایی کافی نیستند، اما ظاهراً "هنگامی که با یکدیگر عمل کنند کافی خواهند بود. مطمئناً" ممکن است فکر شود که ریاضیدانان قرن هیجدهم به خاطر عدم وجود بنیاد دقیقی که صریحاً "معین شده باشد، همیشه اشتباه می‌کردند. اما این طور نبود. آنها معمولاً "اشتباه نمی‌کردند؛ به دو علت. اول آن که اگر خود را به بررسی متغیرهای حقیقی، توابع یک متغیره، سریهایی که توانی هستند و توابعی که از مسائل فیزیکی ناشی می شوند محدود کنیم، اغلب اوقات خطا پیش نمی‌آید. دلیل دوم این که

ریاضیدانانی مانند اویلر و لاپلاس بصیرت عمیقی در خواص اصلی مفاهیم حسابان داشتند، و قادر به انتخاب روشهای سودمند و پشت سر گذاشتن موانع بودند. تنها "اشتباهی" که آنها مرتکب شدند استفاده کردن از روشهایی است که ریاضیدانان دوران بعد، کسانی که با دقت قرن نوزدهم پرورده شده بودند، را تکان داد.

بنابراین علل علاقهٔ زیاد به دقت چه بودند؟ دسته‌ایی از علل فلسفی بود. در ۱۷۳۴، فیلسوف انگلیسی، اسقف برکلی به عنوان این که حسابان دقیق نیست آن را مورد حمله قرار داد. او در رسالهٔ آنالیست، یا بحثی با ریاضیدانی کافر گفت با این روش که خود ریاضیدانان استدلال می‌کنند حق ندارند تا به نامعقولیت مذهب خرده بگیرند. او فلوکسیون "سرعتهای با نموهای بتدریج صفرشونده" - را با "ارواح کمیات متحرک" نامیدن نموهای بتدریج صفرشونده، به ریشخند گرفت. همچنین با بحث کردن در خود موضوع، بدرستی از بعضی از استدلالهای مشخص از نوشته‌های ریاضی معاصران خود انتقاد کرد. مثلا" او فرآیند یافتن فلوکسیون (مشتق خودمان) را، با مرور کردن مراحل آن، مورد سوال قرار داد: اگر $y=x^2$ را در نظر بگیریم، با به دست آوردن نسبت تفاضلها $((x+h)^2-x^2)/h$، و سپس ساده کردن آن به $2x+h$، سپس با صفر قرار دادن h، مقدار $2x$ را به دست می‌آوریم. اما آیا h صفر است؟ اگر هست، تقسیم کردن بر آن معنی نخواهد داشت؛ اگر صفر نیست، حق نداریم آن را نادیده بگیریم. همان طور که برکلی مطرح کرد، کمیتی که ما نامیده‌ایم "یا می‌بایست به معنی نمو باشد یا به معنی صفر. و سپس هر کدام از این معانی منظور شما باشد، باید همواره با همین معنی استدلال کنید".

چون پاسخی مناسب به ایراد برکلی مستلزم تصدیق کردن این مطلب

است که معادله‌ای که شامل حدوداست عبارتی خلاصه‌شده برای رشته‌ای از نامساویها است - ایده‌ای دشوار و دقیق - از این رو، هیچ آنالیست قرن هیجدهم جوابی کاملا" مناسب به برکلی نداد. به هرحال، بسیاری تلاش کردند. ماکلورن، دالامبر، لاگرانژ، لازارکارنو و احتمالا" اویلر، همگی از کار برکلی اطلاع داشتند، و همه اندکی درباره‌ٔ بنیادها نوشتند. پس این برکلی بود که مساله را مطرح کرد. با این حال، درنتیجه‌ٔ کار برکلی، غیر از ماکلورن هیچ ریاضیدان بزرگی زمان زیادی روی این مساله صرف نکرد، وحتی نقش ماکلورن درزمینه‌های دیگری است.

