

### نقطه به چه بزرگمی است؟

نوشته: ریچارد ج. ترودیو

ترجمه: شهلا مبر عبدالباقی

کتاب اصول اقلیه‌س هیچگونه پیش‌گفتار، مقدمه یا بیانی از اهداف  
را همراه ندارد، هیچگونه انگیزه یا تفسیری را ارائه نمی‌دهد. کتاب اول ناگهان  
با فهرست بیست و سه تعریف آغاز می‌شود. اولین تعریف به صورت زیر است:

تعریف ۱. نقطه آن است که هیچ جزء ندارد.

در ریاضیات یونان "اجزاء" یک شکل چیزهایی هستند که ما آنها را  
"ابعاد" آن می‌نامیم، به این ترتیب آنچه که اقلیدس می‌گوید این است که  
نقطه نه طول دارد، نه عرض و نه ضخامت.

ممکن است این مطلب با شعور متعارف جور در نیاید.

بعید نیست که کسی بگوید "چطور ممکن است؟... من می‌توانم این  
مطلب را درک کنم که قطر یک نقطه - نقطه را به صورت یک توپ کوچک در نظر  
می‌گیریم - می‌تواند آن قدر کوچک باشد که در عمل قابل صرف نظر کردن باشد  
همان طور که شیمی دان قطرات را نا چیز می‌پندارد، اما اگر نقطه واقعاً"

هیچ بعدی نداشته باشد چگونه، حتی تعداد نامحدودی از آن، می‌تواند پاره—  
خطی به طول یک متر تشکیل دهد؟ مهم نیست چند تا صفر را با هم جمع کنیم—  
حاصل این جمع را نمی‌توانم چیزی بجز صفر در نظر بگیریم.

من نیز نمی‌توانم حاصل جمع را چیزی بجز صفر در نظر بگیرم، اما این—  
مطلب آن قدر که شما را نگران کرده است مرا نگران نمی‌کند.

"تصور می‌کنم این مطلب باید ترا بیشتر نگران کند، زیرا توریاضی کار  
هستی و این یک بحث ریاضی است."

درواقع نه، گرچه در ابتدا ممکن است بحثی ریاضی به نظر برسد اما—  
حقیقتاً "چنین نیست. این مطلب بیشتر بحثی شهودی است تا منطقی.

"چطور بحثی شهودی است؟ ببین. پاره خطی داریم به طول یک متر—  
خوب.

"— و این پاره خط از نقاطی درست شده که پهلو به پهلو کنار هم چیده  
شده اند—"

دست نگه دار. اگر نقاط اندازه نداشته باشند، چگونه می‌توانند پهلو—  
داشته باشند؟ اینکه نقاط را پهلو به پهلو کنار هم می‌چینیم چه معنایی دارد؟  
متوجه منظورم هستی؟

"نوعی... یعنی فکرنقاط بدون اندازه ما را زودتر از آنچه که من  
فکر کرده بودم به در سرا نداخته است؟"

دردسر شهودگرایی را نمی‌توان از اینکه نقاط در واقع چگونه یک خط  
تشکیل می‌دهند تصویر جامعی ارائه داد. اما در دسیر منطقی وجود ندارد، حداقل  
در ظاهر. در واقع عیب از قدرت تخیل ما است که بحث را کمی عجیب می‌نماید،  
اما تا این پایه تناقض آشکاری وجود ندارد.

"... پاره خطی داریم به طول یک متر. این پاره خط بطریقی از نقاط

درست شده است - مهم نیست چطور -"

احسن . این دقیقا "همان طرز برخوردی است که یک ریاضی کار دارد .

"اما ، می‌گویی هر یک از این نقاط طولی برابر صفر دارند -"

بله ، این قسمتی از تعریف اقلیدس است .

"اما اگر سهم هر نقطه در طول این پاره خط صفر باشد ، آنگاه کل پاره خط

نیز بایستی طولی مساوی صفر داشته باشد . تناقض در اینجا است ."

