ضمیمه :   ترجمهٔ فرخ وطن

۲۳ مسالهٔ هیلبرت وسرنوشت آنها

آنچه که درزیر می‌آید توصیف مختصری است از ۲۳ مسالهٔ هیلبرت که در کنگرهٔ بین المللی ریاضیدانان درپاریس، ۱۹۰۰، عرضه شده‌اند. عنوان هر مساله همان است که هیلبرت درسخنرانی خودگفته است. همراه صورت هر مساله توضیح مختصری دربارهٔ ماهیت مساله وسپس شرح کوتاهی دربارهٔ حل آن آورده شده است.

مسالهٔ ۱ مسالهٔ کانتوردربارهٔ عددکاردینال پیوستار

کانتور ثابت کرده است که مجموعهٔ اعداد طبیعی $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ نمی‌تواند درتناظریک به یک با مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. اما N می‌تواند درتناظر یک به یک با یکی اززیرمجموعه‌های مجموعهٔ اعداد حقیقی (مثلاً" خود N) باشد، پس نتیجه می‌شود که بزرگی (به اصطلاح ریاضیات کاردینال) مجموعهٔ N ازکاردینال مجموعهٔ اعداد حقیقی کوچکتر است. کانتورحدس زده بودکه هرزیرمجموعهٔ نامتناهی از اعداد حقیقی یا کاردینالی مساوی کاردینال N دارد یا مساوی کاردینال مجموعهٔ اعداد حقیقی. پس، بزرگی هرمجموعهٔ نامتناهی از اعداد

حقیقی یا همان بزرگی {۰۰۰و۳و۲و۱} است یا بزرگی همهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی، وهیچ چیز بین این دو قرار ندارد. این حکم را امروزه فرضیهٔ پیوستار می‌نامند.

هیلبرت به دنبال حل این حدس بود، ولی توفیق نیافت. در ۱۹۳۸ گودل نشان داد که با استفاده از اصول موضوع متعارف نظریهٔ مجموعه‌ها نمی‌توان این حدس را ابطال کرد. در ۱۹۶۳ کوهن(۱) ثابت کرد که اثبات آن نیز ناممکن است. پس اگر خود را به اصول موضوع متعارف نظریهٔ مجموعه‌ها محدود کنیم، فرضیهٔ پیوستار تصمیم‌ناپذیر است.

مسالهٔ ۲ سازگاری اصول موضوع حساب

این مسالهٔ بیشتر پیشنهادی است برای بررسی اصول موضوع حساب تا مساله‌ای دربارهٔ آن. به نظر هیلبرت یکی از مسائلی که می‌باید بررسی شود مسالهٔ سازگاری اصول موضوع حساب است. منظور او از سازگاری این است که نتوان با استفاده از اصول موضوع حساب ثابت کرد که جمله‌ای مانند A هم صادق است هم کاذب. در ۱۹۳۱ گودل ثابت کرد که هرگز نمی‌توان سازگاری دستگاهی به پیچیدگی حساب را ثابت کرد مگر آنکه از آن دستگاه خارج شد. از این رو، به تعبیری، هیچ اثبات نهایی برای سازگاری اصول موضوع حساب وجود ندارد. کارهای بسیار زیادی دربارهٔ خصوصیات دیگر دستگاههای اصل موضوعی وخواص آنها انجام شده است.

مسالهٔ ۳ تساوی حجم دوچهار وجهی با مساحت قاعده وارتفاع مساوی

درواقع، هیلبرت خواهان اثباتی بود که نشان دهد این امر را نمی‌توان تنها

با استفاده از شکلهای همنهشت ثابت کرد ؛ یعنی آنکه دوچهاروجهی با مساحت قاعده و ارتفاع مساوی حجم مساوی دارند. در اینکه حجم این دوچهاروجهی مساوی است شکی نیست، امادن[2] در ۱۹۰۰ ثابت کرد که نمی‌توان این حکم را تنها با استفاده از روش کلاسیک یونانی درباره شکلهای همنهشت، وبدون استفاده از مطلبی دیگر، ثابت کرد.