عامل دیگری که درتوجه به دقت نقش داشت آن بود که محدودیتی برای تعداد قضایایی که می‌شد با روشهای قرن هیجدهم به دست آورد وجود داشت. نزدیک به اواخر قرن، تعدادی از ریاضیدانان بزرگ کم کم متوجه شدند که این محدودیت مساله‌ٔ روز است. دالامبر و لاگرانژ این را درمکاتباتشان نشان دادند، ضمن آنکه لاگرانژ ریاضیات عالی را "زائل" می‌نامید. دیده‌روی فیلسوف تا آن اندازه پیش رفت که ادعا کرد ریاضیدانان قرن هیجدهم "ستونهای هرکول را بنا کرده‌اند" که جلوتر از آن رفتن غیرممکن است. بنابراین، ضرورت آشکاری برای استحکام بخشیدن به دستاوردهای قرن گذشته وجود داشت.

"عامل" دیگر لاگرانژ بود، که به طورروزافزونی به بنیادها علاقمند شد، و با کارهای خود ریاضیدانان دیگر را علاقه‌مند کرد. درقرن هیجدهم آکادمیهای علمی جوایزی برای حل کردن مسائل برجسته‌ٔ بزرگ به آنها تقدیم کردند. در ۱۷۸۴، لاگرانژ و همقطارانش مساله‌ٔ بنیادهای حساب را به عنوان مساله‌ٔ جایزه‌ای آکادمی برلین مطرح کردند. کسی آن را چنان حل نکرد که مورد تائید لاگرانژ باشد، اما دو تا از مقالات این رقابت بعدها

به‌کتابهای حجیمی توسعه‌یافتندکه‌اولین کتابهای اروپادرزمینه‌ٔ بنیادها بودند: مقاله‌ٔ سیمون هویلیربا عنوان طرح مقدماتی اصول حساب عالی، برلین، ۱۷۸۷، ولازارکارنوبا عنوان تاملات درمتافیزیک وحساب بینهایت کوچکها، پاریس، ۱۷۹۷. بنابراین لاگرانژ آشکارادرزنده شدن علاقه‌به‌مساله‌کمک کرد.

علاقه‌ٔ لاگرانژتااندازه‌ای ازتوجه‌اش نسبت به‌قدرت وعمومیت جبر ناشی شده‌بود؛ اومی‌خواست برای حساب اطمینانی به‌دست آوردکه‌معتقد بودجبردارای آن است. اما، تاپایان قرن هیجدهم، عامل دیگری وجود داشت که‌علاقه‌ٔ به‌بنیادها رانه‌تنها برای لاگرانژ، بلکه‌برای بسیاری از ریاضیدانان دیگرافزایش می‌داد: ضرورت تدریس. آموزش توجه‌را به سوالهای اصلی معطوف می‌کند. تاقبل ازنیمه‌ٔ قرن هیجدهم اغلب ریاضیدانان زندگیشان راباجذب شدن به‌دربارهای سلطنتی گذرانده‌بودند. امادربارهای سلطنتی زوال یافتند؛ تعدادریاضیدانان افزایش یافت؛ وریاضیات کم‌کم مفیدبه‌نظررسید. اول درمدارس نظامی وبعدهادرمدرسه‌ٔ پلی‌تکنیک پاریس جنبه‌ٔ دیگری ازکاربه‌وجودآمد: تدریس ریاضیات به دانشجویان علوم‌ومهندسی. مدرسه‌ٔ پلی تکنیک رادولت انقلابی فرانسه برای تربیت دانشمندان تاسیس کرده‌بود، کسانی که‌حکومت معتقدبود می‌بایست برای دولت جدیدمفیدواقع شوند. ودرواقع لاگرانژبه‌عنوان مدرس آنالیزدرمدرسه‌ٔ پلی تکنیک بودکه‌دواثربزرگش درحساب را، که‌به بحث دربنیادها پرداخته‌بود، نوشت؛ همچنین، در۴۰ سال پیشتر، ضمن تدریس حساب درآکادمی نظامی تورین بودکه‌لاگرانژبرای اولین بار کارکردن برروی مساله‌ٔ بنیادها رامطرح‌ساخت. چون تدریس انسان رامجبور به‌پرسیدن سوالهای اساسی درباره‌ٔ ماهیت بسیاری ازمفاهیم مهم‌می‌کند،