از این واقعیت که طول هر نقطه مساوی صفر باشد چرا نتیجه می‌شود که کل

پاره خط طولی مساوی صفر دارد ؟

سکوت بی حاصل

شاید به نظر برسد مغلطه می‌کنم ، اما واقعا "چنین نیست . این مساله

خیلی دقیق است و تشریح آن خیلی مشکل . دوست دارم شما را متقاعد کنم

موضعی که اقلیدس در تعریف ۱ می‌گیرد تنها موضعی است که بطور منطقی

برایش ممکن است ، گر چه برای این کار به کمک خودتان احتیاج دارم . -

بگویید ببینم چرا ، به تصور شما ، از این امر که هر نقطه طولی برابر صفر دارد

می‌توان نتیجه گرفت که کل پاره خط طولش صفر است ؟ تا آنجا که می‌توانید

به دقت جواب دهید .

"... چون پاره خط منحصرأ " از نقاط تشکیل یافته است تمام صفات

آن می‌بایست از صفات مشابه مربوط به نقاط حاصل شود . بویژه آن که بایست

از طول نقاط حاصل شود .

"همچنین می‌خواهم بگویم طول پاره خط بسادگی حاصل جمع طول نقاط

آن است ، چون احساس می‌کنم هنگامی که با توصیف من در مورد قرا رگرفتگی

نقاط بصورت پهلو به پهلو مخالفت کردید به مغلطه متوسل شدید . نقاط به

صورت خاصی چیده شده اند که پاره خط را ایجاد کرده اند . طول آن می‌بایست

حاصل جمع طول نقاط باشد و بنا بر این مساوی صفر است .

"اما اگر حتی مخالفت شما پایه و اساسی داشته باشد، این واقعیت به قوت خود باقی است که طول پاره خط به نحوی با استفاده از طول نقاط تشکیل دهنده اش به وجود می آید، و من هیچ راهی برای ترکیب ریاضی تعداد زیادی صفر و بدست آوردن چیز دیگری بجز صفر نمی بینم." خیلی خوب .

بگذارید از اینجا شروع کنم که شعور متعارف من به همان شدت با تعریف اقلیدس مغایرت دارد، این مساله پس از اینکه اولین بار در دبیرستان هندسه خواندم همواره وجود داشته است. اما من یاد گرفته ام که آن را فراموش کنم.

شاید عجیب به نظر برسد - چطور کسی میتواند شعور متعارف خود را نادیده بگیرد؟ اینستین زمانی گفت :

... شعور متعارف در واقع چیزی نیست جز لایه هایی از اندیشه از قبیل پذیرفته شده که بطور عمده قبل از سن ۱۸ سالگی در حافظه و احساسات ما ذخیره شده است .

عقیده من به این تندی نیست، بلکه من شعور متعارف را چیزی کم ترا ز کمال تشکیلات فکری هرکس و خیلی محدود می دانم. بدون اینکه سعی دو تعریف دقیق شعور متعارف داشته باشم، بگذارید بگویم هنگامی که از این لغت در یک متن ریاضی استفاده می کنم منظورم قدرت شهود و تخیل شخص است و نه قدرت منطقی و محاسباتی اش. البته کاربرد شعور متعارف می تواند در بردارنده منطق یا محاسبه نیز باشد، مانند موقعی که اندکی شهود یا تخیل بعنوان مقدمه

در استدلالی قیاسی یا بعنوان مبنایی برای محاسبه مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما من منطق و محاسبه را بطور اساسی از شعور متعارف مجزا می‌دانم، زیرا خمیرمایه منطق و محاسبه می‌تواند منابع دیگری نیز باشد. مثلاً "تعدادی اصول موضوعه - که در آن صورت نتایج حاصل مستقل از شهود و تخیل بوده و حتی ممکن است با آنها مغایر باشند.

به عبارت دیگر آنچه که من در ذهن دارم تما یزبین دو نوع استدلال است: "شعور متعارف" که از شهود و تخیل نشأت می‌گیرد - هر چند مقدارشان کم باشد - و "استدلال ریاضی" که اصلاً "به هیچیک ربطی ندارد. در عین حال که تاریخ ریاضیات به ما می‌آموزد آنچه را که از نظریک نسل روح استدلال ریاضی است ممکن است نسل بعدی به خاطر بیش از حد شهودی بودن آن به دور اندازد، که این گاهی باعث می‌شود استدلال ریاضی بیشتر بصورت یک هدف جلوه کند تا یک امر کامل، دقیقاً "مبارزه برای همین هدف است که از زمان فیثاغورس مشخصه اصلی ریاضیات بوده است.