مساله ۴ مساله خط راست به عنوان کوتاهترین فاصله بین دونقطه

این نیز بیشتر برنامه‌ای پژوهشی است تا مساله‌ای مشخص. عقیده هیلبرت این بود که ریاضیدانان به شیوه‌های گوناگون به تغییر اصول موضوع اقلیدسی هندسه مسطحه می‌نگرند ولی همه در "خط راست به عنوان کوتاهترین فاصله بین دونقطه" اتفاق نظر دارند. از ۱۹۰۰ تا به حال این ایده فعالانه تعقیب شده است و دهها جلد مطلب درباره آن نوشته شده است. تعداد هندسه‌های ممکن بسیار زیاد است، ولی بیشتر پژوهشها به رده‌های محدودی از آنها می‌پردازند.

مساله ۵ تعریف لی برای گروه پیوسته تبدیلها بدون فرض مشتق پذیری توابع تعریف کننده گروه

ریاضیدان نروژی سوفوس لی [3] خواص رویه‌ها را با بررسی ساختار ریاضی تبدیلهای آنها بررسی کرده است. یک تبدیل رویه چیزی نیست جز تغییرنام نقاط رویه، چیزی مانند دوران محورهای مختصات. هیلبرت پیشنهاد کرد شرایط معدود دیگری علاوه بر آنچه که لی وضع کرده است برای تبدیلها قائل شد، مثلاً "فرض مشتق پذیری را اضافه کرد. از زمان هیلبرت تا به حال شرایطی به این جمله کم و بیش مبهم افزوده شده است و این مساله پیش کشیده شده است

که "آیا هرگروه موضعا "اقلیدسی یک گروه لی است ؟" این شکل مساله را در ـ ۱۹۵۲ گلیسون [۴]، مونتگمری [۵]، وزیپین [۶] با پاسخ مثبت حل کردند.

مساله‌ٔ ۶ بررسی ریاضی اصول موضوع فیزیک

این مساله‌ٔ نیز به قلمرو پژوهش تعلق دارد تا آنکه مساله‌ای مشخص باشد. هیلبرت خواهان آن بود که حوزه‌هایی از فیزیک، مثلا" مکانیک، به شیوه‌ای ریاضی بررسی شوند، یعنی مجموعهٔ کوچکی از اصول موضوع (وقواعد) برای آن وضع شود و حقایق مکانیک با استنتاج از آنها به دست آید. نسبیت و مکانیک کوانتومی بررسی اصل موضوعی مکانیک را تقریبا "بی‌معنا کردند. با این حال، هیلبرت راههای جدیدی را در پیش گرفت و تا پایان عمر خود قالبهای اصل موضوعی گوناگونی را برای فیزیک بررسی کرد.

مساله‌ٔ ۷ اصم و متعالی بودن بعضی از اعداد

هیلبرت بررسی اعدادی مانند $۲^{\sqrt{۲}}$ یا e^{π} را پیش کشید. متعالی بودن e در ۱۸۷۳ و π در ۱۸۸۲ ثابت شده است. از آنجا که این قضایا تنها ۲۰ سال پیش از سخنرانی هیلبرت به دست آمده بودند، تعجبی ندارد که او مساله‌ٔ تعمیم قضایایی از این دست را مطرح کند. بیشتر اعداد مشخصی که هیلبرت نام برده بود متعالی از آب درآمدند (مثلا"، در ۱۹۳۴ گلفاند [۷] ثابت کرد $۲^{\sqrt{۲}}$ متعالی است). اما واضح است که هیلبرت در پی بررسی کلی مساله بود، و این چیزی است که امروزه ادامه دارد.

مساله‌ٔ ۸ مسائل اعداد اول

در این مساله هیلبرت به نحوهٔ توزیع اعداد اول در میان اعداد طبیعی می‌پردازد. او مساله یافتن صفرهای تابع زتای ریمان و اثر آن در توزیع اعداد اول را یادآوری می‌کند.

مساله‌ٔ ۹ اثبات کلی‌ترین قانون تقابلی در هر هیاتی از اعداد

مساله‌ای نسبتاً "تکنیکی" که به روش‌شناسی عمومی محاسبهٔ نوعی تابع زوجیت وابسته به دستگاهی از اعداد مربوط است. این مساله، به صورتی که هیلبرت آن را فرمولبندی کرده بود، در ۱۹۲۱ توسط تاکاگی[۸] و در ۱۹۲۷ توسط آرتین[۹] حل شد.