تغییردروضع اقتصادی ریاضیدانان - احتیاج به تدریس - کاتالیزوری - برای تبلوربنیادهای حسابان برپس زمینهٔ تاریخی وریاضی بود. درواقع درقرن نوزدهم، بسیاری ازبنیادها درکارتدریس به وجود آمدند؛ بنیادهای ابداعی وایرشتراس ازدرسهایش دربرلین ناشی شد؛ ددکیندا ولین بار ضمن تدریس درزوریخ به فکرمسالهٔ پیوستگی افتاد؛ دینی و لانداوضمن تدریس آنالیزبه بنیادها تمایل پیداکردند؛ ومهمتر ازهمه، ازنظربحث ما، کوشی نیزبه همین ترتیب. بنیادهای آنالیزکوشی درکتابهایی که بر اساس درسهای اودرمدرسهٔ پلی تکنیک قرارگرفته بود، منتشرشد؛ کتاب سال ۱۸۲۱ا واولین نمونهٔ سنت فرانسوی سترگ دردرس آنالیزاست.

مفاهیم حسابان. حال جبرنامساویها، با برخاستن ازجبر، برای تحویل حسابان به آن وجودداشت؛ میل به دقیق سازی حسابان ازتمایل به استحکام، فلسفه، تدریس، ولاگرانژناشی شده بود. اکنون به سراغ مفاد ریاضی آنالیزقرن هیجدهم برویم تا ببینیم که چه چیزی دربارهٔ مفاهیم حسابان قبل ازکوشی شناخته شده بودوچه چیزی را او مجبوربودخودبه دست آورد، تا قضایایی درموردحد، همگرایی، پیوستگی، مشتق وانتگرال راتعریف واثبات کند.

نخست، مفهوم حدرادرنظربگیرید. همان طورکه قبلا" خاطرنشان کرده ایم، اززمان نیوتن حدبه عنوان کرانی درنظرگرفته شده بودکه می توانست به هر چه نزدیکتر میل داده شود، اگرچه نمی توانست بیشترشود. تا سال ۱۸۰۰ با کارهویلیر و لاکرویکس برروی سریهای متناوب، این محدودیت که حد یک طرفه باشدبرداشته شده بود. کوشی باروشی سازمانمنداین مفهوم حد اصلاح شده را به جبرنامساویها منتقل کرد، وهمین که به این صورت منتقل شد، آن رادراثباتها به کاربرد، بنابراین اوبه شعاررایج قرن هیجدهم

که حسابان می‌توانست برپایهٔ حدود قرار گیرد، تحقق بخشید.

مثلاً، مفهوم همگرایی را درنظر بگیرید. ماکلورن قبلاً گفته بودکه مجموع سری، حد مجموعهای جزیی است. این برای کوشی معنی دقیقی داشت. معنی آن این بودکه، به ازای ε داده شده، می‌توان n را طوری یافت که، برای بیشتر از n جمله، مجموع سری نامتناهی با فاصلهٔ ε از مجموع جزیی باشد. این روش عکس روش تخمین خطایی بودکه دالامبر به کار برده بود. کوشی توانست از روی تعریفش برای سریی مجموع‌دار، ثابت کندکه تصاعدی هندسی با شعاعی در قدر مطلق کوچکتر از یک همگرا به مجموع عادی آن است، همان طورکه گفتیم. دالامبر برای سری دوجمله‌ای، یعنی $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ نشان داده بودکه می‌توان آن را با تصاعدهای هندسی همگرا، از بالا و پایین کراندار کرد. کوشی فرض کردکه اگر یک سری با جملات مثبت توسط یک تصاعد هندسی همگرا، جمله به جمله، از بالا کراندار باشد، آنگاه آن سری همگرا است؛ سپس او چنین مقایسه‌هایی را برای اثبات تعدادی از آزمونهای همگرایی به کار برد: آزمون ریشه، آزمون نسبت، آزمون لگاریتم. طریقهٔ عمل کاملاً زیبا است. با استفاده از تکنیکی که تنها چندبار توسط ریاضیدانانی چون دالامبر و لاگرانژ روی پایه‌ای به همین منظور در تخمینها به کار رفته بود، و استفاده کردن از تعریفی از مجموع سری که برپایهٔ مفهوم حد قرار گرفته بود، کوشی اولین نظریهٔ دقیق همگرایی را به وجود آورد.