شعور متعارف را می‌توان نادیده گرفت زیرا تنها راه تفکر نیست. و در - ریاضیات هنگامی که شعور متعارف با منطق و محاسبه تعارض دارد با یستی آن را نادیده گرفت.

"ممکن است حرفتان را قطع کنم؟"

البته، از مطلب دور شدم.

"فکر می‌کنم بدانم چه می‌خواهید بگویید. منظورتان این است که موضوع من بر اساس شعور متعارف قرار دارد که با منطق در تعارض است، و اینک - موضع اقلیدس تنها شق دیگر است، درست است؟"

بله.

"در این صورت من دو ساله دارم، اول اینکه نمی‌دانم چگونه موضوع

من بر اساس شهود قراردادارد و دوم اینکه نمی دانم چگونه به تناقض منطقی منجر می شود. در واقع مثل این است که بگوئیم موضع اقلیدس به تناقض منجر می شود.

هنگامی که اصرار می کنید که طول پاره خط نوعی ترکیب ریاضی طولهای نقاط تشکیل دهنده آن است - و بیشتر بر جمع تکیه می کنید - موضع خود را بر اساس شهود قرارداد می دهید. اما چیزهایی هستند که ریاضیات بسادگی نمی تواند انجام دهد - یکی از این چیزها ترکیب مجموعه ای از کمیتهاست که تعداد آنها به تعداد نقاط تشکیل دهنده یک پاره خط باشد. مثلاً "جمع ساده، تنها تعداد متناهی از اعداد را با هم ترکیب می کند. در مورد ضرب نیز همینطور است. یک روش ریاضی وجود دارد که احتمالاً "با آن روبرو شده اید و آن "نظریه سریهای نامتناهی" است که گاهی با آن مجموعه ای نامتناهی از جملات را می توان با هم جمع کرد و نظریه "حاصل ضربهای نامتناهی" نیز وجود دارد که مفهوم ضرب را گسترش می دهد. اما "نامتناهی" بودن جملات دوسریهای نامتناهی همان چیزی است که ریاضی کاران آن را نامتناهی "شمارش پذیر" می نامند، که بمراتب کمتر از نامتناهی "شمارش ناپذیر"، مانند نقاط واقع بر یک پاره خط، است.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال ایده ای وجود دارد به نام "انتگرال معین" که مدت ها تصور می شد حاصل جمع تعداد شمارش ناپذیری جمله را به دست می دهد. در واقع امروز ریاضی کاران این تعبیر را مفید می دانند، اما این تعریف مادامی واقعاً "یک حاصل جمع بشمار می رود که بصورت غیردقیق بیان شده باشد. هنگامی که برای اولین بار در قرن نوزدهم تعریف دقیقی برای انتگرال معین صورت بندی شد و ریاضی کاران برای این شده که آن را تنها از نظر شهودی می توان بصورت "حاصل جمع" در نظر گرفت.

"اما حتی اگر در حال حاضر هیچگونه روش دقیق ریاضی برای جمع کردن جملات به تعداد کافی وجود ندارد، ممکن است کسی روزی برای این کار روشی ابداع کند."

حتی اگر کسی تاکنون هم این کار را انجام داده باشد، فرق نمی‌کند. به خاطر داشته باشید که تمام سعی من این است که نشان دهم کجای استدلال شما بر اساس شهود قرار داشت. هنگامی که از "ترکیب ریاضی" طول نقاط برای نیل به طول پاره خط صحبت کردید آن اعمال حسابی که به آنها اشاره شد، تا آنجا که به دانش شما مربوط می‌شود، وجود ندارند. بنا بر این تنها می‌توانستید بر پایه تشابه با اعمالی که از قبل می‌دانستید استدلال کرده باشید. پس این یک بحث شهودی بود قطع نظر از اینکه اخبار ریاضی در آینده چه خواهد بود.