مساله‌ٔ ۱۰ تعیین حل پذیری معادلهٔ دیوفانتی

معادلهٔ دیوفانتی معادله‌ای است که جوابش در مجموعهٔ اعداد صحیح است. مسالهٔ هیلبرت آن است که با داشتن معادله‌ای با تعدادی متناهی متغیر و ضرایبی مشخص تعیین کرد که جواب صحیح دارد یا نه. در ۱۹۶۸ بیکر[۱۰] چنین روشی را برای معادله‌ای که تنها دو مجهول دارد به دست آورد. در ۱۹۷۰ ماتیاسویچ[۱۱] نشان داد که یافتن چنین روشی برای حالت کلی ناممکن است.

مساله‌ٔ ۱۱ صورتهای درجهٔ دوم با ضرایب جبری دلخواه

یک صورت خطی درجهٔ دوم یک بسجمله (چندجمله‌ای) از متغیرهای $x_1, x_2, \ldots, x_m$

است به شکل

$$Q= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{m-1\,m}x_{m-1}x_m+a_{mm}x_m x_m$$

که درآن ضرایب a_{ij} اعضای هیاتی از اعداد هستند. مساله ای که هیلبرت طرح کرده است بررسی خواص این صورتهای درجهٔ دوم است که ضرایب آنها به هیاتی دلخواه تعلق دارند. این نیز بیشتر موضوعی پژوهشی است تا مساله ای مشخص. در ۱۹۲۴ هاسه (۱۲) نظریهٔ صورتهای درجهٔ دوم روی اعداد گویا را بنیان گذاشت و سپس آن را به هیاتی دلخواه تعمیم داد. به این ترتیب احتمالاً بیشتر آنچه که هیلبرت از طرح این مساله درنظرداشت به سرانجام رسید.

مساله ۱۲ تعمیم قضیهٔ کرونکر دربارهٔ هیاتهای آبلی به هرقلمروجبری گویا

در ۱۸۸۱ کرونکر قضیه ای دربارهٔ توسیعهای اعداد گویا ثابت کرد. این قضیه انواع خاصی از هیاتها را مشخص کرد که از روی اعداد گویا ساخته می‌شوند (اساساً " به همان نحو که اعداد مختلط با "افزودن" $i=\sqrt{-1}$ به اعداد حقیقی به دست می‌آیند). سوال هیلبرت این است که آیا می‌توان قضیهٔ کرونکر را به هر هیات دلخواه از اعداد تعمیم داد؟ هیلبرت این مساله و کل ساختمانی را که دربردارد بسیار مهم می‌دانست، زیرا که حل آن احتمالاً پای جبر، هندسه، و آنالیز را به میان می‌کشید. مساله دوازدهم، به تعبیری بسیار محدود، در ۱۹۲۰ توسط تاکاگی حل شد.

مساله ۱۳ ناممکنی حل معادلهٔ عمومی درجهٔ هفت با توابع صرفاً "دومتغیره

معادلهٔ عمومی درجهٔ هفت به صورت $a_7x^7+a_6x^6+\ldots+a_0=0$ است که

درآن $a_0,\dots,a_6, a_7$ اعداد حقیقی اند و $a_7 \neq 0$. قضایای معروف آبل و گالوا نشان می‌دهد که نمی‌توان جواب کلی این معادله، و در واقع هر معادلهٔ درجهٔ پنج یا بیشتر، را با عملهای مقدماتی جبری، یعنی جمع، تفریق، ضرب، ریشه‌گیری و هکذا، به‌دست آورد. اما، پیش از ۱۹۰۰ معادلات درجهٔ پنج و شش با استفاده از خمهایی که توابع دو متغیره [$Z=F(x,y)$] تولید می‌کنند حل شده بودند. هیلبرت فکر می‌کرد که برای معادلات درجهٔ هفت حتی این روش هم کارساز نیست، و از این رو آن را مسالهٔ سیزدهم خود قرار داد. بعدا" معلوم شد که حدس هیلبرت خطا بوده است. کارهای ریاضیدانان شوروی و.ی. آرنولد [۱۳] و آ.ن. کولموگروف [۱۴] در دههٔ ۱۹۵۰ ثابت کرد روشهای توابع دو متغیره نه تنها برای حل معادلات درجهٔ هفت بلکه برای هر درجهٔ متناهی n تعمیم می‌یابد.