حال به سراغ مفهوم پیوستگی برویم. کوشی اساساً "تعریف جدید تابع پیوسته را به این صورت بیان کردکه تابع $f(x)$ برروی بازهٔ داده شده پیوسته است اگر به ازای هر x در آن بازه "مقدار عددی [یعنی مطلق] تفاضل $f(x+\alpha)-f(x)$ به قدر دلخواه با α نزول کند". او این تعریف را دراثبات قضیهٔ مقدار میانی برای توابع پیوسته به کار برد. اثبات با بررسی تابعی

$f(x)$ برروی بازه‌ای ،مثلا" $[b,c]$ ،به‌طوری که $f(b)$ منفی و $f(c)$ مثبت است ،وبا تقسیم‌کردن بازهٔ $[b,c]$ به m جزء با طول $h=(c-b)/m$ جریان می‌یابد .کوشی علامت تابع درنقاط $f(b), f(b+h), ..., f(b+(m-1)h), f(c)$ را درنظرگرفت ؛ بجزیکی ازمقادیر f که‌صفراست ،دومقدار از x به‌تفاضل h وجوددارندبه‌طوری که f دریکی منفی ودردیگری مثبت است .تکرارکردن این فرآیندبرای بازه‌های جدیدبه‌طول $\frac{(c-b)}{m}$ ، $\frac{(c-b)}{m^2}$ ، ....،دنباله‌ای صعودی ازمقادیر $x: b, b_1, b_2, ...$ که‌به‌ازای آنها f منفی است ،ودنباله‌ای نزولی ازمقادیر $x: c, c_1, c_2, ...$ که‌به‌ازای آنها f مثبت است‌را به‌دست می‌دهدبه‌طوری که‌تفاضل بین b_k و c_k به‌سمت صفرمیل می‌کند .کوشی ادعاکردکه‌این دودنباله‌بایددارای حدمشترک a باشند .آنگاه‌او استدلال کردکه‌چون $f(x)$ پیوسته‌است ،دنباله‌های مقادیرمنفی $f(b_k)$ ومقادیر مثبت $f(c_k)$ هردوبه‌طرف حدمشترک $f(a)$ همگراهستند ،که‌بنابراین باید صفرباشد .

اثبات‌کوشی متضمن تکنیکی است‌که‌قبلا" موجودبوده ولاگرانژ درتخمین ریشه‌های حقیقی معادلات بسجمله‌ای به‌کاربرده‌بود .اگریک بسجمله‌به‌ازای یک مقدارازمتغیرمنفی باشدوبرای مقداردیگرمثبت ، ریشه‌ای بین آنها وجوددارد ،وتفاضل بین آن دومقدارازمتغیر ،خطای به‌وجودآمده‌را درگرفتن هریک ازآن دوبه‌عنوان تخمینی ازریشه‌کراندار می‌کند .بنابراین مادوباره‌جبرنامساویها را به‌صورت فراهم‌کنندهٔ تکنیکی داریم‌که‌کوشی باآن ابزاری برای تخمین رابه‌ابزاری برای دقت تبدیل کرد .

دراینجا بجاست متذکرشویم‌که‌کوشی‌درهردوبحث خوددرهمگرایی و پیوستگی ،تلویحا" صورتهای مختلف خاصیت‌کمال اعدادحقیقی رافرض کرده‌بود .مثلا" ،اوبدیهی‌پنداشته‌است‌که‌یک سری باجملات مثبت ،که‌با

تصاعد هندسی همگرایی کراندار از بالاست، همگراست. همچنین، در اثباتش برای قضیهٔ مقدار میانی فرض می‌کند که هر دنبالهٔ یکنوای کراندار دارای حد است. درحالی که کوشی اولین کسی بود که برای اثبات قضایای آنالیز به‌طور اصولی تکنیکهای اثبات نامساویها را مورد استفاده قرار داد، اما همهٔ مفروضات ضمنی دربارهٔ اعداد حقیقی را، که این قبیل تکنیکهای نامساویها مستلزم آنها بودند، مشخص نکرد. به همین ترتیب، همان طور که ممکن است خواننده قبلاً توجه کرده باشد، تعریف کوشی از تابع پیوسته، بین چیزهای که اکنون ما آنها را پیوستگی نقطه‌ای و پیوستگی یکنواخت می‌نامیم، تمیز قائل نشده است. همچنین در مبحث سریهای توابع، کوشی فرقی بین همگرایی نقطه‌ای و یکنواخت نگذاشته است. فرمولبندیهای تحت‌ـ الفظی مانند "به ازای هر" که در انتخاب دلتاها ظاهر می‌شوند، فرقی بین "به ازای هر اپسیلون و به ازای هر x" و" به ازای هر x، هر اپسیلون داده‌شده‌ای" نگذاشته است. وابدا" معلوم نبود که اثباتهای دههٔ ۱۸۲۰ تا چه اندازه به این تمایز بستگی دارد، زیرا اثباتها دربارهٔ پیوستگی و همگرایی به خودی خود بسیار غریب بودند. هنگامی که ما به نظریهٔ مشتق کوشی برمی‌گردیم، نابسامانی مشابهی را بین همگرایی نقطه‌ای و یکنواخت مشاهده خواهیم کرد.