اما بگذارید به این مطلب به روش دیگری برخورد کنم. رنگین‌مانی را در نظر بگیرید. پدیده پیچیده‌ای که از قطره‌های آب معلق در هوا، خورشید و تماشاگر تشکیل شده، که همگی نسبت به هم دیگر به طریق معینی استقرار یافته‌اند، رنگین‌مان حاصل تمام این عوامل است که بطور هماهنگ عمل می‌کنند و مشکل است که به هر یک مسئولیت مجزایی نسبت دهیم. چه عاملی موجب نوار سبزی می‌شود؟ کدام عامل قطر آن را معین می‌کند؟ این سوالات بیمورد است. زیرا هرگاه یکی از عوامل متشکله‌ای مدخل در رنگین‌مان یعنی قطره آب، خورشید، تماشاگر یا ترتیب هندسی آنها را تغییر دهیم تمام رنگین‌مان ناپدید می‌شود.

شاید یک پاره خط مثل رنگین‌مان باشد که به جای چهار جزء فقط از دو جزء تشکیل شده است: نقاط و ترتیب آنها. کیست که بگوید طول آن از کجا می‌آید؟ آیا تنها به خاطر نقاط؟ اما اگر بجای اینکه نقاط بطور مرتب

"در یک خط" قرار گیرند مانند ذرات رنگ بطور تصادفی در یک صفحه پاشیده شوند چه اتفاقی می افتد؟ به نظر می رسد ترتیب آنها نیز در پدیده "طول" شرکت دارد. پس کوشش برای تعیین طول یک پاره خط تنها بر حسب نقاط تشکیل دهنده آن درست نیست، زیرا ترتیب در عملیات حسابی منظور نمی شود، این دقیقا "همان چیزی است که سعی داشتید انجام دهید."

"آها."

می دانم هنگامی که تمام آن صفرها جمع شوند و امر تشکیل ندهند این حاکی از یک تناقض است اما حساب در این مورد کافی نیست، زیرا جفیه هندسی را نادیده می گیرد.

اما ضمنا "اقلیدس خودش احتمالا" در این مورد این همه مشکل حسابی که ما امروز داریم نداشته است. در زمان او تنها اعداد شناخته شده اعداد مثبت بودند، صفری وجود نداشت. به این ترتیب هنگامی که اقلیدس گفت نقطه طول ندارد منظورش دقیقا "این بود که صحبت در مورد نقطه ای که دارای طول باشد درست نیست، که این مطلب با برداشت امروزی که می گوید نقطه طول دارد ولی طولش صفر است مغایرت دارد، از نظرا و نقطه طولی ندارد همان طور که قطره آب رنگی ندارد، وسی در نتیجه گیری طول یک پاره خط تنها با استفاده از طولهایی که وجود ندارد احتمالا" در نزد او به همان اندازه بی ثمر است که کسی بخواهد رنگهای یک رنگین کمان را بدون در نظر گرفتن علم اپتیک، از رنگهای قطره های آب تشکیل دهنده آن نتیجه بگیرد.

"جالب است.... خوب، بایستی ببینیم که نظرم بر اساس چیزی بیش از منطق صرف قرار داشت. اما چگونه با منطق تعارض دارد؟"

آیا داستان معروف پیروان فیثاغورس و  $\sqrt{2}$  را می دانید؟

"بله، پیروان اولیه فیثاغورس این طور دریا فته بودند که همیشه می توان پاره خطی پیدا کرد که "قدر مشترک" دو پاره خط دیگر باشد، یعنی



حاصل تقسیم طول هر یک از آن دو پاره خط به طول این پاره خط عددی درست باشد. از این مطلب نتیجه می شود که خارج قسمت طولهای دو پاره خط همواره عددی گویا است، زیرا:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AB/XY}{CD/XY} = \frac{m}{n}$$

که در آن  $XY$  قدر مشترک بین  $AB$  و  $CD$  است و در نتیجه  $m$  و  $n$  اعدادی صحیح هستند. نتیجه آنکه  $\sqrt{2}$  عددی گویا است، زیرا می دانستند که  $\sqrt{2}$  خارج قسمت طول قطر یک مربع به طول ضلع آن است. اما یکی از پیروان بعدی فیثاغورس بحثی بر اساس منطق و معاسیه ارائه کرده بر اساس آن  $\sqrt{2}$  واقعا "عددی اصم" است.

