[3] R.A.Penrose,A generalized invers for matrics,Proc. Cambridge Phil.Soc.,51(1955)406-413.
[4] Edward T.Wong,Generalized inverses as linear transformations.Math.Gaz.63(1979)176-181.
[5] , Involutory functions and Moore-Penrose inverses of matrices in an arbitrary field,Linear Algebra and Its A-plications, 48(1982) 283-291.

پیک ریاضی
جلددوم ،شماره‌ٴ دوم ،تابستان ۶۶

روشی یکپارچه برای اثبات قضیه‌های گوناگون آنالیز مقدماتی

نوشته‌ٴ : مایکل و. بوتسکو
ترجمه‌ٴ : قهرمان طاهریان

هدف از این نوشتار به‌دست دادن روشی یکپارچه برای اثبات تعدادی از قضیه‌های آنالیز مقدماتی است. بعلاوه، اثباتها با روش پیشنهادی غالبا" ساده‌تر شده‌اند.

اساس روش ما بر تعریف و لم زیر است که از [1] گرفته شده است.

تعریف. مجموعه‌ٴ C از زیربازه‌های بسته‌ٴ بازه $[a,b]$ یک پوشش کامل $[a,b]$ است هرگاه به‌ازای هر x در $[a,b]$ عددی مانند $\delta(x)>0$ وجود داشته باشد به‌طوری که هر زیربازه‌ٴ بسته‌ٴ $[a,b]$ شامل x که طولش کمتر از $\delta(x)$ باشد متعلق به C باشد.

لم. اگر C یک پوشش کامل $[a,b]$ باشد آنگاه C شامل یک پارش $[a,b]$ است، یعنی اعداد $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ یافت می‌شوند به‌طوری که به‌ازای هر k داشته باشیم $x_{k-1}<x_k$ و $I_k=[x_{k-1},x_k]$ متعلق به C است.

اثبات. فرض کنیم C شامل هیچ پارش $[a,b]$ نباشد. در این صورت با

دونیمه‌کردن مکرر $[a,b]$ ، دنبالهٔ $\{J_n\}$ اززیربازه‌های بستهٔ $[a,b]$ به‌دست می‌آیدبه‌طوری که به‌ازای هر n، $J_n \supseteq J_{n+1}$ ، $|J_n| \to 0$ و C شامل هیچ پارشی از J_n هانیست. (منظوراز $|J_n|$ طول بازهٔ J_n است.) بنابر قضیهٔ بازه‌های تودرتو xی متعلق به‌اشتراک دنبالهٔ $\{J_n\}$ وجوددارد.

$\delta(x)$ راآنچه‌توسط تعریف فوق داده شده‌درنظرمی‌گیریم. چون $|J_n| \to 0$ پس عددصحیح مثبت وبه‌اندازهٔ کافی بزرگ N وجودداردبه‌طوری که $|J_n|<\delta(x)$ بنابراین $J_N \in C$ ولذاواضح است‌که C حاوی پارشی از J_N خواهدبود واین تناقض است.

اکنون بااستفاده‌ازلم‌فوق سه‌قضیه‌ازقضیه‌های شناخته‌شدهٔ مربوط به توابع پیوسته‌رااثبات می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. اگر f روی $[a,b]$ پیوسته‌باشدآنگاه f روی $[a,b]$ کراندار است.

اثبات. قرارمی‌دهیم

$C=\{I:$ یک زیربازهٔ بستهٔ $[a,b]$ است و f روی I کراندار است $I\}$

ادعامی‌کنیم‌که C یک پوشش کامل $[a,b]$ است.

برای دیدن این مطلب، فرض‌کنیم x در $[a,b]$ باشد. چون f در x پیوسته است، $\delta(x)>0$ وجودداردبه‌طوری که f روی بازهٔ $(x-\delta(x),x+\delta(x))$ کراندار است. واضح است‌که‌اگر x برابر a یا b باشداین بازه‌بایداندکی تصحیح شود. حال فرض‌کنیم I یک زیربازهٔ بستهٔ $[a,b]$ باشدبه‌طوری که $x\in I$ و $|I|<\delta(x)$. دراین صورت $I\subseteq(I-\delta(x),I+\delta(x))$. پس f روی I کراندار است و I در C است. بنابراین C یک پوشش کامل $[a,b]$ است ولذابنابرلم فوق حاوی‌یک پارش $[a,b]$ است وچون f روی هرمجموعه‌درپارش فوق کراندار

است، f روی $[a,b]$ کراندارخواهدبود.

قضیهٔ ۲. (قضیهٔ مقدارمیانی) اگر f روی $[a,b]$ پیوسته‌باشدو $f(a)f(b)<0$ آنگاه‌عددی مانند x_0 در (a,b) وجودداردبه‌طوری که $f(x_0)=0$.