مسالهٔ ۱۴ اثبات متناهی بودن بعضی از دستگاههای کامل از توابع

مساله با هیاتی مانند k آغاز می‌شود. سپس این هیات به هیات توابع گویا (خارج قسمت بسجمله‌های) n متغیره روی k توسیع می‌یابد، که آن را با $k(x_1,\dots,x_n)$ نمایش می‌دهیم. مثلا"، به‌ازای $n=2$، برای ساختن $k(x_1,x_2)$ با همهٔ کسرهای صوری $\dfrac{P(x_1,x_2)}{Q(x_1,x_2)}$ شروع می‌کنیم که در آن P و Q بسجمله‌های از x_1 و x_2 با ضرایب متعلق به k هستند. طبعا" $Q\neq 0$، و تعاریف معمولی تساوی، جمع، تفریق و غیره برای کسرها برقرارند. اکنون فرض کنید k' زیرهیاتی دلخواه از $k(x_1 \dots, x_n)$ و k_p مجموعهٔ همهٔ بسجمله‌های داخل k' باشد. توجه داریدکه درحالت کلی k_p شامل خارج قسمت بسجمله‌هاست. در k_p تنها خارج قسمتهایی را از عناصر k' درنظرمی‌گیریم که بتوان به یک بسجمله تحویل کرد ($\frac{P}{Q}$، که $Q=1$). سوالی که مطرح است این است، آیا

k_p مولدمتناهی دارد؟ یعنی اینکه آیا می‌توان هر بسجمله‌ٔ واقع در k_p را توسط زیرمجموعه‌ای متناهی از اعضای k_p با عملهای k_p (جمع، تفریق، غیره) به‌دست آورد؟ هیلبرت فکر می‌کرد که این کار شدنی است اما در ۱۹۵۹ ناگاتا خلاف آن را ثابت کرد. ناگاتا با ساختن یک k_p که مولد متناهی ندارد به مساله‌ٔ چهاردهم هیلبرت جواب منفی داد.

مساله‌ٔ ۱۵ بنیاد دقیق حساب شمارشی شوبرت

شوبرت(۱۵) ریاضیدان آلمانی قرن نوزدهم بود که روشهایی کم و بیش غیر متعارف برای یافتن انواع ثابتهای وابسته به اشیاء هندسی خاص به کار برده است. مثلاً" شوبرت مدعی بود که تعداد خطهایی که چهار خط داده شده در فضای ۳ بعدی را قطع می‌کنند برابر ۲ است. او تعداد زیادی ثابتهای از این نوع را یافت، که برخی از آنها اعجاب آورند، مانند ۰۴۸ ۸۴۱ ۶۶۶ که تعداد رویه‌های درجهٔ دومی است که بر ۹ رویهٔ درجهٔ دوم در فضا مماس‌اند. سبک کار شوبرت در به‌دست آوردن این نتایج مورد انتقاد بوده است. در این مساله هیلبرت حدس می‌زند که سبک کاری متعارف می‌تواند همین نتایج را به نحو قابل قبول‌تری به‌دست آورد. این کار عمدتاً" در دهه‌های ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰ توسط وان دروردن(۱۶) و دیگران انجام شد. این مساله امروزه به بخشی از ریاضیات تعلق دارد که هندسهٔ جبری نامیده می‌شود.

مساله‌ٔ ۱۶ مساله‌ٔ توپولوژی خمها و رویه‌های جبری

درصورت این مساله هیلبرت به قضیه‌ای از هارناک(۱۷) اشاره می‌کند که درباره‌ٔ بیشترین تعداد شاخه‌های مجزای یک خم جبری درجهٔ n در صفحه

است. بررسیهای اولیهٔ هیلبرت این فکررا دراو به وجودآورده بودکه این شاخه‌های مختلف بایدباهم نوعی رابطهٔ مشخص وثابت داشته باشند. هیلبرت براین نظربودکه هرچندممکن است شکل این خمها متفاوت باشد، ولی بررسی روابط توپولوژیک اساسی‌تراین خمها می‌تواندچشم‌اندازهای مفیدی رابه میان آورد. افرادزیادی توپولوژی‌خمها ورویه‌های جبری را بررسی کرده‌اند، ولی هیچکس به "راه‌حلی" پرصلابت، ازآن نوع‌که هیلبرت احساس می‌کردباید رخ دهد، نرسیده است.