بله، بحث جالبی بود، بحثی که هر دانشجوی ریاضی می بایستی از حفظ بداند. اما بگویید ببینم وقتی که برای اولین بار این داستان را شنیدید عکس العمل شما در مورد موضع اصلی مبنی بر شعور متعارف پیروان فیثاغورس که دو پاره خط همواره دارای قدر مشترکی هستند چه بود؟

"در ابتدا نمی دانستم به چه فکر کنم، کل سوال برایم تازه بود. سپس پذیرفتم که حداقل بطور فیزیکی درست است. من استدلال کردم که فرضاً اگر  $AB$  و  $CD$  دو قطعه چوب باشند، یک نجا را احتمالاً می تواند چوب سومی بطول  $XY$  بسازد که برای همه مقاصد عملی به تعداد درست در طول  $AB$  و همین طور به تعداد عدد درست دیگری در طول  $CD$  بگنجد. اما پاره خط های هندسی چوب نیستند و آنچه که به اندازه کافی به مقاصد عملی نزدیک است به همان اندازه قریب به صحت ریاضی نیست، چنین بود که دست آخوبه شک افتادم. هر چند که نظر آنها به اندازه کافی پذیرفتنی بود، اما من هرگز در مورد درستی آن احساس عمیقی نداشتم."

اما احساس آنها در مورد درستی آن خیلی عمیق بود. هنگامی که بحث منطقی نشان داد که آن نظریات اشتباه بوده است بکلی از هم پاشیده شدند. علت این امر شاید این باشد که موضع مبتنی بر شعور متعارف آنها مستقیماً "از شهودناشی نشده بود. هر چند که از نظر شهودی پذیرفتنی است. بلکه بیشتر نتیجه‌ای بود که از چیز دیگری گرفته شده بود.

"آن چیز دیگری چه بود؟"

چیزی که مستقیماً "به ذهن می‌رسد، چیزی که کاملاً ناچاراً از قبولش بودند،

"خوب؟"

چیزی درباره نقاط

"شوخی می‌کنید."

نه، مدرک متقاعدکننده‌ای وجود دارد (مثلاً [۱] صفحه ۲۴ و ۲۵) که از نظر پیروان اولیه فیثاغورس نقاط توپهای کوچکی بودند که قطرشان، هر چند که خیلی کوچک بود، بینهایت کوچک یا صفر نبود. خود شما از ابتدا یکی از پیروان اولیه فیثاغورس بوده‌اید.

"منظورتان این است که اگر نقاط دارای قطر مثبت باشند، می‌توانیم

نتیجه بگیریم که دو پارچه خط همواره یک قدر مشترک دارند، اینطور نیست؟"

تقریباً. "به فرض دیگری، اما یک فرض خیلی طبیعی احتیاج داریم.

بگویید ببینم. هنگامی که چنین شدیداً حساس می‌گردید که نقاط قطرهای

مثبتی دارند، آیا قطر همه نقاط را مساوی تصور می‌کردید یا نقطه به نقطه

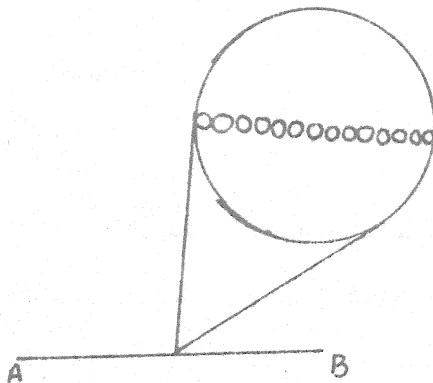
فرق می‌کرد؟

"مساوی.... دلیلی وجود ندارد که تغییر کنند."

این همان چیزی است که پیروان فیثاغورس می‌پنداشتند، آن هم

درست با همین استدلال - آن چیزی که بعداً "یونانیها آن را" قانون علت کافی" نامیدند: به این صورت که تغییرناگهانی هنگامی به وجود می‌آید که دلیل کافی برای آن وجود داشته باشد.