اثبات. فرض‌کنیم f روی $[a,b]$ هرگزصفرنشودوقراردهیم $C=\{I:$ یک بازهٔ بسته $[a,b]$ است و f روی I یک علامت دارد $I\}$ برای نشان دادن اینکه C یک پوشش کامل $[a,b]$ است، فرض‌کنیم x در $[a,b]$ باشد. چون f در x پیوسته‌است و $f(x)\neq 0$ پس $\delta(x)>0$ وجودداردبه‌طوری‌که f روی $(x-\delta(x),x+\delta(x))$ همان علامت $f(x)$ رادارد. اگر I یک زیربازهٔ بستهٔ $[a,b]$ باشدبه‌طوری که x در I باشدو $|I|<\delta(x)$ آنگاه $I\subseteq(x-\delta(x),x+\delta(x))$ پس f روی I یک علامت خواهدداشت و I در C است.

چون C یک پوشش کامل $[a,b]$ است، C شامل پارش $I_1,I_2,\ldots,I_k$ از $[a,b]$ است. بافرض اینکه‌این بازه‌هابترتیب صعودی مرتب شده‌اند، دیده‌می‌شودکه f بایدروی $[a,b]$ یک علامت داشته‌باشد، واین تناقض است.

قضیهٔ ۳. اگر f روی $[a,b]$ پیوسته‌باشدآنگاه f روی $[a,b]$ پیوستهٔ یکنواخت است.

اثبات. فرض‌کنیم $\varepsilon>0$ داده‌شده‌باشدوقراردهیم

$C=\{I:|f(x)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{2}$ ، یک زیربازهٔ بستهٔ $[a,b]$ است وبه‌ازای هر x و z در I $I\}$. بااستفاده‌ازپیوستگی f بسادگی می‌توان نشان دادکه C یک پوشش کامل $[a,b]$ است، بنابراین C شامل یک پارش $I_1,\ldots,I_n$ از $[a,b]$ است. فرض‌کنیم

$$\delta=\min\{|I_k| : k=1,2,\ldots,n\}$$

اگر x و y در [a,b] باشندبه‌طوری که $|x-y|<\delta$ ، آنگاه‌یا x و y هـردو متعلق به‌یک زیربازهٔ این پارش خواهندبودویا اینکه متعلق به‌دوزیربازهٔ مجاورخواهندبود، ودرهرحال $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ واین اثبات راکامل می‌کند.

قضیهٔ ۴. (قضیهٔ هاینه‌ـ بورل) هرپوشش باز [a,b] یک زیرپوشش متناهی دارد.

اثبات. فرض کنیم G یک پوشش بازبرای [a,b] باشد. قراردهیم $C=\{I :$ I یک زیربازهٔ بستهٔ [a,b] است و I زیرمجموعهٔ یک مجموعه‌در G است$\}$ واضح است که C یک پوشش کامل [a,b] است وبنابراین C شامل یک پارش [a,b] است. ازآنجاکه‌هرزیربازهٔ این پارش زیرمجموعه‌ای ازیک مجموعه در G است، پس [a,b] توسط تعدادی متناهی ازاین نوع‌مجموعه‌ها پوشیده می‌شودواثبات کامل است.

قضیهٔ ۵. (قضیهٔ بولتسانو‌ـ وایرشتراوس) اگر S یک مجموعهٔ نامتناهی وکراندارازاعدادحقیقی باشدآنگاه S یک نقطهٔ انباشتگی دارد.

اثبات. ازآنجاکه S کرانداراست، پس بازهٔ [a,b] وجوددارد به‌طوری که $S\subseteq[a,b]$ حال فرض کنیم S نقطهٔ انباشتگی نداشته‌باشد وقراردهیم

$C=\{I :$ I یک زیربازهٔ بستهٔ [a,b] است، $I\cap S$ متناهی است$\}$

چون C یک پوشش کامل برای [a,b] است، شامل یک پارش $I_1, I_2, \ldots, I_n$ از [a,b] است، پس

$$S= S\cap[a,b]=S\cap\bigcup_k I_k=\bigcup_k (S\cap I_k)$$

این رابطه‌نشان می‌دهدکه S متناهی است. این تناقض اثبات قضیه‌راکامل

می‌کند.

واضح است که‌قضیه‌های زیادی رادرآنالیزمی‌توان باروش این مقاله اثبات کرد. مثلاً" ، بدون استفاده‌ازقضیهٔ مقدارمیانگین می‌توان ثابت کرد، تابعی که‌روی یک بازهٔ بسته مشتقش برابرصفراست روی آن بازه تابعی ثابت است. اثبات این قضیه می‌تواندتمرین باارزشی برای دانشجویان باشد.

مرجع :

1. B.S.Thomson, On Full Covering Properties, *Real Analysis Exchange* ,6(1980-81) 77-93.

Michael W.Bostsko, " A Unified Treatment of Various theorems in Elementary Analysis," the AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY," Vol.94, Number 5,450-452.