مساله‌ٔ ۱۷ ساختن صورتهای معین ازمربعها

منظورهیلبرت ازصورت معین تابعی است n متغیره مانند $F(x_1,\ldots,x_n)$ که F هرگزمنفی نشود، یعنی به‌ازای هرمقدارحقیقی برای $x_1,\ldots,x_n$ داشته باشیم $F(x_1,\ldots,x_n)>0$. مثلا" $F(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ یک صورت معین دومتغیری است. مساله این است که‌با داشتن صورت معین $F(x_1,\ldots,x_n)$ آیا می‌توان همواره F رابه‌صورت مجموعی ازمربعهای توابع‌گویا (خارج قسمت بسجمله‌ها) نوشت؟ پاسخ مثبت است ودر۱۹۲۷ توسط آرتین به‌دست آمد.

مساله‌ٔ ۱۸ ساختن فضا با چندوجیهای همنهشت

این مساله، به‌صورتی‌که هیلبرت مطرح کرده است، شامل سه سوال است.

۱. آیا می‌توان فضای اقلیدسی n بعدی رابا نسخه‌هایی ازیک چندوجهی بنیادی که به‌نحوی سیستماتیک ازتبدیلهای فضا به‌دست می‌آیند پرکرد؟

در ۱۹۱۰ بیبرباخ[18] پاسخی مثبت برای این سوال یافت .

۲. آیا می‌توان فضای n بعدی را با نوع‌دومی از چندوجیها که از تبدیلهای فضا به دست نمی‌آیند پرکرد؟ در ۱۹۲۸ راینهارت[19] پاسخی منفی برای این سوال یافت .

۳. چگونه می‌توان اجسام مساوی ومنظم را کاملا "درفضا جا داد ،مثلا"آیا می‌توان فضا را با کره‌های با شعاع برابر پرکرد؟ این مساله برای دایره‌ها درصفحه وحالتهای خاص دیگری حل شده است ،اما روش کلی برای آن دانسته نیست .

مساله‌ٔ ۱۹ آیا جوابهای مسائل منتظم درحساب تغییرات همواره الزاما" تحلیلی‌اند؟

در این مساله هیلبرت سوالهایی درباره‌ٔ جوابهای رده‌ٔ خاصی ازمعادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌پرسد .بویژه ،می‌خواهد بداند که آیا جوابها باید همواره تحلیلی (همه جا مشتق پذیر) باشند .همچنین ،هیلبرت پیشنهاد می‌کند این رده ازمعادلات وجوابهایشان به طورکلی بررسی شوند .پاسخ این سوال مشخص مثبت است ،البته درصورتی که توصیف هیلبرت از رده‌ها مطابق معمول تعبیرشود .راه‌حلهای مختلفی برای این مساله ارائه شده است .

مساله‌ٔ ۲۰ مساله‌ٔ عام مقادیرکرانه‌ای

در این موردنیزبیشترپیشنهادی ارائه می‌شودبرای بررسی حوزه‌ای از ریاضیات که محتاج بررسی است .یک مساله‌ٔ مقادیرکرانه‌ای یک معادله‌ٔ دیفرانسیل پاره‌ای است همراه با مجموعه‌ای ازشرایط مرزی (شرایط کرانه‌ای)

که جوابها باید در آنها صدق کنند. هیلبرت پیشنهاد کرد این موضوعات بررسی شوند و تا به حال نیز به طور گسترده بررسی شده‌اند.