بسیار خوب، همه نقاط قطر مثبت مساوی دارند که ما می‌توانیم آن را  $d$  بنامیم. بالاخره وضعی داریم که با تصورات ما جور در می‌آید. تصور من در شکلی که در اینجا رسم شده است متجلی می‌شود، که در آن فرض کرده‌ام میکروسکوپی بر روی قسمت کوچکی از پاره خط  $AB$  نشانه رفته و ساختار ظریف آن را نشان می‌دهد. آیا این شبیه آن چیزی که شما در نظر داشتید نیست؟



"این دقیقاً همان چیزی است که من در نظر داشتم."

پس  $AB/d$  را در نظر بگیرید، که برای سادگی آن را  $m$  می‌نامم،  $m$  خارج قسمت دو عدد مثبت متناهی است،  $m$  خود نیز عددی مثبت و متناهی است. بنابراین شعور متعارف  $m$  چه چیزی را نشان می‌دهد؟

"تعداد نقاط  $AB$ ."

موافقم. طول  $AB$  را به طول یک نقطه تقسیم کنید، تعداد نقاط حاصل می‌شود. (با استفاده از شکل ۱ و حساب معمولی به نظر کاملاً درست می‌آید، حتی نزد شخص سفسطه‌گر پیروی مثل من) به این ترتیب می‌بینیم که عدد مثبت

و متناهی  $m$ ، چون تعداد نقاط موجود در  $AB$  می باشد در واقع عددی است درست، فرض کنید  $CD$  پاره خط دیگری باشد، می توانیم استدلال کنیم که  $CD$  نیز از نقاط با قطر  $d$  تشکیل شده است، و  $CD/d = n$  نیز عددی صحیح و درست است. به این ترتیب پاره خط کوچکی متشکل از فقط یک نقطه منفرد و قدر مشترک بین  $AB$  و  $CD$  می باشد.

اکنون نیز مانند قبل دقیقاً "نتیجه می شود که خارج قسمت دو طول همواره عددی گویاست، زیرا:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AB/d}{CD/d} = \frac{m}{n}$$

و  $m$  و  $n$  اعدادی درست هستند.

"پس آیا فکر می کنی چون  $\sqrt{2}$  عددی گویا نیست، اقلیدس گفت نقطه هیچ جزء "ندارد؟"

بله. ریاضی کاران تا الان از رای او پشتیبانی کرده اند. یه ریاضی کارا مروزی همه نقاط را شبیه به هم می دانند. همان طور که یونانیها می پنداشتند، و این امر تنها دو حالتی را که بررسی کردیم ممکن می سازد، یا اینکه نقاط قطرهای مساوی  $d$  دارند، یا قطر همه آنها صفر است. همان طور که قبلاً دیدیم، از انتخاب اول نتیجه می شود که دو پاره خط - حداقل در سطح شعور متعارف - همواره بطور اجتناب ناپذیر یک قدر مشترک دارند. و یا در صورت امکان - نمی دانم که امکان هست یا نه - اگر بخواهیم شق اول را برگزینیم و با استفاده از بیج و خمهای منطقی از رسیدن به نتیجه قبلی پرهیز کنیم، با اینکار بیش از حالتی که نقاط بدون اندازه در نظر گرفته شوند شعور متعارف را نقض خواهیم کرد. به این ترتیب شق دوم همان حالتی است که انتخاب می شود.

خوشحالم که این مکالمه را انجام داده ایم، چون این بحث آنچه را که

استاندارد استدلال ریاضی ایجاب می‌کند زیر ذره بین قراردادها است: و آن اینکه موضوعهایی که ریاضیات با آن سروکار دارند تنها غیر ملموس هستند - یعنی بطور فیزیکی وجود ندارند - بلکه گاهی نیز باشعور متعارف مغایرند و تا آن حد بی‌معنی. منطق " عرفان " مخصوص بخود راه وجود می‌آورد.

Richard J. Trudeau

How big is a point?

*The Two year College Mathematics Journal*

Vol. 14, No.4, Sept. 1983.

#### مراجع

1. Ettore carruccio, Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought, Faber and Faber.
2. Sir Thomas & Heath, the thirteen Books of Euclid's Elements, Dover.
3. H. Jerome keisler, Foundations of Infinitesimal calculus, prindle, weber & schmidt
4. Morris Kline, Mathematical thought from Ancient to Modern Times, oxford univ. press, chapter 3.
5. Imre Lakatos, proofs and Reputations: The Logic of Mathematical Discovery, cambridge univ.