بار دیگر با یک تخمین شروع می‌کنیم. لاگرانژ نامعادلهٔ زیر را دربارهٔ مشتق به‌دست آورد:

$$(2) \qquad f(x+h)= f(x)+hf'(x)+hv$$

که در آن v با h به سمت صفر می‌رود و این عبارت را به این معنی که، به ازای هر D داده‌شده می‌توان h را به‌طور کافی کوچک یافت چنان که v بین D- و D+ قرار گیرد، تعبیر کرد. این آشکارا معادل است با رابطهٔ (1)، یعنی

توصیف اپسیلون ـ دلتایی کوشی برای مشتق. اما چگونه لاگرانژ این نتیجه را به دست آورده بود؟ جواب حیرت انگیز است؛ فرمول (۲)، برای لاگرانژ نتیجه‌ای از قضیهٔ تیلور بود. لاگرانژ معتقد بود که هر تابع (یعنی، هر عبارت تحلیلی، چه متناهی چه نامتناهی، که شامل متغیر است) دارای بسط سری توانی منحصر به فردی است (مگر احتمالاً در تعدادی متناهی از نقاط منزوی). این به خاطر این است که او معتقد بود "جبر سریهای نامتناهی" وجود دارد، جبری ارائه‌شده با کارا ویلر مانند مثالی که در بالا زدیم. در ضمن لاگرانژ گفت که راه دقیق سازی حساب، تبدیل کردن آن به جبر است. اگرچه جبر سریهای نامتناهی که بسطهای سری توانی را بدون درنظرگرفتن همگرایی و حدود به دست دهد وجود ندارد، این فرض لاگرانژ را به تعریف $f'(x)$ بدون اشاره به حدود، به عنوان ضریب جملهٔ خطی نسبت به h در بسط سری تیلور برای $f(x+h)$، هدایت کرد. سپس لاگرانژ، به پیروی از اویلر، گفت که به ازای هر سری توانی برحسب h، می‌توان h را به اندازهٔ کافی کوچک اختیار کرد به طوری که هر جملهٔ داده‌شده از سری، بزرگتر از مجموع بقیهٔ جملات پس از آن باشد؛ لاگرانژ گفت این تخمین در کاربردهای حساب در هندسه و مکانیک فرض شده است. به کار بردن این تخمین برای جملهٔ خطی در سری تیلور، (۲) را موجب می‌شود، که من آن را خاصیت لاگرانژی مشتق می‌نامم. (مانند رابطهٔ (۱) کوشی، لاگرانژ در تبدیل (۲) به نامساویها فرض کرده است که به ازای هر D داده‌شده، می‌توان h را به قدر کافی کوچک پیدا کرد به طوری که $|V| \leqslant D$، بدون آنکه ذکری از x به میان آید.)

نه تنها لاگرانژ خاصیت (۲) و نامساویهای مربوطه را بیان کرد، بلکه آنها را به عنوان پایه‌ای برای تعدادی از اثباتها دربارهٔ مشتقها به کاربرد: مثلاً، برای اثبات اینکه تابعی با مشتق مثبت روی یک بازه در آن بازه

صعودی است ،برای اثبات قضیهٔ مقدار میانگین مشتقها ،وبرای بدست آوردن ماندهٔ لاگرانژ برای سری تیلور .لاگرانژ همچنین نتایجش را برای مشخص کردن خاصیت ماکزیموم ومینیموم ،ومرتبه‌های تماس بین منحنیها به کار برد.