مسالهٔ ۲۱ اثبات وجود معادلات دیفرانسیل خطی با گروه مونودورمی از پیش تعیین شده

این مساله‌ای خاص، و تا حدی تکنیکی، دربارهٔ معادلات دیفرانسیل خطی است. یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n معادله‌ای است به صورت

$$y^{(n)}+c_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+c_n(x)y=0$$

که در آن $y^{(k)}$ مشتق مرتبهٔ k ام تابع $y(x)$ و $c_i(x)$ ها توابع مشخصی از x هستند. یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی از ردهٔ فوشی[۲۵] است در صورتی که $c_i(x)$ ها در شرایط بسیار ویژه‌ای صدق کنند. مساله‌ای که هیلبرت مطرح می‌کند یافتن یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی فوشی است که در آن $c_i(x)$ ها در شرایط دیگری نیز صدق کنند، یعنی مجموعهٔ نقاط تکین مشخص و گروه مونودورمی مشخصی داشته باشند. این مساله را در ۱۹۵۷ رورل[۲۱] و دیگران حل کردند.

مسالهٔ ۲۲ یکنواخت سازی روابط تحلیلی با توابع خودریخت

نمایش پارامتری یک رابطهٔ جبری مشخص نمایشی است که در آن هر متغیر رابطه، به صورت تابعی یک متغیری، به نام پارامتر، بیان شده است. مثلاً، $x^2+y^2=1$ را می‌توان به صورت پارامتری $x=\cos h$ و $y=\sin h$، $0<h<2\pi$، نمایش داد. نقاطی در صفحه که در معادلهٔ اول صدق می‌کند و زوجهای x و y که از

معادلات دوم به دست می‌آیندیکی هستند .مفهوم یکنواخت سازی چیزی نیست جزتعمیم همین فرایندپارامتری کردن به رده‌های وسیعی ازروابط جبری کلی.درهنگام سخنرانی هیلبرت ،پوانکاره یک قضیهٔ یکنواخت سازی بسیار کلی برای عبارتهای دومتغیره یافته بود .هیلبرت می‌خواست که نتایج پوانکاره بررسی شوندتا شایدبتوان شرایطی روی توابع پارامتری وضع کرد .اما این نیزمساله‌ای است که کاملاً" منظورآن مشخص نیست ودرجهات متعددی روی آن کارشده است .قضایای کوبه (۲۲) در ۱۹۰۷ بیشترآنچه راکه منظورهیلبرت بودبرمی‌آورند .

مسالهٔ ۲۳ گسترش بیشترروشهای حساب تغییرات

حساب تغییرات با تابعگونها ،یعنی توابع توابع ،سروکاردارد .مثلاً" ، فرمول طول قوس درحسابان

$$L_n(f)= \int \sqrt{1+(f')^2}$$

یک تابعگون است زیراشناسهٔ $L_n(f)$ خودتابع است .واضح است که ازاین قسم تابعگونها فراوان است ومسالهٔ استاندهٔ حساب تغییرات ماکزیموم یامینیموم کردن یک تابعگون روی مجموعهٔ مشخصی ازتوابع با شرایط ازپیش داده شده است .مثلاً" ،می‌توان پرسیدکدام تابع است که دونقطهٔ صفحه را به هم وصل کندوکمترین طول قوس راداشته باشد؟ مسائلی ازاین دست ازهمان آغازحسابان درقرن هفدهم مطرح وحل شده بودند .دراین مسالهٔ هیلبرت چندمسالهٔ مشخص درحساب تغییرات رامطرح می‌کندوزمینه‌های گسترده‌تری رابرای پژوهش پیشنهادمی‌کند .بسیاری ازمسائل مشخصی که هیلبرت پرسیده بودپاسخ داده‌شده‌اندوپژوهش درزمینه‌های کلیترادامه دارد .

D.M.Campbell & J.C.Higgins

Mathematics: People, Problems, Results

Wadsworth, Inc., 1984

(1) Cohen	(2) Dehn
(3) Sophus Lie	(4) Gleason
(5) Montgomery	(6) Zippin
(7) Gel'fond	(8) Takagi
(9) Artin	(10) Baker
(11) Matijasevic	(12) Masse
(13) V.I.Arnold	(14) A.N.Kolmogorov
(15) Schubert	(16) van der Waerden
(17) Harmack	(18) Bieberbach
(19) Reinhardt	(20) Fuchsian
(21) Rohrl	(22) Koebe