با بعضی تغییرات ،اثباتهای لاگرانژ معتبرند- مشروط براین که خاصیت (۲) قابل اثبات باشد .کوشی چیزهایی را که درواقع اثباتهای نامساوی-بنیادلاگرانژ درباره‌ٔ مشتق هستند ،با بعضی اصلاحات قرض گرفت وساده کرد ،وآنها را برپایهٔ فرمول(۱) خودش قرار داد .اما کوشی این اثباتها را به‌طور معقول طرح کرد زیرا او مشتق را دقیقا "تعریف کردتا نامساویهای مناسب او ایجاب کند .یک بار دیگر ،خاصیتهای کلیدی از تخمین ناشی‌می‌شوند. برای لاگرانژ مشتق - بی‌آنکه به اپسیلون احتیاجی باشد- دقیقا "همان ضریب جملهٔ خطی درسری تیلور بود ؛فرمول(۲) ،ونامساوی وابسته به آن ، یعنی آن که $f(x+h)-f(x)$ بین $h(f'(x)\pm D)$ واقع می‌شود ،تخمینها بودند .کوشی خاصیتهای نامساویها واثباتهای لاگرانژ را همراه تعریفی از مشتق آورد و اندیشیدتا این تکنیکها را دقیقا "پایه‌ریزی کند.

انتگرال ،آخرین مفهومی که باید درنظربگیریم ،به دنبال پیشرفت مشابهی به وجودآمد .درقرن هیجدهم ،انتگرال معمولا"به‌عنوان عکس دیفرانسیل تصورمی‌شد .اما بعضی اوقات معکوس نمی‌توانست دقیقا "محاسبه شود ،بنابراین کسانی چون اویلر ملاحظه کردندکه می‌توان با استفاده از یک حاصل جمع مقدار انتگرال با دقت اختیاری تخمین زده شود .مطمئنا" ، تصویری هندسی ازمساحتی که با مستطیلها تخمین زده شده ،یا تعریف لایبنیتز ازانتگرال به‌عنوان یک حاصل جمع ،این موضوع را بلافاصله القا می‌کند. اما چیزی که موردنظرماست این است که بیشترکاری که درقرن هیجدهم بر روی تخمین زدن مقادیر انتگرالهای معین انجام شده بود ،دربرگیرندهٔ

ملاحظاتی از این قبیل بود که وقتی تابع در قلمرویی بزرگتر یا کوچکتر نوسان می‌کند چقدر زیربازه‌های مورد استفاده در مجموعها باید کوچک باشند. مثلاً، اویلر مجموعهای به صورت $\sum_{k=0}^{n} f(x_k)(x_{k-1}-x_k)$ را به عنوان تخمینهایی برای انتگرال $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ مورد بحث قرار داد.

در ۱۸۲۰، س ـ د پوآسون، که به انتگرال گیری مختلط علاقه‌مند بود و بنابراین بیش از بقیه درباره وجود و رفتار انتگرالها نگران بود، سوال زیر را مطرح کرد. اگر انتگرال F به عنوان تابع اولیه f تعریف شده باشد، و اگر $b-a=nh$، آیا می‌توان اثبات کرد که وقتی h کوچک می‌شود $F(b)-F(a)=\int_a^b fdx$ برابر حد مجموع

$$S=hf(a)+hf(a+h)+...+hf(a+(n-1)h)$$

است؟ (S مجموعی تخمینی از نوع قرن هیجدهمی است) پوآسون این نتیجه را قضیه اساسی نظریه انتگرالهای معین "نامید" و آن را با استفاده کردن از قضیه‌ای دیگر از نامساویها ثابت کرد: سری تیلور با مانده. اول، $F(b)-F(a)$ را به صورت مجموع تلسکوپی نوشت.

$$F(a+h)-F(a)+F(a+2h)-F(a+h)+...+F(b)-F(a+(n-1)h) \quad (3)$$

سپس به ازای هر جمله به صورت $F(a+kh)-F(a+(k-1)h)$، چون طبق تعریف $F'=f$، از سری تیلور نتیجه می‌شود

$$F(a+kh)-F(a+(k-1)h)=hf(a+(k-1)h)+R_k\ h^{1+w}$$

به طوری که به ازای بعضی از R_kها، داریم $w>0$. بنابراین مجموع تلسکوپی (۳) تبدیل می‌شود به

$$hf(a)+hf(a+h)+...+hf(a+(n-1)h)+(R_1+...+R_n)h^{1+w}$$

پس اختلاف $F(b)-F(a)$ و مجموع S برابر $(R_1+...+R_n)h^{1+w}$ است. با قرار دادن R به عنوان ماکزیموم مقادیر R_k داریم:

$$(R_1+\dots+R_n)h^{1+w} < n, R(h^{1+w}) = R.nh.h^w = R(b-a)h^w$$

بنابراین ،اگر h به اندازهٔ کافی‌کوچک اختیار شود،اختلاف $F(b)-F(a)$ از S کمتر از هر کمیت داده‌شده است .

اثبات پوآسون اولین کوشش برای اثبات هم‌ارزی تابع اولیه ومفاهیم انتگرال به‌عنوان حدمجموعی بود .به‌هرحال ،گذشته‌ازفرضیات‌ضمنی وجود توابع اولیه ومشتقهای اول کراندار برای تابع f برروی بازهٔ داده‌شده، دراثبات فرض شده‌که‌زیربازه‌هایی که‌برروی آنها مجموع‌گرفته‌شده همه مساویند.آیا این نتیجه‌باید برای‌تقسیمات‌نامساوی نیزبرقرارباشد؟ پوآسون براین عقیده‌بودوآن رابااین بیان تائیدکردکه "اگرانتگرال با مساحت‌یک منحنی نمایش داده‌شده ،این مساحت یکسان خواهدبود ،اگرما تفاضلها را به‌تعدادنامتناهی ازجزءهای مساوی،یاطبق هرقانونی‌به تعدادی نامتناهی ازجزءهای نامساوی تقسیم‌کنیم" .به‌هرحال این یک ادعا است نه‌یک اثبات .وکوشی‌دیدکه‌اثباتی احتیاج است .

کوشی دلایل‌صوری رادرموضوعات علی الظاهردقیق نمی‌پسندیدو می‌گفت که‌اکثرفرمولهای جبری"تنها تحت‌شرایط معین ،وبرای مقادیر معین ازکمیاتی که‌آنها راشاملند"برقرارند .مخصوصا" ،نمی‌توان فرض کردکه‌آنچه‌برای عبارات متناهی برقراراست به‌طورخودکاربرای عبارات نامتناهی‌نیزبرقراراست .بنابراین ،کوشی باحساب‌کردن تفاضل بین n مین مجموع‌جزیی و $\frac{\pi^2}{6}$ ونشان دادن این که‌به‌هراندازه‌دلخواه‌کوچک می‌شود،نشان دادکه‌مجموع‌سری $1/1+1/4+1/9+\dots$ واقعا" $\frac{\pi^2}{6}$ است .به همین ترتیب ،تنها به‌این خاطرکه‌عملی وجودداشت که‌مشتق گیری‌نامیده شده‌بود ،به‌این معنی نبودکه‌معکوس آن عمل همیشه‌نتیجه‌بدهد .وجود

انتگرال معین باید اثبات می‌شد. اما چگونه کسی می‌توانست وجود آن را در سال ۱۸۲۰ ثابت کند؟ می‌توان این شیء ریاضی مطلوب را با استفاده کردن از تخمینی به سبک قرن هیجدهم که به آن همگراست ساخت. کوشی انتگرال را به عنوان حد مجموعهای اویلری $\sum f(x_k)(x_{k+1}-x_k)$ وقتی که $(x_{k+1}-x_k)$ به قدر کافی کوچک است تعریف کرد. با فرض صریح این امر که $f(x)$ روی بازهٔ داده شده پیوسته باشد (و به طور ضمنی پذیرفتن این که پیوستهٔ یکنواخت باشد)، کوشی قادر بود نشان دهد که همهٔ مجموعهایی به آن شکل به نقطهٔ ثابتی میل می‌کنند که، طبق تعریف، انتگرال تابع روی آن بازه نامیده می‌شود. این اثباتی فوق العاده مشکل است. دست آخر کوشی با فرض گرفتن قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها، قضیه اساسی حسابان را ثابت کرد.

نتیجه. همهٔ قطعات معمایی که در ابتدا طرح کردیم اینک آماده هستند. تخمینهای جبری، جبر نامساویها را به وجود آورد؛ تخمینهای قرن هیجدهم در حسابان خاصیتهای مفید مفاهیم آنالیز را به وجود آورد: کرانهای خطای دالامبر برای سریها، نامساویها لاگرانژ درباره مشتقها، تخمینهای اویلر برای انتگرالها. علاقهٔ جدیدی به بنیادها وجود داشت. تمام چیزی که احتیاج بود نبوغی به قدر کافی بزرگ برای ساختن بنیاد جدید بود.

دو نفر پا پیش گذاشتند. در ۱۸۱۶، کارل فریدریش گاوس بحث دقیقی از همگرایی سری فوق هندسی، با استفاده از تکنیک مقایسهٔ یک سری با تصاعدهای هندسی همگرا ارائه کرد؛ به هر حال، گاوس پایه‌ای عمومی برای تمام آنالیز ارائه نداد. برنارد بولتسانو، که کارش تا دههٔ ۱۸۶۰ کم شناخته شده بود، تحت تاثیر دعوت لاگرانژ برای تبدیل حسابان به جبر، در ۱۸۱۷ — تعریفی از تابع پیوسته مانند تعریف کوشی ارائه کرد و آنگاه — با تکنیکی

متفاوت از تکنیک کوشی ـ قضیهٔ مقدار میانی را ثابت کرد. اما این کوشی بود که تعاریف و اثباتهای دقیق را برای همهٔ مفاهیم اصلی به وجود آورد؛ او بود که به قدرت پرتوان مفهوم حد بر مبنای نامساویها پی برد، و او بود که برای ما ـ بجز بعضی مفروضات ضمنی درباره‌ٔ یکنواختی و کمال ـ رهیافت دقیق پیشرفته به حسابان را، ارائه داد.

ریاضیدانان عادت دارند بنیادهای دقیق حسابان را به عنوان کل تکمیل شده‌ای تعبیر کنند. کاری که من سعی کرده‌ام به عنوان مورخ انجام دهم، آشکار کردن چیزی است که در تکمیل کردن آن کار بزرگ شرکت داشته است. انجام این کار ضرورت دارد، زیرا کارهای تکمیل شده طبیعتا "رشته‌های مجزایی را که در بافتن آنها شرکت داشته‌اند آشکار نمی‌کنند ـ مخصوصا "وقتی که رشته‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای تغییر شکل یافته‌اند. به هر حال، در کار کوشی براستی یک اثر از منشاء حسابان دقیق در تخمینها به جا ماند ـ حرف اپسیلون ε مطابق با نخستین حرف در کلمهٔ لاتینی " erreur " (یا "خطا") است، و در واقع کوشی ε را برای "خطا" در چند کارش در نظریهٔ احتمالات به کار برد. این نکتهٔ عجیب و از نظر تاریخی جالب توجه است که "ε "، که اولین بار برای نشان دادن "خطا" در تخمینها به کار رفت، تبدیل به نماد مشخصهٔ دقت و صراحت در حسابان شده است. همان طور که کوشی جبر نامساویها را از ابزاری برای تخمین به ابزاری برای دقت تبدیل کرد، او حسابان را از روشی قدرتمند برای تولید قضایا، به موضوع دقیقی که ما امروز می‌شناسیم تبدیل کرد.

Judith V. Grabiner

Who gave the Epsilon?
Cauchy and the origins of rigorous calculus

American Mathematical Monthly March 1983

مسأله

احمد حقانی

مسالهٔ شمارهٔ ۲۰. معمولاً در اثبات اصم بودن $\sqrt{2}$ از قضیهٔ اصلی حساب استفاده می‌شود، اما چنانکه ایوان نیون نشان داده است می‌توان تنها با استفاده از خوش‌ترتیبی اعداد طبیعی اثباتی کوتاه از این مطلب به دست داد: اگر $\sqrt{2}$ گویا نباشد، کوچکترین عدد صحیح مثبتی مانند b هست که $b\sqrt{2}$ عددی صحیح باشد. اما $b\sqrt{2}-b>0$ عدد صحیح کوچکتری است که $\sqrt{2}\ (b\sqrt{2}-b)$ عدد صحیح است. با استدلالی مشابه و بدون توسل به قضیهٔ اصلی حساب ثابت کنید:

اگر n و k اعداد صحیح بزرگتر از ۱ و n یک توان k م عددی صحیح نباشد آنگاه $n^{\frac{1}{k}}$ گویا نیست.